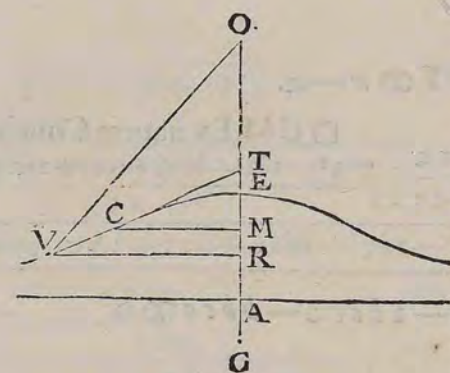


per $\frac{9bb}{16bb+2cc}$, & tertium per $\frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$. Omnino ut hic videre est.

$$\begin{aligned} & \frac{z^3 + bz^2 - \frac{4}{3}ccz - \frac{81b^4}{16bb+2cc}}{\frac{9bb}{16bb+2cc}} \frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4} \infty 0 \\ & \frac{z^3 + \frac{9b^3}{16bb+2cc}zz - \frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4}z - \frac{81b^4}{16bb+2cc}}{\frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4}} \frac{bcc}{x+b} \frac{9b^3}{16bb+2cc} \infty \frac{yy-xx+bb-cc}{2x+2b} \\ & \frac{27b^3}{64b^4+16bbcc+c^4} \infty \frac{1}{x+b} \frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc} \infty \frac{yy-xx+bb-cc}{2x+2b} \\ & \frac{27b^3x+27b^4}{64b^4+16bbcc+c^4} \frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc} \infty \frac{yy-xx+bb-cc}{2x+2b} \\ & x \infty \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3} - b. \end{aligned}$$



Igitur sumendo in axe lineam A O
 $\infty \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3} - b,$
 eamque vocando x , si ex puncto O intervallo O V
 $\infty \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc} + xx+cc-bb}$
 arcus Circuli describatur, atque ex sectionis puncto V ducatur ad A O perpendicularis V R: erit A T, quæ se habet ad A R, ut $16bb+2cc$ ad $9bb$, inventæ æquationis radix. Vnde facile est invenire lineam A M. Ostensum enim est $yy+4by-3bz \infty 0$.

Denique cum inventio supponendi duas ejusdem formæ æquationes, ad comparandum separatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, non tantum ad inveniendas tangentes aut secantes curvarum linearum, quemadmodum fuit expositum, adhiberi possit; sed ipsa generalis sit atque infinitis aliis Problematis resolvendis, ut Author asserit, inservire queat: haud inutile fuerit hic ulterius quoque exponere, quo pacto illam ad Maximi aut Minimi determinationem applicari posse deprehendi, proponendo in eum finem sequentia Problemata.

Datam



Datam rectam lineam A C secare in puncto B, ut parallelepipedum, quod fit sub quadrato unius partis A B & altera parte B C, sit omnium parallelepipedorum, sic factorum, maximum.

Est A C ∞a , & A B ∞x : eritque B C $\infty a-x$. Deinde maximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum statui potest æquale, esto b^3 . Quibus sic positis, si quadratum ex A B ∞xx multiplicetur per B C $\infty a-x$, proveniet $axx - x^3 \infty b^3$, seu $x^3 - axx + b^3 \infty 0$. Iam factâ $x \infty e$, seu $x - e \infty 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam porrò, ut ejusdem sit formæ cum præcedente, multiplico per $x + f$, & exurgit $x^3 - 2exx + eex + eef \infty 0$. Ex quarum mutua inter
 $+ f - 2ef$

se collatione eliciuntur hæ tres æquationes $-2e+f \infty -a, +ee - 2ef \infty 0, & eef \infty b^3$: quæ resolutæ dant $f \infty \frac{1}{2}e$, seu $x \infty \frac{2}{3}a$, & $b^3 \infty \frac{4}{27}a^3$. Quod ipsum docet, ad secandam lineam A C, qualis requiritur, eandem in B ita esse dividendam, ut A B ipsius A C contineat duas tertias partes; & maximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum adæquari potest, esse $\frac{4}{27}a^3$.

Dividere p planum in tria plana proportionalia, ita ut solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel duorum posteriorum in latus primum, sit omnium maximum.

Assumptis ad hoc x pro latere primo, & y pro latere secundo, sient inde proportionalia plana xx .

xx . 1^{um}
 xy . 2^{um}
 yy . 3^{um}.

Et manifestum est, $xxxy + xyxy$, quod fit ex $xx + xy$, summâ duorum priorum planorum, in latus secundum y , esse æquale ei, quod fit ex $xy + yy$, summâ duorum posteriorum planorum, in latus primum x . Superest ut $xxxy + xyxy$ sit omnium ejusmodi solidum.

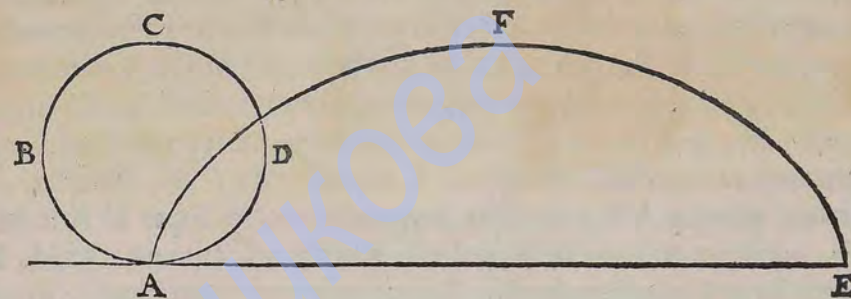
lidorum maximum. Quoniam autem $xx + xy + yy$ est ∞p
 vel $yy \infty p - xx - xy$
 mult. per x

vel etiam $xyy \infty px - x^3 - xxy$:

Hinc si pro xyy dicti solidi $xx + xy + yy$ substituat^{ur} $px - x^3 - xxy$, habebitur $px - x^3$. Quocirca ut $px - x^3$ fiat maximum solidum, quod esse possit, intelligatur ipsum æquale solido q : eritque $x^3 - px + q \infty 0$. Deinde facta $x \infty e$ seu $x - e \infty 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam rursus, ut eandem formam habeat cum præcedenti, multiplico per $x + 2e$, & exsurgit $x^3 - 3eex + 2e^3 \infty 0$. Ex quibus binis æquationibus, si singuli termini unius cum singulis terminis alterius comparentur, elicio $x \infty \sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$, & $q \infty \frac{2}{3}p \sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$. Eodem modo invenitur $y \infty \sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$. Quod ipsum monstrat, ad dividendum p planum in tria plana proportionalia, maximum solidum, quod ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel ex ductu duorum posteriorum in latus primum gignitur, esse illud, quod obtinetur dividendo p planum in tria plana æqualia. Et sic de aliis.

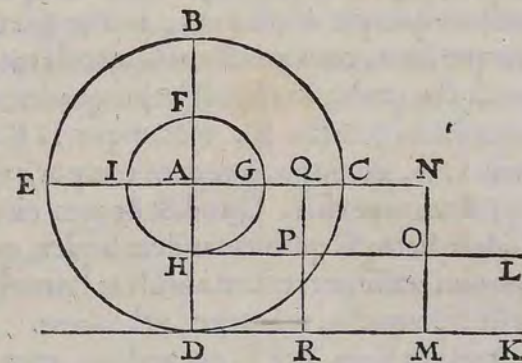
Cæterum, cum allatis exemplis satis superque sit ostensum, quâ ratione lineæ rectæ inveniri possint, secantes lineas curvas in Geometriam recipiendas in datis punctis ad angulos rectos: lubet etiam afferre modum ducendi illas in iis curvis, quas pro Geometricis pari jure habere non licet. Qualem Dominus des Cartes excogitavit, atque jam pridem ejus exemplum R. P. Mersennus per literas ostendit in curva, quæ Cycloïdes sive Trochoïdes appellatur, quam Vir Clarissimus Evangelista Toricellius, scribit à Galilæo Galilæi, prædecessore suo, primum fuisse consideratam; cujusque ulteriori speculationi ipsum postea, ut & Virum Celeberrimum D. de Roberval, Mathematicum in Academia Parisiensi Professore Regium, se addixisse novi. Originem autem ducit ex motu puncti, in rota sive circulo assumpti, super rectam aliquam lineam circumvoluti.

Vt



Vt si super recta linea AE circumvolvatur rota sive circulus ABCD, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus occurrat in E: describet punctum A hoc motu lineam curvam AFE, quæ Trochoïdes sive Cycloïdes appellatur. Idem intellige de quovis alio puncto, extra vel intra rotam sive circulum assumpto, excepto tantum ejus centro.

Iam ut in genere ostendatur, quâ ratione lineæ rectæ duci possint, quæ hæc curvas secant in datis punctis ad angulos rectos; non abs re fuerit cum Aristotele hîc explicare, quo pacto inæquales circuli, qui circa idem centrum constituti ac conjuncti circumvolvuntur, æquales rectas lineas absolvant.



Sunt ergo duo circuli inæquales, major quidem BCDE; minor autem FGH I, idem habentes centrum A: sintque diametri majoris BD, EC; minoris verò FH & IG, sese ad angulos rectos

Ll

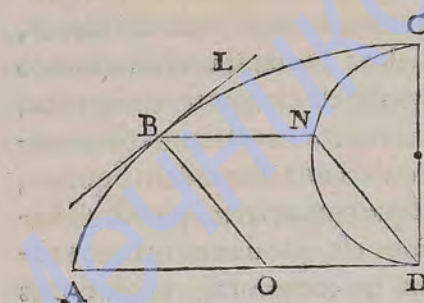
ctos

etos secantes in A. ita ut quadrans circuli majoris sit CD; minoris verò GH. Iam igitur ut pateat ratio, quâ hi circuli, simul circumvoluti, æquales lineas absolvant; concipiatur primum majorem BCDE dextrorsum moveri super recta DK, & minorem FGHI ad motum illius describere lineam rectam ipsi DK parallelam, quæ sit HL. Vnde manifestum, cùm punctum C pervenerit ad M, existente arcu DC æquali rectæ DM, semidiametrum quoque AC tunc fore perpendicularem super DK in M; ita ut coincidat cum MN, hoc est, punctum C cum puncto M, & punctum A cum puncto N. Ac proinde cum punctum G circuli minoris sit in recta AC: sequitur ipsum quoque post hujus quadrantis devolutionem cadere in punctum O; ita ut semidiameter AG circuli minoris transferatur in NO. Adeò ut, NO æquali existente & parallelâ ipsi AH, ipsa quoque HO sit æqualis futura ipsi AN seu DM, & singulæ rectæ DM, HO separatim ab utroque circuli quadrante eodem tempore peragrentur. Idem de integris circulis est intelligendum.

Non secus ostendetur, si moveatur circulus minor $FGHI$ super rectam HL , secum deferens circulum majorem $BCDE$, sibi affixum in centro A , lineas rectas æquales absolvi. Devoluto enim circuli minoris quadrante HG super rectam HL , ab H versus L ; ita ut rectam lineam HP sibi æqualem percurrat: ducatur per P recta QPR , secans rectam HL ad angulos rectos in P ; sed AN & DK in Q & R . Quo facto, perspicuum est, cum punctum G est in P , punctum quoque A esse in Q , rectamque AG super rectam QP . Atque ideo, cum punctum C circuli majoris existat in linea AG producta, patet, illud post hujus quadrantis devolutionem inventum iri in puncto R , rectamque DR æqualem fore rectæ AQ seu HP , & singulas eodem temporis spatio ab utroque circuli quadrante perfici. Quod & de tota circuli circumferentia concludere licet. E quibus tandem liquet, quâ ratione circulus circumvolvi possit, ut rectam absolvat lineam, quæ circumferentiæ ejus sit vel æqualis, vel major, vel minor.

Sed de supra dicta linea AFE notandum, eam duobus motibus describi, inter se distinctis; recto nempe, quo circulus ABCD defertur ab A ad E; & circulari, quo punctum in ejus circumferentia A (quod Trochoïdem describit) rotatur circa centrum, dum movetur per lineam rectam ipsi AE æqualem & parallelam.

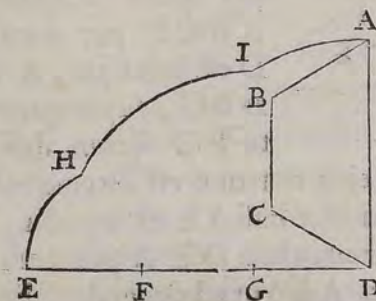
Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoïdem in dato puncto tangat, ducamus: sciendum est, lineam rectam, transeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota basin, dum punctum in Trochoïde datum describitur, contingit, secare semper tangentem quæsitam ad angulos rectos.



Vt si invenienda sit linea recta, tangens in B curvam siue Trochoïdem ABC, descriptam super basin AD per punctum aliquod circumferentiæ rotæ DNC, super basin AD circumvolutæ: oportet tantum per punctum B rectam lineam ducere BN, parallelam basi AD; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota basin tangit) rectam ND; tumque eidem parallelam BO; ac denique huic perpendiculararem BL: Quæ erit tangens quæsitæ.

Cujus rei brevem atque simplicem demonstrationem affert. ut
sequitur.

Si super rectam lineam circumvolvatur polygonum aliquod rectilineum, erit linea curva, quæ per aliquod ejus punctum describitur, composita ex pluribus circulorum portionibus, quarum tangentes ad singula earum puncta normaliter secant lineas rectas, quæ ab ipsis ad puncta, in quibus polygonum, unamquamque portionem describendo, basin contingit, ducuntur.



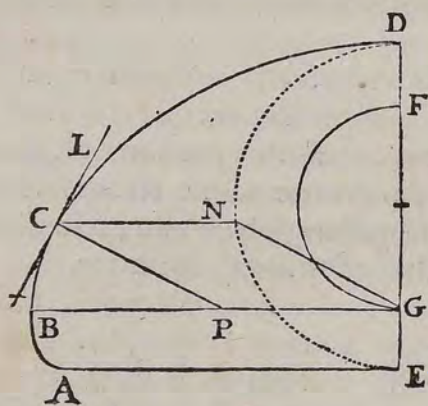
que portionem describendo, bafin contingit, ac deinde

Exempli gratiâ, fi facia-
mus ut volvatur Hexago-
num A B C D super rec-
tam E F G D, describet
punctum ejus A, lineam
curvam E H I A, compofi-
tam ex arcu E H, qui de-
scribitur, dum Hexagonum
hoc contingit bafin in pun-
cto F (quod ejusdem arcus
eft centrum; & ex arcu H I (cujus centrum eft punctum G); ut

Ll 2

& ex arcu I A (cujus centrum est punctum D): per quæ centra transeunt omnes rectæ, quæ dictorum arcuum tangentibus ad angulos rectos occurrunt. Quod cum accadat polygono centies millenorum millium, palàm est, idem convenire quoque Circulo.

Verba *Authoris.* Cæterùm possem hanc tangentem alio modo, & meâ sententiâ, elegantiori, magisque Geometrico demonstrare; verùm quoniam prolixior foret, & brevitati hîc mihi consulendum videtur, in præsens ei describendo supersedebo. Notandum solummodo est, cùm basis hujus Trochoïdis æqualis est circumferentiæ rotæ, quam super eandem basin ad ejus descriptionem circumvolvi imaginamur, curvam hanc, à fornice circulari non abfimilem figuram, referre: hoc est, quòd tangens utriusque ejus extremi puncti ad basin sit perpendicularis. Sed cùm minor est, quod tunc utraque extremitas introrsum sit involuta, ita ut complures revolutiones hanc repræsentent figuram



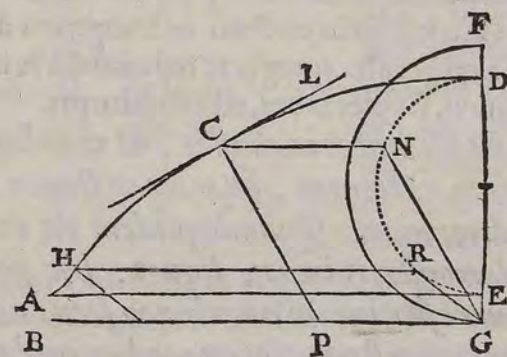
circulum DE sibi affixum circa ejus centrum est circumvoluta, cujusque semicircumferentia dimidiæ basi AE est æqualis. Vbi sciendum, tangentes inveniri per circulum DE & punctum G, ubi rota FG basin BG contingit. Adeò ut ad ducendam lineam rectam, quæ tangat hanc Trochoïdem, verbi gratiâ, in puncto C, opus tantùm sit ducere CN parallelam basi AE, occurrentem

circ-

circulo DE in puncto N; tum verò junctæ NG parallelam CP: quæ ipsi tangenti quæsitæ erit perpendicularis. Ita ut perspicuum sit, punctum B, ubi hæc secunda basis BG Trochoïdi occurrit, fore illud, ubi ipsa se introrsum involvere incipiet: quandoquidem linea, quæ illam ibidem tangit, ad basin AE perpendicularis existit.

Denique si basis Trochoïdis major fuerit circumferentiâ circuli, qui per assumptum punctum, quod eam designat, circa rotæ centrum describitur: binæ extremitates extrorsum erunt inflexæ; ita ut complures ejusmodi linearum revolutiones hanc exhibeant figuram.

Cujus Trochoïdis tangentes ut inveniantur, atque sciatur ubi se inflectere incipiat, imaginandum est, punctum, quod ipsam designat, esse intra rotam: adeoque secundam basin esse BG, supra quam rota FG, cujus circumferentia huic basi est æqualis, circumvolvatur, interea dum punctum D, Trochoïdem designans, super primam basin AE describit circulum DE, circa rotæ centrum. Iam ut inveniat lineam, quæ ipsam in puncto C, utcunque in Trochoïde assumpto, tangat: ducatur CN parallela basi, occurrens circulo



DNE in puncto N. Tum ab N ad G, ubi rota FG basin suam contingit, ductâ rectâ NG, agatur ipsi parallela CP: eritque recta CL, quæ ad eam perpendicularis ducitur, tangens quæsitæ. Porro ad inveniendum punctum H, ubi Trochoïdis portio AH

L 1 3

desi-

definit esse concava, & HCD convexa, opus tantum est à puncto G rectam ducere GR , quæ tangat circulum DRE in puncto R ; tum ab R rectam RH , parallelam basi, & occurrentem Trochoidi in puncto H . Quod erit quæsitum.

Vbi notandum, nullam dari lineam rectam, quæ Trochoïdem hanc $AHCD$ tangat in puncto H : quandoquidem illud ipsum duas ejus portiones, quarum una est concava, & altera convexa, distinguit.

Deinde observandum, quòd ea, quæ de tangentibus Trochoïdum, per rotam circularem descriptarum, hîc allata sunt, etiam omnibus aliis Trochoïdibus competant, quæ circumvolutione aliarum quarumlibet figurarum describuntur.

Denique, quod lineæ hæc sint Mechanicæ, & è numero earum, quæ in hac Geometria repudiantur; adeò ut nemini mirum videri debeat, quod tangentes earum non inveniuntur per regulas ibi expositas, cum ad ipsas non referantur.

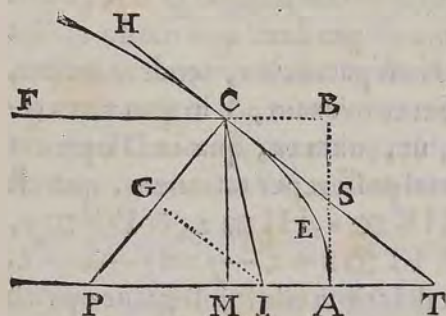
Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quâ secunda hæc Ovalis erit ducenda.]
Notavit hic Clarissimus Hugenius, secundam hanc Ovalem (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cum nempe FA ad AG eandem rationem habet, quam 5 A ad A 6. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse. Quod se apertiùs in tractatu de Dioptricis demonstraturum suscepit, in quo multa egregia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus.

P *Et quod ex tali materia constet, ut vim horum radio-
rum, secundum rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6
reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in
Dioptrica demonstravimus, liquet, hoc posito, futu-
rum, ut etiam reflexionum anguli, non secus ac refractio-
num, inæquales existant, atque eodem modo mensurari
possint.] Hæc refer ad caput 2^{um} Dioptricæ, ubi demon-
stratum est, reflexionis angulum angulo incidentiæ esse æqua-
lem: quoniam vis alicujus radii per reflexionem non diminui-
tur. Sicut per refractionem vis radii, transeundo ex uno corpore
pellucido in aliud, augetur aut diminuitur, ac propterea an-
gulos*

gulos facit inæquales. Ad eò ut hinc sequatur : si speculum haberi possit, ex tali constans materia, ut vim radiorum, quos reflecteret, augeret aut diminueret (omnino ut ostendit, vitrum vim radiorum, quos in se recipit, augere, eorumque refractionis causam esse) : essent reflexionum anguli non secus ac refractionum inæquales : & posset eorum ratio mensurari per rationem, quæ est inter lineas A ζ & A σ , supponendo illam eandem esse, quæ est inter vim alicujus radii antequam in speculum incideret, & inter vim, quam immediate post obtineret, cum esset reflexus.

Cæterum quoniam ad radios per reflexionem ac refractionem diversimode detorquendos Sectiones Conicæ singularem habent usum, atque specula & vitra ad ipsarum figuram expolita miros effectus præbent: haud inopportunum fore duxi, si, tum ad penitiorem intellectum eorum, quæ in Dioptrica de figura vitrorum ab Authore sunt ostensa, tum ad usum eorum, quæ de invenien-
dis tangentibus aut secantibus expolita sunt, deinceps hîc adjungerem, quo pacto in axe puncta investigari possint, in quibus radii Solis, postquam in superficiem concavam speculi Parabolici inciderunt, aut per Elliptica vel Hyperbolica vitra transierunt, reflectuntur aut colliguntur.

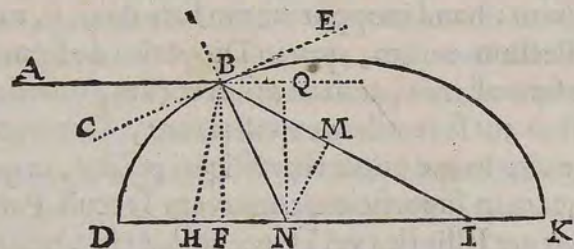
Vt si fuerit speculum,
habens figuram Parabo-
læ A E C, cujus axis sit
M A, & vertex A: ad in-
vestigandum punctum I,
ad quod radius Solis F C,
qui ipsi M A est paralle-
lus, reflectatur, postquam
in idem speculum incidit
in C, suppono, ut ante, la-



tus rectum $\propto r$, $MA \propto y$, & $IA \propto z$. Quibus positis cum ex superioribus PM sit $\propto \frac{1}{2}r$, & AT sit $\propto AM$ seu y : erit $PT \propto \frac{1}{2}r + 2y$, & $PI \propto \frac{1}{2}r + y - z$. Quoniam autem propter æquales angulos incidentiæ & reflexionis FCH & ICT , ut & rectam PC ipsi tangenti HT perpendiculararem, anguli quoque FCP & PCI sunt æquales; atque horum quidem angulus FCP angulo CPI sit æqualis: erunt pariter anguli PCI & CPI æquales; lineaque IG , ipsi PC perpendicularis, rectam PC bifariam

riam in G secabit. Quibus sic existentibus, cum & hinc P I ipsi I T sit æqualis, erit $r + 2y - 2z \propto \frac{1}{2}r + 2y$. Vnde, dempto utrinque $2y$, & reliquis per 2 divisus, invenitur $z \propto \frac{1}{4}r$. Quod ipsum, cum de quovis radio ipsi axi parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, radios Solis, axiparallellos, ubi in superficiem concavam speculi Parabolici inciderunt, omnes ad idem axis punctum I reflecti, distans à vertice quartâ parte lateris recti.

Vnde porrò fit manifestum, cum lucente Sole, beneficio hujus speculi, prout ipsi directè est obversum, aliquid in I accendatur, quam ob rationem idem speculum ustorium dictum fuerit, punctumque I Foci nomine appellari consueverit.



Deinde si fuerit vitrum, habens formam Ellipsis DBK, cujus maxima diameter sit DK: ad investigandum quo modo radius AB, qui in aëre existens ipsi DK est parallelus, tendere debeat, postquam intravit ejus superficiem convexam, & in quo vitro refractiones sic fieri intelliguntur, ut, juxta ea, quæ in Dioptricis tradita sunt, illæ omnes mensurari possint per rationem, quæ est inter lineas d & e , facio DH vel IK $\propto a$, HI $\propto z$, & DF $\propto y$, eritque HF $\propto y - a$ vel $a - y$, & FI $\propto a + z - y$ vel $y - a - z$. Quibus positis, si Ellipsis DBK descripta esse intelligatur ope fili HBI, haud secus ac illud Capite 8^{vo} Dioptrices ab Authore aut etiam à nobis in Organica Conicarum Sectionum descriptione expositum fuit, erit, factâ BI $\propto x$, BH $\propto 2a + z - x$. Vnde jam facile est invenire quantitatem y , assumptis scilicet quantitibus x & z , ut cognitis. Etenim si à quadrato BH. $4aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx$ tollatur quadratum HF. $yy - 2ay + aa$, restabit $3aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx + 2ay - yy$, pro quadrato BF. Similiter, si à quadrato BI. xx auferatur quadratum FI. $aa + 2az + zz - 2ay - 2zy + yy$, relinquetur etiam $xx -$

$xx - aa - 2az - zz + 2ay + 2zy - yy$, pro quadrato BF. Hinc cum habeatur æquatio inter quadratum BF bis inventum,

invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \propto \frac{2aa + 3az + zz - 2ax - xx}{z}$.

Esto jam DN $\propto v$, & NB $\propto s$, eritque FN $\propto v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y , suppositis quantitibus v & s . Si enim à quadrato BN. ss abstulero quadratum FN. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato BF. Vnde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem

duarum præcedentium habebitur $y \propto \frac{ss - vv - xx + aa + 2az + zz}{2a + 2z - 2v}$.

Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet $xx \propto -4avx + ssz$

$$\begin{array}{r} -2vz - vvz \\ +4aa + 4aav \\ +6az + 6avz \\ +2zz + 2vzz \\ -4a^3 \\ -9aaz \\ -6azz \\ -z^3 \end{array}$$

z .

Porrò ut inveniantur quantitates v & s , positâ $x \propto f$, multiplicetur $x - f \propto 0$ per $x - f \propto 0$, & fit $xx - 2fx + ff \propto 0$, seu $xx \propto 2fx - ff$, æquatio ejusdem formæ cum præcedente. Vnde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, emergit v , hoc est, DN $\propto \frac{2aa + 3az + zz - xx}{2a + z}$. Quæ à

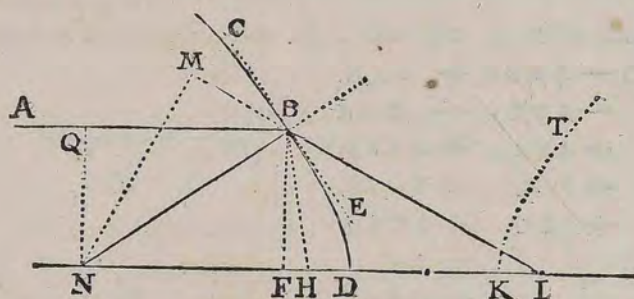
DI seu $a + z$ ablata relinquit NI $\propto \frac{zx}{2a + z}$. Denique cum linea NQ vel FB & linea NM eandem inter se rationem habeant, quam lineæ, quæ refractionem vitri DBK mensurant; & quidem FB ad NM sit, ut BI ad IN: superest ut d sit ad e , sicut x ad $\frac{zx}{2a + z}$. Et fit, multiplicando extremos, tum medios,

$\frac{dxx}{2a + z} \propto ex$. Vnde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu $z \propto \frac{2ae}{d - e}$. Cui si addantur DH & IK, hoc est, $2a$, habebitur

Mm

DK

$DK \propto \frac{2ad}{d-e}$. Et patet DK ad HI esse, ut $2ad$ ad $2ae$, hoc est, ut d ad e . Quod ipsum, cum de quovis radio AB ipsi DK parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, ope vitri Elliptici DBK, in quo DK ad HI eandem habet rationem, quam d ad e , hoc est, eandem quam inter se servant lineæ, quæ hujus vitri refractionem metiuntur, radios, qui in aëre existentes diametro DK sunt paralleli, omnes ita detorqueri, ut, postquam superficiem ejus convexam DBK transierunt, colligantur simul in puncto I.



Denique si fuerit vitrum, habens figuram Hyperbolæ DB, cujus axis sit DK: ad investigandum, quo pacto radius AB, qui in vitro existens ipsi DK est parallelus, se inflectere debeat, postquam superficiem ejus convexam DB erit egressus, supponendo ejusdem vitri refractionem esse eam, quæ est inter lineas d & e , facio HD vel KI $\propto a$, HI $\propto z$, & DF $\propto y$: eritque FH $\propto y-a$ vel $a-y$, & FI $\propto z+y-a$. Quibus positis, si Hyperbola DB descripta intelligatur beneficio fili, quemadmodum Capite 8^o Dioptrices ab Authore fuit indicatum, vel etiam à nobis libro 4^{to} Exercitationum nostrarum Mathematicarum, erit, factâ BI $\propto x$, BH $\propto x-z+2a$. Vnde jam facile est invenire quantitatem y , supponendo quippe quantitates x & z esse cognitæ. Si enim à quadrato BH. $xx-2zx+zz+4ax-4az+4aa$ subducatur quadratum FH. $yy-2ay+aa$, restabit $xx-2zx+zz-yy+2ay+3aa+4ax-4az$, pro quadrato FB. Similiter, si à quadrato BI. xx auferatur quadratum FI. $zz+2zy+yy-2az-2ay+aa$, relinquetur quoque $xx-zz-2zy-yy+2az+2ay-aa$, pro quadrato FB. Hinc, cum habeatur æquatio inter

inter quadratum FB dupliciter inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \propto \frac{zx-zz-2aa+3ax-2ax}{z}$. Esto jam DN $\propto v$ & NB $\propto s$, eritque NF $\propto v-y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y , suppositis quantitatibus v & s . Etenim si à quadrato NB. ss detraxero quadratum NF. $vv-2vy+yy$, remanebit $ss-vv+2vy-yy$, pro quadrato FB. Vnde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium, habebitur $y \propto \frac{-ss+vv+xx-aa+2ax-zz}{-2a+2x+2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$\begin{array}{r} xx \propto +2zx + ssz \\ -6az - vvz \\ +4aa -2vzz \\ +2vz -4aav \\ -4av +6avz \\ -z^3 \\ -9aaz \\ +6azz \\ +4a^3 \end{array}$$

z.

Porro ut innotescant quantitates v & s , positâ $x \propto f$, multiplico $x-f \propto 0$ per $x-f \propto 0$, & fit $xx-2fx+ff \propto 0$, seu $xx \propto 2fx-ff$, æquatio similis præcedenti. Vnde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, invenitur v , hoc est, DN $\propto \frac{zx-zz+3ax-2aa}{z-2a}$. Cui si addatur DI. $z-a$, habebitur NI $\propto \frac{zx}{z-2a}$. Denique cum linea NM ad NQ vel FB eam habeat rationem, quam inter se habent lineæ refractionem vitri DB mensurantes; & quidem NM ad NQ vel FB sit, ut NI ad IB: relinquitur, ut d sit ad e , sicut $\frac{zx}{z-2a}$ ad x . Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $dx \propto \frac{exx}{z-2a}$. Vnde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu $z \propto \frac{2ad}{d-e}$. E qua ablatis HD & KI seu $2a$, erit reliqua DK $\propto \frac{2ae}{d-e}$. Et manifestum est HI ad DK esse, ut $2ad$ ad $2ae$ vel ut d ad e . Id quod, dum de quolibet

M m 2

radio

radio AB ipsi DK parallelo perinde est intelligendum, nobis monstrat, beneficio vitri Hyperbolici DB, in quo HI ad DK eam obtinet rationem, quam *d* ad *e*, quæ est ejusdem vitri mensura refractionis, radios, qui in vitro DB existentes axi DK sunt paralleli, egrediendo superficiem ejus convexam DB ita flexum iri, ut egressi omnes coeant in punctum I.

PP Cujus figura est *A3T3*, quæ undique est convexa; præterquam versùs *A*, ubi paululum concava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit ab similis.] Vbi etiam sciendum, ex positione punctorum H & F, quemadmodum Nobilissimus Hugenius notavit, contingere posse, ut versùs *A* convexa existat.



ARGUMENTVM TERTII LIBRI.

Postquam primo libro exposita sunt ea, quæ viam aperiunt ad Autoris Methodum, quâ in resolvendis & construendis Geometriae Problematis utitur, ibidemque simul ostensa est ratio construendi Problemata Plana, hoc est, quæ reduci possunt ad æquationes Quadratas, quæque rectarum linearum atque circuli circumferentiarum ope solvi possunt; accedit deinceps ad Solidorum & Linearium constructiones, hoc est, quæ ad æquationes Cubicas altiorumve graduum ascendunt, & ad quorum constructiones, sectionibus Conicis, aliisque curvis lineis magis compositis uti necessarium est. Vbi observandum est, quod, cum peccatum sit non leve apud Geometras, Problema Planum construere per Conica aut Linearia, hoc est, ipsum per improprium solvere genus, ita quoque sit cavendum ne in constructionem ejus adhibeamus lineam aliquam curvam, quæ magis sit composita, quam ipsius natura admittit.

Quocirca, postquam secundo libro ostensum est, quo pacto curvæ lineæ, mediantibus æquationibus, quæ exhibent relationem, quam ipsarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, distingui possint in certa genera, atque exinde cognosci, quanam illarum magis sint compositæ; superest ut explicemus, quomodo sciri possit, utrum Problema aliquod sit vel Planum, vel Solidum, vel denique Lineare. Arguitur autem Problema Planum esse, cum æquatio, ad quam perducitur, postquam ad simplicissimos terminos est reducta, atque amplius reduci nequit, Plana existit, hoc est, ut incognita quantitas ad quadratum adscendat, duasve habeat dimensiones, illaque per rectas lineas & circulorum circumferentias inveniri possit, quemadmodum primo libro fuit ostensum. At verò Solidum esse, quando æquatio, quæ ex eo deducitur, postquam ad simplicissimos terminos reducta est, talis existit, ut incognita quantitas ad Cubum aut Quadrato-quadratum, hoc est, ad 3 aut 4 dimensiones adscendat, ipsaque non nisi Conicam aliquam sectionem in constructionem adhibendo inveniri queat. Ac Lineare denique, ubi æquatio illa, postquam non amplius reducibilis est, plius quam Solida existit, & incognita quantitas ad 5 aut 6 dimensiones assurgit; vel etiam ad 7 aut 8; vel ad 9 aut 10 dimensiones, atque ita porro in infinitum; ipsaque non nisi per curvam secundi, aut tertii, aut superioris denique generis, inveniri potest.

Ex quibus perspicuum est, quòd, etiamsi lineæ curvæ omnes, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sint recipiendæ, non ideo tamen indifferenter primà, quæ fortè occurrat, ad constructionem cuiusque Problematis uti liceat; sed eligendam esse semper simplicissimam, per quam possibile sit illud ipsum resolvere. Atque pro simplicissimis non habendas esse illas, quæ facillimè omnium describi possunt, sive quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim illas, quæ simplicissimi sunt generis, & ad quæsitam lineam determinandam inservire queunt. Ita ut, si peccatum sit in Geometria (quemadmodum supra diximus) Problema aliquod propositum construere per genus Linearum curvarum, magis compositum, quam natura ejus permittit; contra quoque pro vitio habendum sit, si quis inutiliter desudet ad illud ipsum, per genus aliquod linearum simplicius, quam natura ejus admittit, construendum.

Quapropter ut utrumque vitium evitari, ac unumquodque Problema ex proprio suo linearum genere solvi possit, postquam tam Problematis quam ipsius curvæ cognitionem ab æquationum cognitione dependere est ostensum; hinc ad explicandam æquationum naturam progreditur, docens, unamquamque tot admittere posse diversas radices sive differentes valores quantitatis incognitæ, quot ipsa habet dimensiones; earumque interdum quasdam esse, quæ falsæ existunt vel nihilo sunt minores; interdum etiam, quæ plane imaginariæ; sicut etiam quâ ratione ipsæ æquationes producantur ex suis radicibus in se invicem ductis, ita ut per illas rursus sint divisibiles. Quas divisiones subinde utiles ostendit ad explorandum utrum certæ quædam quantitates sint æquationis radices nec ne, tum etiam ad ipsas indagandas, ac denique ad æquationem ad pauciores dimensiones reducendam. Deinde, postquam ostendit quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque æquatione haberi possint, sicut etiam quo pacto falsæ reddantur veræ, & veræ falsæ, docet, quo pacto quælibet æquatio transmutari possit in aliam, ita ut radices ejus sint certâ quâdam quantitate majores vel minores, quàm radices prioris; & quidem quoties id sit, ut quædam ex illis sint veræ, quædam verò falsæ, quod tum augendo veras, falsæ tantundem diminuantur, & contra. Quibus explicatis, tradit, quâ ratione, ad abbreviandam terminorum multitudinem, secundus terminus in qualibet æquatione ope prædictæ transmutationis tolli possit; ita ut in Quadratis æquationibus affectiones sub latere, in Cubicis sub quadrato, in Quadrato-quadratis sub cubo, &c. evanescant. Post hæc, quando quædam ex radicibus veræ sunt, quædam verò falsæ, (id quod ex signorum serie manifestum fit) declarat, facile esse ejusdem transmutationis beneficio efficere, ut radi-

radices omnes evadant veræ. Porro, quemadmodum æquationes Cubicæ atque Quadrato-quadratæ omnes per eandem curvæ lineam solvi possunt, utpote per aliquam trium Coni sectionum; & rursus Surdesolidæ atque Quadrato-cubicæ omnes per aliam curvæ, quæ uno gradu magis est composita quàm sectiones Conicæ, atque sic ulterius; sic ut binæ priores juxta eandem regulam construi queant, sicut etiam binæ posteriores per aliam regulam: Attamen cum in his altioribus æquationibus ob multitudinem terminorum & variationem signorum $+$ $-$ plurimæ inde (ut diximus) nascantur formulæ, regulæque illa valde foret difficilis ac longa: docet quo pacto æquationes illas attollere liceat, hoc est, Surdesolidas reducere ad Quadrato-cubicas, atque simul efficere, ut, si quæ terminorum loca in illis desint, ipsa repleta existant, ut tandem, si quædam ex radicibus falsæ, quædam autem veræ sint, ipsæ æquationes transmutari possint in alias, ubi radices omnes sint veræ, ipsæque secundum eandem constructionis regulam inveniri possint. Præterea, quoniam æquationes frequenter fractionibus & surdis numeris involuta occurrunt, aut ipsæ etiam prolixos numeros continent; quo fit, ut aut minus expeditè resolvantur feliciterque explicentur, aut ut non nisi operosorem in resolvendo industriam requirant: docet deinceps, quo pacto ad evitandas fractiones illas atque surdos numeros, sicut etiam ad transmutandos vastos illos numeros in faciliores, radices earum multiplicari aut dividi possint per quantitatem aliquam cognitam sive numerum. Id quod inservire insuper potest ad inveniendas radices proximas veris, alioquin irrationales; quemadmodum etiam ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini in æquatione æqualem cuidam alteri data. Cæterum ne quid desit, quod ad intelligendas radices alicujus æquationis requiratur, ostendit ipsas interdum sive veras sive falsas solummodo imaginarias esse. Itant, licet semper in qualibet æquatione tot talesque, quales supra diximus, imaginari liceat, nonnunquam tamen nullam reperiamus quantitatem, quæ aliquibus ex ipsis respondeat.

Postquam igitur ea, quæ ad æquationum recognitionem atque emendationem pertinent, exposita sunt, & quidem ex æquationum cognitione (ut supra admonuimus) dependeat quoque Problematum cognitio, ac prout æquatio est vel Quadrata, vel Cubica aut Quadrato-quadrata, vel Surdesolida aut Quadrato-cubica, vel plurimum denique dimensionum, Problema, quod ad ipsam reducitur, dicatur vel Planum, vel Solidum, &c; illudque exinde construi queat vel per rectas lineas & Circulos, vel per Sectiones Conicæ, vel per lineam curvæ uno vel pluribus gradibus magis compositam: Hinc, priusquam ad æquationum resolutionem accedit, ac Problema propositum ex proprio suo

Linearum genere solvit, tradit, quo pacto post transmutationes requisitas, quando Problema est Planum & æquatio ad Cubum aut Quadrato-quadratum adscendit, ipsa dividi atque reduci possit ad Quadratum, ita ut deinde regulæ ac circini beneficio, sicut primo libro monstratum fuit, resolvi queat; ac denique quid in genere observandum sit circa reliquas superiores æquationes. Ita ut post institutas illas divisiones, quando æquatio ad tres quatuorve dimensiones assurgit ipsaque amplius dividi nequit, asserere liceat, Problema, quod ad æquationem illam perductum fuit, Solidum existere, nec inde minus vitium reputandum esse, illud per rectas lineas & circulares expedire velle, quam adhibere Coniceas sectiones in constructionem eorum, quæ per regulam & circinum solvi possunt.

Quibus explicatis, accingit se deinceps ad Solidorum Problematum constructionem, postquam reducta sunt ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, & in æquatione secundus terminus est sublatus. Eaque ita preparata, docet, unicâ regulâ ope Parabola facile ac expedite posse construi. In quo sanè eximium atque summi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quod sciam) ante vel excogitatum vel ostensum. Ceterum ut hujus regulæ facilitas ac usus in Solidorum Problematum constructionibus eniteat, ipsam deinde, in solvendis nobilissimis binis illis, ac celebratis, nec non antiquitus usque adeo agitatæ Problematis; altero scilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis; altero autem de dividendo angulo in tres æquales partes, adhibet. Quæ brevius expeditiusque, quam ab aliquo hætenus ostensum est, solius Circuli & Parabola ope, scientificè atque Geometricâ ratione resolvit. Vbi tandem declarat (quod animadversione dignum) in Problematis Solidis omnibus, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum reducta sunt, non secus hanc regulam ad explicandas earum radices requiri, quam quatenus ipsa adhibenda est ad inveniendas duas medias proportionales inter duas datas lineas; aut ad secandum datum angulum in tres æquales partes. Quandoquidem natura illarum non sinit, ut terminis simplicioribus, quam per certa quedam Cuborum latera, quorum contentum cognoscitur, aut per subtensas quorundam arcuum, quorum triplum datum est, exprimantur; neque etiam per constructionem aliquam, quæ simul generalior & simplicior sit, determinentur.

Finitâ verò Solidorum Problematum constructione, aggreditur demum Surdesolidorum constructionem, hoc est, eorum quæ ad æquationem 5 aut 6 dimensionum reducuntur, & ad quarum constructionem curva linea adhibenda est, quæ uno gradu magis est composita quam sectiones Conice.

Quam

Quam ut breviter ac unius regulæ beneficio resolvere doceat, observari vult ea, quæ supra monuimus, nimirum ut æquationes quinque dimensionum attollantur ad sex dimensiones, ipsaque demum, si opus est, transmutentur in alias, quarum radices omnes sint veræ. Qualem autem & quantum in hisce Problematis construendis Geometram se prodiderit Auctor, sanè si id ipsum ex superioribus perspicere cuipiam non contigerit, illud demum vel ex hac sola artificiosissima atque planè stupenda eorum constructione Geometrica, antea ne cogitata quidem, nedum inventa, latere ipsum non potest. E quibus tandem colligere licet, quòd, postquam omnia Geometria Problemata ad unum quasi Problema revocata fuerint, quod est, ut queratur tantummodo longitudo quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis sint radices, reductisque ad eandem constructionem, quæ ejusdem generis existunt, tradita simul sit via eadem resolvendi. Adeò ut nullum Problema tam difficile vel arduum, modò æquationem 5 aut 6 dimensionum non excedat, reperiri queat, quòd hujus Geometria Methodo solvi seu construi non possit.

COMMENTARIJ

IN

LIBRUM TERTIVM.



VERùm sæpè accidit, quòd quedam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil: ut, si supponatur x designare quoque defectum alicujus quantitatis, puta 5.] Hoc est, quòd x æquetur -5 , vel $x + 5$ sit æquale 0. Quod non ineptè explicatur per eum, qui plus debet quàm est solvendo; vel, cùm id, quod reliquatur, designamus per $-$. Quò referenda est jucunda atque ingeniosa quæstio, à laudatissimæ memoriæ, Mauritio, Principe Auriaco, atque Confoederati Belgii governatore, olim excogitata, quam Amplissimus & Prudentissimus Vir D. Henricus Stevinus, Simonis filius,

Nn

Do-

Dominus in Alphen, paternarum virtutum hæres unicus, ex pluribus monumentis, ad vitam communem utilissimis, & publicâ luce dignissimis, quæ inter adversaria parentis possidet, pro sua liberalitate mihi communicavit.

A & B, societatem ineuntes, lucrati sunt 12 aureos; quorum A expendit aureos 5; B autem debet aureos 2, hoc est, habet — 2 aureos. Quæritur quantum utrique ex summa debeatur? Respondetur, solvendos esse à B ipsi A, 8 aureos, quamvis lucrum hîc esse sit manifestum.

Aliud exemplum de damno.

Personæ duæ A & B jacturam faciunt 12 aureorum, hoc est, habent — 12 aur. Cùm igitur A contribuit 5 aur., & B — 2 aur., manifestum fit, ipsi A ex natura quæstionis deberi — 20 aureos, & ipsi B + 8 aur., hoc est, B habebit 8 aureos; etiamsi jacturam factam esse constet.

Quamvis autem non sit usitatum, ut qui aliquid habet in bonis societatem ineat cum eo, qui minus habet quàm nihil; tamen casus occurrere possunt, in quibus hoc contingit. Exempli gratiâ: Duo mercatores Amstelodami habitantes habent quisque institorem suum Venetiis, & quia institoribus istis non satis fidunt, sciuntque inter ipsos esse inimicitias, mandant illis per literas, ut sibi invicem rationem reddant omnis pecuniæ, ad dominos suos pertinentis, quam penes se habebunt eo tempore, quo literas istas accipient; atque si unus fortè aliquid debeat, ut hoc ex alterius pecunia solvatur, & cum residuo ita mercaturam faciant, ut unus nihil emat vel vendat, nisi cum alterius consensu. Ipsi autem mercatores qui certò non sciunt, quid Venetiis eo tempore sint habituri, quo literæ istæ eò pervenient, talem inter se societatem ineunt, ut quisque lucrum aut damnum pro ratione pecuniæ, quam tunc habuerit, sit accepturus. Quibus positis, si contingat unum habere 5000 aureos, alium verò debere 2000 aureos, his 2000 ex alterius pecunia persolutis, tria tantum aureorum millia pro mercibus emendis remanebunt; ex quibus si lucrum fiat duodecim millium aureorum, quod est quadruplum pecuniæ: sequitur ex vi societatis illum qui habuit 5 millia debere 20 millia lucrari, & alium

& alium 8 millia amittere. Contra verò si damnum sit 12 millium, qui habuit 5 millia debet amittere 20 millia, quadruplum nempe suæ pecuniæ; alius autem 8 millia lucrari debet, propterea quòd à priori sumpserit 2 millia, quæ si emendis mercibus impensa fuissent, damnum 8 millium ei attulissent.

Porro radices hæ falsæ non inconvenienter in Geometria explicantur retrogrediendo, hoc est, ut, quæ designantur per —, retrocedant, sicut illæ, quæ denotantur per +, progrediuntur. Cujus rei exemplum post videbitur.

Inservit autem earum cognitio ad inveniendas veras radices, quippe, falsis cognititis, æquationes facillè divisionis ope ad pauciores dimensiones reducuntur, ex iisque veræ eruuntur. Cujus rei exemplum in sequentibus habebitur.

Accedit & hoc, quòd, postquam tam falsæ quàm veræ radices alicujus æquationis fuerint inventæ, earum beneficio ad plenam totius quæstionis cognitionem atque solutionem perducamur, & casus nonnullos detegamus, de quibus nobis antea nihil certi constabat. Cujus rei exemplum sequentia itidem suppeditabunt.

Vnde liquidò constat, quòd *Æquationis summa, quæ plures radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate incognita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis.*] Hoc enim ex Æquationis, quæ plures radices admittit, constitutione manifestum est: cum æquatio quævis producat ex suis radicibus, in se invicem ductis. Quemadmodum ab Authore fuit explicatum. Vnde fit, ut rursus per illas dividi possit, cum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvatur.

Sic si ponatur $x \infty a$, hoc est, $x - a \infty 0$, & rursus $x \infty b$, hoc est, $x - b \infty 0$, & denique $x \infty c$, hoc est, $x - c \infty 0$, atque multiplicemus $x - a \infty 0$ per $x - b \infty 0$, & rursus productum per $x - c \infty 0$: exurget Æquatio $x^3 - axx + abx - abc \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \\ -c \quad +ac \end{array}$$

Quæ dividi potest per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, & per $x - c \infty 0$; sed non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate. Si autem eadem æquatio rursus multiplicetur per $x + d \infty 0$, (supponendo x designare

gnare quoque defectum alicujus quantitatis, utpote d , hoc est, x æquari $-d$) producet Æquatio

$x^4 - ax^3 + abxx - abcx - abcd \infty 0$. Quæ dividi potest

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad +abd \\ -c \quad +ac \quad +bcd \\ +d \quad -ad \quad +acd \\ \quad -bd \\ \quad -cd \end{array}$$

per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, per $x - c \infty 0$, & per $x + d \infty 0$, & non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate.

cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuantur.] Sic dividendo æquationem præcedentem, quatuor dimensiones habentem, per $x + d \infty 0$, orietur Æquatio

$x^3 - ax^2 + abx - abc \infty 0$. In quâ incognita quantitas tres

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \\ -c \quad +ac \end{array}$$

duntaxat dimensiones habet. Quâ rursus divisâ per $x - c \infty 0$, prodibit $xx - \frac{a}{b}x + ab \infty 0$, æquatio duarum dimensionum. Quæ denuo per $x - b \infty 0$ divisa exhibet $x - a \infty 0$, æquationem simplicem.

Vnde perspicere licet, quâ ratione, in qualibet Æquatione , plures radices habente, quantitas cognita secundi termini, æqualis sit summæ omnium radicum; & quantitas cognita tertii termini, æqualis summæ productorum ex singulis binis; & quantitas cognita quarti termini, æqualis summæ productorum ex singulis ternis, atque ita porro; at verò quantitas cognita ultimi termini, sive ipse ultimus terminus, æqualis producto ex omnibus.

Sic cum in æquatione $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$ tres sint radices 2, 3, & 4, quæ designantur per a , b , & c : erit earum summa 9, quæ denotatur per $-a - b - c$, æqualis -9 , quantitati cognitæ secundi termini $-9xx$. Summa autem productorum ex singulis binis 26, quæ denotatur per $+ab + bc + ac$, æqualis $+26$, quantitati cognitæ tertii termini $+26x$. Et productum ex ipsis tribus, 24, quod denotatur per $-abc$, æqualis -24 , quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino.

Eodem modo, si fuerit Æquatio talis: $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, cujus radices sunt 2, 3, 4, & -5 , atque designantur per $+a$, $+b$, $+c$, & $-d$: disponatur ipsa, ut termini,

ni, in quibus incognita quantitas x pares dimensiones habet, unam constituent æquationis partem, & reliqui alteram, hoc modo: $x^4 - 19xx - 120 \infty 4x^3 - 106x$. Eodem videlicet quo hæc: $x^4 + abxx - abcd \infty +ax^3 + abcx$. Præstat enim

$$\begin{array}{r} +bc \quad +b \quad -abd \\ +ac \quad +c \quad -bcd \\ -ad \quad -d \quad -acd \\ -bd \\ -cd \end{array}$$

illam hîc ita considerare, ut ea, quæ proponuntur, melius explicentur: quoniam hoc pacto radices, earumque producta simul addita omnino cum quantitatibus cognitis terminorum æquationis, eorumque signis conveniunt. Et manifestum est, summam harum radicum efficere $+4$, & æqualem esse $+4$, quantitati cognitæ secundi termini $4x^3$. Deinde summam productorum ex singulis binis efficere -19 , & æqualem esse -19 , quantitati cognitæ tertii termini $19xx$. Postea summam productorum ex singulis ternis efficere -106 , & æqualem esse -106 , quantitati cognitæ quarti termini $106x$. Denique productum ex ipsis omnibus in se invicem ductis efficere -120 , & æqualem esse -120 , quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino 120 . Quæ porro, quo pacto intelligenda sint de Æquationibus , in quibus non omnes termini extant, docebit appendix de Cubicarum Æquationum resolutione, quam hisce Commentariis subjunximus, ubi ista fusiùs pertractantur.

Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum $+$ & $-$; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa $+$, vel duo signa $-$, quæ se invicem sequuntur.] Notandum, hæc concernere æquationes, quæ producuntur ex suis radicibus, in se invicem ductis, quemadmodum pag. 69 & 70 est ostensum, quod & de cæteris regulis, ubi signorum $+$ & $-$ fit mentio, est observandum. Ut satis declarant priora verba: Ex quibus etiam cognoscitur, quæ horum verborum cum prioribus coherentiam demonstrant: cum aliàs fieri posset, ut in qualibet Æquatione non tot radices haberentur, quot incognita quantitas habet.

dimensiones; neque tot veræ, quot in ea reperiuntur variationes signorum + & —; aut tot falsæ, quot vicibus deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quæ se invicem sequantur.

Vt in æquatione $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, quæ non producit ex multiplicatione trium radicum, ut fit pag. 69 & 70, sed tantum ex multiplicatione æquationis impossibilis $xx - 4x + 5 = 0$ per $x - 2 = 0$. Vnde fit, quod, licet in æquatione proposita tres concipiantur veræ radices, tamen una tantum ex illis sit realis, nimirum 2, & reliquæ duæ non nisi imaginariæ, quarum valor nullo modo comprehendi potest.

Quæ autem dicta sunt de æquationibus, quæ ex radicibus suis in se invicem ductis procreantur, non tantum referenda sunt ad æquationes completas, hoc est, in quibus omnes termini extant, ut in exemplo ab Authore allato; sed etiam de incompletis, ubi unus vel plures termini defunt.

Vt si habeatur $z^3 = pz + q$, & scire velim, postquam multiplicatione productam supposuerim, quot admittat veras radices, & quot falsas; scribo $z^3 - pz - q = 0$. Deinde supponendo $0zz$ esse primò signo + adfectum (perinde enim est, siue illum signo + siue signo — adfectum concipias): invenio, propter terminos $+z^3$ & $+0zz$, eodem signo affectos, statuendam esse unam falsam radicem: similiter, propter terminos $+0zz$ & $+pz$, eodem rursus signo adfectos, statuendam esse alteram falsam: ac denique, propter terminos $+pz$ & $-q$, diversis signis notatos, ponendam esse unam veram radicem. Postea, supponendo secundum terminum signo — adfici: erit, propter terminos $+z^3$ & $-0zz$, diversis signis notatos, una vera radix: & propter terminos $-0zz$ & $+pz$, qui diversa possident signa, altera vera: ac denique, propter terminos $+pz$ & $-q$, etiam diversis signis designatos, tertia radix vera. Adeò ut ex prima suppositione eliciam duas falsas & unam veram, at ex secunda tres veras. Quas sic designo: Verum, quoniam, supponendo secundum terminum affe-

1. 2. Etum esse signo siue + siue —, certò scimus, nihil in
f v proposita æquatione mutari: ideo, ut hæc regula mul-
f v tiplicationem, quæ æquatio allata producta fuerit,
v — v nos edoceat: radices illas inter se conféro. Vnde,
cum deprehendam duas tantum esse, quæ consentiunt, easque
veras; reliquas autem, quomodocunque collatio instituat, ne-
qua-

quaquam consonare: concludo æquationem propositam explicabilem tantum esse de unica radice vera, & reliquas duas non nisi imaginarias existere; neque ipsam æquationem magis ex multiplicatione trium radicum productam esse, quam superiorem $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$.

Eodem modo, si habeatur $z^3 = pz - q$, seu $z^3 - pz + q = 0$; invenio è priori suppositione tres falsas radices; è posteriori verò duas veras & unam falsam. Quibus inter se collatis, ut consensus earum appareat, invenio, æquationem propositam unam tantum admittere radicem, nempe falsam; duasque reliquas esse imaginarias: ac proinde æquationem non posse procreari multiplicatione trium radicum.

Similiter, si fuerit $z^3 = pz + q$, seu $z^3 - pz - q = 0$; quoniam è priori suppositione invenio duas falsas & unam veram radicem; & è posteriori duas itidem falsas & unam veram: cognosco, æquationem propositam, multiplicatione trium radicum, quarum duæ sunt falsæ & una vera, produci posse.

Non secus, si habeatur $z^3 = pz - q$, seu $z^3 - pz + q = 0$; video in priori suppositione reperiri duas veras radices, & unam falsam: adeo ut concedendum sit, ipsam æquationem propositam, multiplicatione trium radicum, quarum duæ sunt veræ, & tertia falsa, produci posse. Idem de aliis sentiendum. Vbi notandum, radices veras & falsas alicujus æquationis semper esse reales, seu existentes, hoc est, quantitatem aliquam aut defectum quantitatis designantes, quarum valor Arithmetice vel Geometricè exprimi potest; imaginarias verò non item. Vt in æquatione $xx - 4x + 5 = 0$. Quamvis enim in ea duas nobis imaginari possimus radices; tamen nulla iis respondet quantitas; nec, quocunque tandem modo vel augeantur, vel diminuantur, aliæ quàm imaginariæ fieri possunt. Quod sanè nemini mirum videbitur, modò ex iis, quæ pag. 165 explicuimus, intellexerit, æquationem propositam esse impossibilem; neque ullam veram nec falsam radicem admittere, adeoque nec quantitatem aliquam, quæ ipsis respondeat, inveniri posse. Nisi velis, radices ejus esse $x = 2 + \sqrt{-1}$, & $x = 2 - \sqrt{-1}$, quarum certè valor

valor nullo modo comprehendi potest. Non magis quàm si illarum quantitatem Geometricè invenire velimus. Quandoquidem in figura p. 7, describendo ex centro N, intervallo lineæ NL ∞ 2, (utpote æqualis semissi ipsius 4, quantitatis cognitæ secundi termini) circulum LQR, faciendoque rectam LM ∞ $\sqrt{5}$ (utpote æqualem radici quadratæ ultimi termini 5); circulus descriptus LQR neutiquam secare aut tangere potest rectam MR, quæ ipsi LM ducitur perpendicularis, ad duas in ea radices designandas.

Idem de altioribus æquationibus est intelligendum pag. 85, 86, & 87, cùm Circulus centro E descriptus Parabolam FAG secare aut tangere nequit; ut & pag. 99, cùm Circulus CNQ curvam ACN neutiquam vel tangit vel secat.

E *Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in 2^a, 4^a, 6^a, aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis 1^a, 3^a, 5^a, similiumque locorum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.* Quæ locum quoque habent in æquationibus incompletis, ubi quidam ex imparibus locis defunt, qui cyphrâ sunt supplendi. Vt si fuerit $x^3 \infty^* - 8x - 24$ seu $x^3 80xx + 8x + 24 \infty 0$, mutando signa + & — secundi & quarti loci in contraria, fit æquatio $x^3 80xx + 8x - 24 \infty 0$, seu $x^3 \infty^* - 8x + 24$, cujus radix est $x \infty 2$, unde radix prioris fit $x \infty - 2$.

Eodem modo si sit $x^3 \infty^* 1201x + 14400$, seu $x^3 80xx - 1201x - 14400 \infty 0$, mutatis signis 2^{di} & 4^{ti} loci, fiet æquatio $x^3 80xx - 1201x + 14400 \infty 0$, seu $x^3 \infty^* 1201x - 14400$, cujus radices sunt $x \infty 25$, & $x \infty \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, nec non $x \infty - \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Vnde radices prioris erunt $x \infty - 25$, & $x \infty 12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, nec non $x \infty 12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Et sic de aliis.

F *Vnde si scribamus summam præcedentem, substituendo ubique y pro x, inveniatur*

$$\begin{array}{r} y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ - 19yy + 114y - 171 \\ - 106y + 318 \\ - 120 \end{array}$$

$$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y^* \infty 0, \text{ vel } y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0. \text{ Vbi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium}$$

narium ipsi additum.] Notandum hîc est, quòd, dum, augendo ternario veram radicem æquationis propositæ $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$, in æquationem incidimus, tres tantum dimensiones habentem, cujus ideo non nisi tres sunt radices, numerus 3, quo vera radix æquationis propositæ est aucta, sit æqualis alicui ex falsis radicibus, ut liquet ex iis, quæ ab Autore p. 72 paulò post explicantur. Ita, quoniam, diminuendo ternario veras radices æquationis $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, incidimus in æquationem $y^4 + 8y^3 - 1yy - 8y^* \infty 0$, vel $y^3 + 8yy - 1y - 8 \infty 0$, innotescit, unam ex veris radicibus esse 3. Et sic de aliis.

Nimirum, diminuendo veras radices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.] Vel etiam hoc modo: *Nimirum, diminuendo quantitatem cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, unaquâque verarum radicum, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.* Vt ad tollendum secundum terminum Æquationis $x^4 - 2ax^3 + 2aa$ $xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, divido 2a per 4, & provenit $\frac{1}{2}a$: unde faciendo $\frac{1}{2}a - x \infty z$, hoc est, $\frac{1}{2}a - z \infty x$, scribendum est

$+ \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^3z + \frac{3}{2}aaz - 2az^3 + z^4$	pro	x^4
& $- \frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^3z - 3aaz + 2az^3$	pro	$- 2ax^3$
& $+ \frac{1}{2}a^4 - 2a^3z + 2aaz$	pro	$+ 2aaxx$
& $- \frac{1}{4}a^4 + a^3z - cczz$	pro	$- ccxx$
& $- a^4 + 2a^3z$	pro	$- 2a^3x$
tum $+ a^4$		, & exsurget

$$+ \frac{1}{16}a^4 + a^3z + \frac{1}{2}aaz - \frac{1}{4}a^4 + a^3z - cczz + z^4 \infty 0, \text{ æquatio,}$$

secundo carens termino, & ab illa Autoris differens tantum in quarto termino, qui hîc per + denotatur, & illic per —. Vnde fit, ut per ea, quæ pag. 70 sunt ostensa, æquationes hæ in eo tantum inter se differant, quòd falsæ illius æquales sint veris hujus, & contra, atque ita radicum mutua sit reciprocatio. Quod in aliis quoque evenire reperietur.

Vbi porrò operæ pretium est considerare, quòd, tollendo secundum terminum Æquationis $x^4 + 2ax^3 + \frac{2aa}{c}xx - 2accx - aacc \infty 0$, (quæ quidem invenitur, cùm pro linea CE in quaestione pagin. 83 ponitur x) in eandem incidamus Æquationem, quam invenimus tollendo secundum terminum præcedentis $x^4 - 2ax^3 + \frac{2aa}{c}xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, quæ ab illa omnino est diversa, resultans ex investigatione lineæ DF.

Deinde animadversione dignum est, quòd hâc sublatione secundi termini Æquationes pagin. 6 & 7 in faciliores sic transmuentur, ut earum radices statim se prodant, nec aliâ regulâ ad eas inveniendas opus esse videatur. Etenim, tollendo secundum terminum æquationis $zz \infty az + bb$ seu $zz - az - bb \infty 0$, si dividatur a per 2, fit $\frac{1}{2}a$, ac ponatur

$$z - \frac{1}{2}a \infty x, \text{ sive } z \infty x + \frac{1}{2}a,$$

$$\begin{array}{l} \text{atque pro } zz \text{ reponatur } xx + ax + \frac{1}{4}aa, \\ \text{nec non pro } -az \quad -ax - \frac{1}{2}aa, \\ \text{\& addatur} \quad -bb: \end{array}$$

resultabit æquatio hæc $xx^* - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Vnde sequitur radicem prioris æquationis $zz \infty az + bb$ fore

$$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}, \text{ vel } z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - z \infty x, \text{ seu } z \infty \frac{1}{2}a - x \\ \hline \frac{1}{2}a - x \\ \hline \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{\& scribatur } \frac{1}{4}aa - ax + xx \text{ pro } zz, \\ \text{atque } -\frac{1}{2}aa + ax \quad \text{pro } -az, \\ \text{tum } -bb \end{array}$$

Et emerget Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb^* + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$. eadem quippe, quæ invenitur, ponendo $z \infty \frac{1}{2}a + x$ (quod similiter in reliquis sequentibus quadratis Æquationibus locum habet), & fit, ut supra, $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ac proinde $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem

Eodem modo, quia auferendo secundum terminum Æquationis $yy \infty -ay + bb$, seu $yy + ay - bb \infty 0$, ponitur $y + \frac{1}{2}a \infty z$, sive $y \infty z - \frac{1}{2}a$,

$$\begin{array}{l} \text{atque pro } yy \text{ scribitur } zz - az + \frac{1}{4}aa, \\ \text{\& pro } -ay \quad + az - \frac{1}{2}aa, \\ \text{atque deinde} \quad -bb: \end{array}$$

prodibit æquatio $zz^* - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $zz \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: hinc radix prioris erit $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$, vel $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ quidem falsa & vera radix invenitur quoque tollendo secundum terminum Æquationis hâc ratione: videlicet, supponendo y designare etiam defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, Exempli causâ, $y \infty -\frac{1}{2}a - z$,

$$\begin{array}{l} \text{\& substituendo } \frac{1}{4}aa + az + zz \text{ loco } yy, \\ \text{\& } -\frac{1}{2}aa - az \quad \text{loco } +ay, \\ \text{tum } -bb: \end{array}$$

unde fit Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb^* + zz \infty 0$, vel $zz \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; atque adeò $y \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ut ante. Quem modum, tollendi secundum terminum, tanquam diversum ab eo, qui ab Authore pag. 73 est ostensus, notare potes, cùm primus & secundus terminus eodem signo + vel - sunt adfecti.

Similiter, cum ad tollendum secundum terminum Æquationis $zz \infty az - bb$, vel $zz - az + bb \infty 0$, ponendum fit

$$\begin{array}{l} z - \frac{1}{2}a \infty x, \text{ vel } z \infty x + \frac{1}{2}a, \\ \text{\& scribendum } xx + ax + \frac{1}{4}aa \text{ pro } zz, \\ \text{\& } -ax - \frac{1}{2}aa \text{ pro } -az, \\ \text{\& addendum} \quad +bb: \end{array}$$

proveniet Æquatio $xx^* - \frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit radix prioris $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quæ radix utraque vera est, & alio item modo inveniri potest, si nimirum ponatur $\frac{1}{2}a - z \infty x$ sive $z \infty \frac{1}{2}a - x$, & substituatur

O o 2

 $\frac{1}{4}aa$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}aa - ax + xx \text{ in locum } zz, \\ & \& - \frac{1}{2}aa + ax \text{ in locum } -az, \\ & \& \text{ addatur } +bb: \end{aligned}$$

exsurget æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb^* + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$,
cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit
prioris radix $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.
ut supra.

Denique, quoniam tollendo secundum terminum Æqua-
tionis $zz \infty -az - bb$, vel $zz + az + bb \infty 0$, ponendum est
 $z + \frac{1}{2}a \infty x$ five $z \infty x - \frac{1}{2}a$, & subrogandum

$$\begin{aligned} & xx - ax + \frac{1}{4}aa \text{ in locum } zz, \\ & \& + ax - \frac{1}{2}aa \text{ in locum } +az, \\ \text{atque addendum} & +bb: \end{aligned}$$

producet æquationem $xx^* - \frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$,
cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Vnde
radix prioris fit $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$.
Quæ utraque hoc casu est falsa, & hæc etiam viâ inveniri potest,
nimirum supponendo z designare quoque defectum alicujus
quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, utpote ponendo $z \infty -\frac{1}{2}a - y$,
& substituendo

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{4}aa + ay \quad +yy \text{ loco } zz, \\ & \& -\frac{1}{2}aa - ay \quad \text{loco } +az, \\ \text{tum addendo} & +bb, \end{aligned}$$

unde provenit æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb^* + yy \infty 0$, vel $yy \infty$
 $\frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$;
atque adeò $z \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.
ut ante.

Eâdem ratione tolletur secundus terminus reliquarum Æqua-
tionum quadratarum pag. 6 & 7, quæ similiter hæc operatione
eò reducuntur, ut ad ipsarum radices inveniendas hæc regula suffi-
cere videatur.

Intellige Verùm enim verò animadvertendum est, quòd, sicut Æquatio
Æqua- quælibet Quadrata composita sublatione secundi termini ad a-
iones, in liam reducitur, in qua duo tantum sunt termini, sic nulla Cubica
quibus esse possit, pluribus terminis constans, (ex quibus 13 casus confi-
z³ aqua- ci pos-
tur duo

ci possunt) quæ hæc ratione non reducatnr semper ad aliquam *bus aut*
trium sequentium formularum: *tribus*

$$z^3 \infty^* - pz + q$$

$$z^3 \infty^* + pz + q$$

$$z^3 \infty^* + pz - q$$

terminis,
per +,
aut per
+ & -,
simul
junctis.

Idem de Quadrato-quadratis Æquationibus, quæ ex pluribus ter-
minis sunt compositæ, quarumque 42 diversi modi extare pos-
sunt, est intelligendum. Cum enim per regulam pag. 79 exposi-
tam ad Cubicas reduci queant, quarum radices duas habent di-
mensiones & termini omnes sunt completi, sic nulla itidem earum
esse potest, quæ hæc sublatione non reducatnr ad aliquam trium
prædictarum formularum.

Sic postquam Æquatio Quadrato-quadrata $1zz + 8cz$
 $- 26z - 68c - 84 \infty 0$ per dictam regulam reducta est ad
Cubicam $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \infty 0$, in qua omnes
termini sunt completi, tollitur secundus terminus, hoc modo:
Divisis 100 per 3, fit $33\frac{1}{3}$. Vnde ponendo $xx - 33\frac{1}{3} \infty yy$, five
 $xx \infty yy + 33\frac{1}{3}$, scribendum est

$$\begin{aligned} & y^6 + 100y^4 + 3333\frac{1}{3}yy + 37037\frac{1}{27} \text{ pro } x^6, \\ & \& - 100y^4 - 6666\frac{1}{3}yy - 11111\frac{1}{9} \text{ pro } -100x^4, \\ & \& + 2900yy + 96666\frac{2}{3} \text{ pro } 2900xx, \\ \text{tum} & - 10000: \end{aligned}$$

fietque æquatio $y^6 - 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27} \infty 0$, vel $y^6 \infty^*$
 $+ 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27}$, tertiæ formulæ. Vbi notandum, di-
mensionum numerum primi termini x^6 tantum pro 3 haberi, cum
non sit x^5 , x^3 , & x in tota summa. Id quod similiter in sublatione
secundi termini æquationum Quadratarum, quarum radices
duas dimensiones habent, est notandum. Quòd si verò ponatur
 $33\frac{1}{3} - xx \infty yy$, hoc est, $xx \infty 33\frac{1}{3} - yy$, prodibit Æquatio
 $y^6 \infty^* + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, secundæ formulæ, à præceden-
ti tantum differens termino quarto, qui ibi signo + adficitur, hîc
verò signo -. Vnde fit, quòd hujus æquationis falsæ radices æ-
quales sint veris illius, & contra.

Ad augendum valorem verarum radicum, & ad faciendum, ut *H*
radices omnes veræ evadant, sciendum est, nos uti posse exemplo
ab Authore proposito pag. 74: nimirum, $x^6 + nx^5 - 6nnx^4$
 $+ 36n^3x^3 - 216n^4xx + 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0$, tanquam
regulâ seu canone, ad quantitatem, quâ veræ radices augendæ
sunt,
O o 3

sunt, inveniendam, sicut annotavit Vir Nobilissimus D. Gothofridus ab Haestrecht, Mathematicum cultor eximius, hujusque scientiæ peritissimus. Si enim, exempli causâ, proposita sit Æquatio $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f \infty 0$, oportet, neglectis omnibus terminis, in quibus signa + & - diversa sunt ab iis, quæ in canone reperiuntur, nempe $b, c, \& f$, considerare tantum omnes reliquos, ut $a, d, \& e$. Vtpote $+ax^5$, quia in canone habetur $+nx^5$; & $-dxx$, quia in canone $-216n^4xx$; nec non $+ex$, quia in canone $+1296n^5x$. Qui quidem seorsim considerandi sunt, & quærenda quantitas n , quæ non sit minor quàm a , quia in canone habetur n , ubi in data Æquatione est a : & cujus quadrato-quadratum non sit minus quàm $\frac{1}{216}d$, quia in canone habetur $216n^4$, ubi in data Æquatione est d : nec non cujus sursolidum non sit minus quàm $\frac{1}{1296}e$, quia in canone habetur $1296n^5$, ubi in data Æquatione est e . Quantitate n sic inventâ, manifestè ex ipsa operatione demonstratur, si ponatur $y = 6n \infty x$, inventum iri Æquationem, in quâ nulla radix falsa esse potest, ut in exemplo Authoris. Quod Authori tam facilè visum fuit, ut id explicare neglexerit.

I Ad multiplicationem radicum alicujus æquationis addatur sequens exemplum. Proponatur æquatio $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, cujus loco alia invenienda sit, cujus termini per numeros integros exprimantur. Supposito igitur $z \infty \frac{3}{10}yy$, scribatur æquatio, hoc modo:

Et multiplicetur per nu- $y^6 \ 80y^4 - 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27} \infty 0$.
 meros proportionales $\begin{array}{r} 1. \quad \frac{3}{10}. \quad \frac{9}{100}. \quad \frac{27}{1000}. \end{array}$
 fietque Æquatio $z^6 \ 80z^4 - 39zz - 340 \infty 0$, vel
 $z^6 \infty * + 39zz + 340$, cujus radix zz ad præcedentis radicem yy est, ut 3 ad 10.

Quæ radicum multiplicatio inservire etiam potest inveniendis radicibus proximè veris, cum ipsæ sunt irrationales. Vt, ad inveniendam veram radicem æquationis $y^3 \infty 200y + 400$ (quæ irrationalis est) quàm proximè, ita ut differentia millesimâ parte unitatis minor sit: supposito $z \infty 1000y$,

scribo $y^3 \ 80yy - 200 \quad y - 400 \infty 0$,

& multiplico per $\begin{array}{r} 1. \ 1000. \ 1000000. \ 1000000000. \end{array}$

& exsurgit æquatio $z^3 \ 80zz - 2000000000z - 400000000000 \infty 0$, vel $z^3 \infty * - 2000000000z \infty 400000000000$, cujus radix z præcedentis radicis y est millecupla. Quocirca eliciendo radicem

ex

ex hac æquatione, methodo à Viëta tradita in tractatu de Numerosa Potestatum resolutione, inveniatur z major quàm 15052, & minor quàm 15053. Quibus divisus per 1000 (quia præcedentis radicem multiplicavimus per 1000), fiet y major quàm $15\frac{52}{1000}$, & minor quàm $15\frac{53}{1000}$. adeò ut differentia inter hanc utramque inventam & veram millesimâ parte unitatis minor sit. Quod erat inveniendum. Porro quoniam æquatio proposita $y^3 \infty 200y + 400$ duas adhuc admittit falsas radices, quæ similiter sunt irrationales, quia ipsa per $y +$ vel $-$ nullo numero ultimum terminum dividendo dividi potest, possunt eæ eadem ratione inveniri, mutato tantum signo $+$ in $-$. Quarum equidem major excedet $13\frac{100}{1000}$, & minor deficiet à $2\frac{42}{1000}$, componentes simul veram inventam $15\frac{52}{1000}$. Cæterum, sicut æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, atque ad faciliores reducuntur, ita quoque interdum licet ipsas beneficio divisionis, quando tam prolixos numeros continent, ut earum resolutio non nisi operosiores industriam requirat, in faciliores transmutare. Vt si fuerit æquatio $x^3 \infty * + 203125x + 23437500$, & ejus loco alia desideretur, quæ minoribus numeris exprimat, dividenda est ipsa per numeros proportionales 1. 125. 15625. 1953125,

hoc pacto: $x^3 \ 80xx - 203125x - 23437500 \infty 0$,
 $\begin{array}{r} 1. \ 125. \ 15625. \ 1953125. \end{array}$

& prodibit æquatio $y^3 \ 80yy - 13y - 12 \infty 0$, vel $y^3 \infty * 13y + 12$, cujus radices sunt $+4, -3, \& -1$, quibus per 125 multiplicatis (quoniam prioris radices per 125 divisimus) exsurgent radices prioris $+500, -375, \& -125$.

Vbi porro notandum, quòd, postquam æquatio quælibet à fractionibus aut surdis numeris est liberata, atque in faciliorem transmutata, fieri non possit, ut ulla ex hujus radicibus, siue falsis, siue veris, sit numerus aliquis fractus. Quemadmodum facilè ex 7^{mo} Elementorum libro demonstrari potest. Adeò ut, si illa deinde sicut pag. 77 est ostensum dividi nequeat, concedendum sit, nullam ex radicibus siue falsis siue veris numero explicari posse, sed omnes esse irrationales.

Quibus ita constitutis, ut pateat quo pacto hæc radices surdis numeris sint exprimendæ, visum fuit ea, quæ ab ingeniosissimo Huddenio nostro circa hæc excogitata sunt, in medium adducere.

Hinc ut investigetur, quo pacto, exempli causâ, radices æquationis

tionis

tionis $z z - a z - b b \infty 0$, quæ per $z +$ vel $-b \infty 0$ dividi nequit, per surdas quantitates exprimi possint: suppono primùm z esse æqualis simplici alicui quantitati surdæ, utputa, $\sqrt{x}$, & fit $z - \sqrt{x} \infty 0$. Quam, ut ad æquationem quadratam ejusdem formæ perducam, in qua secundus terminus est rationalis, multiplicare debeo per $z + y + \sqrt{x} \infty 0$. Sed quoniam sic non producitur æquatio, in qua etiam tertius terminus rationalis est, concludo radices æquationis propositæ hoc modo non posse denotari sive exprimi. Idem fit supponendo $z \infty -\sqrt{x}$.

Quocirca statuendo nunc $z \infty y + \sqrt{x}$ seu $z - y - \sqrt{x} \infty 0$, oportet ipsam, ut ad æquationem quadratam ascendat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicare per $z - y + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $z z - 2 y z + y y \infty 0$, æquatio ejusdem formæ cum al-

lata, & in qua item tertius terminus rationalis est. Hinc comparando secundum terminum unius cum secundo alterius invenio $-2 y \infty -a$, hoc est, $y \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $y y - x \infty -b b$. In qua si in locum $y y$ subrogetur $\frac{1}{4}a a$, habebō $\frac{1}{4}a a + b b \infty x$. Ac proinde cum pro quæsitis radicibus supposuerimus $z \infty y + \sqrt{x}$, & $z \infty y - \sqrt{x}$, erunt ipsæ: $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a a + b b}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a a + b b}$.

Eodem modo si investigare velimus, quo pacto radices æquationis indivisibilis $y y + a y - b b \infty 0$ per quantitates surdas exprimi queant, statuatur (neglectâ suppositione ipsius $y \infty \sqrt{x}$) $y \infty -z + \sqrt{x}$ seu $y + z \sqrt{x} \infty 0$, eaque, ut ad æquationem quadratam assurgat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicetur per $y + z + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $y y + 2 z y + z z \infty 0$.

æquatio ejusdem formæ cum allata, & in qua etiam tertius terminus est rationalis. Vnde comparando secundum terminum hujus cum secundo illius invenitur $z \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $x \infty \frac{1}{4}a a + b b$. Atque adeò, cum pro quæsitis radicibus supposuerimus $y \infty -z + \sqrt{x}$, & $y \infty -z - \sqrt{x}$, erunt ipsæ: $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a a + b b}$, & $y \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a a + b b}$.

Similiter, investigando num radices æquationis $z z - a z + b b \infty 0$, quam per $z +$ vel $-b \infty 0$ dividere non licet, per surdas quan-

titates exprimi queant, invenitur z exprimi posse per $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a a - b b}$, & per $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a a - b b}$. Eodem modo procedatur in altioribus æquationibus.

E quibus perspicuum fit, hac ratione inveniri quoque simplicissimos surdos numeros, quibus radices hæcæ exprimere licet, atque ideo hinc etiam constare, quæ circa hæc à D^{no} des Cartes pag. 95 referuntur, nimirum: quod natura harum radicum non permittat, ut simplicioribus terminis exprimantur.

Vbi tandem etiam est advertendum, quòd, quantò partes è quibus hæ radices componentur pauciores numero existunt, tantò etiam quæsitum facilius obtineri possit, ac proinde in altioribus æquationibus conducere secundum terminum tollere, ita ut deinde, si res bene inspiciatur, perpauci casus superfuturi sint.

Supponendum est $y \infty x \sqrt{\frac{3 a a}{b b}}$, deinde verò scribendum K

$y^3 * - 3 a a y + \frac{3 a^3 c^3}{b^3} \sqrt{3} \infty 0$.] Etenim positâ $y \infty x \sqrt{\frac{3 a a}{b b}}$ sive $y \infty \frac{a x}{b} \sqrt{3}$; erit $x \infty \frac{b y}{a \sqrt{3}}$, & $x x \infty \frac{b b y y}{3 a a}$, & $x^3 \infty \frac{b^3 y^3}{3 a^3 \sqrt{3}}$.

Quæ si in æquatione substituantur, habebitur $\frac{b^3 y^3}{3 a^3 \sqrt{3}} * - \frac{b^3 y}{a \sqrt{3}} + c^3 \infty 0$; hoc est, communi multiplicatore $3 a^3 \sqrt{3}$, fiet $b^3 y^3 * - 3 a a b^3 y + 3 a^3 c^3 \sqrt{3} \infty 0$: ac proinde communi divisore b^3 , erit $y^3 * - 3 a a y - \frac{3 a^3 c^3}{b^3} \sqrt{3} \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsitæ; aut Æquatio, per ipsam divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat.] Sic æquatio superior pag. 76: $x^3 - 6 x x + 13 x - 10 \infty 0$ divisa per binomium $x - 2 \infty 0$ dat æquationem impossibilem $x x - 4 x + 5 \infty 0$, & fit radix quæsitæ 2. Sic æquatio $x^3 \infty 1201 x + 14400$ seu $x^3 80 x x - 1201 x - 14400 \infty 0$ divisa per x *Vide hæc post in Appendice de Cubicarum* $+ 25 \infty 0$ dat æquationem $x x - 25 x - 576 \infty 0$ seu $x x \infty 25 x + 576$, quæ juxta præcepta pag. 6 & 7 resoluta ostendit radicem quæsitam esse $12 \frac{1}{2} + \sqrt{732} \frac{1}{4}$.

Huc etiam refer reductionem Æquationum Quadratarum, æquationum resolutione.

Reductio

Æquatio-

num Qua-

dratarum,

cūm Pro-

blema est

Simplex.

Vt si, verbi gratiā, habeatur æquatio $xx \propto ax + ab$ seu $xx - ax - ab \propto 0$, poterit ea, inventis ipsius $ab + bb$ ultimi termini divisoribus $1, b, a + b$, & $ab + bb$, dividi per binomium $x + b \propto 0$, oriturque $x - a - b \propto 0$. Id quod ostendit, radicem quæsitam esse $a + b$, & Problema, quod ad hanc æquationem reducitur, esse Simplex, hoc est, construi posse ducendo tantum rectas lineas.

Eodem modo, si fuerit $xx \propto \frac{-aax + aa}{a + 1}$ seu $xx + \frac{aax}{a + 1} - \frac{aa}{a + 1} \propto 0$, quoniam, ad tollendas fractiones, multiplicatā primūm

$$xx + \frac{aax}{a + 1} - \frac{aa}{a + 1} \propto 0$$

per quantitates proportionales $1, a + 1, aa + 2a + 1$, fit æquatio $yy + aay - a^3 - aa \propto 0$,

atque hanc, ut ante, divisā per binomium $y + aa + a \propto 0$, oritur $y - a \propto 0$: liquet, Problema, quod huc pertinet, non præter simplex existere, & y esse a , adeoque $x \propto \frac{a}{a + 1}$.

Haud secus Problema simplex erit, si obtineatur æquatio

$$xx \propto \frac{aax - aac}{a - c} \text{ seu } xx - \frac{aax}{a - c} + \frac{aac}{a - c} \propto 0. \text{ Multiplicata enim}$$

eā per proportionales $1, a - c$, & $aa - 2ac + cc$, fit $yy - aay + a^3c - aacc \propto 0$. Quæ dividi potest per binomium $y - ac \propto 0$, oriturque $y - aa + ac \propto 0$. Vnde y invenitur $\propto ac$, aut etiam $y \propto aa - ac$: ac proinde $x \propto \frac{ac}{a - c}$, aut etiam $x \propto a$. Quorum

duorum valorum ipsius x non nisi unus tantum quæsito Problematibus respondet, licet uterque æquationi propositæ satisfaciatur. Quod ipsum ex Problemate non adeo difficile semper est dignoscere.

Cæterum Problema aliquod non præter simplex existere, vel hinc quoque inferre licet, cūm, operando juxta regulas pag. 6 & 7, quantitas, quæ per $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ aut per $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ exprimitur, omnino per extractionem radices inveniri potest; ita ut ipsa sit rationalis, quemadmodum in allatis exemplis contingit. Vbi porro observare licet, quod, in primo & secundo casu earundem æquationum, postquam ultimus terminus per bb fuerit designatus, aut is inventionem mediæ proportionalis (sicut pag. 2 docetur) ad hanc formam fuerit reductus, nil ad ulteriorem ipsarum

rum constructionem faciendum relinquatur, quod non per solarum rectarum linearum ductum absolvatur. Vide Exercitationum nostrarum Mathematicarum librum 2, in quo de Simplicium Problematum constructione ex professo agitur.

Vbi demum observatu dignum, in genere æquationes omnes numericas trium dictarum formularum omnino per solas rectas lineas construi posse, in quibus a & bb non nisi numeros designant sive integros sive fractos; aut etiam eas, in quibus hæ quantitates non per diversas literas denotatæ reperiuntur, etiam si ipsis integri aut fracti numeri præfigantur.

Vbi notandum, me ipsius y^6 dimensiones tantum pro tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y^5 , nec y^3 , nec y in tota summa.] Potest enim pro æquatione

$$y^6 + \frac{aa}{2cc} y^4 - \frac{a^4}{c^4} y^2 - \frac{a^6}{aac^4} \propto 0 \text{ substitui æquatio hæc:}$$

$$z^3 + \frac{aa}{2cc} z^2 - \frac{a^4}{c^4} z - \frac{a^6}{aac^4} \propto 0. \text{ nimirum, supponendo } z \propto yy,$$

atque subrogando z in locum y^4 , & z^3 in locum y^6 ; ita ut, postquam innotuerit valor radices z , opus tantum sit, ex hoc invento valore extrahere radicem quadratam, ad habendum valorem radices y .

Nec aliter operandum, si habeatur $x^4 \propto -axx + bb$. Possumus enim ipsius x^4 dimensiones solummodo pro duabus dimensionibus habere, & scribere $yy \propto -ay + bb$, supponendo $y \propto xx$, & $yy \propto x^4$, eritque radix ejus $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: adeoque radix $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Vide pag. 6.

Quin & si fuerit $z^6 \propto 39zz + 340$, supponendo $x \propto zz$ potest pro ea reponi $x^3 \propto 39x + 340$, atque adeo ipsius z^6 dimensiones tantum pro tribus dimensionibus haberi.

Eodem modo, si fuerit $x^8 \propto +10x^4 + 16xx - 9$, atque z supponatur $\propto xx$: poterit ejus loco scribi $z^4 \propto +10zz + 16z - 9$, ita ut ipsius x^8 dimensiones tantum pro 4^{or} dimensionibus habeantur. Et sic de aliis.

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Equationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema, quod ab ea dependet, esse solidum.]

Sic quoniam æquatio $x^3 \propto 300x + 1200$, seu $x^3 80xx - 300x - 1200 \propto 0$, dividi nequit per x plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 1200 absque fractione dividente, quin aliquid post divisionem superfit, certum est, Problema, quod ad illam reducitur, esse Solidum. Quo autem pacto inveniatur numeri omnes, data numerum absque fractione dividendes, manifestum fiet, ubi ex Stifelio exposuero rationem, inveniendi omnes cujusque numeri partes aliquotas, quod unum idemque est.

Etenim, si numerus par fuerit, dividendus est per 2, & divisor reservandus; tum rursus, si quotiens est par, dividatur similiter per 2, & divisor reservetur; illudque tam diu continuetur, donec perveniatur ad numerum imparem. Quod si verò numerus est impar, vel divisione jam facta ad numerum imparem sit perventum, dividi debet per 3, si fieri potest, idque tam diu continuandum, donec proveniat quotiens, qui per 3 amplius dividi non possit. Tum eadem divisio tentanda per 5, 7, 11, 13, 17, 19, aliumve numerum primum, sive nullam partem aliquotam præter unitatem habentem. Suffecerit autem id tentasse, donec ad dati numeri radicem quadratam, sive veram, sive veræ proximam, perventum fuerit: cum ultiores divisiones supervacaneæ sint habendæ. Iam verò quomodo ex reservatis numeris partes aliquotæ, seu divisores omnes dati cujusque numeri, inveniuntur, sequentia exempla manifestabunt. Etenim ad inveniendos divisores omnes numeri 462, divido 462 per 2, & fiunt 231. Hinc 2 reservo, & 231 divido per 3, fiuntque 77, & 3 reservo. Postea divis 77 per 7, fiunt 11, & 7 reservo. Denique divido 11 per 11, & fit 1, & 11 reservo. Vnde numeri reservati erunt 2, 3, 7, & 11. E quibus divisores omnes seu partes aliquotæ sic inveniuntur.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2 \cdot 3 \\
 \hline
 6 \\
 7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 42. \\
 \hline
 11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot 66 \cdot 77 \cdot 154 \cdot 231 \cdot 462.
 \end{array}$$

Primò ducito 2 in 3, & producentur 6. Deinde 7 in 1, 2, 3, & 6, & fient 7, 14, 21, 42. Denique 11 in 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42, fientque 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462. Et erunt divisores omnes 1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42. 11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. & 462.

& 462. Vbi notandum, ex ductu ultimi numeri reservati 11 in ultimum productum inventum 42 produci datum numerum 462; adeò ut, ad inveniendum dati alicujus numeri partes omnes aliquotas, opus non sit hosce duos numeros in se invicem ducere, si tantum de illis quæstio fuerit, & non de divisoribus. Eodem modo, numerus 2310 divisores habebit sequentes.

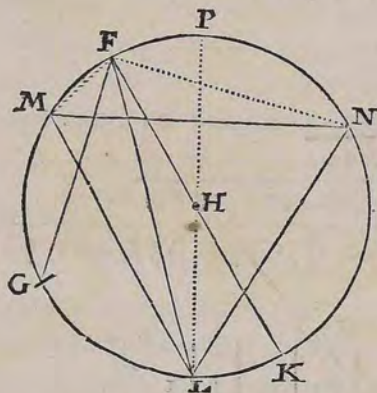
$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \\
 2310 \quad 1155 \quad 770 \quad 462 \quad 330 \quad 210 \\
 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \\
 \hline
 2 \cdot 3 \\
 \hline
 6 \\
 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30. \\
 \hline
 7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 42 \cdot 35 \cdot 70 \cdot 105 \cdot 210 \\
 \hline
 11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot 66 \cdot 55 \cdot 110 \cdot 165 \cdot 330 \cdot 77 \cdot 154 \cdot 231 \cdot 462 \cdot 385 \cdot 770 \cdot 1155 \cdot 2310.
 \end{array}$$

Similiter divisores numeri 1200 erunt

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \\
 1200 \quad 600 \quad 400 \quad 240 \quad 160 \quad 120 \quad 80 \quad 60 \quad 40 \quad 30 \quad 24 \quad 20 \quad 16 \quad 12 \quad 10 \quad 8 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\
 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\
 \hline
 2 \cdot 2 \\
 \hline
 4 \\
 2 \cdot 8 \\
 \hline
 2 \cdot 16 \\
 3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 48. \\
 \hline
 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 120 \cdot 240. \\
 \hline
 8 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 400 \cdot 75 \cdot 150 \cdot 300 \cdot 600 \cdot 1200.
 \end{array}$$

Verum enimverò cum allata ratio inveniendi Binomium, per quod Æquationis propositæ summa dividenda est, ad investigandum, utrum Problema, quod ad æquationem illam est perductum, sit Solidum, an verò Planum, & si Planum sit, ipsa ad ejusdem æquationis radices inveniendas valde videatur prolixa; præsertim cum ultimus terminus plures admittit divisores: sciendum est, quosdam ex iis seligi posse, è quibus si componatur binomium, per quod æquationis divisio non succedat, certi esse possumus Problema ab ea dependens Solidum existere.

Sic cum in superiori æquatione $x^3 \propto^* 300x + 1200$, vel $x^3 80xx - 300x - 1200 \propto 0$, triginta sint numeri, ultimum terminum 1200 absque fractione dividentes, atque hinc divisio vel sexagies esset tentanda, antequam certò constaret, Problema esse Solidum; sciendum est non opus esse nisi tres vel quatuor ex iis considerare, ut 4, 15, & 20, atque reliquos insuper habere. Quemadmodum ex sequentibus fiet manifestum.



Etenim si numerus 300 vocetur p , & numerus 1200 vocetur q , & juxta id, quod docetur pag. 93, circulus describatur FGN , cujus radius FH sit 10, utpote $\propto \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in eo recta inscribatur $FG \propto 12$, quippe $\propto \frac{3q}{p}$, ac deinde singuli arcus FMG , FNG , & GLK in tres æquales partes dividantur per rectas FM , FN , & FL : designabunt duæ rectæ FM & FN quantitatem utriusque falsæ radicis, & FL quantitatem veræ. Adeò ut, ad eligendos divisores, qui ad æquationem dividendam utiles censeri possunt, opus tantum sit considerare eos, qui inventis lineis FM , FN , & FL quàm proximè accedunt, nullâ reliquorum habitâ ratione: adeoque divisionem tentandam tantum esse per $x + 4 \propto 0$, vel per $x + 15 \propto 0$, vel per $x - 20 \propto 0$. Ac proinde cum tentatâ divisione aliquid superfit: sequitur, Problema, quod ad æquationem propositam perducitur, esse Solidum, nec ullam radicem sive veram sive falsam, quæ numero exprimi queat, admittere; sed omnes esse irracionales, earumque valorem esse exprimendam per quantitatem linearum dictarum FM , FN , & FL .

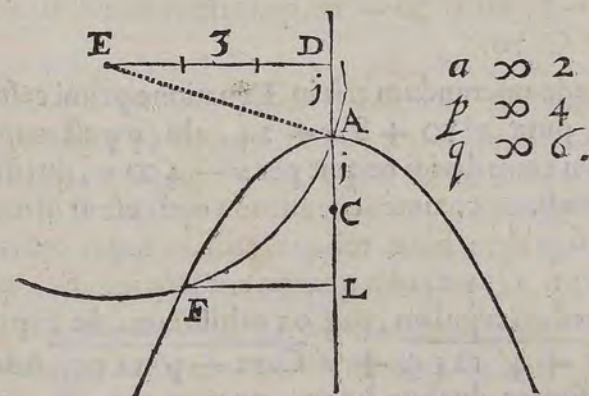
Eodem modo si habeatur $x^3 \propto^* + 300x - 1200$, vel $x^3 80xx - 300x + 1200 \propto 0$: descripto rursus circulo FGN , cujus radius FH sit 10 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo inscriptâ rectâ $FG \propto 12$ seu $\frac{3q}{p}$, si secantur singuli arcus FMG , FNG , & GLK in tres æquales partes, designabunt FM , FN utramque veram radicem, & FL falsam. Adeò ut, cum divisio æquationis $x^3 80xx - 300x + 1200$

$+ 1200 \propto 0$ tentata per $x - 4 \propto 0$, per $x - 15 \propto 0$, & per $x + 20 \propto 0$ non succedat, concedendum sit illam admittere nullam radicem, nec veram nec falsam, quæ numero exprimi queat; sed omnes esse irracionales: adeoque earum valorem non aliter quàm per quantitatem linearum FM , FN , & FL esse exprimendum, & Problema, unde allata æquatio deducta fuit, Solidum esse.

Sed licet hæc aliter adhuc & quidem generalius efficere.

Vt si habeatur Æquatio primæ formulæ $x^3 \propto^* - 8x + 24$, cujus investigandæ sint radices. Quoniam igitur ultimus terminus 24 octo admittit divisores, qui sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24: hinc octies fortè divisio tentanda esset antequam radicem propositæ Æquationis sic invenire possemus. Verùm sufficit semel vel bis id experiri, cum certi quidam ex inventis hisce divisoribus seligi possint, per quos si divisio non succedat, certi reddamur radicem esse irracionalem.

Cogitetur Æquatio allata hujus esse formulæ $x^3 \propto^* - z, 4x + \#, 6$, eadem nempe quæ $x^3 \propto^* - apx + aaq$; in qua a pro unitate assumpta valet 2, p 4, & q 6. Quâ Æquatione juxta regulam pag. 85, 86, 87, & 88 resolutâ, invenitur radicem quæsi-



tam designari per lineam FL . Postea exploretur quisnam ex inventis divisoribus huic lineæ proximè accedat, ut seligantur per quos divisio sit tentanda, neglectis reliquis. Postquam autem compertum fuerit nullum ex ipsis propiùs huic lineæ congruere quàm

quàm divisorem 2, & quidem Æquationem propositam $x^3 80xx + 8x - 2400$ dividi posse per $x - 200$, & prodire Æquationem impossibilem $xx + 2x + 1200$, quæ per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, ulterius dividi nequit: sequitur radicem quæsitam fore 2, neque ullam aliam extarè, cum reliquæ duæ in hac formula semper sint imaginariæ.

Nec aliter fit, si fuerit $x^3 00^* - 8x - 24$, quæ est Æquatio unam habens radicem falsam, nempe 2, & duas imaginarias: cum producat ex multiplicatione Æquationis impossibilis $xx - 2x + 1200$ per $x + 200$. Vbi observandum, quòd, licet D. des Cartes ejusmodi Æquationis formulam inter Cubicas non reponeret, sed tantum eas, in quibus bini posteriores termini per $+$ aut per $+$ & $-$ juncti sunt, ipsa tamen nihilominus eodem modo, quo præcedens, resolvi, atque radix ejus exprimi possit. quod & de æquatione quadrata $xx - az - bb 00$ supra monuimus. Hinc si fuerit $x^3 00 - 3x - 10$, seu $x^3 80xx + 3x + 1000$, quæ per $x +$ aliquo numero ultimum terminum dividente dividi nequit: sequitur radicem ejus esse irrationalem, eamque juxta primam Cardani regulam, pagin. 93 descriptam, sic exprimi $x 00 - \sqrt[3]{C. 12 + \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{C. 12 - \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}}$. nempe mutatis tantum signis $+$ & $-$ utriusque partis. Idem intellige de Æquationibus $x^3 00 - 8$, aut $x^3 00 - 10$, quarum radices sunt $x 00 - 2$, & $x 00 - \sqrt[3]{C. 10}$.

Eodem modo operandum erit in Æquatione primi casus secundæ formulæ, puta $x^3 00 + 8x + 24$, ubi $\frac{1}{27}q$ est majus quàm $\frac{1}{27}p^3$. Quoniam enim dividi nequit per $x - 400$, qui divisor ad quantitatem radices proximè accedit, non opus est ut ulterius progrediamur, siquidem binæ reliquæ radices hujus casus semper sunt imaginariæ. Quare radix quæsitæ erit irrationalis, quæ juxta secundam Cardani regulam, pag. 93 exhibitam, sic exprimetur: $x 00 \sqrt[3]{C. 12 + \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{C. 12 - \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}}$. Adeò ut dicatur composita ex duabus lineis, quarum una est prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 + \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}$, & altera prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 - \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}$. E quibus perspicua fiunt illa, quæ habentur pag. 92 & 95. Notandum verò, me potuisse quidem accipere a pro 1, ita ut p futura fuisset 8, & q 24: quo-

quoniam hîc liberum est assumere pro unitate, qualem libuerit, quantitatem; verum quia praxis aliquo modo accommodatior visa est, si pro a ponatur 2, non 1, malui illam hypothesein huic posthabere.

Vbi porrò advertendum, radicibus Æquationum ita implicatis existentibus, simplicius censendum esse, earundem habitudinem ex sola Æquationum constitutione innuere, quàm ipsas prædicto modo exprimere. Ut in hac ultima $x^3 00 + 8x + 24$, dicendo x talem esse, ut in se Cubicè ducta tantundem faciat ac si per 8 multiplicetur, ac deinde ei quod sit addatur 24. Quippe sic ejus habitudinem longè simplicius concipere valemus, quàm si eandem hoc modo exprimeremus: $x 00 \sqrt[3]{C. 12 + \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{C. 12 - \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}}$. Id quod similiter de Æquatione $x^3 00 - 3x + 10$ potest intelligi, cujus radix juxta primam Cardani regulam sic exprimitur $x 00 \sqrt[3]{C. \sqrt[3]{26 + 5} - \sqrt[3]{C. \sqrt[3]{26 - 5}}}$: cum illius habitudinem, quam ex Æquationis constitutione induit, multò facilius concipiamus, prout eandem in se Cubicè ductam idem producere intelligimus, quod 10 minus ipsius triplo. Et sic de aliis.

Porrò si habeatur $x^4 00^* + 10xx + 40x + 16$; suppositâ a 002 , erit $aa 004$, & $a^3 008$, fietque æquatio $x^4 00^* + 2, 5xx + 4, 10x + 8, 2$, ejusdem formæ cum $x^4 00^* apxx + a^3qxx + a^3r$, in qua p idem valet quod 5, q idem quod 10, & r idem quod 2. Deinde inventis numeris ultimum terminum 16 dividendibus, utpote 1, 2, 4, 8, & 16, æquationem resolvo juxta regulam ab Authore pag. 85, 86, 87, & 88 ostensam, eritque vera radix FL, & falsa GK. Denique, examinando ordine divisores inventos, explorando quinam ex ipsis ab inventis radicibus FL & GK quàm minimum discedant; invenio divisionem solummodo tentandam esse per $x - 400$, aut per $x + 100$. Ac proinde cum neutra harum divisionum succedat, concludo, Æquationem propositam, unam admittere veram radicem, & unam falsam, quarum utraque est irrationalis; ac reliquas duas esse imaginarias.

Haud secus si fuerit æquatio $x^4 00^* - 60xx + 7400x + 36000$, cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72,

1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99 cum supra inventis 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, sumendique qui sibi invicem respondent, cæteris neglectis. Ac proinde cum hîc quinque sint qui concordant, nempe 1, 3, 4, 9, & 24, oportet, ad inveniendas veras radices, divisionem tentare per $x-1$, per $x-3$, per $x-4$, per $x-9$, & per $x-24$; aut, ad obtinendas falsas, quæ quidem hâc auctione in tantum sunt diminutæ, per $x+2$, per $x+3$, & per $x+6$. Quod si verò id nimis longum videatur, quandoquidem æquatio quælibet tot tantum radices ad summum habere potest, quot incognita quantitas habet dimensiones, ita ut hîc non ultra tres inveniantur: poterimus veras radices prioris æquationis unitate diminueri, supponendo videlicet $z \propto x-1$, sive $x \propto z+1$, & prodibit æquatio $z^3 + 2zz - 29z + 42 \propto 0$. Cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, qui unitate aucti efficiunt divisores 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43. Iam verò cum ex prioribus quinque 1, 3, 4, 9, 24 bini tantum sint, utpote 3 & 4, qui cum binis horum consentiunt, eò deventum est, ut ad inveniendas veras radices opus tantum sit divisionem tentare per $x-3$, vel per $x-4$; aut, ad obtinendas falsas, quæ hâc diminutione verarum unitate sunt auctæ, per $x+2$, & per $x+6$. Hinc, cum $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi possit per $x-3 \propto 0$, atque oriatur $xx + 2xx - 24 \propto 0$, cujus radices sunt $+4$, & -6 ; vel etiam $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi possit per $x-4 \propto 0$, & proveniat $xx + 3x - 18 \propto 0$, cujus radices sunt $+3$ & -6 ; vel denique $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi possit per $x+6 \propto 0$, & resultet $xx - 7x + 12 \propto 0$, cujus radices sunt $+4$, & $+3$; sequitur, radices propositæ æquationis esse $+3$, $+4$, & -6 . Vbi notandum, in hujusmodi praxi seligendi divisores, non opus esse totius operationis, quæ ad inveniendas posteriores hæc æquationes requiritur, rationem habere; sed tantum quatenus ad ultimum terminum inveniendum inservire possit. Ad quem obtinendum, quando prioris radices unitate augentur vel diminuuntur, numeri in æquatione dati solummodo addendi sunt vel subtrahendi, prout signa $+$ & $-$ indicant. At verò cum per denarium aliumve numerum augentur vel diminuuntur, tum prius cyphræ ipsis in fine apponendæ sunt, vel ipsi per datos numeros sunt multiplicandi, antequam addantur vel à se invicem subtrahantur. quod usus edocebit.

Vbi

Vbi tandem notandum, ad seligendos divisores divisionesque superfluas evitandas, spectari etiam posse ea, quæ Vir Clarissimus D. de Beaune de limitibus Æquationis, intra quos ejus radices cadunt, tradidit. Qualia ista in 2^{do} tractatu continentur, qui unâ cum primo de natura & constitutione Æquationum huic editioni nunc accessit.

Vnde cognoscitur, valorem ipsius z esse $\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc}$ 0

$+ \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, vel $\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc}$

$- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.] utpote qui elicitur

ex priori æquatione $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$.

Quæ quidem primi vel tertii casus esse potest æquationum Quadratarum pag. 6 & 7. Primi videlicet, si $\frac{3}{4}aa$ est minus quàm cc ,

quo casu $\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ designabit verum valorem radices z , & $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$

$- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, falsum valorem, juxta ea quæ

pag. 162 annotavimus. At tertii, si $\frac{3}{4}aa$ majus fuerit quàm cc , quo

casu utraque radix est vera. Vbi porro notandum, æquationem

posteriorem $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$,

postquam $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc$ non fuerit minus quàm $\frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a$

$\sqrt{aa+cc}$, sive, quod idem est, cc non minus quàm $8aa$, duas admittere falsas radices, quemadmodum p. 165 monuimus, quæ sunt

$-\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, &

$-\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Ita ut

quatuor sint radices binarum præcedentium æquationum sive æquationis

$$z^4 + \frac{1}{2}aa z z - a^3 z + \frac{5}{16}a^4 \propto 0,$$

nempe $z \propto \frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z \propto \frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z \propto -\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z \propto -\frac{1}{2} \sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Et quandoquidem supra feceramus $z + \frac{1}{2}a \propto x$, in-

Qq 3

notescit,

notescit, quantitatem x , ad quàm cognoscendam omnes
hasce operationes instituimus, esse

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}] \\ \text{vel } & \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \\ \text{vel } & \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \\ \text{vel denique } & \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}. \end{aligned}$$

Ut liquet ex iis, quæ proximè annotata sunt.

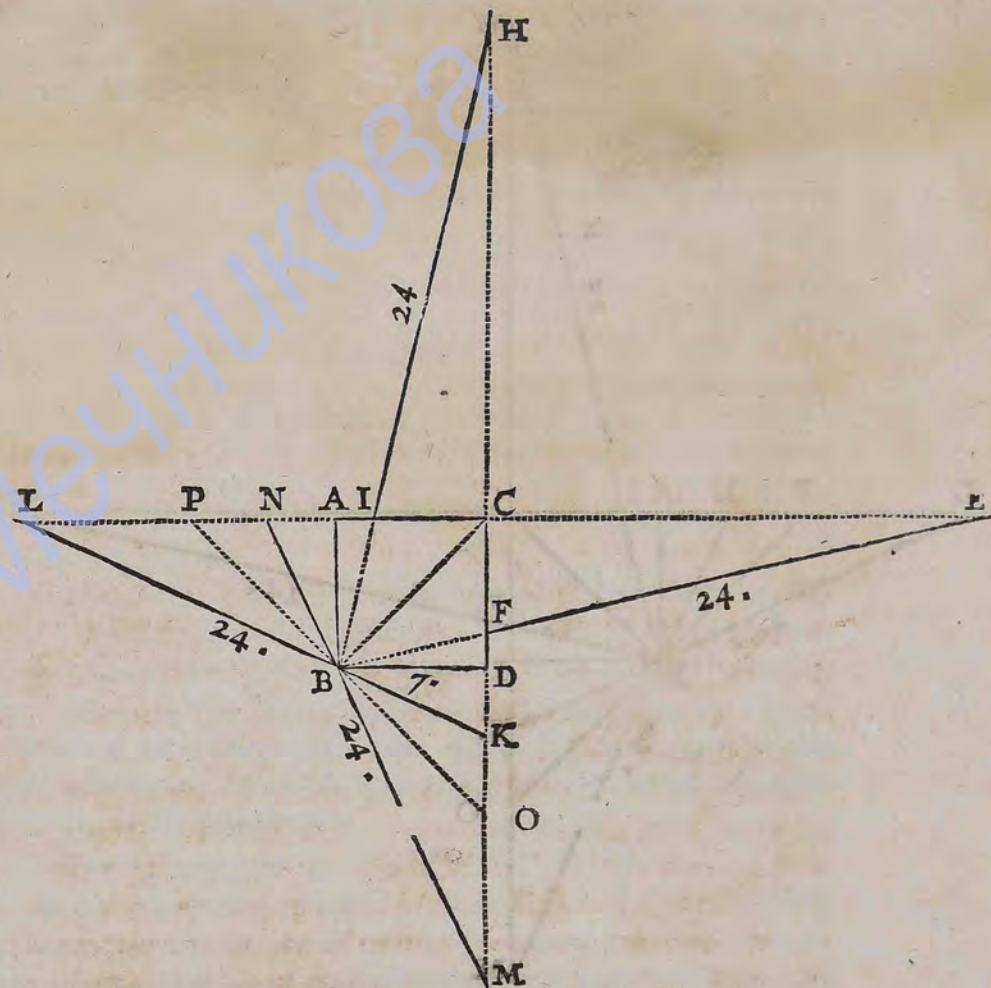
¶ Vbi per præcedentes regulas cognoscitur, radicem ejus,
quæ est longitudo lineæ DF , esse $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$

$-\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}]$ Vbi patet, quòd ex
quatuor radicibus supra expositis, æquationis $x^4 - 2ax^3 + \frac{2aa}{c}xx - 2a^3x + a^4 = 0$, quarum binæ priores semper veræ sunt,
seu plus quàm 0, D. des Cartes eam tantùm sibi delegerit, quæ
ad quantitatem lineæ DF , pro qua inveniendâ x posuerat desi-
gnandam inservire possit, & reliquam veram $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$
 $+\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ neglexerit, eò quòd lineam
ipsâ DC majorem exhibeat.

Vide figu-
ram p. 83.

Potest autem hîc eleganter ostendi usus, quem radices tam fal-
sæ quàm veræ alicujus æquationis in Geometria habent, ac quo
pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem
perducamur; sic ut nullus casus existat, quem non detegamus, at-
que ejusdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim
est, quòd, quemadmodum veræ radices in Arithmetica (ut supra
indicavimus) quantitatem aliquam designant, majorem quàm ni-
hil, & falsæ defectum alicujus quantitatis, seu quantò nihilo sunt
minores, sic in Geometria veræ radices eas communiter lineas
designent, sensu illo, quales inveniendæ proponuntur, at verò
falsæ, sensu contrario. Adeò ut si veræ accipiantur in data recta
indefinita, à dato puncto versùs aliquod in ea punctum designa-
tum, progrediendo, falsæ in ipsa ab eodem puncto sumi debeant
versùs contrarium punctum, regrediendo.

Ut,

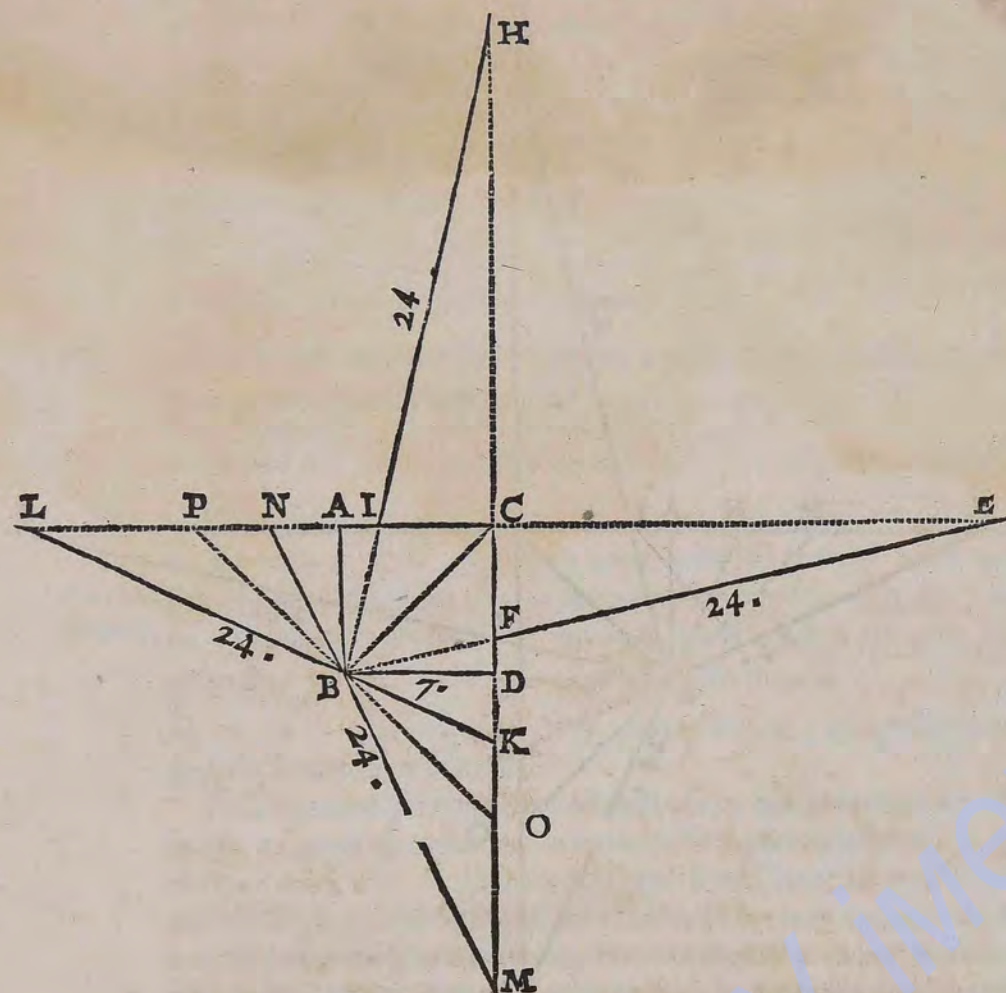


Vt, quoniam in exposito Problemate, ad inveniendam quan-
titem lineæ $DF = x$, sive ad cognoscendum quanta sumi debeat
longitudo à puncto D versùs C , ut fiant quæ quæruntur, inventa
est æquatio

$x^4 - 2ax^3 + \frac{2aa}{c}xx - 2a^3x + a^4 = 0$, quæ duas admittit
veras radices, utpote

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

& $\frac{1}{2}a$



& $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$:
hinc à puncto D versùs C sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una
est æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
designans lineam DF, & altera æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
designans lineam DH: deinde à puncto B ad inventa puncta
F & H

F & H ducendæ rectæ BF, BH, quarum hæc secet latus AC in I,
& illa idem latus productum in E: Eritque quælibet intercepta-
rum FE, IH æqualis datæ c. Porro, quoniam dicta æquatio duas
quoque admittit falsas radices, quæ sunt

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

& $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$:
ideo à puncto D, versùs alteram partem, sumendæ sunt duæ li-
neæ, quarum una est æqualis

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

designans lineam DK, & altera æqualis

$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
designans lineam DM. Quibus sic inventis, si ab inventis pun-
ctis K & M per punctum B ducantur lineæ occurrentes ipsi AC
productæ versùs A: erit similiter unaquæque interceptarum KL,
MN ipsi c æqualis.

Vnde apparet, quòd, etiamsi de sola DF inveniendâ quæstio
fuerit, nec quicquam de interceptis IH, KL, & MN cogitave-
rimus, ipsæ tamen ultro post æquationis resolutionem sese offer-
rant. Ita ut constet, per harum radicum cognitionem nos deduci
in notitiam uniuscujusque casus, quem Problema propositum
potest admittere; nec non, quo pacto quilibet ex ipsis est con-
struendus ac determinandus.

Vt, quoniam, ad explicandas radices æquationis

$zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, requiritur,
ut $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc$ non sit minus quàm $\frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, sive cc
non minus quàm $8aa$ (sicut dictum est pag. 309): Sic quoque
ad ducendas interceptas KL, MN opus est, ut cc non sit minus
quàm $8aa$. Quemadmodum facilè demonstrari potest, ducen-
do tantum rectam OP ipsi BC perpendicularem: siquidem recta
OP rectarum omnium, quæ per punctum B duci possunt, mini-
ma existit. Cujus quadratum cum duplum sit quadrati ex PC, &
hoc duplum quadrati ex BC, & hoc rursus quadrati ex BD du-
plum: erit quadratum ipsius OP quadrati ex BD octuplum.
Hæc igitur ad ducendas interceptas KL, MN Problemati præfi-
genda est determinatio.

Porro, quod ad reliquas interceptas attinet, ut FE & IH, æ

R r

sem-

semper sic duci possunt, ut datis rectis sint æquales, nec est Problema eo casu determinationi obnoxium.

In numeris, esto $BD \propto a \propto 7$, $EF \propto c \propto 24$, fietque æquatio quæ sita $x^4 - 14x^3 - 478xx - 686x + 2401 \propto 0$. Quæ cum dividi nequeat per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, tollo secundum ejus terminum, & fit æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \propto 0$. Quæ ad tres dimensiones reducta dabit æquationem $y^6 - 1103y^4 + 329375yy - 19140625 \propto 0$. Hæc autem cum dividi possit per $yy - 625 \propto 0$, arguitur y esse 25, quâ mediante dividetur æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \propto 0$ in duas æquationes, $zz - 25z - 50\frac{3}{4} \propto 0$, & $zz + 25z + 124\frac{1}{4} \propto 0$: fientque radices prioris $z \propto 12\frac{1}{2} + \sqrt{207}$, & $z \propto 12\frac{1}{2} - \sqrt{207}$; at posterioris $z \propto -12\frac{1}{2} + \sqrt{32}$, & $z \propto -12\frac{1}{2} - \sqrt{32}$. Verum quoniam, ad tollendum secundum terminum primæ æquationis, supposita fuit $x \propto z + \frac{1}{2}a$: hinc radices ejus erunt $x \propto 16 + \sqrt{207}$, & $x \propto 16 - \sqrt{207}$, ut & $x \propto -9 + \sqrt{32}$, nec non $x \propto -9 - \sqrt{32}$. Et liquet DF fore $16 - \sqrt{207}$, DH $16 + \sqrt{207}$, DK $9 - \sqrt{32}$, ac denique DM $9 + \sqrt{32}$.

Eodem modo, si BD fuerit 3, & FE 4, inveniatur æquatio $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x + 81 \propto 0$, quæ similiter per $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 81 dividente dividi nequit: unde sublato secundo ejus termino, fiet æquatio $z^4 * - 11\frac{1}{2}zz - 75z - 10\frac{11}{16} \propto 0$, quæ ad tres dimensiones reducta, dabit æquationem $y^6 - 23y^4 + 175yy - 5625 \propto 0$. Hæc, cum per $yy - 25 \propto 0$ dividi possit, sequitur y fore 5. Vnde divisâ æquatione præcedente in duas æquationes $zz - 5z - \frac{3}{4} \propto 0$, & $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \propto 0$, inveniemus $z \propto \sqrt{7} + 2\frac{1}{2}$, vel $z \propto \sqrt{7} - 2\frac{1}{2}$. Quæ binæ tantum radices ex utraque æquatione erui possunt, cum posterior æquatio $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \propto 0$ sit impossibilis, per ea, quæ p. 165 exposuimus, adeoque nullas admittat radices nec veras nec falsas, sed tantum imaginarias. Quibus radicibus si addatur $1\frac{1}{2}$ (quoniam ad tollendum secundum terminum primæ æquationis posuimus $x \propto z + 1\frac{1}{2}$), habebitur $x \propto \sqrt{7} + 4$, vel $x \propto \sqrt{7} - 1$. Id quod monstrat lineam DF sumendam esse æqualem $\sqrt{7} - 1$, & lineam $DH \propto \sqrt{7} + 4$. Ex quibus constat, quod, postquam æquatio inventa $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x - 81 \propto 0$ nullam agnoscat radicem falsam, (quant-

(quandoquidem radices æquationis $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \propto 0$, tantummodo sunt imaginariæ, & æquatio impossibilis) ideo similiter nulla linea, cujus longitudo sit 4, per punctum B duci, atque à rectis CA , CD intercipi possit.

Cæterum, ne quid ad penitiorum intellectum harum regularum, quibus hîc in reducendis ac dividendis æquationibus uli sumus, deficiat, visum fuit sequentia adjicere.

Hinc si, exempli causâ, æquatio reducenda sit $x^4 * - pxx - qx + r \propto 0$, investigare oportet ex quibus binis æquationibus produci queat æquatio, quæ reducendæ similis existit. Quocirca cum, supponendo $xx + yx + z \propto 0$ ac $xx - yx + v \propto 0$, ex mutua harum duarum multiplicatione producat

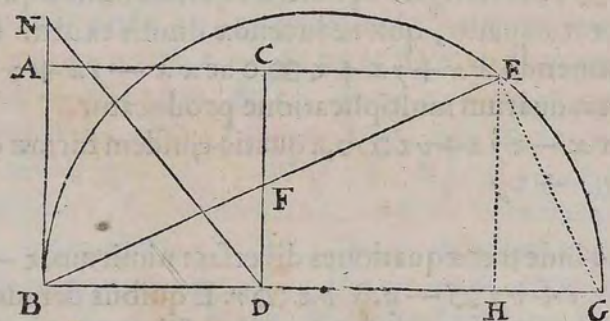
$$x^4 * + zxx - zyx + vz \propto 0, \text{ æquatio ejusdem formæ cum pro-} \\ -yy + vy \\ + v$$

posita, elicio inde tres æquationes diversas: nimirum, $z - yy + v \propto 0$, $-p$, $-zy + vy \propto 0$, & $vz \propto r$. E quibus deinde, si ad inveniendam quantitatem y , in locum z & v subrogentur earum valores $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ & $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, emerget æquatio $y^6 - 2py^4 + \frac{pp}{4r}yy - qq \propto 0$. Inventâ autem quantitate y , loco duarum præcedentium æquationum $xx + yx + z \propto 0$ ac $xx - yx + v \propto 0$ scribo hæc duas $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \propto 0$ ac $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$. Et patet quæsitum. Idem pariter de cæteris æquationibus, quarum signa ab allatæ signis sunt diversa, est intelligendum, è quibus omnibus postea inter se collatis dictarum regularum veritas penitus elucescit. Vbi etiam liquet, si valor ipsius yy per divisionem superioris æquationis Cubicæ inveniri possit, Problema, quod ad æquationem propositam $x^4 * - pxx - qx + r \propto 0$ perducitur, fore omnino Planum; sin minus, illud ipsum tunc esse Solidum.

Denique ex his quoque emanat, quo pacto regula generalis reducendi omnes æquationes altiores, pag. 84 ab Authore addacta, intelligi nec non ad praxin revocari debeat.

Cum aliàs; si pro ea supponeretur DG , multò difficilius ad Æquationem, sed quæ simplicissima foret, perveni-

veniremus. Quod quidem hic refero, ut vobis indicem, quod, cum Problema propositum non est Solidum, si quaerendo illud unâ viâ ad Aequationem deveniatur valde compositam, tum communiter aliâ viâ ad simpliciore Aequationem perveniri possit.] Modus autem, quo ad Aequationem dictam pervenerim, talis est.

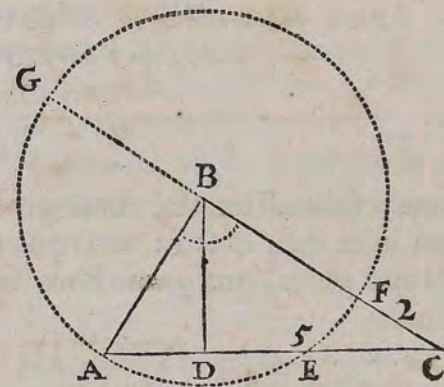


Iungatur E G, ductâque E H parallelâ ipsi C D vel A B, po-
 natur B D vel D C $\propto a$, F E $\propto c$, B F $\propto y$, & D G $\propto x$. Hinc
 cum E H æqualis sit ipsi C D vel D B, & triangulum E H G si-
 mile triangulo B D F: erit & E G æqualis B F, hoc est, $\propto y$. Eo-
 dem modo similia sunt triangula B G E & B E H: unde erit, ut
 B G, seu $a + x$, ad G E, seu y ; ita B E, seu $y + c$, ad E H, seu a .
 Ac proinde ductis tum mediis tum extremis in se invicem, fiet
 æquatio inter $yy + cy$ & $aa + ax$, vel inter yy & $-cy + aa$.
 Non secus, triangula B F D & B E H sunt similia: quare, si fiat
 ut B F, seu y , ad B D, seu a ; ita B E seu $y + c$ ad B H; erit B H
 $\propto \frac{ay + ac}{y}$. Subductâ autem B H ex B G seu $a + x$, relinquetur
 H G $\propto \frac{xy - ac}{y}$. Porro cum B H, H E, & H G tres sint propor-
 tionales: hinc si multiplicetur B H per H G, hoc est, $\frac{ay + ac}{y}$
 per $\frac{xy - ac}{y}$, erit productum $\frac{axyy + acxy - aacy - aacc}{yy}$ æqua-
 le ei, quod fit ex H E in se, hoc est, aa ; & per consequens
 $xyy - ayy \propto \frac{+ac}{-cx}y + acc$, unde $yy \propto -cy + \frac{acc}{x-a}$. Cæterum
 cum

cum illa, quæ eidem sunt æqualia, inter se quoque sint æqualia, erit $-cy + \frac{aa}{ax} \infty -cy + \frac{acc}{x-a}$. Ac proinde ablatis utrinque æqualibus, reliquumque multiplicando per $x-a$, habebitur $axx - a^3 \infty acc$, ideoque $xx \infty aa + cc$. Quod erat ostendendum.

Sed lubet hîc aliud exemplum non inelegans afferre, quod mihi à Doctissimo, ac in omni studiorum genere versatissimo D. Marco Meibomio, est suppeditatum, cujus operâ Aristoxenus, Alypius, alique Veteres Musici pristino nitore sunt restituti.

Datis trianguli rectanguli ABC , minore latere AB , & differentiâ segmentorum basis EC , invenire differentiam laterum FC .



Ponatur $AB \propto a$,
 $EC \propto b$,
 $FC \propto x$:
eritque $GC \propto 2a + x$.

$$\frac{EC}{b} = \frac{FC}{x} = \frac{GC}{2a + x} = \frac{AC}{\frac{2ax + xx}{b}}$$

R r 3

2 A X

$$\begin{array}{r}
 2ax + xx \\
 2ax + xx \\
 \hline
 + 2ax^3 + x^4 \\
 4aaxx + 2ax^3 \\
 \hline
 4aaxx + 4ax^3 + x^4 \propto 2aa + 2ax + xx \\
 bb
 \end{array}$$

$$4aaxx + 4ax^3 + x^4 \propto 2aabb + 2abbx + bbxx$$

$$x^4 + 4ax^3 + \frac{4aa}{bb}xx - 2abbx - 2aabb \propto 0.$$

Quoniam verò hæc æquatio dividi nequit per x & a , vel per x & b , vel per x & $2a$, vel per x & $2b$, hinc tollendus est secundus terminus, ut reducatur ad aliam tres tantum dimensiones habentem: quod fiet ponendo $z - a \propto x$

$$\begin{array}{r}
 z^4 - 4az^3 + 6aaz^2 - 4a^3z + a^4 \propto x^4 \\
 + 4az^3 - 12aaz^2 + 12a^3z - 4a^4 \propto + 4ax^3 \\
 + 4aaz^2 - 8a^3z + 4a^4 \propto + 4aaxx \\
 - bbzz + 2abbz - aabb \propto - bbxx \\
 - 2abbz + 2aabb \propto - 2abbx \\
 - 2aabb \propto - 2aabb.
 \end{array}$$

$$z^4 * - \frac{2aa}{bb}zz * + \frac{a^4}{aabb} \propto 0. \text{ Quia autem}$$

hic post sublationem secundi termini contingit æquationem esse Quadratam, cum in ea desit z^3 & z : non opus est ulterius progredi, cum radix ejus per ea, quæ primo libro sunt ostensa inveniri possit. Erit enim

$$zz \propto aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb},$$

$$\& z \propto \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb} + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}, \text{ ac proinde}$$

$$x \propto -a + \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb} + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}.$$

Vbi notandum, si pro majori latere BC ponatur x , æquationem quæsitam fore quadratam: utpote,

$$x^4 * - \frac{2aa}{bb}xx * + \frac{a^4}{aabb} \propto 0, \text{ sive } x^4 \propto + \frac{2aa}{bb}xx - \frac{a^4}{aabb}, \text{ cu-}$$

jus radix est $xx \propto aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, hoc est,
 $x \propto \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb} + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$. Cujus sanè cum præcedente convenientia ex ipso schemate est perspicua. Quod si verò pro AE , duplo minori segmento, ponatur x , fiet Æquatio
 $xx \propto -bx + 2aa$, cujus radix est $x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + 2aa}$.

Quæ

Quæ loco alterius exempli haberi queunt, quorum nos admonet Author pag. 84.

Non dissimilis erit quæstio, si datis $AB \propto a$, & $DC \propto b$, quæ-ratur $FC \propto x$. Fiet enim æquatio

$$x^4 + 4ax^3 + \frac{6aa}{bb}xx + \frac{4a^3}{2abb}x + \frac{a^4}{2aabb} \propto 0. \text{ In qua si tollatur}$$

secundus terminus, ponendo scilicet $z - a \propto x$, prodibit æqua-tio $z^4 * - bbzz * - aabb \propto 0$, sive $z^4 \propto bbzz + aabb$, cujus

radix est $zz \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, hoc est,

$$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb} + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}, \text{ adeoque } x \propto -a +$$

$\sqrt{\frac{1}{2}bb} + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Sed si quæ-ratur $BC \propto x$, erit æquatio
 $xx \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, cujus radix est $x \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb} + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Cujus cum præcedente consensus ex figura perspicitur. Denique si quæ-ratur AD , habebitur æquatio $xx \propto -bx + aa$, cujus ra-dix est $x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Quod similiter superioris mo-niti non inelegans est exemplum.

His adde sequentem quæstionem, quam olim ab Arithmetico subtilissimo, D. Nicolao Huberti à Persyn, Harlemensi, fautore meo honorando, solvendam accepi.

Invenire quatuor numeros, unitate se invicem exce-dentes, qui inter se multiplicati faciant 100.

Ponatur primus x , secundus $x + 1$, tertius $x + 2$, & quartus $x + 3$. Fietque æquatio $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x \propto 100$, vel $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 \propto 0$. cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, & 100. Divisio verò tentata per x & 1, vel per x & 2, vel per x & 4 & c. non succedit. Hinc sublato secundo termino, prodibit æquatio $z^4 * - 2\frac{1}{2}zz * - 99\frac{7}{16} \propto 0$, vel $z^4 \propto 2\frac{1}{2}zz + 99\frac{7}{16}$, cujus radix est $zz \propto \sqrt{101} + 1\frac{1}{4}$, hoc est, $z \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}}$. Ac proinde, cum ibi tollendo secundum terminum posuerimus $x \propto z - 1\frac{1}{2}$, fiet $x \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$. Eritque quæsitorum numerorum, pri-mus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, secundus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, ter-tius $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$, & quartus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$. Quod facile probari potest.

Vbi notandum, si cum hujus quæstionis Authore pro primo numero ponamus $x - 1\frac{1}{2}$, pro secundo $x - \frac{1}{2}$, pro tertio $x + \frac{1}{2}$, pro

pro quarto $x + 1 \frac{1}{2}$, quæstionem facilius solvi posse. Invenitur enim æquatio $x^4 \propto 2 \frac{1}{2} x x + 99 \frac{7}{16}$, omnino ut præcedens, denominata à radice z : unde quæsitum numeri fiunt ut supra. Verum difficile satis foret in hæc hypotheses incidere, non secus quàm in superiorem Pappi constructionem, sicut Author innuit pag. 83.

Restat jam exemplum aliquod exhibendum, ubi æquationem ad Quadratam reducere non licet, & Problema Solidum existit. Quale est illud, quod ante annos aliquot sibi ad investigandum proposuit Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. Ioannes de Wit, Consiliarius & Pensionarius sive primarius Hollandiæ West-Frisiæque minister, Mathematicum peritissimus. à quo insignem tractatum, brevi, si volet Deus, expectare poteris, in quo Planorum atque Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter quàm Cartesius exponit.

Datis in superiori triangulo rectangulo ABC , segmento basis $DC \propto a$, & differentiâ laterum $CF \propto b$; invenire AB , latus minus.

Esto $A B \propto x$, fietque æquatio $x^4 + 4bx^3 + 6bbxx + 4b^3x + b^4 - 2aabb \propto 0$. Quæ cum dividi nequeat per x & b , tollo secundum ejus terminum, statuendo $z - b \propto x$, unde emergit æquatio $z^4 - 2aaz + 2aabz - aabb \propto 0$, quippe quæ invenitur, quærendo latus majus BC . Hanc porrò reduco ad aliam, tres tantum dimensiones habentem, juxta regulam pag. 79, fietque æquatio $y^6 - 4aay^4 + 4a^2abb yy - 4a^4bb \propto 0$. Quæ cum dividi nequeat per binomium aliquod, constans ex quantitate incognitâ yy & quantitate cognitâ, ultimum terminum $4a^4bb$ dividente, indicio est, Problema propositum esse Solidum, adeoque non nisi per Conicas sectiones solvi posse. Neque minus vitium est, solutionem ejus post hæc tentare per lineas rectas & circulos, quàm adhibere Conicas sectiones ad constructionem eorum, quæ per lineas rectas & Circulos construi possunt, ut monet D. des Cartes pag. 79.

In numeris, esto $DC \propto 5$, $CF \propto 2$, $AB \propto 1 \frac{1}{2}$, eritque æquatio $1 \frac{1}{2} z^4 + 8z - 26z - 68z - 84 \propto 0$. Quæ cum dividi non possit per $1 \frac{1}{2}$ plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 84 dividente, aufero secundum terminum $8z$, & fit, $1 \frac{1}{2} z^4 - 50z + 100N - 100 \propto 0$. Hæc autem ad tres dimen-

ensiones reducta producit $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \propto 0$. quæ cum similiter dividi non possit per $xx +$ vel — aliquo numero, ultimum terminum dividente: sequitur Problema in datis numeris esse Solidum, lineamque AB per planorum Geometriam sive per regulas primo libro expositas non posse inveniri.

Non dissimilis erit quæstio, si, datis $AD \propto a$, $FC \propto b$, quærat-
tur $BC \propto x$. Invenitur enim æquatio

$x^4 - 4bx^3 + 6bbxx - 4b^3x + b^4 - 2aabb \propto 0$. Vnde ponendo $x \propto z + b$, emerget æquatio $z^4 - 2aaz - 2aabz - aabb \propto 0$. eadem nempe, quæ provenit, quærendo $AB \propto z$.

Porrò, si exemplorum copiam desideres, potes rursus ex iisdem datis quærere $EC \propto x$, & habebis

$x^4 + 4ax^3 + 4a^2ax - 8abbx - 8aabb + b^4 \propto 0$. Cujus secundum terminum si tollas, ponendo $z - a \propto x$, obtinebis $z^4 - 2aaz - 4abbz - 2aabb + b^4 \propto 0$, eandem, quam si quæras $DC \propto z$.

Vbi si denique quæras BD , invenies hanc æquationem:

$x^8 - 2a^4x^4 - 4a^4bbxx + a^4b^4 - 2a^5bb \propto 0$. Sed hæc forsitan nimia videbuntur.

E quibus colligere licet: quòd, Problemate aliquo Solido existente, si per viam aliquam perveniatur ad Æquationem valde compositam, communiter etiam per aliam viam ad simpliciorum deveniri possit, veruntamen pauciores quàm tres dimensiones non habentem.

Iam verò postquam compertum est, Problema propositum esse Solidum; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum ascendat; sive ipsa non altius quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum sectionum, quæcunque illa tandem sit, &c.] Ex his notandum est, quoties in proposita quæstione data est aliqua Conica sectio, & Æquatio ad 3 vel 4 tantum dimensiones ascendit, tunc eam semper ope illius datæ Conicæ sectionis per solam regulam & circinum solvi posse. Adeò ut pro Plano Problemate haberi quodammodo possit, etiamsi reverà sit Solidum, ut etiam ab Authore hîc appellatur.

Hujus rei elegans exemplum suggerere potest Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in scholio Prop^{nis} 30 libri 4^{ti} Collectionum Mathematicarum. In cujus solutionem eos, qui id per Conica vel Linearia, hoc est, per improprium genus solvere quæsi verunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctissimus ac de Mathematicis studiis perinde meritis Alexander Andersonus in exercitatione sua 5^{ta} dictum Problema non levibus indiciis sequentis argumenti fuisse innuit, seque ibidem scribit Analyticâ suâ duce tandem reperisse absque solida inclinatione (ut Pappus loquitur) non posse definiri: visum fuit id ipsum hîc loci, in hoc rationum æquilibrium autoribus istis sic dissentientibus, cuivis inquirendum proponere.

P R Ō B L E M A.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim si in hujus Problematis solutione investiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæsitâ recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen secundum regulam generalem p. 85 ope ejusdem datæ Parabolæ quàm facillimè construi poterit, utendo tantum rectis lineis & circulo. Cujus porro demonstrationem universalem, quam sibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutissimus pariter atque eruditissimus noster Chr. Hugenus concinnavit, cum ipsa jam pridem nobis aliisque ab eo communicata fuerit, nec illa etiam hujus loci existat, eandem hîc prætereundam duximus.

T Atque ita *Æquatio reducenda ad hanc formam: $z^3 \propto^* a p z. a a q$, si incognita quantitas tres tantum dimensiones habeat; aut ad hanc: $z^4 \propto^* a p z z. a a q z. a^3 r$. si quatuor obtineat dimensiones; seu, sumendo a pro unitate, ad hanc: $z^3 \propto^* p z. q$; aut ad hanc: $z^4 \propto^* p z z. q z. r$.]* Vbi apparet, hujus Geo-

Geometriæ Methodum requirere, ut, literæ, quæ in priori æquatione pro unitate est accepta, quadratum reperiatur in ultimo termino; in posteriori verò æquatione, ut literæ, quæ pro unitate in termino $z z$ est accepta, quadratum reperiatur in termino z , ac ejus cubus in termino ultimo. Etenim si habeatur æquatio $z^3 \propto^* b b z. c^3$, ac illius loco alia desideretur, cujus penultimus terminus habeat a , ac ultimus $a a$: Fiat ut a ad b , sic b ad quartam, quæ vocetur p : eritque $a p \propto b b$; Rursus, fiat ut $a a$ ad $c c$, sic c ad quartam, quæ sit q ; five etiam (quòd eòdem redit) ut a ad c , sic c ad tertiam, quæ vocetur d ; ac denuo ut a ad d , sic c ad q : eritque $a a q \propto c^3$. Vnde pro $z^3 \propto^* b b z. c^3$ scribi poterit $z^3 \propto^* a p z. a a q$, five, sumendo a pro unitate: $z^3 \propto^* p z. q$.

Nec aliter fit si habeatur $z^4 \propto^* b b z z. c^3 z. d^4$. Substituto enim $a p$ in locum $b b$, & $a a q$ in locum c^3 (ut ante), faciendum est, ut a ad d , sic d ad quartam, quæ vocetur e , eritque $a e \propto d d$, ideoque $a a e e \propto d^4$. Vbi rursus, si fiat, ut a ad e , ita e ad tertiam, quæ vocetur r , erit $a r \propto e e$, ac proinde $a^3 r \propto d^4$. Ita ut pro æquatione propositâ $z^4 \propto^* b b z z. c^3 z. d^4$ reponi possit $z^4 \propto^* a p z z. a a q z. a^3 r$, five, sumendo a pro unitate: $z^4 \propto^* p z z. q z. r$. Quod erat ostendendum. Eadem est ratio æquationis pag. 97.

E quibus liquidò constat, quanti sit momenti in Geometria concipere unitatem, cum, præter ejus utilitatem, primo libro ostensam, non solum ejus beneficio æquationes 3 & 4, ut & 5 & 6 dimensionum ita præparentur, ut hæ juxta unam & illæ juxta aliam regulam resolvi queant; sed ipsæ etiam hoc pacto designatæ ad numeros referri, atque ad ipsarum radices explicandas inservire possint, adeoque, quænam inter Arithmeticam & Geometriam relatio ac convenientia existat, edoceant.

Deinde supponendo Parabolam $F A G$ jam descriptam esse, & axem ejus esse $A C D K L$, latusque rectum a seu I .] Vbi liquet, quòd, postquam in æquatione resolvenda quantitatem a seu unitatem, ut proximè est explicatum, subrogavimus, eamque juxta regulam pro latere recto Parabolæ $F A G$ assumpsimus, quo pacto Problemata omnia Solida unius ejusdemque Parabolæ ope solvi possint. Cum enim reduci semper queant ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, superiorum formula-

mularum, & una eademque quantitas a in earundem æquationum terminis subrogari semper possit, evidens est, ipsam unius ejusdemque Parabolæ ope construi posse. Idem intelligendum quoque est de æquationibus numericis trium quatuorve dimensionum, quarum nulla ex radicibus est rationalis, quarumque valor similiter per sectionem Conicam est determinandus. Ut supra fuit ostensum.

Vide figuram
p. 86 vel
89.

Cæterum ut hæc regula cuiusvis perspecta reddatur, concipiatur Parabola esse descripta FAG , cujus latus rectum sit ∞a , seu 1, & in axe ejus $ADKL$ assumptâ $AD \infty b$, fingatur ex D eidem perpendicularis esse erecta $DE \infty c$, centroque E intervallo $EH \infty d$ descriptus circulus FHG , qui Parabolam ab utraque parte axis secet in G & F : oporteatque investigare æquationem, cujus radix sit perpendicularis GK aut $FL \infty z$.

Ad quam inveniendam, dividatur zz , quadratum ex GK , per latus rectum seu a , & fit $AK \infty \frac{zz}{a}$. E qua subductâ $AD \infty b$, relinquetur DK seu $EM \infty \frac{zz}{a} - b$. Deinde, quoniam additis ED , hoc est, MK , & KG , tota MG est $\infty c + z$; & quadrata ex EM & MG simul addita faciant $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bz}{a} + bb + cc + 2cz + zz \infty dd$, quadratum ex EG : erit $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bz}{a} + bb + cc + 2cz + zz \infty dd$, hoc est, ordinatâ æqualitate, habebitur æquatio $z^4 \infty * + 2abzz - 2aacz + aadd$. Eadem quippe, quæ in-

$$\begin{array}{r} -aa \\ -aabb \\ -aacc \end{array}$$

venitur, ponendo $FL \infty -z$. Hinc si, exempli causâ, æquatio proposita construenda fuerit $z^4 \infty * + apzz - aaqz + a^3r$: erit, factâ separatim comparatione inter singulos terminos unius & singulos alterius, $b \infty \frac{a+p}{2}$, $c \infty \frac{1}{2}q$, &

$d \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$. Quod illud ipsum est, quod Authoris regula faciendum præcipit. Eodem modo reliquorum casuum constructio inveniri potest. Idem intellige de constructione æquationis pag^{na} 97, aliarumque hîc sequentium.

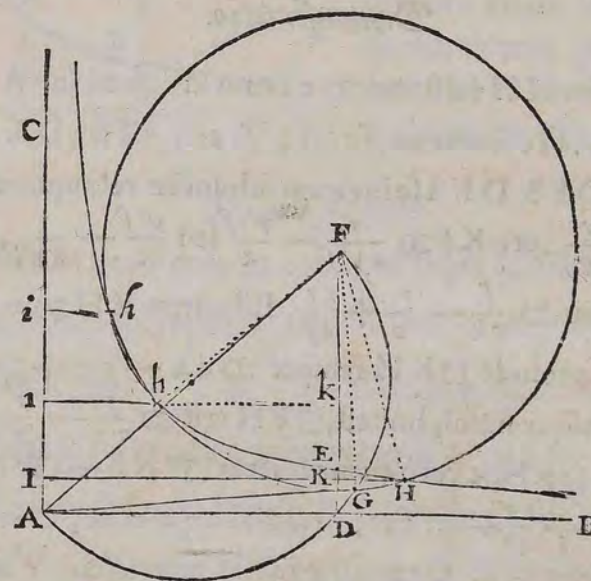
VV Adeo ut hæc regula omnium, quas aliquis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.] Quoniam autem, quo

quo pacto Solida Problemata etiam Hyperbolæ & Circuli beneficio, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum sunt reducta, construi possint, intelligere non modò jucundum quin imò utile existit: visum fuit hoc loco afferre regulam, ab ingeniosissimo atque integerrimo nostro Huddenio inventam, quâ ejusdem æquationis radices, prout ipsa ad hanc formam $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0$ aut ad hanc $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$ est revocata, ita ut omnes termini per signa $+$ & $-$ se invicem sequantur, inveniri valeant.

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS

$$z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0.$$

Ductis AB, AC , rectum angulum A efficientibus, sumptâque in AB lineâ $AD \infty \frac{1}{2}p$, agatur ex D ipsi AC



parallela DF . Deinde in hac invento puncto E , ita ut id, quod sub AD, DE continetur, sit $\infty \sqrt{s}$, describatur per E circa Asymptotos AB, AC Hyperbola HEh .

Porro assumptâ $DF \propto \frac{r}{2\sqrt{f}}$, jungatur AF ; & super AF descripto semicirculo ADF , collocetur in eo $AG \propto \sqrt{q}$, centroque F circulus describatur, transiens per inventum punctum G . Qui quidem Circulus Hyperbolam secabit vel tanget in tot punctis, quot æquatio diversas radices admittet, à quibus si ad lineam AC demittantur perpendiculares HI , hi , & hi : erunt ipsæ radices quæsitæ.

Vbi notandum, si AG major inveniretur, quàm ut semicirculo super AF descripto inscribi posset; aut etiam Circulus GHb adeò parvus esset, ut Hyperbolam HEb in nullo prorsus puncto secaret vel tangeret, nullam itidem tunc fore radicem in æquatione, quæ non esset imaginaria.

Demonstratio.

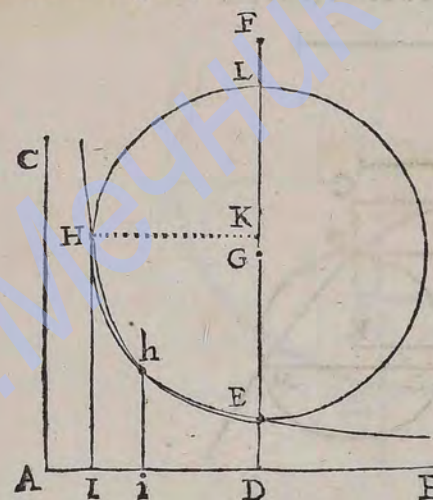
Etenim lineâ IH existente $\propto z$, cum id, quod sub AD , DE vel sub AI , IH continetur, sit $\propto \sqrt{f}$: erit AI seu $DK \propto \frac{\sqrt{f}}{z}$. Vnde cum DF & DK à se invicem subductæ relinquant KF , & DF sit $\propto \frac{r}{2\sqrt{f}}$: erit $KF \propto \frac{r}{2\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{z}$ seu $\frac{\sqrt{f}}{z} - \frac{r}{2\sqrt{f}}$, adeoque $\square KF$ semper $\propto \frac{f}{z^2} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4f}$. Est autem $KH \propto z - \frac{1}{2}p$ seu $\frac{1}{2}p - z$, ac proinde $\square KH$ semper $\propto zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hinc summa utriusque simul, hoc est, $\square FH$ erit $\propto \frac{f}{z^2} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4f} + zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hoc verò cum æquetur $\square AF - \square AG$, hoc est, $\propto \frac{1}{4}pp + \frac{rr}{4f} - q$: fiet, ordinatâ æqualitate, $z^4 - pz^3 + qzz - rz + f \propto 0$. Quæ est æquatio proposita. Vnde liquet IH esse $\propto z$.

CON-

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS

$$z^4 - pz^3 + qzz - rz + f \propto 0.$$

Ductis, ut ante, AB , AC , & in AB assumptâ $AD \propto \sqrt{q}$, agatur ex D ipsi AC parallela DF . Deinde in hac acceptis $DE \propto \frac{r}{q}$, & $EF \propto p$, describatur per E circa Asymptotos AB , AC Hyperbola EhH . Porro



sectâ DF bifariam in G , centro G & intervallo GE describatur circulus EHL , qui quidem Hyperbolam in tot punctis præter E secabit vel tanget, quot æquatio diversas radices admittet, è quibus si ad lineam AB demittantur perpendiculares HI , hi , erunt ipsæ radices quæsitæ.

Demonstratio.

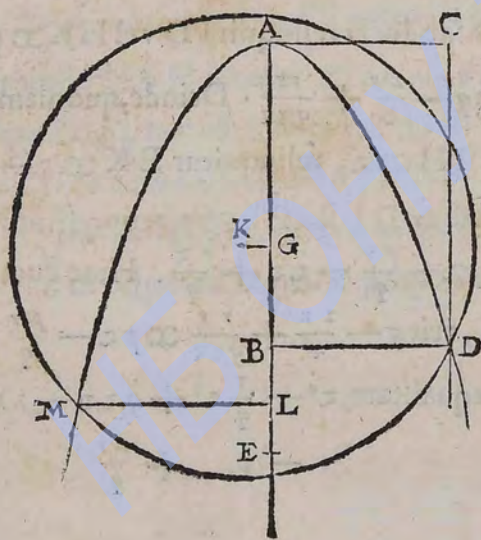
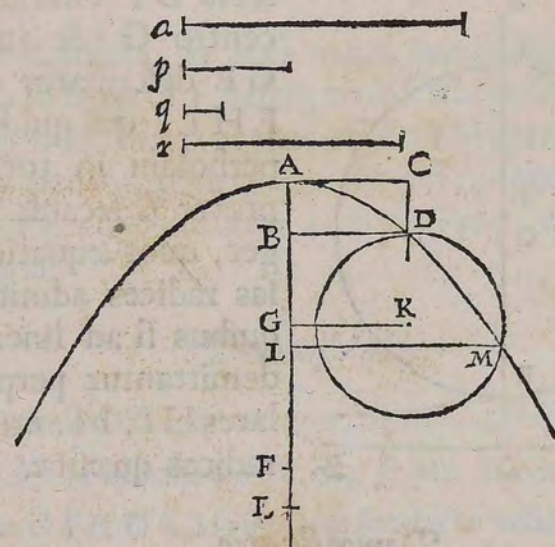
Quoniam, IH existente $\propto z$, AI , per supra dicta, est $\propto \frac{r}{qz}\sqrt{q}$, & eadem ab AD subducta relinquit ID vel $HK \propto \sqrt{q} - \frac{r}{qz}\sqrt{q}$: erit $\square$ ex $HK \propto q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qz^2}$. Deinde, quoniam $DE \propto \frac{r}{q}$ ablatâ ex DK seu $IH \propto z$, relinquitur $EK \propto z - \frac{r}{q}$; at verò $DK \propto z$ subtractâ ex DL seu $EF \propto p$, relinquitur $KL \propto p - z$: erit $\square EKL \propto pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Hinc cum $\square$ ex HK æquetur $\square EKL$, erit $q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qz^2} \propto pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Et sit, ordinatâ æqualitate, $z^4 - \frac{r}{q}z^3 + qzz - 2rz + \frac{rr}{q} \propto 0$.

$$-p + \frac{pr}{q}$$

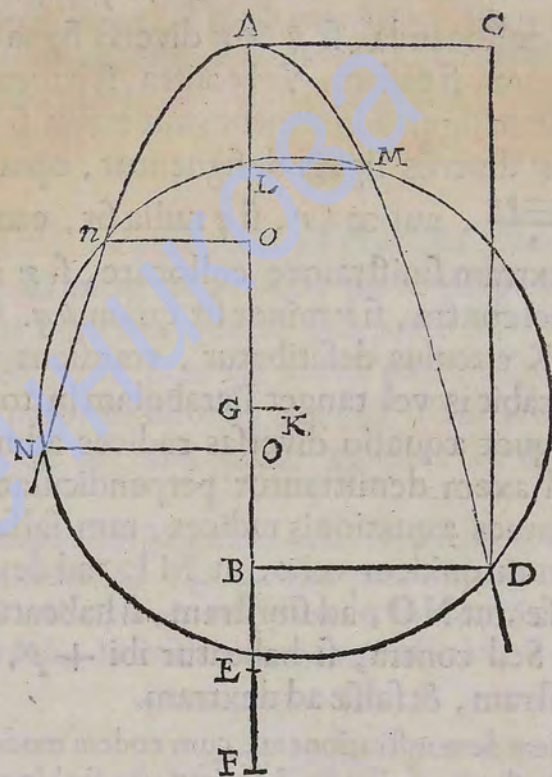
Quæ

Quæ æquatio dividi potest per $z - \frac{r}{q} \infty 0$, & fit $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$, æquatio proposita. Vnde liquet HI esse ∞z .

His subjunge sequentem regulam, à me inventam, quâ ope Circuli & Parabolæ Æquationes Cubicæ, in quibus 2^{us} terminus non est sublatus, construi possunt, prout ipsæ ad hanc formam $z^3 \propto pzz. aqz. aar$, aut ad hanc $z^3 \propto pzz^*.aar$; sive etiam (sumendo a pro unitate) ad hanc $z^3 \propto pzz.qz.r$, aut ad hanc $z^3 \propto pzz^*.r$, sunt reductæ. Ea autem talis est.



De-



Tt

pendi.

pendicularis $GK \propto \frac{r+pq}{2}$, aut $\propto \frac{1}{2}r$, si q nulla sit, eaque ad dextram collocanda, si p & r diversa signa habeant, aut ad sinistram, si eadem. Vel contra, si habeatur $-p$, & q & r iisdem signis adficiantur; aut etiam si habeatur $+p$, & q & r diversis signis designentur, oportet face-

Signum =
significat
differen-
tiam, quæ
est inter r
& pq .

re $GK \propto \frac{r-pq}{2}$, aut $\propto \frac{1}{2}r$, si q nulla sit, eamque, ut ante, ad dextram sinistramve collocare, si r sit major quàm pq ; vel contra, si r minor sit quàm pq . Quo peracto, si ex K circulus describatur, transiens per punctum D , secabit is vel tanget Parabolam in tot punctis præter D , quot æquatio diversas radices admittet; è quibus si ad axem demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falsæ, quàm veræ. Quarum quidem veræ, ut ML , ad dextram cadent, & falsæ, ut NO , ad sinistram, si habeatur $-p$ in æquatione. Sed contra, si habeatur ibi $+p$, veræ cadent ad sinistram, & falsæ ad dextram.

Cujus quidem demonstrationem, cum eodem modo fieri possit, quo illa Authoris paginæ 89, brevitatis studio hîc omittimus.

Vbi demum advertendum, regulam hanc habere etiam locum in Æquationibus Cubicis, quarum 2^{us} terminus est sublatus, si tantum in iis p intelligamus esse $\infty 0$, & veras radices ex eadem parte Parabolæ esse sumendas, quâ erecta est perpendicularis GK , & falsas ex altera, cum habetur $+r$ in æquatione; aut contra, si in ea habetur $-r$.

Cæterum cum & alias regulas huc afferre possem, quibus hæc æquationes sicut & superiores Quadrato-quadrata construuntur: tamen, ne in iis hîc recensendis nimis longus sim (quandoquidem infinitas invenire licet), suffecerit jam allatas, tanquam faciliores exposuisse, cæterasque etiam aliis quærendas reliquisse.

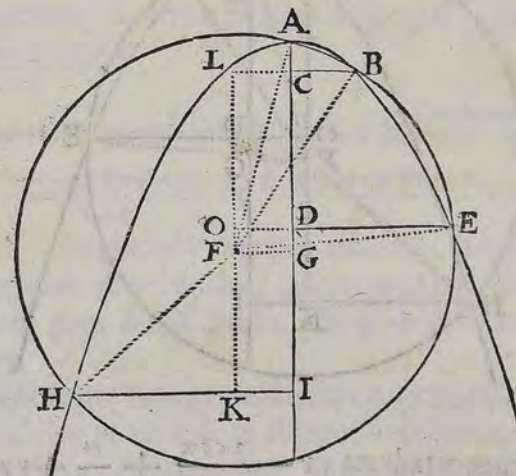
X *Falsa autem FL æqualis est duabus hisce QN & NV simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.]*
Veritatem proprietatis Parabolæ, quam hîc obiter adnotat Autor,

etor, & ad quam investigandam me ante annos aliquot Parisiis instigavit Doctissimus, ac Mathematicum peritiâ, non minùs quàm omnigenâ virtute, ornatissimus vir D. Claudius Mylon, I. C, sicut à me tum inventa fuit, sequenti Theoremate exponam.

THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis secuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ sunt ab altera parte. Quod si verò ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

Sit Parabola $HABE$, cujus axis AI , vertex A , Circulus autem ipsam secans HBE . Qui quidem primò transeat per verticem, secetque Parabolam ab una parte in puncto H , & ab altera in punctis B & E . Demissis autem ex punctis H , B , & E in axem



perpendicularibus HI , BC , & ED : ostendendum est, HI æqualem esse ipsis BC & ED simul sumptis.

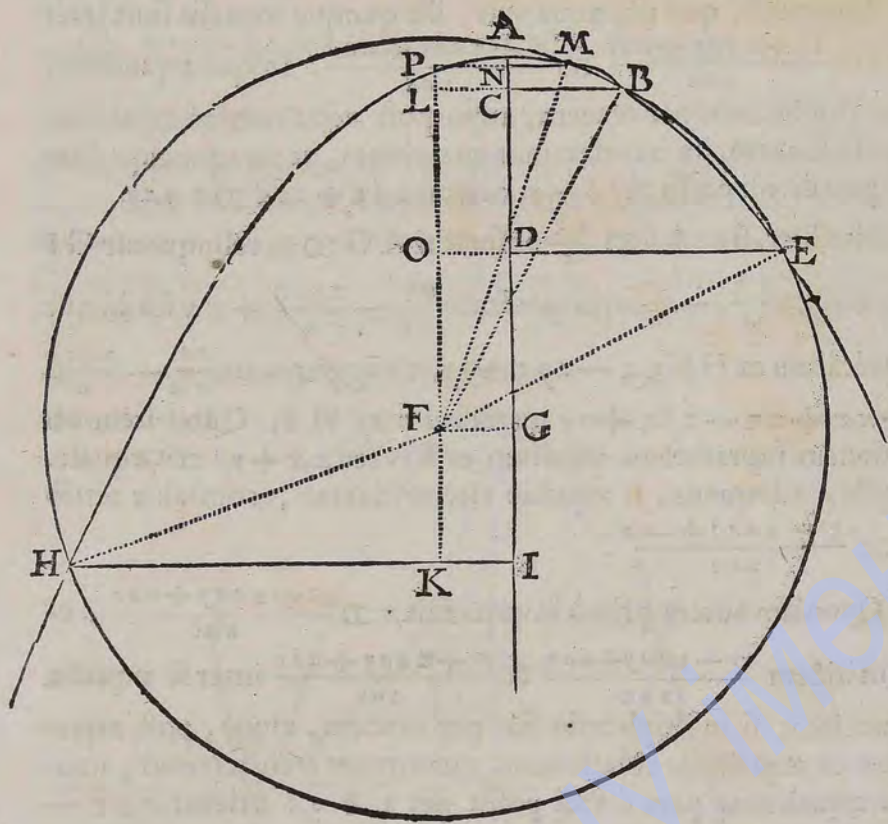
Esto latus rectum Parabolæ $\propto a$, $CB \propto c$, $DE \propto d$, $HI \propto z$, $AG \propto x$, & $FG \propto y$. Hinc cum, per 11 propositionem 1 libri

A geometric diagram of a sphere with a circular outline. A vertical line segment AI passes through the center O , representing the axis. A horizontal line segment DE passes through O , representing the equator. A point F is located on the axis AI below the center O . A point L is on the upper part of the sphere's surface. A point H is on the lower part of the sphere's surface. A line segment HL passes through F . A line segment AB is a chord of the sphere. A line segment BC is a chord. A line segment AC is a chord. A line segment CE is a chord. A line segment BE is a chord. A line segment AD is a chord. A line segment BD is a chord. A line segment CD is a chord. A line segment DE is a chord. A line segment AE is a chord. A line segment AF is a chord. A line segment BF is a chord. A line segment CF is a chord. A line segment DF is a chord. A line segment EF is a chord. A line segment GF is a chord. A line segment HF is a chord. A line segment IF is a chord. A line segment KF is a chord. A line segment LF is a chord. A line segment MF is a chord. A line segment NF is a chord. A line segment OF is a chord. A line segment PF is a chord. A line segment QF is a chord. A line segment RF is a chord. A line segment SF is a chord. A line segment TF is a chord. A line segment UF is a chord. A line segment VF is a chord. A line segment WF is a chord. A line segment XF is a chord. A line segment YF is a chord. A line segment ZF is a chord. A line segment AF is a chord. A line segment BF is a chord. A line segment CF is a chord. A line segment DF is a chord. A line segment EF is a chord. A line segment GF is a chord. A line segment HF is a chord. A line segment IF is a chord. A line segment KF is a chord. A line segment LF is a chord. A line segment MF is a chord. A line segment NF is a chord. A line segment OF is a chord. A line segment PF is a chord. A line segment QF is a chord. A line segment RF is a chord. A line segment SF is a chord. A line segment TF is a chord. A line segment UF is a chord. A line segment VF is a chord. A line segment WF is a chord. A line segment XF is a chord. A line segment YF is a chord. A line segment ZF is a chord.

Eodem modo auferendo $AD \propto \frac{d}{a}$ ex $AG \propto x$, relinquetur
GD

Postquam igitur evolvimus atque enodavimus propositionis
data, donec tandem pervenerimus ad æquationem $zx - cz = \frac{dd}{cd} \infty 0$,
restat ut illa quæsito respondeat, atque ejus beneficio propositi
T t 3 veritas

veritas eluceat, modò ex datis elici possit. Ideoque tentatâ divisione ejusdem æquationis per $z - c - d \infty 0$, ut constet, num verum sit, quod intenditur, nempe, z æquari $c + d$: reperitur divisionem fieri posse, & oriri $z + d \infty 0$. Et manifestum fit, z æquari $c + d$, sive HI æqualem esse ipsis BC , ED simul sumptis. Quod erat demonstrandum.



Vnde patet, si Circulus, transiens per verticem Parabolæ, eam in B vel E tangat, hoc est, rectas CB , DE sibi invicem æquales faciat, tunc quidem HI ipsius CB seu DE duplam fore. Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c , fiet æquatio $zz - cz - 2cc \infty 0$. Quæ dividi poterit per $z - 2c \infty 0$, & orietur $z + c \infty 0$. Id quod arguit z valere $2c$, hoc est, HI ipsius CB seu DE duplam esse.

Sed non transeat circulus HBE per verticem A , verum secet Para-

Parabolam ab una parte in puncto H , & ab altera in tribus punctis E , B , & M : Dico similiter HI æqualem esse ipsis ED , BC , & MN simul sumptis.

Positis enim iisdem quæ prius, esto præterea $MN \infty b$. Vnde, simili ratione, quâ ante, AN erit $\frac{b^2}{a}$. Sublatâ autem AN ex $AG \infty x$, relinquitur NG seu $PF \infty x - \frac{b^2}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2}$ si addatur quadrato rectæ $MP \infty bb + 2by + yy$, erit summa $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2} + bb + 2by + yy$ quadratum rectæ FM .

Quoniam autem in Circulo, ob æqualitatem radiorum, rectæ lineæ FB & FM sunt æquales, erunt quoque eorundem quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{a^2} + yy + 2cy + cc$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2} + bb + 2by + yy$ æqualia. Vnde, si demantur utrinque æquales quantitates & reliquæ multiplicentur per aa , atque quantitates in x ductæ ad unam æquationis partem transferantur, reliquæ verò ad alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aac y - 2aaby + aacc - aabb \infty 2accx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $c - b$, & orietur $c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab \infty 2acx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ac + 2ab$, & orietur $x \infty \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ FE & FM sint æquales, erunt etiam earum quadrata, nempe, $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{a^2} + dd + 2dy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2} + bb + 2by + yy$ æqualia. Quare demptis utrobique æqualibus, reliquisque ductis in aa , transeant porrò quantitates in x ductæ ad unam partem, & reliquæ ad alteram, fiet $d^4 - b^4 + 2aady - 2aaby + aadd - aabb \infty 2addx - 2abbx$. Dividatur utraque pars per $d - b$, orieturque $d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab \infty 2adx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ad + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$.

Iam verò, quoniam, quæ uni æqualia sunt, illa quoque inter se sunt

sunt æqualia, erit $\frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$
 $\infty \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Brevitatis verò causâ pro $b^3 + 2aay + aab$ scribatur $+e^3$ ductâque utrâque æqualitatis parte in $2a$, seu (quod idem est) diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur porro multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cd^3 + bd^3 + bcd + bdd + bbd + b^3d + aacd + aabd + ce^3 + be^3 \infty c^3d + c^3b + bccd + bbcc + bbcd + b^3c + aacd + aabc + de^3 + be^3$. Et, deletis utrinque æqualibus, restituitur valor quantitatis assumptæ e^3 , habebiturque $cd^3 + bd^3 + bcd + bdd + b^3d + aabd + b^3c + 2aay + aabc \infty c^3d + c^3b + bccd + bbcc + b^3c + aabc + b^3d + aady + aabd$. Rursus demptis utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam partem, reliquæ verò ad alteram, & divisio tandem instituatur per $d - c$, orieturque $cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc \infty 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM sint æquales, erunt pariter earum quadrata $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Vnde sublati utrinque æqualibus, reliquisque per aa multiplicatis, si transferantur porro quantitates, ita ut, quæ in x ductæ sunt, unam faciant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet $z^4 - b^4 - 2aaz - 2aaby + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z + b$, orieturque $z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab \infty 2azx - 2abx$. Et rursus utrinque per $2az - 2ab$, fietque

$$x \infty \frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}$$

Quoniam verò superius inventa fuit quantitas x æqualis $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$, hinc

$$\frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab} \&$$

$$\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$$

æqualia.

Bre-

Brevitatis autem causâ rursus pro $+b^3 + 2aay + aab$ scribatur $+e^3$, & $-e^3$ pro $-b^3 - 2aay - aab$. Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu (quod idem est), diviso utriusque denominatore per $2a$, fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3 + bz^3 - bcz - bbz + bbz + b^3z + aacz + aabz - ce^3 - be^3 \infty c^3z - bc^3 + bccz - bbcc + bbcc - b^3c + aacz - aabc + ze^3 - be^3$. Postea auferantur utrinque æquales quantitates, & restituitur valor quantitatis assumptæ e^3 , & fit $cz^3 + bz^3 - bcz - bbz + b^3z + aabz - b^3c - 2aay - aabc \infty c^3z - bc^3 + bccz - bbcc - b^3c - aabc + b^3z + 2aayz + aabz$. Denique deletis rursus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatibus in y ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, instituatur divisio per $z + c$, & orietur $2aay \infty czz - ccz + bzz - 2bcz + bcc - bbz + bbc$.

Verum cum & supra inventum fuerit $cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc \infty 2aay$, & quæ eidem sunt æqualia, ea quoque inter se sint æqualia, erit $czz - ccz + bzz - 2bcz + bcc - bbz + bbc \infty cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc$. Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituent, reliquæ verò alteram, fietque $czz \infty + ccz + cdd$. Deinde dividatur utrobique

$$\begin{array}{r} +b \\ +2bc \\ +bb \\ +2bcd \\ +bdd \end{array}$$

per $c + b$, ut oriatur $zz \infty + bz + dd$, five translatis omnibus

$$\begin{array}{r} +c \\ +cd \end{array}$$

ad unam partem: $zz - bz - dd \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -c \\ -bd \\ -cd \end{array}$$

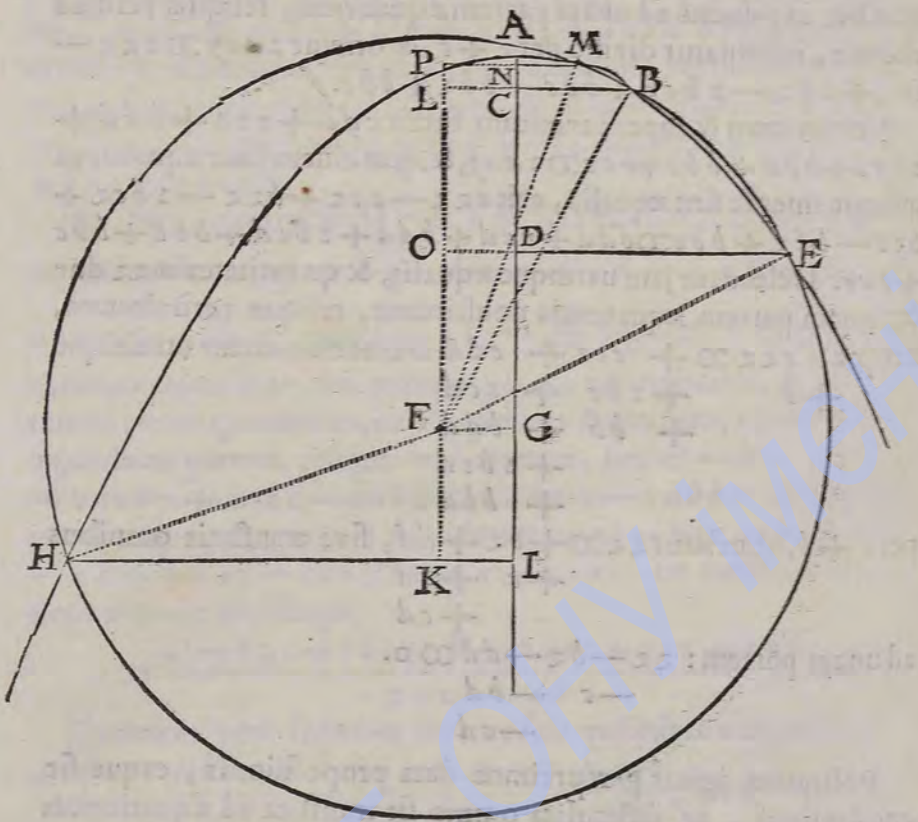
Postquam igitur percurrimus data propositionis, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis sit translata ad æquationem

$$zz - bz - dd \infty 0, \text{ superest ut ostendamus eam quæsito propositionis satisfacere, quantum quidem ex suppositis datis deduci}$$

Vu

duci

Vnde liquet, si circulus non transiens per verticem Parabolæ
eam tangat in M vel B, hoc est, rectas NM, CB sibi invicem æ-
quales faciat, tunc HI æqualem fore ipsi DE, unà cum dupla ipsius
NM vel CB. Si enim in hac ultima æquatione pro a scribatur b,



fiet æquatio $z^2 - 2bz - dd = 0$, quæ dividi poterit per $-2bd$

$d + 2b$, hoc est, HI æqualem esse compositæ ex DE & dupla NM seu CB.

Præterea hinc constat, (quod sanè animadversione dignum) si
 recta tangens Parabolam in aliquo puncto extra verticem ipsa ibi-
 dem quoque tangatur à Circulo non per verticem transeunte, qui-
 que Parabolam in eodem puncto secet, hoc est, ut rectæ NM,
 CB, & DE omnes tres sint inter se æquales: quòd tunc quidem
 HI ipsius NM, CB, vel DE tripla sit futura. Quippe conside-
 rando NM vel CB bis sumendam esse, propter hujus rectæ con-
 tactum in M vel B, ac deinde adhuc semel, propter Circuli & Pa-
 rabolæ in eodem puncto intersectionem. Vel etiam in æquatione
 inventa $z z - b z - d d \propto 0$ pro c & d scribendo b , ac deinde

$$\begin{array}{r} -c \\ -bd \\ -cd \end{array}$$

$22 - 2bz - 3bb\infty$ dividendo per $2 - 3b\infty$. oritur namque
 $2 + b\infty$. Id quod arguit 2 valere $3b$, hoc est, HI triplæ ipsius
 NM, CB, vel DE esse æqualem.

Denique secet Circulus HBE Parabolam extra verticem A, ab utraque parte axis in duobus punctis; hinc quidem in H & M; istinc verò in B & E. Dico itidem HI, MN simul sumptas ipsis BC, ED simul sumptis esse æquales.

Positis enim iisdem quæ prius, invenietur similiter, sicut ante ostendimus, quadratum ex FM esse $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Et quoniam per definitionem Circuli rectæ lineæ FB & FM sunt æquales, erunt quoque earum quadrata æqualia: $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Vnde deletis utrinque æqualibus, & reliquis per aa multiplicatis, si transferantur porro quantitates in x ductæ, ut unam partem æquationis efficiant, reliquæ verò alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aac y + 2aaby + aacc - aabb \propto 2accx - 2abbx$. Divisâ autem utrâque parte per $c + b$, orietur $c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab \propto 2acx - 2abx$. Vbi rursus si utrinque dividatur per $2ac - 2ab$, orietur $x \propto \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ FE & FM sint æquales, erunt
etiam earum quadrata $xx - \frac{2d dx}{a} + \frac{d^2}{a^2} + dd + 2dy + yy$ &

partem revocentur, reliquæ verò ad alteram, ac demum utraque pars æqualitatis dividatur per $z + c$, orietur $cz z - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto 2aay$.

Cum verò & supra inventum fuerit $cd d + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \propto 2aay$, & quæ eidem æquantur, inter se quoque sint æqualia, erit $cz z - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto cd d + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc$. Deleantur utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituent, reliquæ verò alteram, habebiturque $+cz z \propto +ccz + cdd$. Vbi tandem si utrobique divida-

$$\begin{array}{r} -b \\ -2bc + ccd \\ +bb - bdd \\ -2bcd \\ +bbd \end{array}$$

tur per $c - b$, orietur $zz \propto cz + dd$. Hoc est, si collocentur

$$\begin{array}{r} -b + cd \\ -bd \end{array}$$

quantitates omnes ad unam partem, erit

$$\begin{array}{r} zz - cz - dd \propto 0 \\ +b - cd \\ +bd \end{array}$$

Quare postquam percurrimus omnia propositionis data, ea-que sic enodavimus, ut difficultas omnis reducta sit ad æquationem $zz - cz - dd \propto 0$: superest ut ipsa contineat quæsitum

$$\begin{array}{r} +b - cd \\ +bd \end{array}$$

propositionis, modò sit verum atque ex datis deduci possit. Ad quod explorandum, videri debet, num æquatio inventa dividi possit per $z - c - d + b \propto 0$. Quare cum reperiat divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \propto 0$, sequitur quæsitum propositionis esse verum, hoc est, $z + b$ æquare $c + d$, five HI & MN simul sumptas æquales esse ipsis BC & ED simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Vnde liquet, si Circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in B vel E, hoc est, rectas CB, DE sibi invicem æquales faciat, tunc HI, MN simul sumptas ipsius CB vel DE duplas fore.

Si enim in hac ultima æquatione prodescribatur c , erit æquatio

tio talis: $zz - cz - 2cc \propto 0$, quæ dividi potest per $z - 2c +$

$+b + bc$
 $b \propto 0$, & oritur $z + c \propto 0$. Id quod arguit, z valere $2c - b$, five $z + b$ esse $2c$, hoc est, HI & MN simul sumptas æquales esse ipsi CB seu DE bis sumptæ.

Quare constat Theorematis veritas.

Si autem habeatur $z^3 \propto * - pz + q$, regula, cujus inventionem Cardanus [Sc.] Quò ea, quæ de exprimendis radicibus Æquationum Cubicarum Autor hîc breviter perstrinxit, cuivis manifestiora fiant: visum fuit post sequentis loci illustrationem afferre huc Appendicem, quam de Cubicarum Æquationum resolutione anno 1646 simul cum Organica Conicarum Sectionum descriptione in lucem emisimus, & nunc emendato hîc illic sensu cum additione quorundam subjungimus.

Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut hîc sex diversæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cum illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantum imaginarias.] Quoniam hîc nonnulli scrupulum sibi ipsis injiciunt, concipiendi, qui fieri possit, ut circulus aliquis hanc curvam in 6 diversis punctis secet: haud abs re fore credidi, si hoc loco exemplum, quod sibi jam pridem ingeniosissimus Huddenius, ad difficultatem hujus rei è medio tollendam, subjecit, adducerem.

Quocirca sumendo ad hoc æquationem $y^6 - 21y^5 + 169y^4 - 675y^3 + 1414yy - 1464y + 576 \propto 0$, cujus radices, ut, 1, 2, 3, 3, 4, & 8, sunt omnes veræ ac rationales, & ex his duæ, ut 3 & 3, ad calculi prolixitatem evitandam, inter se æquales: oportet, ad curvæ hujus descriptionem, assumere AB $\propto \frac{1}{2}p \propto 10\frac{1}{2}$,

$p \propto 21$ BK $\propto \sqrt{\frac{t}{v} + q - \frac{1}{4}pp}$ seu $n \propto \sqrt{\frac{479}{4}}$, & ED vel $q \propto 169$ T V $\propto \frac{21\sqrt{v}}{pn} \propto \sqrt{\frac{9216}{211239}}$. Deinde, ut inveniat $r \propto 675$ circulus PCN, oportet, acceptâ BL æquali ED $\propto 1414$ $t \propto 1464$ $v \propto 576$ $\sqrt{\frac{9216}{211239}}$, assumere LH $\propto \frac{t}{2n\sqrt{v}} \propto \sqrt{\frac{3721}{479}}$; & ex pun-

cto H erectâ perpendiculari HI $\propto \frac{r}{2nn} + \frac{1\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$

(id quod brevitatis causâ vocetur $\frac{m}{nn}$) $\propto \frac{2727}{479}$, in circulo cujus diame-

diameter IL inscribere $LP \propto \sqrt{\frac{f+pv}{nn}} \propto \sqrt{\frac{7672}{479}}$: eritque IP
radius quæsitæ circuli $\propto \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{11}{4nnv} - \frac{f}{nn} - \frac{pv}{nn}} \propto \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$.

Iam ut constet, circulum hunc ex I intervallo invento IP descriptum secare vel tangere curvam ACN in tot diversis punctis, quot æquatio inæquales habet radices, hoc est, hîc in 5 diversis punctis, cum propter duas æquales 3 & 3 circulus hanc curvam ibidem non secet sed tangat: considerandum est, lineam IM esse $\propto \frac{m}{nn} - y$ vel $y - \frac{m}{nn}$, adeoque quadratum ex IM semper esse $\frac{mm}{nn} - \frac{2my}{nn} + yy$, & lineam GH vel CM semper

$$\propto -y^3 + \frac{1}{2}py + \frac{1}{2}\sqrt{v} - \sqrt{v}. \text{ Ac proinde, si, tribuendo radici } y$$

unumquemque ex supra dictis valoribus, ex lineis hisce, per 47 primi Elem. Eucl., quæramus lineam IC, eamque singulis vicibus æqualem reperiamus radio ante invento $IP \propto \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$: certum est, quòd circulus PCN eandem curvam ACN, quemadmodum indicatum fuit, sit secturus vel tacturus.

Hinc, si ponatur $y \propto 1$, erit $\begin{cases} \square IM. \frac{5053504}{229441} \\ \square CM. \frac{490496}{229441} \end{cases} y \propto 2$, erit $\begin{cases} \square IM. \frac{3129361}{229441} \\ \square CM. \frac{2414639}{229441} \end{cases}$

adeoque $\square IC. \frac{5544000}{229441}$ adeoque $\square IC. \frac{5544000}{229441}$

$y \propto 3$, erit $\begin{cases} \square IM. \frac{1664100}{229441} \\ \square CM. \frac{3879900}{229441} \end{cases} y \propto 4$, erit $\begin{cases} \square IM. \frac{657721}{229441} \\ \square CM. \frac{4886279}{229441} \end{cases} y \propto 8$, erit $\begin{cases} \square IM. \frac{1221025}{229441} \\ \square CM. \frac{4322975}{229441} \end{cases}$

adeoque $\square IC. \frac{5544000}{229441}$ adeoque $\square IC. \frac{5544000}{229441}$ adeoque $\square IC. \frac{5544000}{229441}$

Ex quibus igitur apparet, quòd, assumptâ qualibet ex radicibus, linea IC semper ipsi IP inveniatur æqualis, hoc est, quòd circulus, qui ex I intervallo IP describitur, curvam ACN in 5 diversis punctis secet vel tangat, in tot videlicet, quot æquatio proposita diversos admittit radicis valores. Quod erat ostendendum.

Eodem modo liquet, si æquatio proposita 6 radices inæquales habuerit, quòd tunc quoque circulus PCN curvam ACN in 6 diversis punctis secet.

AP

A P P E N D I X,

DE

C V B I C A R V M

ÆQVATIONVM RESOLVTIONE.

AEQVATIONES Cubicæ omnes, & Quadrato-quadrata, * quæ quidem & ad Cubicas reducuntur, quarum radix duarum est dimensionum, semper ad aliquam trium sequentium formularum reduci possunt.

$$z^3 \propto * - pz + q.$$

$$z^3 \propto * + pz + q.$$

$$z^3 \propto * + pz - q.$$

* Vide quæ habentur pag. 92. à lin. 11 usque ad finem ejusdem pagine.

In priori autem formulâ, ubi z^3 æquatur $-pz + q$, regula Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit, nos docet radicem esse $\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$.

Quemadmodum etiam si habeatur $z^3 \propto +pz + q$, in qua quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini, similis regula ostendit radicem fore

$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} + \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}.$$

Vnde liquet in omnibus Problematibus, quorum difficultates ad æquationem hujus vel illius formulæ reducuntur, ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles, semper hoc modo juxta Cardani regulas per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoscitur, exprimi posse.

Deinde verò si habeatur $z^3 \propto +pz + q$, ubi $\frac{1}{4}qq$ sit minus quàm $\frac{1}{27}p^3$, ibi prædicta regula non habet locum, nec ejusdem beneficio radix ullo modo intelligibili explicari potest, sicut inferius ostendemus. Quæ quidem res olim multæ fuit caliginis, & ut scribit Albertus Girardus in libello cui titulus: *Invention nouvelle en l'Algebre*, qui anno 1629 prodiit: hoc est, in quo Autores hætenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear in re quàm maxime difficili.

Hinc, quæ hûc spectant subobscura, aut neglectâ demonstra-

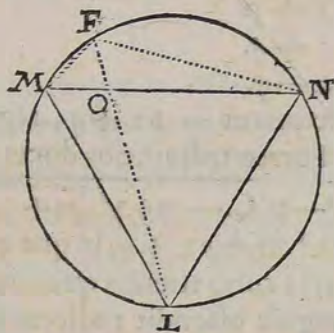
Xx

tione

tione apud prædictos Autores invenimus, ea illustrare nobis visum fuit: præmittentes ad hoc sequentia Theoremata demonstrata.

THEOREMA I.

Si fuerit triangulum æquilaterum MNL circulo inscriptum, atque ex L educta utcunque recta LF usque ad circumferentiam in F , quæ secet MN in O , junctæque rectæ MF , FN : Dico FL æqualem esse ipsis MF , FN simul sumptis.



¹ per 21
prop. ter-
tii Elem.

² per 32
primi E-
lem.

³ per 4^{am}
sexti E-
lem.

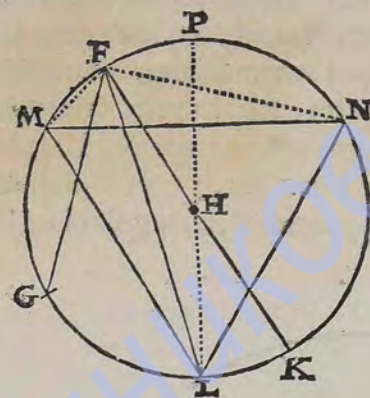
⁴ per 24
quinti
Elem.

⁴ per 24 MO ad LM seu LN , ita FM ad LF . Igitur ⁴ erit, ut NO , MO simul ad LN , ita FN , FM simul ad LF . Æquales autem sunt NO , MO simul sumptæ ipsi LN , æquales ergo quoque erunt FN , FM simul sumptæ ipsi LF . Quod erat ostendendum.

THEOREMA II.

Iisdem positis, ductâ diametro FHK , sumatur arcus GLK triplus arcus LK , jungaturque GF : Dico similiter arcum GMF arcus MF , nec non arcum GNF arcus NF triplum esse.

Ducatur enim diameter LHP . Hæc namque secabit arcum MFN bifariam in P . Quoniam autem propter triangulum æquilaterum MNL circumferentia circuli dividitur in tres partes æqua-



æquales, ac ipsa tripla est arcus MPN , erit & semicircumferentia FMK tripla arcus MP . Quocirca cum eadem ratio sit arcus FMK ad arcum MP , totius ad totum, quæ arcus GLK ad arcum LK seu FP , ablati ad ablatum, erit quoque reliqui arcus GMF ad reliquum arcum MF eadem ratio, quæ totius ad totum*. Triplus autem est arcus FMK ^{* per 19} arcus MP . Triplus ergo etiam est arcus GMF arcus MF . Quod ^{quinti} erat demonstrandum. ^{Elem.}

Eodem modo ostenditur arcum GNF arcus NF triplum esse.

THEOREMA III.

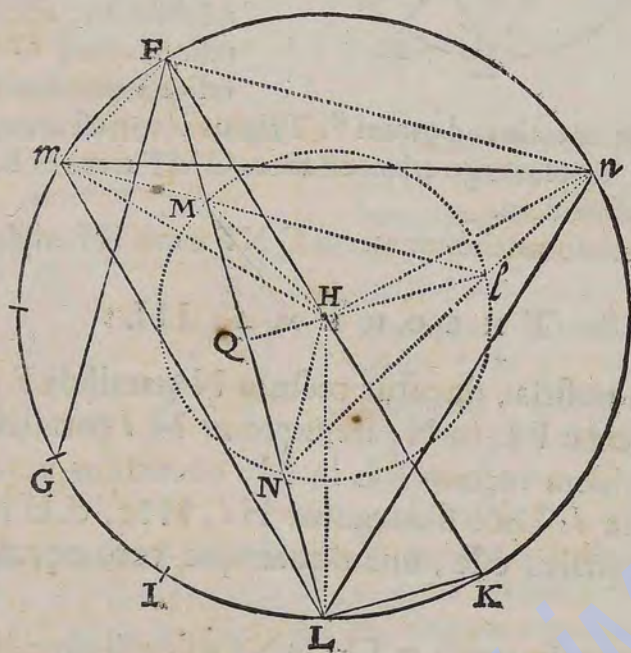
Iisdem positis, ducatur recta nN parallela Fm , occurrens rectæ FL in N ; itemque mM parallela Fn , secans quidem rectam FL in M , occurrens autem ductæ nN in l : Dico si ducantur Hl , HN , & HM ipsas inter se æquales esse, unamquamque verò æqualem rectæ LK .

Quoniam enim anguli mFM & NFn singuli circumferentiæ tertie parti insistant, & ob parallelas ductas angulus FmM angulo NFn æquatur, at angulus FNn angulo mFM : erunt triangu-
la mFM & NFn , quemadmodum etiam triangulum NMl æquiangula, ac proinde æquilatera. Porro cum FL æquetur ipsis mF , Fn simul sumptis (ut supra ostensum fuit); atque ablata FM ipsi mF , erit reliqua ML ipsi Fn æqualis: cumque FN æquetur ipsi ml , erunt quoque ML & ml , atque adeò omnes tres ml , nN , & ML inter se æquales. Vnde si ab his æqualibus rectis auferantur rectæ inter se æquales ML , Nl , & MN , remanebunt similiter mM , nN , & NL inter se æquales. Præterea cum mN , nL , & Lm tres rectæ sint inter se æquales, liquet triangu-
la mln , nLN , & LmM

X x 2

inter

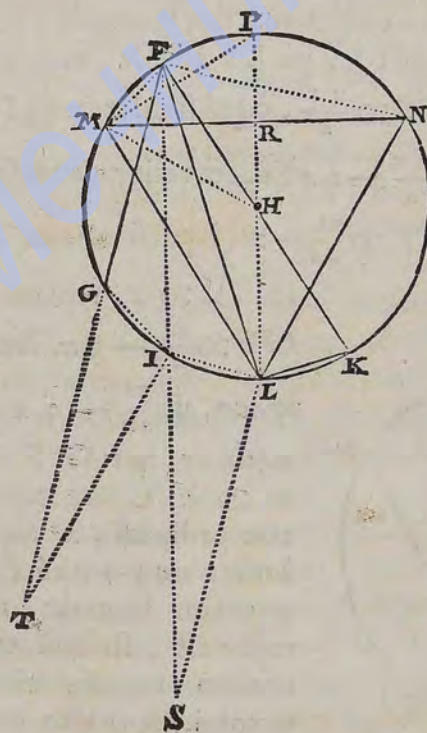
inter se constare ex æqualibus lateribus, ipsaque ob hoc & angulos singulos singulis æquales habere, hoc est, æquales inter se erunt anguli mnl , nLn , & LmM . Quia autem & anguli mnh , nLH , & LmH inter se æquales sunt, patet, si hi ex prædictis æqualibus inter se angulis demantur, reliquos itidem angulos Hnl , HLN , & HmM inter se æquales fore. Denique, propter æqualitatem radiorum Hn , HL , & Hm , perspicuum est, triangula Hnl , HLN ,



& HmM habere inter se duo latera duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; ac insuper angulum angulo, inter æqualia latera contentum: unde & basi basi æqualem habebunt, atque adeo æquales inter se erunt rectæ Hl , HN , & HM . Quod autem præterea unaquæque ex ipsis æquetur rectæ LK , consequenter sic ostenditur. Producat lH ut fecit FL in Q . Hæc igitur ad rectos angulos cadet in FL , atque eam bifariam secabit in Q . Quia porro, propter similitudinem triangulorum FLK & FQH , FL est ad LK , ut FQ ad QH ; & permutando FL ad FQ , ut LK ad QH , atque FL ipsius FQ est dupla: erit quoque LK ipsius QH

QH dupla. Dupla autem etiam est Hl ipsius QH , siquidem æquilaterum est triangulum MlN : quare & Hl nec non HM , HN ipsi LK æquales erunt. Quod erat ostendendum.

Ex his perspicua sunt ea, quæ ab Alberto Girardo afferuntur in libello supra citato, ubi docet quo pacto radix æquationis $x^3 + 13x + 12$, in qua cubus trientis numeri radicum major est quadrato semissis numeri absoluti, sit exprimenda.



Vt autem pateat MN esse $\sqrt{13}$, ob $13x + 12$ in æquatione, sciendum est ductis rectis HM , MP triangulum HMP esse æquilaterum, ac proinde quadratum MR triplum esse quadrati HR . Quocirca cum eadem sit ratio duplæ MR , hoc est, ipsius MN ad duplam HR , hoc est, HP , quàm simplæ MR ad simplam HR : erit quoque quadratum MN quadrati HP triplum. Vnde si statuamus radium circuli æqualem radici quadratæ ex triente numeri radicum 13 , hoc est, $\infty \sqrt{4\frac{1}{3}}$, liquet MN tunc fore $\sqrt{13}$. Sicut proponebatur.

Lubet autem propositum ipsius ulterius inquirere, atque rem omnem paucis patefacere.

In quem finem ejusmodi quæstionem proponimus.

Circulo existente FGK , cujus diameter FK , in eoque inscriptâ FG , trifariam secetur arcus GK , à diametro & inscriptâ interceptus, in punctis I & L , & recta con-

1 per 6
primi
Elem.
2 per 21
et 22
tertii E-
lem. nec
non 13
primi
Elem.
3 per 29
tertii
Elem.

3 per 29
tertii
Elem.

Elem.

$$GF \propto \frac{x^3}{a^2} - 3x. \text{ Restat}$$

æquetur ipsi G F da-

bitur $3 aax + aab$. Quæ

dratum semissis ultimi

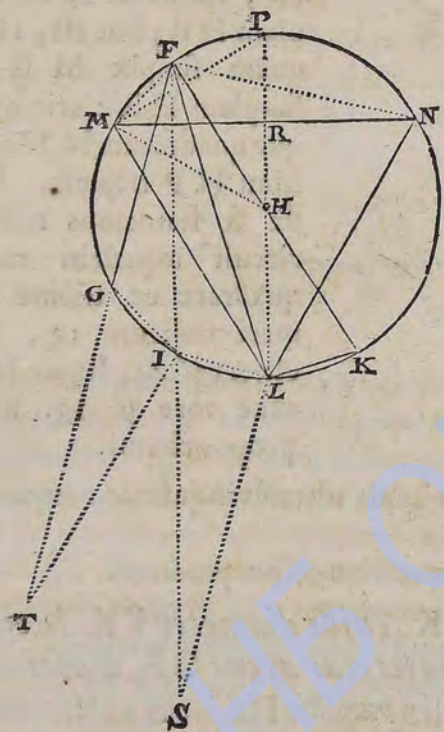
gnitæ penultimi : majus

Nam si utrobique divi-
damus per a^4 , fit aa ma-

trinque extrahendo ra-
dicem *a* fiat maius quàm

Vt est manifestum, cum

27014



atque diameter omnium rectarum circulo inscriptarum sit ma-
xima. Vnde si a^6 æquetur $\frac{1}{4}a^4bb$, tunc quoque inscripta GF æ-

bus modis inveniri. Iuxta priorem quidem, si² centro H & in-² *ut in fig.*
tervallo L K arcus describatur M N, secans FL in M & N; Iuxta *pag.* 348.

$\text{A cubus æqualis } \left. \begin{array}{l} + \text{ B B} \\ + \text{ B C} \end{array} \right\} \text{ in A } \left. \begin{array}{l} + \text{ B} \\ + \text{ C} \end{array} \right\} \text{ in B C.}$

Quòd eodem recidit ac si earundem constitutionem sic agnosceres, conciperesque è duobus lateribus, puta B & C, facta esset tria proportionalia plana BB, BC & CC, quorum aggregatum sit $BB + BC + CC$, seu quantitas p ; & quod sit ex medio plano

plano

plano in aggregatum eorundem laterum fit $\overline{B+C}$ in BC , seu quantitas q . Quod quidem ultimum factum sic quoque interpretari poteris, dicendo illud produci ex multiplicatione duorum priorum planorum in latus secundum; vel etiam ex summa duorum posteriorum planorum in latus primum: cum tria illa solida inter se æqualia sint, ut experienci constabit.

Vt autem penitiùs hæc introspeciamus, atque æquationum harum constitutionem agnoscamus, ponamus $x \propto d$ seu $x - d \propto 0$, & rursus $x \propto -b$ seu $x + b \propto 0$, ac denuo $x \propto -c$ seu $x + c \propto 0$, ducamusque $x - d \propto 0$ in $x + b \propto 0$, tum verò quod inde fit in $x + c \propto 0$, & prodibit æquatio:

$$\begin{array}{rcl} x^3 - dxx - bdx - bcd \propto 0, & \text{vel} & x^3 \propto dxx + bdx + bcd. \\ +b & -cd & -b \quad +cd \\ +c & +bc & -c \quad -bc \end{array}$$

In qua si ponatur d , verus valor radicis x , æqualis $b + c$, duobus falsis valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem $+d$ destruet $-b - c$, fietque $0xx$, hoc est, evanescet adfectio sub quadrato, nec ampliùs sese destruent. Nam cum ex hypothese d æquatur $b + c$, communi multiplicatore d , fiet quoque dd æquale $bd + cd$. At verò dd majus est quàm bc , quandoquidem idem valet quod $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc , manebitque adfectio sub latere cum signo $+$. Ita ut, si $+bd + cd - bc$ interpreteris per $+p$, & $+bcd$ per $+q$, æquatio hanc recipiat formam: $x^3 \propto +px + q$. Quam itaque constat tres admittere diversos radicis valores, unum quidem verum seu $+$ quàm 0 , & alios duos falsos seu $-$ quàm 0 , qui simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Porrò, ut hæc æquatio tres semper ejusmodi radicis valores recipiat, requiritur, ut in illâ $\frac{2}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm q , seu quod idem est, ut $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm $\frac{3q}{p}$, sive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}q^2$. Quandoquidem, si p planum in tria plana dividitur proportionalia, maximum solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum vel duorum posteriorum in latus secundum vel primum, est illud, quod fit, cum p planum in tria plana æqualia dividitur.

Aliàs enim radix ejusdem æquationis de unico tantum valore explicabilis est, utpote verò, cum æquatio tunc non producat ex

ex ductu trium ejusmodi laterum in se invicem, nisi duo sumantur fictitia seu non existentia, quæ & impossibilia appellantur. Quemadmodum in exemplum afferre licet æquationem $1C \propto 6N + 40$, ubi $1N$ valet $+4$, cum $1C \propto 80$ $Q - 6N - 40 \propto 0$ Signum 8 significat + vel - dividatur per $1N - 4 \propto 0$, oriaturque æquatio impossibilis $1Q + 4N + 10 \propto 0$, quæ nullas omnino admittit radices. Nisi velis illas, quarum sanè valor nullo modo comprehendi potest, utcunque tamen exprimere, ut scribendo $1N \propto -2 + \sqrt{-6}$, nec non $1N \propto -2 - \sqrt{-6}$. Ita ut verus valor ipsius $1N$ realis existat & sit 4 , & duo falsi fictitii sint $-2 + \sqrt{-6}$, & $-2 - \sqrt{-6}$.

Quòd si verò proponatur æquatio $1C \propto 6x + 6$, seu $1C \propto 80$ $x - 6x - 6 \propto 0$, quæ per $1x + \text{vel} -$ aliquo numero, ultimum terminum 6 dividente, dividi nequit, poterit neque radix ejus $1x$ per ullum numerum absolutum vel fractum designari; sed verum valorem admittet, qui est irrationalis, quique juxta secundam Cardani regulam (hæc ante expositam) sic exprimitur: $1x \propto \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{2}$.

In quo porrò sensu æquatio prioris formulæ accipi debet, quæ nullæ determinationi est obnoxia. Nam si, verbi gratiâ, proponatur $1C \propto 3N + 14$, poterit $1C \propto 80$ $Q + 3N - 14 \propto 0$ dividi per $1N - 2$, & oriatur æquatio impossibilis $1Q + 2N + 7 \propto 0$. Vnde liquet $1N$ valere tantum 2 , nec ullos alios valores admittere; nisi eos sic velis exprimere $-1 + \sqrt{-6}$, & $-1 - \sqrt{-6}$.

Sin autem æquatio ejusdem formulæ sit $1C \propto 3x + 10$ seu $1C \propto 80$ $x + 3x - 10 \propto 0$, quæ per $1N -$ aliquo numero, ultimum terminum 10 dividente, dividi nequit, valor quoque verus radicis nullo numero absoluto vel fracto designari poterit. Quo igitur casu explicabitur secundum priorem Cardani regulam, hoc modo: $1x \propto \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{5}$.

Sed hæc mittentes veniamus ad ea, quibus secundæ formulæ æquationis usum detegamus. Proponentes in eum finem hoc quod sequitur.

E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini maiorem esse quadrato semissis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non posse.

Notandum autem porro est, Problema propositum solidum esse, si tria latera data AB , BC , & CD inter se inæqualia statuuntur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Cum verò duo quælibet ex dictis lateribus sunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Ut si b & c æqualia fuerint, devenietur ad æquationem: $x^3 - \frac{a}{2b}x - 2abb \infty 0$, quæ dividi poterit per $x + a \infty 0$, quæ ratione ipsa reducetur ad quadratam: $xx - ax - 2bb \infty 0$, quæ ulterius dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam: $x^3 - 3aax - 2a^3 \infty 0$, eaque dividi poterit per $x - 2a \infty 0$, oriatur namque æquatio: $xx + 2ax + aa \infty 0$, duas admittens falsas radices, quæ sibi invicem sunt æquales. Unde sequitur verum valorem radice x eo casu fore $2a$, & duos falsos valores esse $-a$ & $-a$. Hoc enim manifestum est, quoniam, si tria latera AB , BC , & CD æqualia inter se extiterint, figura $ABCD$ fit semi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet semidiametro est æquale.

Porro si velimus idem Problema per numeros resolvere, esto AB seu $a \infty 24$, BC seu $b \infty 20$, CD seu $c \infty 15$, & quærat $AD \infty x$. Hinc, cum $aa + bb + cc$ inveniat $\infty 1201$, & $2abc \infty 14400$, exurget ejusmodi æquatio: $x^3 \infty 1201x + 14400$, seu $x^3 80xx - 1201x - 14400 \infty 0$. Quæ dividi potest per $x + 25 \infty 0$, oritur namque æquatio $xx - 25x - 576 \infty 0$, seu $xx \infty 25x + 576$, cujus radix x duos admittit valores, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Ita ut radix prædictæ æquationis $x^3 \infty 1201x + 14400$ seu diameter quæsitæ AD tres recipiat diversos valores, unum verum seu $+$ quàm 0 , ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$; atque duos falsos seu $-$ quàm 0 , ut -25 & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Qui quidem simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Quod si verò æquatio supra dicta $x^3 80xx - 1201x - 14400 \infty 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, arguisset id ipsum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm falsam

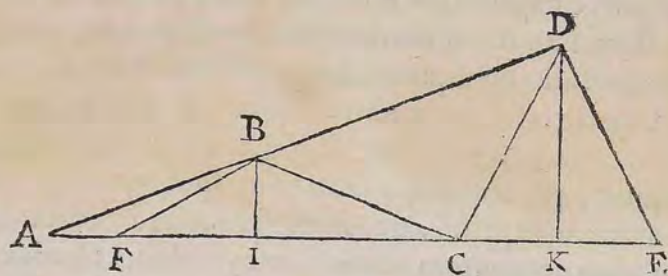
sam ullo numero exprimi potuisse, sed eam hoc casu denotandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividendam, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Ut si, exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^3 \infty 243x + 1215$, seu $x^3 80xx - 243x - 1215 \infty 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falsa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hîc cubus trientis numeri radicum major sit quàm quadratum semissis numeri absoluti. Adeò ut radix ejus per sectionem anguli in tres æquales partes sit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum describendo circulum cujus radius FH seu HK sit 9 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 seu $\frac{3}{2}p$, atque trifariam porro secando arcum GK seu angulum GFK per rectam FL , quam ait veram quantitatem ipsius radice x exprimere. Vbi præterea, si centro H intervallo rectæ LK arcum descriperimus secantem ipsam FL in M & N^1 , vel quod ^{1 ut in fig. pag. 349.} idem est à puncto L triangulum æquilaterum circulo inscripserimus LMN^2 , rectæ FM & FN utramque falsam quantitatem ra- ^{2 ut in fig. pag. 350.} dicis x designabunt.

Quod idem cum $D.$ des Cartes in eundem ferè modum licebit exsequi. Videlicet, si, ^{3 ut in fig. pag. 350.} intervallo rectæ FH vel $HK \infty 9$ seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ describatur circulus, in quo, inscriptâ rectâ $FG \infty 15$ seu $\frac{3}{2}p$, arcus FMG & FNG trifariam porro secentur, per rectas FM & FN , quas inquit simul sumptas radice quæsitæ esse æquales.

Sin autem ejusdem æquationis radicem juxta modum Viëtæ exponere lubeat, Oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, triplus sit anguli, qui est ad basin primi, & intelligere basin quidem secundi esse $7\frac{1}{2}$ seu $\frac{3}{2}p$, crus verò esse 9 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem, de qua quæritur, esse basin primi.

Quod ut cuivis obvium sit, supponamus triangula illa esse ABC , & CDE , quorum crus quodlibet AB , BC , CD , vel DE sit ∞a , & basis secundi $CE \infty b$: Oporteatque invenire basin primi $AC \infty x$.



Quia itaque demissis ad hoc perpendicularibus BI, DK, in triangulo rectangulo ABI, quadratum ex AI $\propto \frac{1}{4}xx$ subductum à quadrato ex AB $\propto aa$, relinquit quadratum ex BI: erit quadratum ex BI $\propto aa - \frac{1}{4}xx$.

Eodem modo, in triangulo rectangulo CDK, quadrato ex CK $\propto \frac{1}{4}bb$ subducto à quadrato ex CD $\propto aa$, relinquetur $aa - \frac{1}{4}bb$, pro quadrato ex DK.

Porro quoniam, propter similitudinem triangulorum ABI & ADK, AI est ad IB, sicut AK ad KD: erit quoque ut $\frac{1}{4}xx$, quad. ex AI, ad $aa - \frac{1}{4}xx$, quad. ex IB; sic $xx + bx + \frac{1}{4}bb$, quad. ex AK, ad $aa - \frac{1}{4}bb$, quad. ex KD. Vnde multiplicando extrema, inuenietur productum $\frac{1}{4}aaxx - \frac{1}{16}bbxx$ æquale $aaxx + aabx + \frac{1}{4}aabb - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}bx^3 - \frac{1}{16}bbxx$, producto sub mediis. Hoc est, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, si ipsi deinde ad unam partem transferantur, habebitur $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabx - aabb \propto 0$. Quæ summa si porrò per $x + b \propto 0$ dividatur, obtinebitur æquatio $x^3 - 3aax - aab \propto 0$, seu $x^3 \propto * + 3aax + aab$. eadem nempe quæ superior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum semissis ultimi termini, cuiusque æquationis vera radix illic per rectam FL, hinc autem per rectam AC designatur.

Cæterum quod angulus secundi trianguli DCE, qui est ad basin, triplus sit anguli A, qui est ad basin primi, ita patet: Æquales enim sunt anguli A & BCA, propter æqualia crura AB, BC; & ob id externus CBD alterutrius hujus duplus. Est autem hic CBD æqualis ipsi CDB, propter æqualitatem linearum CB, CD. Quare & CDB, id est, CDA ipsius A duplus est. Atqui binis hisce A & CDA æqualis est externus DCE.

DCE. Hinc, qualium partium angulus A est 1, talium angulus CDA erit 2, & DCE 3, hoc est, triplus erit angulus DCE anguli A. Quemadmodum fuit propositum.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem æquationis propositæ $x^3 \propto 243x + 1215$ sic interpretari: dicentes eam esse diametrum semicirculi, supra quam descripto quadrilatero inæqualium laterum, tria superiora in se invicem ducta faciant $607\frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{2}q$; at verò summa quadratorum ex ipsis faciat 243 seu p .

Vbi præterea notandum, æquationem numericam $x^3 \propto 13x + 12$, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimatur, cum in illa 1 valeat $+4$, -3 , & -1 ; ac ipsa æquatio $x^3 \propto 8x - 13$ $-12 \propto 0$ per 1 $-4 \propto 0$, & per 1 $+3 \propto 0$, atque etiam per 1 $+1 \propto 0$ dividi queat. Ita ut tantum radices earum æquationum secundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opus sit exprimere, in quibus constat ipsas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi posse.

Sed jam tempus est ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi z^3 æquatur $* + pz - q$.

Hæc autem æquatio tres diversos radices valores admittit, duos nempe veros & unum falsum, æqualem veris illis simul sumptis, sicut ex ejusdem æquationis constitutione agnoscere licet. Nam si ponamus $x \propto b$ seu $x - b \propto 0$, & $x \propto c$ seu $x - c \propto 0$, atque etiam $x \propto -d$ seu $x + d \propto 0$, & multiplicemus $x - b \propto 0$ per $x - c \propto 0$, ac denuo quod inde fit per $x + d \propto 0$, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{rcl} x^3 + dx^2 - bdx + bcd \propto 0, & \text{vel} & x^3 \propto -dx^2 + bdx - bcd. \\ -b & -cd & +b +cd \\ -c & +bc & +c -bc \end{array}$$

In qua si ponatur d , valor falsus radices x , æqualis $b + c$, duobus veris valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem $b + c$ destruet $-d$, fietque $0xx$, hoc est, evanescet adfectio sub xx , nec amplius sese destruent. Nam cum ex hypothese $b + c$ æquatur d , multiplicando utrinque per d , fiet quoque $bd + cd$ æquale dd . At verò dd majus est quàm bc , quandoquidem tantundem valet ac $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc , manebitque adfectio sub x cum signo $-$.

Ita

Ita ut, si $+bd+cd-bc$ interpreteris per $+p$, & $-bcd$ per $+q$, æquatio hanc induat formam: $x^3 \propto +px - q$. Quam constat tres admittere differentes valores radices x , duos quidem veros seu $+quàm 0$, unum autem falsum seu $-quàm 0$, æqualem veris illis simul sumptis.

Porro ut hæc æquatio recipiat semper tres ejusmodi radices valores, requiritur ut in illa $\frac{2}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm q , seu $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non minus quàm $\frac{3}{p}q$, sive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Ob rationem supra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non nisi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falsum, qui juxta Cardani regulam sic exprimeretur: $x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Vt in exemplum afferre licet æquationem: $1x \propto 6x - 40$, in qua $1x$ valet -4 , cum $1x \propto 80x - 6x + 40 \propto 0$ dividi queat per $1x + 4 \propto 0$, oriaturque æquatio impossibilis $1x - 4x + 10 \propto 0$, seu $1x \propto 4x - 10$, cujus valores radices nullo modo comprehendi possunt, nisi eos sic exprimere velimus: $1x \propto 2 + \sqrt{-6}$, & $1x \propto 2 - \sqrt{-6}$. Adeò ut duo veri valores ipsius $1x$ sint tantum fictitii $2 + \sqrt{-6}$ & $2 - \sqrt{-6}$, & falsus realis sit $\propto -4$.

E quibus patet tertiæ hujus atque secundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum suarum reciprocatio.

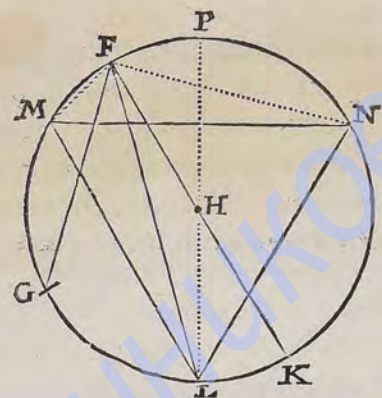
Lubet autem in usum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut sequentia manifestiora fiant.

PROBLEMA.

Circulo dato FMGN, in eoque inscripta FG, trifariam secetur arcus uterque FMG & FNG in M & N: Oporteatque invenire FM subtensam trientis unius, & FN subtensam trientis alterius.

Esto FH seu HK $\propto a$, FG $\propto b$, & FM $\propto x$, quæratque ex HF & FM ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inscripta FG, perinde atque ipsa esset incognita: quæ ideo erit $3x - \frac{x^3}{a}$. Iam verò cum ipsa detur $\propto b$, erit $3x - \frac{x^3}{a} \propto b$. Vnde æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3ax - aab$.

Eodem



Eodem modo, si pro FN ponatur x , atque ex HF & FN quæramus FG, incidemus in eandem æquationem. E quibus sequitur utramlibet subtensam FM vel FN quæsitæ quantitati radices x æqualem esse. Hinc cum $1 \textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{1} - 12$, seu $1 \textcircled{3} \textcircled{8} \textcircled{0} \textcircled{2} - 13 \textcircled{1} + 12$ æquetur 0, ac ipsa æquatio dividi possit per $1 \textcircled{1} - 1 \propto 0$, & per $1 \textcircled{1} - 3 \propto 0$, nec non per $1 \textcircled{1} + 4 \propto 0$: arguit id ipsum FM fore 1, at verò FN 3. Porro quoniam æquationes hujus tertiæ formulæ æquæ ac secundæ formulæ tres admittunt differentes valores radices, quorum quidem duo simul sumpti tertio sunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falsus -4 , seu quantitas lineæ FL. quæ ipsis MF & FN simul sumptis ostensa est æqualis.

Vnde perspicua fiunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello supra citato allata sunt ad æquationum radices hujus tertiæ formulæ inveniendas. Vbi docet, illas ad secundum casum secundæ formulæ revocandas esse, convertendo tantum signum $-$ numeri absoluti in signum $+$: cum in iis sicut hic cubus trientis numeri radicum non minor requiratur quàm quadratum semissis numeri absoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radices quæsitæ, sicut in secunda formula explicuimus, oportet tantum illos ex 0 auferre seu eorum signa immutare, ut habeantur tres quæsi hujus, in qua duo semper veri sunt seu $+quàm 0$, & tertius est falsus seu $-quàm 0$, quemadmodum est ostensum.

ALIUD PROBLEMA.

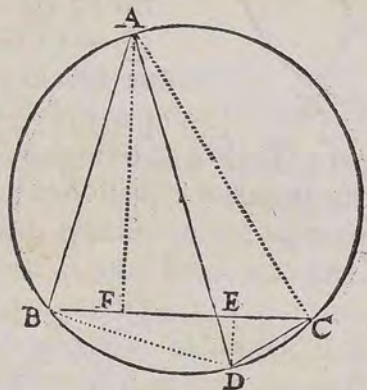
In circulo, cujus diameter AD, inscriptis tribus inæqualibus rectis lineis AB, BC, & CD, sibi invicem contiguis, quarum quidem extremæ prodeunt ex diametri terminis A & D: Oportet ex iisdem cognitis invenire diametrum AD.

Ponatur ad hoc AB $\propto a$, BC $\propto b$, CD $\propto c$, & AD $\propto x$. jun- gan-

Z-z

ganturque AC, BD, & in BC, productam, si opus sit, perpendicularis demittatur DE.

Duplex autem hinc occurrit casus considerandus, juxta quem hæ inscriptæ diversimodè in circulo positæ intelligi possunt; primus, in quo rectæ AB & CD è diametri terminis prodeunt ad diversas partes; & secundus, in quo ipsæ ex iisdem terminis educæ sunt ad eandem partem, se mutuò interfecantes. In priori igitur positione si quadratum BD $\propto xx - aa$ subducatur ex ag-



¹ per 13
secundi
Elem.

² per 21
terti
Elem.

gregato quadratorum BC, CD $\propto bb + cc$, relinquetur ¹ duplum rectangulum BCE $\propto bb + cc - xx + aa$. Deinde, quoniam triangula ABD & CED similia sunt, cum anguli ad B & E sint recti, & BAD, ECD æquales ², utpote eidem peripheriæ BD insistentes: erit ut DA $\propto x$ ad AB $\propto a$, ita DC $\propto c$ ad CE $\propto \frac{ac}{x}$. Hæc autem ducta in duplam BC $\propto 2b$ dat duplum re-

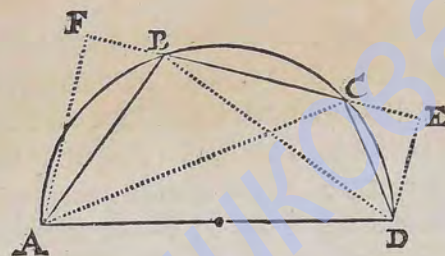
ctangulum BCE $\propto \frac{2abc}{x}$, æquale $bb + cc - xx + aa$, duplo videlicet rectangulo BCE, ante invento. Vnde ordinatæ æquatione invenitur: $x^3 \propto + aax - 2abc$, æquatio cubica tertix formæ $+ bb + cc$

mulæ, in qua quadratum semissis ultimi termini est minus cubo quantitatis cognitæ penultimi termini, ut constet ex præmissis Problemate paginæ 354.

³ per 12
secundi
Elem.

In secunda autem positione, si à quadrato DC $\propto cc$ auferantur quadrata DB, BC $\propto xx - aa + bb$, relinquetur ³ duplum rectangulum CBE $\propto cc - xx + aa - bb$. Cæterum, quoniam

rursus



rursus propter similitudinem triangulorum ABD & CED, AD $\propto x$ est ad AB $\propto a$, sicut DC $\propto c$ ad CE: erit CE $\propto \frac{ac}{x}$. Equâ subductâ CB $\propto b$, remanebit BE $\propto \frac{ac}{x} - b$. Hæc autem si multiplicetur per duplam CB, proveniet du-

plum rectangulum CBE $\propto \frac{2abc}{x} - 2bb$: æquale duplo rectangulo CBE ante invento $\propto cc - xx + aa - bb$. Vnde addito utrinque bb , ordinatæque secundum artem æquatione, obtinebitur eadem atque superior: $x^3 \propto + aax - 2abc$
 $+ bb$
 $+ cc$

Quocirca cum utroque casu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat AD, sequitur quoque eam differentem sortiri quantitatem, & ex eisdem datis inscriptis pro diversa earum positione dupliciter inveniri.

Vbi præterea notandum est, Problema propositum esse solidum, si tres inscriptæ AB, BC, & CD inæquales inter se fuerint: siquidem ad cubicam æquationem adscendit, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inscriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim b & c æqualia, exsurgit æquatio talis: $x^3 - aax + 2abb \propto 0$, quæ di-

vidi poterit per $x - a \propto 0$, & orietur æquatio quadrata $xx + ax - 2bb \propto 0$, quæ ulterius non est reducibilis.

Si autem juxta alterutram positionem omnes hæ tres inscriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio $x^3 - 3aax + 2a^3 \propto 0$, poterit hæc ipsa dividi per $x + 2a \propto 0$, orieturque æquatio $xx - 2ax + aa \propto 0$, quæ porro dividi poterit per $x - a \propto 0$, & orietur $x - a \propto 0$. Quoniam verò hoc casu inscriptæ cum diametro coïncidere intelliguntur ac ipsi diametro esse æquales, constat æquationis radicem x , hoc est, diametrum AD duos in eo

Zz 2

admit-

admittere veros valores sibi invicem æquales, qui singuli per unamquamque ex illis inscriptis designantur; ac præterea falsum, alterutrius illius duplum.

Cæterum si desideremus propositum Problema per numeros resolvere, esto $AB \propto a \propto 24$, $BC \propto b \propto 20$, $CD \propto c \propto 15$, & quærat $AD \propto x$. Hinc cum $aa + bb + cc$ sit 1201 , & $2abc \propto 14400$, invenietur æquatio talis: $x^3 \propto 1201x - 14400$, seu $x^3 80xx - 1201x + 14400 \propto 0$. Quæ dividi potest per $x - 25 \propto 0$, oritur namque æquatio $xx + 25x - 576 \propto 0$, seu $xx \propto -25x + 576$. Cujus porrò vera radix est $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, & falsa $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Ita ut diameter quæsitæ AD , hoc est, x radix prædictæ æquationis $x^3 \propto 1201x - 14400$, tres ferat differentes valores, duos scilicet veros seu $+$ quàm 0 , nimirum $+25$ majorem, & $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$ minorem, & unum falsum seu $-$ quàm 0 , nimirum $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, qui veris istis simul sumptis est æqualis. Quocirca cum tres superioris æquationis $x^3 \propto 1201x + 14400$ radices inventæ sint -25 , $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, & $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$, patet eas tantum ex 0 esse auferendas, seu earum signa esse immutanda, ad habendas tres radices hujus posterioris æquationis.

Quòd si verò hæc ipsa æquatio $x^3 80xx - 1201x + 14400 \propto 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam x vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuisset quòd & nulla radicum tam vera quàm falsa ullo numero fuisset explicabilis, sed eam tunc designandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Vt si in exemplum proponatur æquatio $x^3 \propto 2700x - 32400$, seu $x^3 80xx - 2700x + 32400 \propto 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radices x , sive is verus sive falsus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipsæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato semissis numeri absoluti auferatur, qui quidem cubus hic major datur. Adeò ut radices ejus per rectas subtendentes trientem anguli vel arcus dati sint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet describendo circulum, cujus radius

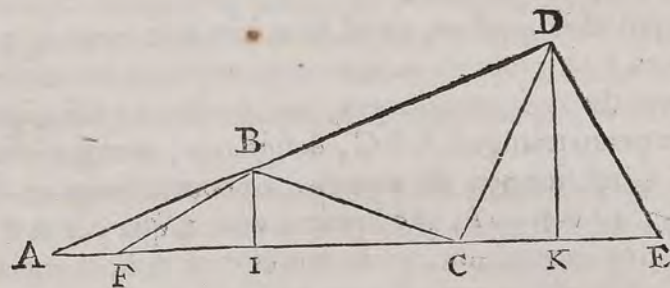
FH

FH seu HK sit 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque accommodando rectam $FG \propto 36$ seu $\frac{3q}{p}$, atque deinde trifariam secando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inscriptam 36 in duos inæquales arcus dispescitur, ita quoque incognita quantitas x duplicem verum valorem sortitur; fitque alterutra è subtensis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falsus autem ejusdem valor æqualis est veris illis simul sumptis, atque per rectam FL designatur.

Quos binos radices valores cum Vieta aliâ porrò ratione explicare licet, ut sequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, sit triplus anguli, qui est ad basin primi, & basis secundi intelligatur esse 18 seu $\frac{3q}{2p}$, crus verò 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem de qua quæritur, esse basin dimidiam primi, multatam continuatamve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perspicuum fiat, fingantur triangula illa esse ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit $\propto a$, & basis secundi CE sit $\propto b$. Demissis autem in iis perpendicularibus BI, DK, sumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita positis, ut inveniatur AF, liquet, si pro ea ponamus y , & pro AC, ut ante, ponamus x , quadratum ex BI fore $\propto aa - \frac{1}{4}xx$, adeoque quadratum ex FI $\propto 3aa - \frac{3}{4}xx$. Quoniam verò ex AI $\propto \frac{1}{2}x$ sublatâ AF $\propto y$, relinquitur FI $\propto \frac{1}{2}x - y$, cujus quadratum est $\frac{1}{4}xx - xy + yy$: erit $\frac{1}{4}xx - xy + yy \propto 3aa - \frac{3}{4}xx$.

Zz 3

Hoc

Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \propto yx + 3aa$. Vnde

extractâ radice, fit $x \propto \frac{1}{2}y \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}yy}$. Hinc, si in æquatione olim inventa $x^3 \propto * + 3aax + aab$ in locum x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}y \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}yy}$, & in locum x^3 ejus cubus, qui est $\frac{2}{3}aay - y^3 \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}yy}$, obtinebimus æquationem $y^3 \propto * + 3aay - aab$. Cujus ideo vera radix erit linea A F.

Eodem modo ad inveniendam F C, si pro ea ponamus z , atque ab ipsa tollamus I C $\propto \frac{1}{2}x$, remanebit F I $\propto z - \frac{1}{2}x$. Vnde cum quadratum ejus sit $zz - xz + \frac{1}{4}xx$: erit itidem $zz - xz + \frac{1}{4}xx \propto 3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \propto zx + 3aa$. Et fit, extractâ radice $x \propto \frac{1}{2}z \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}zz}$.

Hinc si rursus in æquatione olim inventa $x^3 \propto * + 3aax + aab$ in locum x subrogetur valor inventus $\frac{1}{2}z \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}zz}$, & in locum x^3 ejus cubus $\frac{2}{3}aaz - z^3 \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}zz}$, obtinebimus æquationem $z^3 \propto * + 3aaz - aab$. Cujus ideo vera radix est linea F C.

Ex quibus colligitur, si æquatio proposita fuerit $x^3 \propto * + 3aax - aab$, eandem duas admittere veras radices, quarum minor A F obtinetur, si ex A I vel I C dimidia base primi trianguli A B C auferatur recta F I, cujus quadratum sit æquale triplo quadrato ejusdem altitudinis B I; & major, si ad A I vel I C ipsa F I addatur. Omnino ut fuit propositum.

Vbi porro advertendum, quòd, in eadem æquatione $x^3 \propto * + 3aax - aab$, ob mutuam radicum æquationis hujus tertiæ ac secundæ formulæ reciprocactionem, tertia radix sit falsa, quæ per A C, basin primi trianguli A B C, designatur, quæque ipsis veris A F, F C simul sumptis est æqualis. Et contra si æquatio fuerit $x^3 \propto * + 3aax + aab$, quòd præter veram, quæ per A C exhibetur, aliæ duæ extent falsæ, quarum minor est A F, & major F C, quæ similiter simul sumptæ ipsi veræ A C sunt æquales.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem posterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propositæ æquationis $x^3 \propto 2700x - 32400$ valores radices x sic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli A D designari, in quo si inscribantur tres rectæ lineæ inæquales A B, B C, & C D, sibi

Vide figuras
pag. 362.
& 363.

sibi invicem contiguæ, quarum extremæ prodeunt è diametri terminis A & D, solidum ex ipsis tribus sit $\propto 16200$ seu $\frac{1}{2}q$, & summa quadratorum earundem sit $\propto 2700$ seu p . Nam quemadmodum hæ tres inscriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque positione diameter duplicem quantitatem sortitur, ita quoque ipsa in hac vel illa positione veram semper radicem designat. Falsa autem, ipsis veris adæquans, exhibetur per diametrum semicirculi, in quo descripto supra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inscriptis sumpta sint æqualia. Ut ex superioribus manifestum est.

Vbi advertendum insuper restat, æquationem numericam $1 \textcircled{3} \propto 13 \textcircled{1} - 12$, à Girardo propositam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimentur: cum in illa $1 \textcircled{1}$ valeat -4 , $+1$, & $+3$, ac ipsa æquatio $1 \textcircled{3} \propto 0 \textcircled{2} - 13 \textcircled{1} + 12 \propto 0$ per $1 \textcircled{1} + 4 \propto 0$, & per $1 \textcircled{1} - 1 \propto 0$, nec non per $1 \textcircled{1} - 3 \propto 0$ dividi possit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opus sit exprimere, in quibus constat ipsas nec numero, nec Cardani regula explicari posse.

Vnde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquæ faciliè, immo quidem faciliùs concipi, cum ipse per subtensas arcuum designatur, quorum triplum est datum, quàm cum per latera certorum cuborum exprimitur, quorum non nisi contentum cognoscitur. Præterquam quòd ad illas subtensas non magis indigeamus aliquo caractere peculiari, quàm $\sqrt[3]{C}$. ad exprimenda latera cubica, & $\sqrt[3]{C}$ ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numero nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clarè ac distinctè explicari possint.

Cæterum ne quid hîc desideretur, sed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutissimus noster Huddenius olim adinvenit, mihi que coram communicavit.

Proponatur æquatio $z^3 \propto * - pz + q$, & sit z quantitas, quàm invenire oportet.

Ponatur ad hoc $z \propto x - y$. Eritque $z^3 \propto x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Vnde cum & z^3 æquetur $-pz + q$: erit similiter $-pz + q \propto x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$.

Divi-

Dividamus jam hanc æquationem in duas, nempe $-pz \propto -3xy + 3xyy$, & $q \propto x^3 - y^3$. Quarum prima divisa per $z \propto x - y$ dat $-p \propto -3xy$, seu $p \propto 3xy$; & fit $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$. Vnde, si in secunda in locum x subrogetur valor inventus $\frac{\frac{1}{3}p}{y}$, & in locum x^3 hujus cubus $\frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3}$, obtinebitur $q \propto \frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3} - y^3$. Hoc est, multiplicando utrinque per y^3 , & ordinando æquationem, habebitur $y^6 \propto -qy^3 + \frac{1}{27}p^3$. Cujus radix, juxta pag. 6, est $y^3 \propto -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $y \propto \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Adeoque $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$

$\propto \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Posueramus autem $z \propto x - y$. Erit itaque $z \propto \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Qui sanè valor eo Cardani simplicior censeretur potest, siquidem ad hunc obtinendum radix cubica semel tantum est extrahenda. Quod si verò ipsius z valor cum Cardano sit exhibendus, ita porro operari licebit. videlicet in æquatione jam dictâ $q \propto x^3 - y^3$ in locum y^3 substituendo valorem inventum $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$: habebiturque $q \propto x^3 + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, seu $x^3 \propto -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $x \propto \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Hinc cum z sit $\propto x - y$: erit $z \propto \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Haud dissimili modo procedendum in æquatione $z^3 \propto * + pz + q$, ubi z valet $\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ + $\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. ponendo nempe $z \propto x + y$.

Notandum verò, in his z æqualem supponi $x +$ vel $-y$, non autem pluribus incognitis quantitibus, ex eo quòd plures duabus diversis æquationibus institui nequeunt; ut & $-pz$ supponi $\propto -3xy + 3xyy$, ex eo quòd tunc æquationem hanc dividere licet per $z \propto x - y$, atque sic deinde ipsarum x, y , & z valores in simplicissimis terminis invenire. Idem quoque aliter fieri potest, ad modum paginæ 296.

Hæc autem de Cubicarum Æquationum Resolutione dicta sufficiant.

A D-

ADDITAMENTVM.

Cæterum ut pateat, non facillè Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis, quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ Jacobi à Wæssenaer Anno 1640 sub titulo: *Den onwissen VVis-konstenaer. I. I. Stampioënins*, in lucem prodit. Verum enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.

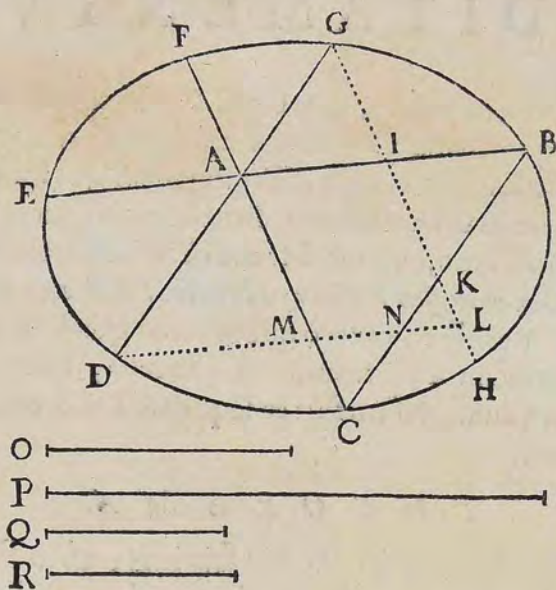
THEOREMA.

Alicubi terrarum in Zonis frigidis, cùm Sol non occidit, defixis ad plumbum supra planum horizontale tribus baculis in punctis A, B, & C, ita se habentibus, ut, postquam eodem die extremitas umbræ baculi A transire deprehensa fuerit per B & C, reperta item sit extremitas umbræ baculi B transisse per C & A, nec non ejus qui in C per A: Demonstrandum est eandem transisse pariter per B.

Quod ut fiat, sciendum primò est umbram baculi A descripsisse Ellipsin vel Circulum, transeuntem per puncta B & C, prout videlicet hæc observata ponantur in Sphæra obliqua vel parallela. Deinde junctis CA, AB, BC, productisque BA, AC donec ejus circumferentiæ occurrant in punctis E & F, ductâque per A rectâ DG ipsi BC parallelâ, & utrinque peripheriæ occurrente in punctis D & G: evidens est, quòd, postquam umbra baculi B finit in A, eodem puncto temporis umbra baculi A finierit quoque in E; ita ut BA ad AE, rationem, quæ est inter baculum B & baculum A, designet. Eodem modo, postquam umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut CA ad AF sit, sicut baculus C ad baculum A. Similiter, dum umbra ipsius B pervenit ad C, pervenit etiam umbra ipsius A ad D; ita ut BC sit ad AD, sicut baculus B ad baculum A. Quibus sic intel-

A a a

telle-



tellectis, ut constet, umbram baculi C transisse item per B, ostendendum est, cum umbra baculi A incidit in G, umbram ipsius C incidisse similiter in B, hoc est, baculum C ad baculum A, vel CA ad AF esse, sicut CB ad AG.

Quod ipsum igitur ut fiat manifestum, inveniendus nobis est valor lineæ AG. Quocirca ad hoc ductâ GH parallelâ AC, secante AB, BC in I & K, & Ellipsis vel Circuli circumferentiæ occurrente in H, ponatur AB $\propto a$, BC $\propto b$, CA $\propto c$, AF $\propto d$, AE $\propto e$, HK $\propto x$, & AG vel CK $\propto z$: eritque KB $\propto b-z$.

Deinde, ut innotescat AD, quoniam baculus B est ad baculum A, ut BA ad AE; itemque B baculus ad A baculum, ut BC ad AD: erit ut BA ad AE, vel a ad e , sic BC vel b ad AD. quæ ideo erit $\frac{be}{a}$. Cum autem hæc multiplicata per AG seu z producat $\frac{bez}{a}$ rectangulum DAG, similiterque AG vel CK seu z multiplicata per KB seu $b-z$ producat $bz-zz$ rectangulum CKB; & quidem, juxta 17 prop. 3ⁱⁱ libri Conicorum Apollonii, $\frac{bez}{a}$ ad $bz-zz$ sit, vel $\frac{be}{a}$ ad $b-z$, sicut $\square FAC$ ad $\square GKH$ seu cd ad

cd ad cx , vel d ad x : fiet, multiplicando medios tum extremos, $db-dz \propto \frac{bex}{a}$, vel $adb-adz \propto bex$.

Iam, ut habeatur KI, fiat, propter similitudinem triangulorum BCA & BKI, ut BC $\propto bad$ CA $\propto c$, ita BK $\propto b-z$ ad KI $\propto \frac{cb-cx}{b}$. quæ ad HK seu x addita dat HI $\propto \frac{cb-cx+bx}{b}$; at verò ex KG vel CA seu c subducta relinquit IG $\propto \frac{cx}{b}$. ex quarum ductu unius in alteram invenitur $\square GIH \propto \frac{ccbz-cxz+cbxz}{bb}$.

Porro, ut obtineatur AI, fiat, propter similitudinem triangulorum AGI & BCA, ut BC $\propto bad$ BA $\propto a$, ita AG $\propto z$ ad AI $\propto \frac{az}{b}$. quæ ad AE seu e addita dat EI $\propto \frac{az+eb}{b}$; at vero ex AB $\propto a$ subducta relinquit IB $\propto \frac{ab-az}{b}$. ex quarum mutua multiplicatione exurgit $\square EIB \propto \frac{aabz+abbe-aazx-abex}{bb}$. Iam cum, ut ante, per 17. 3ⁱⁱ Con. Apoll., $\square FAC$ seu cd sit ad $\square GIH$ seu $\frac{ccbz-cxz+cbxz}{bb}$, sive ad $\frac{cbz-cxz+bxz}{bb}$, sicut $\square EAB$ seu ea ad $\square EIB$ seu $\frac{aabz+abbe-aazx-abex}{bb}$, sive ea ad $\frac{abz+bbe-azx-bez}{bb}$: fiet, multiplicando extremos tum me-

dios, omisso prius communi denominatore bb , $abdz+bbcd-adzz-bedz \propto cbex-cezz+bezz$. Quoniam autem supra inventum fuit $adb-adz \propto bex$, hoc est, multiplicando utrinque per z , $abdz-adzz \propto bezz$: obtinebitur, subducendo unam æquationem ex altera, $bbcd-bedz \propto cbex-cezz$, vel $bbd-bdz \propto cbz-czz$. Hoc est, æqualitate ritè ordinatâ, erit $zz \propto \frac{cb+db}{c}$ in $z - \frac{bbd}{c}$. Quæ æquatio juxta regulam

pag. 7 resoluta dat $z \propto b$, ut & $z \propto \frac{db}{c}$. Cum verò horum duorum valorum ipsius z duntaxat $\frac{db}{c}$ quæ sitæ AG respondeat, hicque nos doceat c esse ad d , sicut b ad z : patet, CA ad AF esse sicut CB ad AG. Quod erat ostendendum.

Sequitur Problema, ejusque solutio.

His positis, quæro primùm rationem, quam inter se habent MQ, HQ, & KQ, ut &, BM, HC, & DK: & inuenio BM + HC æuari 3 DK: cum BC & AD parallelæ existentes inter se sint, sicut baculus B ad baculum A, hoc est, ut 3 ad 1: ac proinde BM + HC ∞ 3 DK. E quibus porro inuenitur PA ad AQ esse, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc est, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Deinde beneficio AM & AB quæro perpendicularem BM, quæ etiam in aliis terminis inueniri potest. unde innotescit latus rectum r , quod postea quoque aliter beneficio Coni inuenitur.

Ex duplicibus terminis quantitati r æqualibus quæro f , tum q , ac postea etiam u .

Cognitis autem f , q , & u , quæritur ratio AS ad AR, ostendens Poli elevationem.

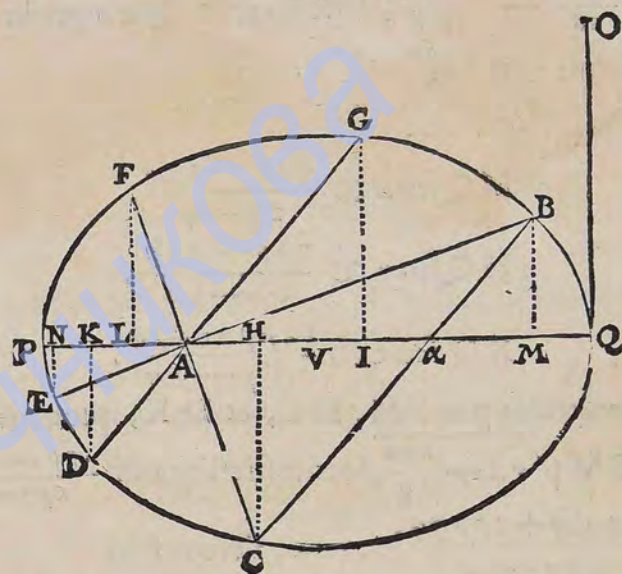
Denique investigatur ratio, quæ est inter TX & TR, hoc est, inter PY & YR, & inde innotescit distantia inter Æquatorem & locum Solis in Ecliptica.

Primò igitur MQ sic investigatur: Vt PQ seu q ad QO seu r , ita quadratum MQ seu xx ad $\frac{rxx}{q}$, quod subductum ab rx , rectangulo MQO, relinquit $rx - \frac{rxx}{q}$, pro quadrato ex BM, adeoque $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$ pro BM. Rursus, ut q ad r , ita quadratum NQ $\frac{16}{9}pp - \frac{8}{3}px + \frac{1}{9}xx$ ad $\frac{16}{9}ppr - \frac{8}{3}prx + \frac{1}{9}rxx$. quod si subtrahatur à $\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx$, rectangulo NQO, & ex reliquo extrahatur radix quadrata, fiet $\sqrt{\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx - \frac{16ppr + 8prx - rxx}{9q}}$.

pro NE, ∞ $\sqrt{\frac{rx}{9} - \frac{rxx}{9q}}$, tertiæ videlicet parti ipsius BM. Quæ æquatio si reducatur, inuenietur x ∞ $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, pro MQ.

Deinde, ad inueniendam HQ, investigetur priùs eodem modo HC, $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$. Tum fiat, ut CA ad AF, seu 4 ad 3, ita

$\sqrt{rx - \frac{ryy}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{2}{16}ry - \frac{9ryy}{16q}}$, seu LF. Porro, ut q ad r , ita quadratum LQ $\frac{49pp}{16} - \frac{21py}{8} + \frac{9yy}{16}$ ad $\frac{49ppr}{16q} - \frac{21pry}{8q} + \frac{9yyy}{16q}$. Quod



Quod si auferatur à $\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4}$, rectangulo LQO, & ex reliquo extrahatur radix, fiet $\sqrt{\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4} - \frac{49ppr}{16q} + \frac{21pry}{8q} - \frac{9ryy}{16q}}$ pro LF ∞ $\sqrt{\frac{9ry}{16} - \frac{9ryy}{16q}}$, ante inventâ. Quæ æquatio reducta dat y ∞ $\frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, pro HQ.

Porro, ad inueniendam KQ, investigetur ut priùs KD $\sqrt{rz - \frac{rxx}{q}}$. Deinde fiat ut AD ad AG, seu 4 ad 9, ita $\sqrt{rz - \frac{rxx}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rxx}{16q}}$, seu GI. Rursus, ut 4 ad 9, ita AK $z - p$ ad $\frac{9z - 9p}{4}$, seu AI. quæ ex AQ sublata relinquit IQ $\frac{13p}{4} - \frac{9z}{4}$. Porro ut q ad r , ita quadratum QI $\frac{169pp}{16} - \frac{117pz}{8} + \frac{81zx}{16}$ ad $\frac{169ppr}{16q} - \frac{117prz}{8q} + \frac{81rxz}{16q}$. Quod si auferatur à $\frac{13pr}{4} - \frac{9rx}{4}$, rectangulo IQO, & ex reliquo extrahatur radix, proveniet $\sqrt{\frac{13pr}{4} - \frac{9rx}{4} - \frac{169ppr}{16q} + \frac{117prz}{8q} - \frac{81rxz}{16q}}$, pro GI

GI $\propto \sqrt{\frac{81rx}{16} - \frac{81rx^2}{16q}}$, ante inventa. Quæ æquatio si reducatur, habebitur $z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$.

Atque ita inventa sunt

$$MQ \text{ seu } x \propto \frac{4pp - 3pq}{2p - q}.$$

$$HQ \text{ seu } y \propto \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}.$$

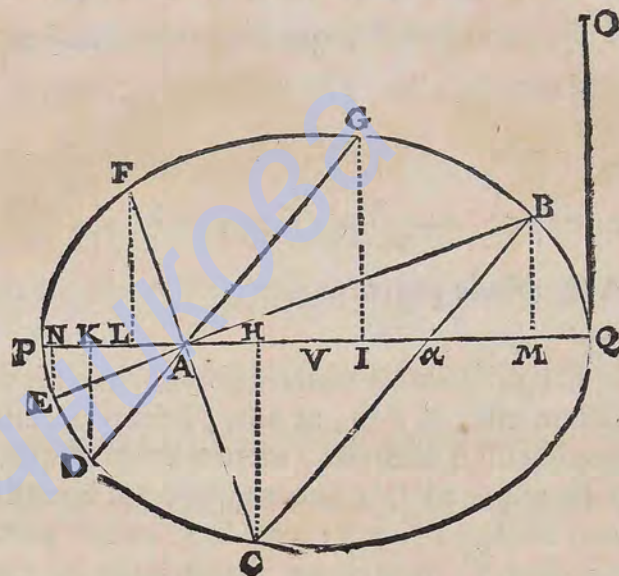
$$KQ \text{ seu } z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}.$$

Ad inveniendas jam BM, HC, & DK, quoniam ante inventa est BM $\sqrt{rx - \frac{rx^2}{q}}$, loco x substituatur $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, & $16p^4 - 24p^3q + 9ppq^2$ loco xx , fietque BM $\sqrt{\frac{4pp - 4pq + qq}{-16p^4r + 32p^3qr - 19ppqqr + 3pq^3r}}$.

Eodem modo, quoniam HC inventa est $\sqrt{ry - \frac{ry^2}{q}}$, loco y scribatur $\frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, & $49p^4 - 56p^3q + 16ppq^2$ loco yy , eritque HC $\sqrt{\frac{36ppq - 36pq^2 + 9q^3}{-49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}}$.

Similiter, quoniam DK inventa est $\sqrt{rz - \frac{rz^2}{q}}$, loco z ponatur $\frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$, & $169p^4 - 104p^3q + 16ppq^2$ loco zz , fietque DK $\sqrt{\frac{324ppq - 324pq^2 + 81q^3}{-169p^4r + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}}$.

Quibus inventis, facile est invenire rationem ipsius PA ad AQ. Cum enim 3 DK æquetur BM + HC, ut supra dictum est: hinc inventos terminos ad eandem denominationem reduco, utpote ipsius HC, multiplicando tam numeratorem, quam denominatorem ipsius BM per $\sqrt{9}$, & denominatorem ipsius DK dividendo per 3, fietque omisso communi denominatore, pro BM $\sqrt{-144p^4r + 288p^3qr - 171ppqqr + 27pq^3r}$, pro



pro HC $\sqrt{-49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}$, & pro tripla DK $\sqrt{-169p^4r + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}$. Qui singuli si per pr dividantur, fiet pro BM

$$\sqrt{-144p^3 + 288ppq - 171pq^2 + 27q^3}, \text{ pro HC}$$

$$\sqrt{-49p^3 + 98ppq - 61pq^2 + 12q^3}, \text{ \& pro tripla DK}$$

$$\sqrt{-169p^3 + 338ppq - 205pq^2 + 36q^3}; \text{ \& hi rursus divisi per } -p + q, \text{ dant pro BM}$$

$$\sqrt{-144pp + 144pq - 27qq},$$

$$\text{pro HC } \sqrt{-49pp + 49pq - 12qq}, \text{ \& pro tripla DK}$$

$$\sqrt{-169pp + 169pq - 36qq}. \text{ Vbi porro, si supponatur } -p + q \propto n,$$

$$\text{habebitur } \sqrt{+144pn - 27qq} \text{ pro BM,}$$

$$\sqrt{+49pn - 12qq} \text{ pro HC, \& } \sqrt{+169pn - 36qq} \text{ pro tripla DK, adeoque}$$

$$\sqrt{144pn - 27qq} + \sqrt{49pn - 12qq} \propto \sqrt{169pn - 36qq}.$$

$$\text{Quæ æquatio reducta dabit } ppnn \propto + \frac{335qq}{768}pn - \frac{143q^4}{3072}. \text{ Et fit } pn \propto \frac{1}{4}qq, \text{ nec non } pn \propto \frac{143}{768}qq.$$

Vbi sciendum, accipiendam esse tantum radicem $pn \propto \frac{143}{768}qq$: cum reliqua radix $pn \propto \frac{1}{4}qq$, restituendo valorem ipsius n , producat hanc æquationem $pp \propto qp - \frac{1}{4}qq$, cujus radix est $p \propto \frac{1}{2}q$; ostendens baculum A in medio ipsius PQ fuisse constitutum.

Bbb

Quod

Quod sanè fieri non potest, quandoquidem umbræ baculi A utrinque non sunt æquales. Hinc, cum $p n$, hoc est, $\frac{143}{768} q q$, fit $\infty - p p + p q$, seu $p p \infty q p - \frac{143}{768} q q$, cujus radix est $p \infty \frac{1}{2} q -$
 H $\frac{7 q}{16 \sqrt{3}}$, nec non $p \infty \frac{1}{2} q + \frac{7 q}{16 \sqrt{3}}$: fiet pro P A $\frac{1}{2} q - \frac{7 q}{16 \sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2} q +$
 I $\frac{7 q}{16 \sqrt{3}}$ pro A Q. Vnde porro innotescit P A esse ad A Q, sicut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Quo pacto cognoscatur primam observationem matutino tempore non fuisse factam. Iam si in Ellipsi primam observationem matutino tempore ponamus factam esse, & P Q, ut ante, lineam meridianam designare, atque baculi A umbram, motum Solis insequentem, à P per F transiisse usque ad Q (quo tempore Sol humillimus existens mediam noctem efficit): erit B ex eadem parte sumendum qua punctum C, non autem qua punctum F. Quo posito, si per modum præcedentem quærat æquatio, fiet $p p n n \infty$
 $\frac{67 q q}{160} p n - \frac{143 q^4}{3200}$: in qua numerus absolutus major est quadrato semissis numeri radicum. Vnde, cum nulla sit linea, quæ Aequationis hujus radix esse possit: liquet, primam observationem matutino tempore non contigisse, sed ante mediam noctem. Sicut initio fuit suppositum.

Quæ ratione innotescat umbram non descripsisse Hyperbolam, aut Parabolam. Quo modo inveniatur latus rectum per Ellipsin. Deinde, si ponatur, umbram baculi A descripsisse Hyperbolam, inveniatur æquatio $p p n n \infty - \frac{335 q q}{768} p n - \frac{143 q^4}{3072}$. Quæ cum nullam admittat radicem, quæ proposito convenire possit, indicio est, umbram non descripsisse Hyperbolam. Eodem modo ostenditur ipsam non descripsisse Parabolam.

Postea ad inveniendum r , latus rectum Ellipseos, quærat A M, ut sequitur. Quoniam subducendo M Q ex A Q, hoc est, $\frac{4 p p - 3 p q}{2 p - q}$ ex p , relinquitur $\frac{-2 p p + 2 p q}{2 p - q}$, pro A M: hinc si loco p substituatur $\frac{1}{2} q + \frac{7 q}{16 \sqrt{3}}$, ante inventum, & $\frac{1}{2} q q + \frac{7 q q}{16 \sqrt{3}} + \frac{49 q q}{768}$ loco $p p$; fiet $\frac{143 q}{112 \sqrt{3}}$ pro A M. Porro, posito baculo A $\infty 6 \infty c$, erit A B $\infty 33 \infty \frac{11 c}{2}$ (est enim ut 6 ad 33, seu 2 ad 11, sic c ad $\frac{11 c}{2}$). à cujus quadrato $\frac{121 c c}{4}$ si auferatur

$\frac{143, 143, q q}{112, 112, 3}$, quadratum ex A M; relinquetur $\frac{121 c c}{4} - \frac{143, 143, q q}{112, 112, 3}$, pro quadrato ex B M. Subducta autem A M $\frac{143 q}{112 \sqrt{3}}$ ex A Q $\frac{1}{2} q + \frac{7 q}{16 \sqrt{3}}$, remanet $\frac{1}{2} q - \frac{47 q}{56 \sqrt{3}}$ pro M Q seu x . Iam cum quadratum ex B M, primò inventum, sit $r x - \frac{r x x}{q}$, subrogato $\frac{1}{2} q - \frac{47 q}{56 \sqrt{3}}$ in locum x , & $\frac{1}{2} q q - \frac{47 q q}{56 \sqrt{3}} + \frac{47, 47, q q}{56, 56, 3}$ in locum $x x$; K habebitur $\frac{143 q r}{56, 56, 3}$, pro quadrato ex B M. Ac proinde, cum paulò ante pro quadrato ex B M inventum quoque sit $\frac{121 c c}{4} - \frac{143, 143, q q}{112, 112, 3}$, erit $\frac{143 q r}{56, 56, 3} \infty \frac{121 c c}{4} - \frac{143, 143, q q}{112, 112, 3}$. Quæ æquatio si reducatur, proveniet $r \infty \frac{11, 14, 56, 3 c c}{13 q} - \frac{143 q}{4}$.

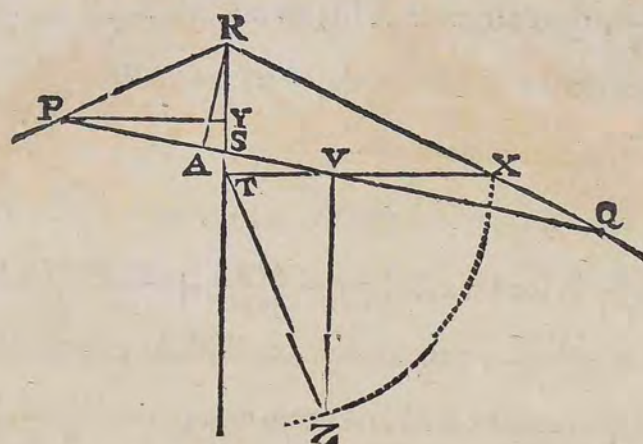
Præterea, ad investigandum latus rectum r in aliis terminis *Quomodo latus rectum inveniatur per Comm.* addatur quadratum ex A S, $q q v v - 2 f v v q q + f f v v q q$, ad quadratum ex A R, $c c$; & habebitur $c c + q q v v - 2 f v v q q + f f v v q q$, pro quadrato ex R S: adeoque

$\sqrt{c c + q q v v - 2 f v v q q + f f v v q q}$, pro R S. quæ brevitatis causâ nominetur n . Deinde, quoniam, propter similitudinem triangulorum A R S, T S V, & P Y S, R S seu n est ad A R seu c , sicut S V seu $f v q$ ad T V, & P S seu $\frac{1}{2} q - f v q$ ad P Y; invenietur $\frac{f v q c}{n}$ pro T V, & $\frac{\frac{1}{2} q c - f v q c}{n}$, pro P Y, quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2} q c}{n}$, pro T X. Rursus, quia, propter eandem triangulorum si-

lilitudinem, R S, seu n , est ad A S seu $q v - f v q$, sicut S V seu $f v q$ ad S T, & P S seu $\frac{1}{2} q - f v q$ ad S Y; fiet pro S T $\frac{q q v v f - f f v v q q}{n}$, & $\frac{\frac{1}{2} q q v - f v v q q - \frac{1}{2} f v q q + f f v v q q}{n}$, pro

S Y. quæ ab R S $\frac{c c + q q v v - 2 f v v q q + f f v v q q}{n}$ subducta, relinquit $\frac{c c + q q v v - f v v q q + \frac{1}{2} f v q q - \frac{1}{2} q q v}{n}$ pro R Y. Ad-

ditis autem R S & S T, habebitur $\frac{c c + q q v v - f v v q q}{n}$ pro R T.



Iam cum, ob quatuor lineas proportionales $RT, RY, TX,$ & PY , RT multiplicata per PY tantundem producat atque RY per TX : proveniet $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq - ccfv - fqqv + ffv^3qq \propto \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq + \frac{1}{4}fvqq - \frac{1}{4}qqv$, adeoque $cc \propto fv v q q - q q v v + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qq$. Porro subducto quadrato ex TV à quadrato ex TX vel TZ , relinquetur $\frac{1}{4}qqcc - \frac{ffvvqqcc}{nn}$ pro quadrato ex ZV , $\propto \frac{1}{4}qr$. Vnder sic

invenitur. Restituatur valor ipsius nn , & fit $\frac{1}{4}ccqq - ffvvqqcc \propto \frac{1}{4}qr$, vel $ccq - ccr - cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq \propto \frac{1}{4}qr$, vel $ccq - ccr - 4ffvvqqcc \propto qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$: itemque loco cc valor ejus jam modò inventus, & habebitur, qq utrobique exemptis, $fvvq - 4f^3v^4q - vvq + 4ffv^4q - \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r + ffvvq - fvvq + \frac{1}{4}q - \frac{1}{4}r \propto -fvvr + ffvvr$. Quibus demum per f multiplicatis, si quantitates in r ductæ ad unam partem transferantur, obtinebitur, utramque partem per $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}f - ffvv + f^3vv$ dividendo, $r \propto q - 4fvvq$.

Quâ ratione, ex duplici terminorum genere ipsius r , invenitur f .

Postquam igitur inventa est $r \propto \frac{11, 14, 56, 3, cc}{13q} - \frac{143q}{4}$, nec non $r \propto q - 4fvvq$, erit $\frac{11, 14, 56, 3, cc}{13q} - \frac{143q}{4} \propto q -$

$4fvvq$.

$4fvvq$. Ex qua æquatione quæro f , hoc modo: pro $\frac{11, 14, 56, 3}{13}$

scribatur brevitas causâ d , eritque $\frac{dcc}{q} - \frac{143q}{4} \propto q - 4fvvq$.

Rursus pro $\frac{143}{4}$ scribatur h , & erit $\frac{dcc}{q} - hq \propto q - 4fvvq$, hoc

est, subrogato $fvvqq - qqvv + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qq$ in locum cc , habebitur $dfvvq - dvvq + \frac{1}{4}dq - \frac{1}{4}dq - hq \propto q - 4fvvq$. Vnde,

de, dividendo utrinque per q , & multiplicando per f , invenietur, quantitatibus in ff ductis ad unam partem translatis, $dvvff + 4vvff \propto f + hf + \frac{1}{4}df + dvvf - \frac{1}{4}d$: adeoque si restituantur

valores quantitatum d & h , atque in locum v substituatur $\frac{7}{16\sqrt{3}}$,

$\frac{317569}{2496} ff \propto \frac{137543}{208} f - \frac{6468}{13}$, vel $ff \propto \frac{33684}{6481} f - \frac{25344}{6481}$, M

cujus æquationis radix est $f \propto \frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$ seu N

$\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.

Deinde, ex iisdem terminis quæro q , ut sequitur. Resumptâ Quâ ratione ex iisdem terminis ipsius r invenitur q .

æquatione $\frac{25872cc}{13q} - \frac{143q}{4} \propto q - 4fvvq$, loco cc reponatur valor ejus datu 36, & ubique multiplicetur per q , fietque

$\frac{25872, 36}{13} - \frac{143qq}{4} \propto qq - 4fvvqq$, vel $\frac{25872, 36}{13} \propto qq +$

$\frac{143qq}{4} - 4fvvqq$, adeoque $qq \propto \frac{25872, 36}{13} - \frac{143qq}{4} - 4fvv$. Quoniam

autem inventa est f & v , hinc in locum $-4fvv$ substituatur

$-4, 7, 7, 16842 + 4, 7, 7, 390\sqrt{785}$,

$\frac{16, 16, 3, 6481}{196, 16842 + 76440\sqrt{785}}$,

seu $\frac{768, 6481}{768, 6481}$ Bbb 3 seu

$$\text{feu } \frac{24, 137543 + 24, 3185 \sqrt{785}}{24, 32, 6481}, \text{ hoc est,}$$

$$\frac{25872, 36}{13} \text{ ; eritque } qq \propto \frac{7484113 + 3185 \sqrt{785}}{32, 6481}$$

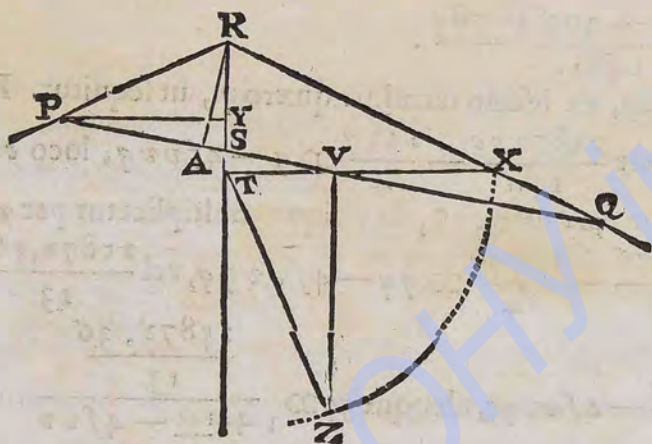
$$\text{feu } qq \propto \frac{25872, 36}{13}, \text{ hoc est,}$$

$$\frac{49, 13 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}{32, 6481}$$

$$\frac{25872, 36, 32, 6481}{13, 13, 49 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}, \text{ feu } \frac{528, 49, 36, 32, 6481}{169, 49 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}},$$

$$\text{hoc est, } \frac{11, 48, 36, 32, 6481}{169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}. \text{ Hinc posito } cc \propto 1, \text{ erit}$$

$$qq \propto \frac{11, 48, 32, 6481}{169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}; \text{ at vero existente}$$



$$cc \propto 169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}, \text{ erit } qq \propto 11, 48, 32, 6481, \text{ adeo-}$$

$$\text{que } q \propto \sqrt{11, 48, 32, 6481}, \text{ \& } qv \propto \frac{\sqrt{49, 11, 48, 32, 6481}}{16, 16, 3},$$

feu

$$\text{feu } \sqrt{\frac{49, 11, 48, 32, 6481}{16, 48}}, \text{ hoc est } \sqrt{\frac{49, 11, 32, 6481}{16}},$$

$$\text{feu } \propto \sqrt{49, 22, 6481}.$$

Iam, ut inveniatur ratio A S ad A R, quoniam 1 — f multi-
plicata per qv producit qv — fvq, atque f est
16842 — 390 $\sqrt{785}$: ideo, si 1 — f $\propto \frac{390 \sqrt{785} - 10361}{6481}$ ratio A S ad A R.

$$\text{multiplicetur per } qv \propto \sqrt{49, 22, 6481}, \text{ exsurget } qv - fvq \propto$$

$$\sqrt{\frac{49, 22, 6481 \text{ in } 390 \sqrt{785} - 10361}{6481}}, \text{ pro A S; feu A S } \propto$$

$$\frac{7 \sqrt{22, 6481} \text{ in } 13, 30 \sqrt{785} - 13, 797}{\sqrt{6481, 6481}}, \text{ hoc est,}$$

$$\frac{7, 13, \sqrt{22} \text{ in } 30 \sqrt{785} - 797}{\sqrt{6481}}; \text{ \& A R } \propto 13 \text{ in } \sqrt{11749 + 5 \sqrt{785}}.$$

$$\text{Quibus per 13 divis, erit A S } \propto \frac{7 \sqrt{22} \text{ in } 30 \sqrt{785} - 797}{\sqrt{6481}},$$

$$\text{\& A R } \propto \sqrt{11749 + 5 \sqrt{785}}, \text{ aut, si ponatur A S } \propto 7 \sqrt{22}, \text{ erit}$$

$$\text{A R } \propto \frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5 \sqrt{785}}}{30 \sqrt{785} - 797}; \text{ multiplicatoque hujus tum}$$

$$\text{numeratore tum denominatore per denominatoris residuum,}$$

$$\text{proveniet A R } \propto \frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5 \sqrt{785}} \text{ in } 797 + 30 \sqrt{785}}{11, 6481, \text{ vel } 11, \sqrt{6481}, \sqrt{6481}},$$

$$\text{hoc est, A R } \propto \frac{\sqrt{11749 + 5 \sqrt{785}} \text{ in } 797 + 30 \sqrt{785}}{11 \sqrt{6481}},$$

$$\text{feu } \sqrt{\frac{15951432541 + 568545725 \sqrt{785}}{121, 6481}}, \text{ feu}$$

$$\sqrt{20341 + 725 \sqrt{785}}. \text{ Ac proinde si A S } \propto 7 \sqrt{22} \text{ sumatur}$$

$$\text{pro radio, erit A R } \propto \sqrt{20341 + 725 \sqrt{785}}, \text{ tangens anguli}$$

$$\text{A S R sive elevationis Poli, videlicet } 80 \text{ grad. } 45 \text{ min. circiter.}$$

Denique ad investigandam rationem T X ad T R, vel P Y ad
Y R; cum T X supra inventa sit $\frac{1}{2} \frac{eq}{n}$, \& T R $\propto \frac{cc + qgv - fvq}{n}$:

hinc

hinc ut inveniatur ratio horum terminorum, (quoniam supposita

A R seu $c \propto 1, q q$ est $\frac{11, 48, 32, 6481}{169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}$, vel, numeratore

atque denominatore per $11749 - 5 \sqrt{785}$ multiplicato,

$q q \propto \frac{11, 48, 32, 6481 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 138019376}$, seu

$\frac{48, 2, 176, 6481 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 121, 176, 6481}$ hoc est, $\frac{48, 2 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 121}$,

& $q \propto \sqrt{\frac{48, 2 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 121}}$, & vv est $\frac{49}{256, 3}$, adeoque $q q vv$

$\propto \frac{48, 2, 49 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 121, 256, 3}$, seu $\frac{96, 49 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 121, 96, 8}$, hoc est,

$\frac{49 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{169, 121, 8}$) neglecto communi denominatore n , mul-

tiplicetur $1 - f$ per $q q vv$, & fit $q q vv - f v v q q \propto$

$\frac{390 \sqrt{785} - 10361 \text{ in } 49 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}{6481}$, seu

$\frac{-6517, 11, 6481 + 49, 5, 11, 6481 \sqrt{785}}{13, 11, 11, 8, 6481}$, hoc est, $\frac{-6517 + 49, 5 \sqrt{785}}{13, 11, 8}$,

Cui si addatur $c c \propto 1$, fiet $c c + q q vv - f v v q q \propto$

$\frac{-5373 + 49, 5 \sqrt{785}}{13, 11, 8}$, pro T R. Eodem modo multiplicato

$q \propto \frac{\sqrt{48, 2 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}}{169, 121}$, per $\frac{1}{2} c$, seu $\frac{1}{2}$ (quandoquidem c est 1):

habebitur $\frac{1}{2} c q \propto \frac{\sqrt{24 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}}{169, 121}$, pro T X. Inventæ igitur

T X & T R si reducantur ad eandem denominationem, ac

deinde denominator communis omittatur, obtinebitur T X $\propto$

$\frac{\sqrt{64, 24 \text{ in } 11749 - 5 \sqrt{785}}}{169, 121}$, & T R $\propto \frac{49, 5 \sqrt{785} - 5373}{169, 121}$, five

T X $\propto \frac{\sqrt{18046464 - 46301184000}}{169, 121}$, & T R $\propto \frac{47119625 - 5373}{169, 121}$.

P Quarum si T X vel P Y sumatur pro radio, erit T R vel Y R tangens anguli T X R vel Y P R, grad. 19, & 27 min. circiter, distantia loci Solis in Ecliptica ab Aequatore.

Cum autem in exposita hujus Problematis solutione nonnulla occurrant, quæ illustrationem aliquam requirere videntur, atque minus

minus exercitatis scrupulum injicere possent; placuit ea, quæ ad eorum explicationem Vir Clarissimus D. Erasmius Bartholinus, Casp. Fil. Medicinæ ac Mathematicum in Academia Hafniensi Professor Regius concinnavit, paucis hîc adjicere.

Ita ut G A ad A D sit, ut 9 ad 4.] Ostensum enim est A Theoremate præcedenti C A esse ad A F, hoc est, baculum C ad baculum A, sicut C B ad A G. Vnde cum baculus A ad baculum B sit, sicut D A ad C B: erit quoque ex æqualitate in proportione perturbata, ut C baculus ad B baculum, hoc est, ut 8 ad 18, seu 4 ad 9, ita D A ad A G; & convertendo G A ad A D, ut 9 ad 4.

AV $\propto$ qu, SV $\propto$ fuq.] Puta hîc unitatem subintelligi, B quæ sit a; ita ut a seu 1 sit ad q, sicut u ad qu; & rursus a seu 1 ad qu, sicut f ad fuq.

Ac proinde B M + H C $\propto$ 3 D K.] Nam cum, propter C similitudinem triangulorum α B M & α C H, α B sit ad B M, sicut α C ad C H, & permutando α B ad α C, sicut B M ad C H, componendoque B C ad α C, sicut B M + C H ad C H: & propter similia triangula C α H & D A K, α C ad C H, sicut A D ad D K, permutandoque α C ad A D, sicut C H ad D K; erit ex æquo, ut B C ad A D, sic B M + C H ad D K. Vnde cum B C ipsius A D tripla sit, erit quoque B M + H C ipsius D K tripla.

E quibus porrò invenitur P A ad A Q esse, ut $\frac{1}{2} q - \frac{79}{16 \sqrt{3}}$ D ad $\frac{1}{2} q + \frac{79}{16 \sqrt{3}}$, hoc est, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.] Quemadmodum postea perspicuum fiet.

Tertiæ videlicet parti ipsius B M.] Nimirum, propter E similitudinem triangulorum A B M & A E N, ubi A B est ad B M, sicut A E ad E N, & permutando A B ad A E, sicut B M ad N E. Vnde cum A B ad A E (ut supra) sit, sicut 3 ad 1: erit quoque B M ipsius N E tripla.

Et hi rursus divisi per $-p + q, \&c.$] Vbi notandum, si F B M $\sqrt{-144 p^3 + 288 p p q - 171 p q q + 27 q^3}$, H C $\sqrt{-49 p^3 + 98 p p q - 61 p q q + 12 q^3}$, & tripla D K $\sqrt{-169 p^3 + 338 p p q - 205 p q q + 36 q^3}$ dividantur per $-p + q$, oriri pro B M $\sqrt{+144 p p - 144 p q + 27 q q}$, pro C c c H C

HC $\sqrt{+49pp-49pq+12qq}$, & pro tripla DK
 $\sqrt{+169pp-169pq+36qq}$; non autem
 $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$ $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$,
 & $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$, ut habet Auctor, Ratio au-
 tem cur ita signa immutaverit, est, quod signa negata praevalent
 signis affirmatis. quod sic ostendi potest.

Etenim cum $2p$ — major sit quam q — — — $2p$ major quam q
 & utrinque multiplicetur per $72q$ — — — $72q$ utraque in se $2p$ — — — q
 ducatur
 erit quoque $144pq$ — major quam — $72qq$, & fiet $4pp$ major quam qq :
 unde si auferatur $144pp$ — major quam — $36qq$ adeoque mul-
 tiplicando u-
 relinquetur $144pq$ — $144pp$ major quam $36qq$: trunque per 36 — — — 36
 adeoque addendo utrinque $144pp$ — — — $144pp$ erit $144pp$ major quam $36qq$
 erit quoque $144pq$ major quam $144pp+36qq$.

Ac proinde $144pq$ multò major quam $144pp+27qq$. Et sic
 de reliquis. Vbi notandum, si loco divisoris superioris — $p+q$
 sumatur divisor $+p-q$, eosdem terminos inveniri, iisdemque
 signis affectos, quemadmodum ab Auctore sunt propositi.

G *Vbi porrò si supponatur — $p+q \propto n$, habebitur*

$\sqrt{+144pn-27qq}$ pro BM .] Etenim existente — p
 $+q \propto n$, si utrobique multiplicetur per $+144p$, fiet — $144pp$
 $+144pq \propto +144pn$: adeoque — $144pp+144pq$
 $-27qq \propto +144pn-27qq$, ac proinde
 $\sqrt{-144pp+144pq-27qq} \propto \sqrt{+144pn-27qq}$.
 Et sic de reliquis.

H *Fiet pro $PA \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro AQ .]*

Vide
 pag. 165
 vel 284.

Quoniam enim æquatio $pp \propto qp - \frac{143}{768}qq$, duas admittit veras
 radices, quarum summa est q , referens quantitatem cognitam
 secundi termini qp , atque designans lineam PQ : sit, ut si una
 $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumatur pro linea AQ , pro quâ supposita fuit p , al-
 tera $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumenda sit pro linea PA .

I *Vnde porrò innotescit PA esse ad AQ , sicut $\sqrt{3} - \frac{7}{4}$
 ad $\sqrt{3} + \frac{7}{4}$.] Quod sic liquet,*

AP

AP

AQ

Multiplicetur $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$.
 utrinque per 2, & fit $q - \frac{7q}{8\sqrt{3}}$ ad $q + \frac{7q}{8\sqrt{3}}$.
 tum rursus

per $\sqrt{3}$, & fit $q\sqrt{3} - \frac{7q}{8}$ ad $q\sqrt{3} + \frac{7q}{8}$.

Denique dividatur

utrobique per q , fietque $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

*Subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ in locum x , & $\frac{1}{2}q + \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ K
 $\frac{47 \cdot 47 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$ in locum xx , habebitur $\frac{143 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$, pro quadrato ex
 BM .] Id quod hoc pacto fieri potest.*

Ex $rx \propto \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}}$

subtrahatur $\frac{rx}{q} \propto \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}} + \frac{47 \cdot 47 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$:

& remanebit $rx - \frac{rx}{q} \propto \frac{1}{2}qr - \frac{47 \cdot 47 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$ vel $\frac{142qr}{56 \cdot 56 \cdot 3}$.

Nimirum si reducatur $\frac{1}{2}qr$ ad denominatorem ipsius $\frac{47 \cdot 47 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$.

utpote faciendo ut 4 ad 56, sic 1 ad 14, eritque $\frac{1}{2}qr \propto \frac{14qr}{56}$.

& deinde multiplicando tam numeratorem quam denomina-
 torem hujus fractionis per 56, 3, fiet $\frac{56 \cdot 3 \cdot 14qr}{56 \cdot 56 \cdot 3}$, vel $\frac{2352qr}{56 \cdot 56 \cdot 3}$:

à quo subducto $\frac{47 \cdot 47 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$ seu $\frac{2209 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$, relinquetur $\frac{143 \cdot 99}{56 \cdot 56 \cdot 3}$.

Quæ additæ efficiunt $\frac{1}{2}q^c$, pro TX .] Est enim $PY \propto$ L

qualis VX . Quod facile demonstrari potest. Cum enim Sol quoti-
 dianâ suâ conversione circa mundi axem rectos Conos efficiat:
 fit, ut PY , si producta concipiatur, donec ipsi RQ occurrat, ab
 axe RT in puncto Y bifariam atque ad angulos rectos secetur,
 triangulumque efficiat, quod triangulo VXQ sit simile ac simi-
 liter positum. cujus latus PQ duplum existens lateris VQ trian-
 guli VXQ (propter punctum V , quod centrum refert Ellipsis,
 cujus transversa diameter est PQ , & ZV semissis secundæ dia-
 metri)

Ccc 2

metri) facit ut etiam linea P Y producta ipsius V X dupla sit futura, adeoque P Y æqualis V X.

M *Atque in locum v substituat* $\frac{7}{16\sqrt{3}}$.] Convincitur autem esse $\frac{7}{16\sqrt{3}}$: est enim A Q supra inventa $\infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & P A $\infty \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Vnde cum P Q sit ∞q , & V punctum medium ipsius P Q, adeoque P V vel V Q $\infty \frac{1}{2}q$; erit A V $\infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Hinc cum A V supposita sit ∞vq , erit $vq \infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ac proinde $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$.

N *Cujus æquationis radix fest* $\frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$, seu $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.] Notandum hinc, æquationem

$ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$ aliam adhuc admittere radicem, nempe $f \infty \frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$, juxta ea, quæ habentur pag. 7.

Quam quidem radicem, cum major sit quàm $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$, cuius non nisi partem designare debet, Author meritò neglexit.

Esse autem $\frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$ quàm $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ majorem, patet,

si reducantur ad eandem denominationem, utpote ponendo $\frac{16842, 7 + 390, 7\sqrt{785}}{6481, 16\sqrt{3}}$, & $\frac{6481, 7}{6481, 16\sqrt{3}}$.

○ *Ac proinde si* $AS \infty 7\sqrt{22}$ *sumatur pro radio, erit* $AR \infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, *tangens anguli ASR sive elevationis Poli, videlicet* 80 grad. 45 min. circiter.] Est enim $7\sqrt{22}$ in rationalibus $\infty 32, 8' 3'' 1'''$, circiter, & $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}} \infty 201, 6' 2'' 8'''$, circiter. Vnde si fiat ut AS 32, 8' 3'' 1''' ad radium 100000, ita AR 201, 6' 2'' 8''' ad quartum 614105: erit 614105 tangens anguli ASR. proximè respondens tangenti grad. 80, & 45 min.

Qua-

Quarum si T X *vel* P Y *sumatur pro radio, erit* T R *vel* T R *tangens anguli* T X R *vel* T P R, *grad.* 19, 27 min. circiter, *distantiæ loci Solis in Ecliptica ab Equatore.*] Cum enim pro T X inventa sit

$\sqrt{18046464} - \sqrt{46301184000}$, quæ in rationalibus ferè est 4222, 7' 1'' 1''', & pro T R $\sqrt{47119625} - 5373$, quæ in rationalibus est 1491, 3' 7'' 4''' circiter: hinc, si fiat ut T X 4222, 7' 1'' 1''' ad radium 100000, ita T R 1491, 3' 7'' 4''' ad quartum 35318; erit 35318; tangens anguli T X R vel Y P R, congruens quàm proximè tangenti grad. 19. & 27 min.

Et tantum de solutione Problematis, quod in specimen hujus Methodi afferre visum fuit: quæ cum talis sit, ut ad Arithmeticæ quæstiones enodandas, non minùs quàm ad Geometriæ Problemata resolvenda atque construenda deserviat, non abs re fuerit, si Coronidis loco hinc subijciam regulam quandam generalem, ex eadem Methodo depromptam, extrahendi radices quaslibet ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus, quæ unà cum præcedenti solutione tunc temporis prodiit; præsertim cum illa à nemine (quod sciam) antea sit inventa, nec ab aliquo ea in re cuiquam satisfactum, cujus demonstrationem, qualis à me inventa est, breviter sum subjuncturus.

Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus.

P R Æ P A R A T I O.

P Rimo, si in dato Binomio reperiantur fractiones, oportet illas, multiplicando binomium per illarum denominatorem, eximere. Vt, exempli gratiâ, ad extrahendam $\sqrt{3}$ ex $\sqrt{242 + 12\frac{1}{2}}$, multiplico binomium per 2, & fit $\sqrt{968 + 25}$. Similiter si sit $\sqrt{\frac{242}{5} + \frac{125}{4}}$, primùm multiplico binomium per

Ccc 3

$\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$, & fit $\sqrt{242 + \frac{1}{2}}$, deinde per 2, ut jam factum est, & sic de cæteris.

Deinde, si neutra pars binomii rationalis fuerit, reducendum est per multiplicationem aut divisionem ad aliud binomium, cuius altera pars sit rationalis. Id quod per multiplicationem alterutrius partis semper fieri potest; sed brevius plerumque per minoris numeri multiplicationem aut divisionem. Quemadmodum $\sqrt{242} + \sqrt{243}$ multiplicari quidem potest per $\sqrt{242}$, & fit $242 + \sqrt{58806}$; sed compendiosius per $\sqrt{2}$, & provenit $22 + \sqrt{486}$. Eodem modo $\sqrt{33993} + \sqrt{617578125}$ potest bis multiplicari per $\sqrt{33993}$, & producitur aliud binomium, cuius absolutus numerus est 3993; sed brevius per $\sqrt{39}$; & adhuc brevius, si dividatur per $\sqrt{33}$, fietque $11 + \sqrt{125}$.

Vbi notandum, postquam habetur binomium, cuius una pars est rationalis, tunc quoque quadratum alterius partis rationale esse debere; aut nullam ex eo radicem, nec etiam ex alio binomio, utramque partem irrationalem habente, à quo per multiplicationem aut divisionem deductum est, extrahi posse.

Tertiò, ad extrahendam $\sqrt{6}$, oportet primò radicem quadratam extrahere, & deinde ex hac $\sqrt{3}$. Et ad extrahendam $\sqrt{9}$ oportet bis extrahere $\sqrt{3}$. Et sic de reliquis radicibus, quæ per numeros compositos, hoc est, qui per alios dividi possunt, designantur. Radicem verò quadratam quod attinet, regula ad illam extrahendam satis nota est: quapropter hinc tantum opus est, ut doceam, quo pacto extrahendæ sint $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, & similes aliæ, quæ per numeros primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, denotantur.

Postremò ad extrahendam $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, aut similem, per numerum primum designatam, explorandum primò est, utrum radix Binomium esse possit, cuius una pars sit rationalis. Id quod innotescit subducendo quadrata partium à se invicem, & ex reliquo extrahendo radicem, nempe cubicam si ex dato binomio $\sqrt{3}$ sit extrahenda; aut surdesolidam, si $\sqrt{5}$ sit extrahenda, & sic de cæteris. Quod ita in posterum, ubi radix aliqua extrahi debet, intelligendum est, licet expressè non dicatur. Etenim si radix hæc numerus rationalis non fuerit, certò constat, radicem quæsitam parte rationali carere. Sed cum binomium adhuc esse possit,

fit, cuius utraque pars sit irrationalis: hinc ad eam extrahendam datum binomium per differentiam quadratorum partium erit multiplicandum, si de radice cubica extrahenda quæstio fuerit; aut per quadratum huius differentiæ, si de $\sqrt{5}$; aut per ejusdem cubum, si de $\sqrt{7}$; aut per ipsius surdesolidum, si de $\sqrt{11}$ quæritur, atque ita de cæteris. Quâ ratione aliud semper binomium habebitur, in quo radix differentiæ quadratorum partium erit differentia quadratorum partium prioris binomii. Ut ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, subduco primùm 625, quadratum ex 25, à 968, & remanent 343, cuius numeri radix cubica est 7, numerus nimirum rationalis. Id quod arguit, radicem, modò ex dato binomio extrahi possit, fore binomiam, cuius una pars futura sit rationalis. Similiter ad extrahendam $\sqrt{3}$ ex $22 + \sqrt{486}$, oportet 484, quadratum à 22, subducere ex 486, & ex reliquo 2 elicere radicem cubicam. Quoniam verò id fieri non potest, constat radicem cubicam ex $22 + \sqrt{486}$ parte rationali carere: ac propterea $22 + \sqrt{486}$ per 2 multiplicandam esse, ut habeatur binomium $44 + \sqrt{1944}$, in quo radix differentiæ quadratorum partium est 2. Sic ad extrahendam radicem sursolidam ex $11 + \sqrt{125}$, quoniam subductis 121 à 125, remanent 4, qui numerus surdesolidus non est: hinc $11 + \sqrt{125}$ multiplicari debet per 16, quadratum ex 4, ut proveniat $176 + \sqrt{32000}$. In quo radix sursolidam differentiæ quadratorum partium est 4. Denique ad extrahendam $\sqrt{7}$ ex $338 + \sqrt{114242}$, in quo differentia quadratorum partium est 2, quoniam hic numerus B-surdesolidus non est: ideo datum binomium multiplicari debet per 8, hoc est, per cubum ex 2, & fit $2704 + \sqrt{7311488}$, in quo $\sqrt{7}$ differentiæ quadratorum partium est 2.

R E G V L A.

Per præcedentem præparationem semper invenitur binomium, cuius una pars, & alterius partis quadratum, nec non radix differentiæ quadratorum partium, sunt numeri rationales integri; ex quo $\sqrt{3}$, aut $\sqrt{5}$, aut $\sqrt{7}$, &c. extrahi debet.

In quem finem inveniendus est numerus rationalis radice quæsitâ paulò major; ita ut differentia non major sit quàm $\frac{1}{2}$. Quod facile per vulgarem Arithmeticam fieri potest.

Iam

Iam si pars rationalis dati binomii reliquâ parte major fuerit, oportet huic radici rationali addere radicem differentiarum quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque semissis maximi integri numeri, in aggregato contenti, pars rationalis radicis quæsitæ. A cuius partis quadrato si auferatur radix differentiarum quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum; dummodo radix ex dato binomio extrahi possit. Id quod faciliè per multiplicationem huius inventæ radicis experiri licet, quæ datum binomium, si aliqua ex eo extrahi possit, producere debet.

Verùm, si dati binomii pars rationalis reliquâ parte minor fuerit, oportet à radice rationali, quam ex toto binomio extraximus, subducere radicem differentiarum quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque media pars maximi integri numeri in reliquo contenti, pars rationalis, radicis quæsitæ. Ad cuius partis quadratum si addatur radix differentiarum quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis; modo radix fuerit binomium. Quod ex multiplicatione (ut supra) manifestum fiet.

Exempli causâ, ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, cognito jam radicem cubicam differentiarum quadratorum partium esse 7, extraho radicem quadratam ex $\sqrt{968}$, quæ est major quàm 31, at minor quàm 32; deinde ad 25, numerum absolutum, addo 31 aut 32, & fit summa 56 aut 57. Ex qua radicem cubicam extraho, quæ quidem minor est quàm 4, at major quàm $3\frac{1}{2}$; ita ut 4 sit numerus quæsitus rationalis, verâ radice paulò major. Postea ex 4 subtraho $\frac{7}{4}$ (hoc est, 7, radicem cubicam differentiarum quadratorum partium, postquam per radicem inventam 4 est divisa), & remanent $2\frac{1}{4}$. Subtraho autem, quoniam numerus absolutus 25 minor est quàm $\sqrt{968}$; si enim esset major addenda fuisset. Maximus verò integer numerus in $2\frac{1}{4}$ contentus, est 2, cuius semissis est 1, pars rationalis, radicis. Cuius quadrato 1, addo 7, $\sqrt{3}$ nempe differentiarum quadratorum partium, & fit summa 8, quadratum alterius partis. Ita ut $1 + \sqrt{8}$ sit $\sqrt{3}$ ex $25 + \sqrt{968}$, nimirum si $\sqrt{3}$ ex eo extrahi possit. Quod ut cognoscatur, oportet per multiplicationem investigare cubum ex $1 + \sqrt{8}$; aut si brevitati consulamus, tantùm ejus partem rationalem: quod fit addendo 1, cubum partis rationalis radicis, ad triplum ejus-

eiusdem partis 1, multiplicatæ per 8, quadratum alterius partis. Quod quia cum 25 parte rationali dati binomii convenit, constat, $1 + \sqrt{8}$ esse veram radicem: si verò non conveniret, radicem extrahi non posse, liquidò constaret.

Eodem modo ad extrahendam $\sqrt{3}$ ex $44 + \sqrt{1944}$: radix cubica differentiarum quadratorum partium est 2, & radix quadrata ex 1944 major quàm 44, at minor quàm 45. Quam addo numero absoluto 44, & fit summa 88 aut 89, cuius $\sqrt{3}$ major est quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$. Quapropter subtractâ $\frac{2}{3}$, radice differentiarum quadratorum partium, divisâ per radicem rationalem, ex $4\frac{1}{2}$, pro radice rationali assumptâ, remanent $4\frac{1}{18}$. Et fit 2, semissis ex 4, pars rationalis radicis. cuius quadrato 4, si addatur 2, radix differentiarum, prodibit 6, quadratum reliquæ partis. Ut patet, addendo 8 ad ter 2; multiplicatum per 6, hoc est, 36; & fit summa 44, pars rationalis binomii dati: adeoque $2 + \sqrt{6}$ radix quæsitæ.

Ad extrahendam $\sqrt{5}$ ex $176 + \sqrt{32000}$; radix sursolidi differentiarum quadratorum partium est 4; radix autem sursolidi rationalis ex dato binomio est $3\frac{1}{2}$, unde subductis 4, divisus per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $1\frac{1}{7}$, remanebunt $2 + \frac{5}{14}$. Semissis verò ex 2 est 1, cuius quadratum 1 additum ad 4 efficit 5, & fit $1 + \sqrt{5}$, radix sursolidi quæsitæ ex $176 + \sqrt{32000}$; saltem si aliqua inveniri possit. Id quod totius binomii multiplicatione indagari potest, vel brevius, addendo simul, surdesolidum partis rationalis, radicis; decuplum cubum ejusdem, multiplicatum per quadratum alterius partis; & quintuplum partis rationalis, multiplicatum per quadrato-quadratum ejusdem alterius partis. Nimirum addendo 1, 50, & 125, unde exsurgunt 176. Quod cum parti rationali dati binomii sit æquale, sequitur $1 + \sqrt{5}$ propositi binomii esse veram radicem.

Ad extrahendam $\sqrt{2}$ ex $2704 + \sqrt{7311488}$; radix B-sur-solidi differentiarum quadratorum partium est 2; radix autem B-sur-solidi rationalis totius binomii est $3\frac{1}{2}$, cui addo $\frac{4}{7}$ (quoniam hîc numerus absolutus major est), & fit summa $4\frac{1}{14}$: ac proinde 2 radicis pars rationalis. A cuius quadrato 4 subtraho 2, radicem B-sur-solidam differentiarum quadratorum partium, & relinquetur alterius partis quadratum 2. Porro multiplico $2 + \sqrt{2}$ B-sur-solidè, vel brevius, in unam summam colligo; 128, B-sur-solidum ex 2;

D d d

1344.

1344, vices & semel sursolidum ex 2, multiplicatum per quadratum ex $\sqrt{2}$; 1120, trigies & quinquies cubum ex 2, multiplicatum per quadrato-quadratum ex $\sqrt{2}$; & 112, septies 2, multiplicatum per quadrato-cubum ex $\sqrt{2}$, & provenient 2704. Vnde manifestum fit, $2 + \sqrt{2}$ esse radicem quæsitam.

Cæterum observandum hîc est, postquam datum binomium per numerum aliquem multiplicatum aut divisum fuerit, atque ad aliud reductum, cujus radix jam sit inventa, quod, ad prioris binomii radicem obtinendam, radicem inventam dividere aut multiplicare oporteat per radicem numeri, per quem binomium multiplicatum fuit aut divisum.

Sic quoniam ad extrahendam $\sqrt[3]{242 + 12\frac{1}{2}}$, ipsum per 2 multiplicavimus, & deinde hujus posterioris binomii radicem invenimus esse $1 + \sqrt{8}$; dividendum erit $1 + \sqrt{8}$ per $\sqrt[3]{2}$ ex 2, & fiet $\sqrt[3]{\frac{242}{2} + \sqrt[3]{\frac{12\frac{1}{2}}{2}}}$ 128, radix cubica ex $\sqrt[3]{242 + 12\frac{1}{2}}$.

Multiplicavimus $\sqrt[3]{\frac{242}{5} + \sqrt[3]{\frac{12\frac{1}{2}}{4}}}$ per $\sqrt[3]{5}$, & invenimus $\sqrt[3]{242 + 12\frac{1}{2}}$, cujus radix est $\sqrt[3]{\frac{242}{5} + \sqrt[3]{\frac{12\frac{1}{2}}{5}}}$ 128; quâ divisâ per $\sqrt[3]{5}$, emerget $\sqrt[3]{\frac{242}{25} + \sqrt[3]{\frac{12\frac{1}{2}}{5}}}$, pro radice ex $\sqrt[3]{\frac{242}{5} + \sqrt[3]{\frac{12\frac{1}{2}}{4}}}$.

Multiplicatum est $\sqrt[3]{242 + \sqrt[3]{243}}$, primò per $\sqrt[3]{2}$, & deinde per 2; unde fit ut inventa radix cubica $2 + \sqrt[3]{6}$ dividenda sit per $\sqrt[3]{2}$, & prodibit $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3}}$, pro radice cubica quæsitâ ex $\sqrt[3]{242 + \sqrt[3]{243}}$.

Divisimus $\sqrt[3]{3993 + \sqrt[3]{17578125}}$ per $\sqrt[3]{3}$, & multiplicavimus per 16, ad extrahendam $\sqrt[3]{5}$: quare necesse est inventam radicem $1 + \sqrt[3]{5}$ dividere per $\sqrt[3]{5}$ 16, & multiplicare per $\sqrt[3]{16}$ 3, ut habeatur vera radix sursolidâ ex dato binomio.

SEQUITUR DEMONSTRATIO.

IN primis est ostendendum, quod, si binomium aliquod in se multiplicetur cubicè, proveniat semper aliud binomium, cujus partium quadrata, à se invicem subducta, relinquunt cubum differentiarum, quadratorum partium radices sive primi binomii. Id quod

quod manifestum fit, supponendo binomium illud designari per $a \sqrt[3]{bc}$, quod in se multiplicatum quadratè producit binomium $aa + bc \sqrt[3]{2a\sqrt[3]{bc}}$, & hoc rursus per $a \sqrt[3]{bc}$, producit binomium $a^3 + 3abc \sqrt[3]{3aa + bc\sqrt[3]{bc}}$; utpote cubum ex $a \sqrt[3]{bc}$.

Vbi notandum, quod, licet in binomio plures reperiantur partes, tamen non nisi pro duabus sint habendæ, quarum una, utpote, $a^3 + 3abc$, designet numerum rationalem, at verò $3aa + bc\sqrt[3]{bc}$, numerum irrationalem seu surdum. Deinde constat, partem rationalem $a^3 + 3abc$, compositam esse ex cubo partis rationalis radices, & ex triplo solido, quod fit ex eadem hac parte in quadratum reliquæ partis radices: ac denique, si dictarum partium $a^3 + 3abc$ & $3aa + bc\sqrt[3]{bc}$ quadrata $a^6 + 6a^4bc + 9a^2b^2c^2$ & $b^3c^3 + 6a^2b^2c^2 + 9a^4bc$ à se invicem auferantur, relinqui $a^6 - 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 - b^3c^3$, cubum ex $aa - bc$, differentiâ quadratorum partium radices.

In numeris. Esto $a \propto 2$, $\sqrt[3]{bc} \propto \sqrt[3]{6}$. Hinc multiplicato binomio $2 + \sqrt[3]{6}$ in se cubicè, fit binomium $44 + \sqrt[3]{1944}$: in quo partium quadrata, 1936 & 1944, à se invicem subducta, relinquunt 8, cubum differentiarum quadratorum partium.

Deinde ostendendum, binomium multiplicatum per differentiam quadratorum partium producere semper aliud binomium, in quo differentia quadratorum partium sit numerus cubicus.

Quod patet si multiplicetur binomium $a \sqrt[3]{bc}$, per $aa - bc$, differentiâ quadratorum partium. Exsurgit enim binomium $a^3 - abc \sqrt[3]{a^4bc - 2a^2b^2c^2 + b^3c^3}$: cujus partium quadrata, $a^6 - 2a^4bc + a^2b^2c^2$ & $a^4bc - 2a^2b^2c^2 + b^3c^3$ à se invicem subducta, relinquunt $a^6 - 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 - b^3c^3$, numerum cubicum, cujus radix cubica $aa - bc$, est, ut supra, differentia quadratorum partium prioris binomii $a \sqrt[3]{bc}$.

In numeris. Sit $a \propto 22$, & $\sqrt[3]{bc} \propto \sqrt[3]{486}$. Vnde multiplicato binomio $22 + \sqrt[3]{486}$ per differentiam quadratorum partium 2, prodibit binomium $44 + \sqrt[3]{1944}$. in quo differentia quadratorum partium est 8, utpote cubus differentiarum 2, quæ est inter 484 & 486, partium quadrata prioris binomii $22 + \sqrt[3]{486}$.

Quibus expositis, ad extrahendam $\sqrt[3]{3}$ ex binomio $20 + \sqrt[3]{392}$, in quo pars rationalis 20 est major reliquâ parte $\sqrt[3]{392}$:

cogitetur $a^3 + 3abc$ esse 20, & $3aa + bc\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{392}$, ita ut
 $+ a^3 + 3aa + 3abc + bc\sqrt{bc}$ designet datum binomium $20 + \sqrt{392}$, &
 radix ejus cubica $a + \sqrt{bc}$ ipsam radicem quærendam, cujus ma-
 jor pars sit a , & minor $\sqrt{bc}$. Tum operare secundum regulam.

$$20 + \sqrt{392}$$

$$20$$

subt. $\left\{ \begin{smallmatrix} 400 \\ 392 \end{smallmatrix} \right\}$ quadrata partium à se invicem.

reliq. 8,

2 radix cubica reliqui, five $aa - bc$.

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 1} \\ 3 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 9} \\ 2 \end{array}$$

Adde ad 20, partem rationalem binomii

— — — 19, præter propter valorem partis irrationalis.

& fit 39, valor dati binomii in rationalibus, circi-
 ter. utpote à vero unitate non discedens, quippe
 qui inter 39 & 40 consistit. Vnde radix cubica fit
 major quàm 3 & minor quàm $3\frac{1}{2}$, ita ut $3\frac{1}{2}$ radicem
 veram non supra $\frac{1}{2}$ excedat. Sumatur autem quasi
 esset vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $aa - bc$,

per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$:

& fit $\frac{4}{7}$, five $a - \sqrt{bc}$.

add. $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$,

& fit summa $4\frac{1}{4}$, five 2 a , duplum partis rationalis, radicis.
 supponendo $3\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum $3\frac{1}{2}$ sit major ra-
 dice verâ; ita tamen, ut differentia non sit supra $\frac{1}{2}$, fit, ut $4\frac{1}{4}$
 quoque duplo partis rationalis major existat, & differentia mi-
 nor quàm 1. sicut inferiùs ostensuri sumus. Vnde cum eadem
 pars sit numerus rationalis integer, sequitur duplum ejus fore 4,
 utpote maximum integrum numerum in $4\frac{1}{4}$ contentum, adeo-
 que ipsam dictam partem fore 2. Quâ inventâ, facile est reli-
 quam invenire. Etenim, si à 4, quadrato ejusdem partis, subdu-
 catur 2, radix cubica differentiarum quadratorum partium dati bi-
 nomii, relinquetur 2, quadratum alterius partis: Ita ut radix in-
 venta sit $2 + \sqrt{2}$.

Vbi

Vbi notandum, operationem hanc sufficere ad investigandam
 radicem, cum constet illam binomium esse; sed quando id incer-
 tum fuerit, explorari poterit per multiplicationem inventi bino-
 mii in se cubicè, aut etiam brevius per sequentem operationem.

Divid. 40, hoc est, $2a^3 + 6abc$

per 4, hoc est, 2 a :

& fit quotiens 10, five $aa + 3bc$.

Cui addatur ter 2, seu 6, hoc est, $3aa - 3bc$.

& provenit 16, five 4 aa : quod est quadratum supe-
 rioris 4, nimirum duplum partis rationalis inventæ 2. Vnde radix
 binomia erit, & duplum ejusdem partis 4: adeoque $2 + \sqrt{2}$ ra-
 dix quæsitâ.

Vel etiam hoc modo:

Ad 8, hoc est, a^3

add. 12, hoc est, $3abc$:

& provenit 20, five $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati
 binomii: sequitur $2 + \sqrt{2}$ esse radicem quæsitam.

Omnino ut supra fuit expositum.

Similiter, ad extrahendam $\sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}}$, in quo pars
 rationalis 44 est minor reliquâ parte $\sqrt{1944}$; cogitetur (ut supra)
 $+ a^3 + 3abc$ esse 44, & $3aa + bc\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{1944}$, ita ut $+ a^3 + 3aa + 3abc + bc\sqrt{bc}$
 designet datum binomium $44 + \sqrt{1944}$, & illius radix cubica
 $a + \sqrt{bc}$ hujus radicem quærendam, cujus a sit minor pars, &
 $\sqrt{bc}$ major. Tum operare secundum regulam.

$$44 + \sqrt{1944}$$

subt. $\left\{ \begin{smallmatrix} 1944 \\ 1936 \end{smallmatrix} \right\}$ quadrata partium à se invicem.

reliq. 8

2, radix cubica reliqui, five $bc - aa$.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 44} \\ 4 \overline{) 4} \\ 4 \overline{) 4} \\ 4 \overline{) 4} \end{array}$$

Adde ad 44 partem rationalem binomii

— — — 44, præter propter valorem partis irrationalis:

& fit 88, valor binomii dati in rationalibus, circiter.

quippe qui à vero unitate non absit, cum inter 88 & 89 consistat.

Radix autem ejus cubica est major quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$;

D d d 3

ita

ita ut $4\frac{1}{2}$ sit major radice verâ, excessu minore quàm $\frac{1}{2}$. Assumatur autem ut vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $bc - aa$,

per $4\frac{1}{2}$, hoc est, $\sqrt{bc + a}$:

& fit quotiens $\frac{4}{9}$, sive $\sqrt{bc - a}$.

subtr. $\left\{ \begin{array}{l} \text{ex } 4\frac{1}{2}, \text{ hoc est, } \sqrt{bc + a}, \\ \frac{4}{9}, \text{ hoc est, } \sqrt{bc - a}: \end{array} \right.$

& relinquitur $4\frac{1}{8}$, sive $2a$, duplum partis rationalis radice, videlicet supponendo $4\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum major sit, fit ut etiam $4\frac{1}{8}$ excedat idem duplum, differentiâ minore quàm 1; sicut mox ostendemus. Vnde cum eadem pars sit numerus integer rationalis: sequitur duplum ejusdem partis fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4 + \frac{1}{8}$ comprehensum: adeoque ipsam partem esse 2. Quâ inventâ, facile est reliquam partem invenire. Etenim si ad 4, quadratum dictæ partis, addatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium binomii dati, fit summa 6, quadratum alterius partis: ita ut radix inventa sit $2 + \sqrt{6}$.

Vbi (ut supra) notandum, non opus esse ut ulterius operemur, postquam constat radicem extrahi posse, hoc est, ipsam binomium esse: quandoquidem eo casu radix inventa sit quæ sita. Illud autem si ignoretur, dignosci poterit multiplicando radicem inventam in se cubicè, aut etiam brevius, hoc modo:

Divid. 88, hoc est, $2a^3 + 6abc$,

per 4, hoc est, $2a$:

& fit quotiens 22, sive $aa + 3bc$.

Subtr. ter 2, sive 6, hoc est, $3bc - 3aa$:

& relinquitur 16, sive $4aa$, quod est quadratum præcedentis 4. nimirum duplæ partis rationalis inventæ 2. Id quod monstrat, duplum ejusdem partis esse 4, adeoque radicem quæ sitam binomium esse, videlicet $2 + \sqrt{6}$. quemadmodum modò inventa fuit.

Vel etiam sic:

Ad 8, hoc est, a^3

add. 36, hoc est, $3abc$:

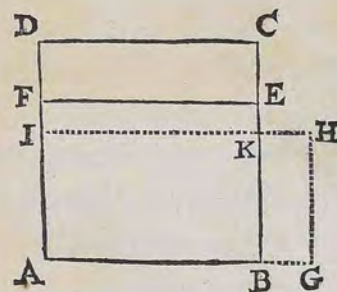
& provenit 44, sive $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2 + \sqrt{6}$ esse radicem quæ sitam.

Vt

Vt supra expositum fuit.

Quibus explicatis, demonstrandum nunc est, quod superius polliciti sumus.

In quem finem, pro radice cubica rationali inventa, veram, ut dictum est, superante, scribatur m ; at pro vera, quam in allatis exemplis per $a + \sqrt{bc}$ designavimus, brevitate causâ scribatur v ; similiterque pro $aa = bc$, differentiâ quadratorum partium radice, scribatur d . Hinc, cum d divisa per m dat $\frac{d}{m}$, quæ in primo exemplo ipsi m est addita, & in secundo exemplo ab m ablata; ostendendum est, differentiam, quâ $m + \frac{d}{m}$ excedit $v + \frac{d}{v}$, quod duplum partis rationalis, antea $2a$ nominatum, & quâ $m - \frac{d}{m}$ excedit $v - \frac{d}{v}$, quod similiter duplum partis rationalis, superius $2a$ nominatum, designat, unitate non esse majorem. Quod facile erit, si tantum ostendatur excessum ipsius $\frac{d}{v}$ supra $\frac{d}{m}$ minorem esse excessu ipsius m supra v . hoc modo:



Esto $AB \propto v$, supra quam describatur quadratum $ABCD$, quod majus erit quàm d , quippe quæ tantum differentiam designat, quæ est inter quadrata partium ipsius v , cujus quadratum earundem partium quadratis unâ cum duplo sub partibus rectangulo est æquale. Hinc si supponatur rectangulum $ABEF \propto d$, erit $AF \propto \frac{d}{v}$.

Tum assumptâ $AG \propto m$, ita ut BG non superet $\frac{1}{2}$, factoque rectangulo $AGHI \propto d$, hoc est, æquali rectangulo $ABEF$: erit $AI \propto \frac{d}{m}$; nec non rectangulum $IKEF$ æquale rectangulo $KBGH$. Atque adeò cum IK sit major quàm KB , erit IF minor quam BG , hoc est, excessus ipsius $\frac{d}{v}$ supra $\frac{d}{m}$ minor erit excessu ipsius m supra v . Quod erat demonstrandum.

Eadem est ratio cum dati binomii partes per signum — disjungun-

guntur. Si enim, exempli causâ, proponatur binomium $20 - \sqrt{392}$. oportet tantum signum $-$ transmutare in signum $+$, atque ut supra ex $20 + \sqrt{392}$ radicem cubicam extrahere, quæ est $2 + \sqrt{2}$, & fit $2 - \sqrt{2}$ radix cubica ex $20 - \sqrt{392}$. Quemadmodum liquet ex iis, quæ superius sunt ostensa. Et sic de aliis.

Cæterum, quæ hîc de radice cubica ostensa sunt, applicari quoque possunt ad ea, quæ ad reliquarum radicum extractionem sunt allata: cum eadem ubique sit demonstrandi ratio, idemque processus; ita ut plura hac de re afferre non sit opus. Tantum sciendum, modum, quo hæc regula inventa fuit, ad plures alias regulas, in Arithmetica hactenus incognitas, inveniendas inservire posse. Qui quidem in eo consistit, ut, dum in aliqua quæstione ignoratur ratio inveniendi verum numerum, quem integrum esse certò constiterit, quæratur numerus fractus unitate verum non superans: eritque maximus integer numerus, in eo contentus, is qui quæritur.

F I N I S.



Celeberrimo, Amicissimoque Viro,
D. FRANCISCO à SCHOOTEN
IOHANNES HVDDE
S. P. D.

Clarissime Vir,

Vicopiam Tibi faciam rogas, prolixam illam de Reductione Equationum epistolam, sive libellum mavis, ut & alteram illam, quæ meam de Maximis & Minimis Methodum continet, Commentariis tuis in D. Cartesii Geometriam annectendi edendique. Certè, cum id non modò postules, sed etiam serîo, ut faciam, mihi author sis, in illam opinionem, sive imaginationem potius devenio, aliquid illis, tuo saltem iudicio, contineri, quod laboribus in lucem edendi respondere queat; quippe cum continuo dies noctesque cogitationes tuæ circa illa, quæ aliquo commodo humanum genus beare possint, versentur occupenturque, nec unquam, vel levissimo indicio, deprehendere potuerim, Te, secus ac Batavum deceat, aliud clausum in pectore premere, aliud verò linguâ promere, in animum inducere nequaquam potui, Te, eo tantum temporis articulo, quo has posceres, mihi ut facerem author esses, à consuetâ tibi & regiâ viâ deflexisse. Præterea amicitie nostræ, nec hodie, nec heri natæ, vinculum, tuusque candor singularis, mihi satis superque, Te nequaquam hoc ab animo tuo impetraturum fuisse, testatum faciunt. Quare, si hac in re Tibi oblectarer, commissi erroris fortasse insimularer. Non pauca tamen obstant, quò minus assensum planè præbeam. Non enim Te latet, me multâ temporis egestate, quod tunc aliis studiis

Ecc de-

destinâram, hæc non ita ad normam exigere potuisse, quam illa quidem, quæ publico usui viritim legenda terendaque permittuntur, quasi suo quodam jure postulant: cum non tantum benevolorum amicorum, sed etiam vilitigatorum, acerbiorumque inimicorum, quorum si non in præsens, in posterum fortasse copia suppetere possit, judicium subire debeant. At fortè inquires, quod non sub libelli, sed epistolarum, ad Te datarum, nomine, in lucem proditura sint, idque iis temporibus datarum, quibus aliis studiis animum applicassem, ideoque nullo merito accuratam illam diligentiam, summamque curam, omniumque probationes desiderari posse. Sed quid causæ est, quin paulo diutius expectem, illaque, quibusdam præterea additis, sub libelli nomine, accuratius elaborata publici juris faciam? maximè cum libellum quendam, (quibusdam studiis ex voto ad finem perductis,) de Natura, Reductione, Determinatione, Resolutione, atque Inventione Aëuationum prælo subicere proposuerim, (nisi fontica quædam causa denuo cursum meum remoretur,) cujus maximam jam partem, quod materiam spectat, si pauca quædam excipias, in numerato habeo, adeo ut non nisi in ordinem redigendi labor & quasi forma desideretur. Cum enim in animo habeam, illum ita accurare, ut à quolibet, qui modo ab ovo, quod dicitur, rem ipsam ordiri, & per numeros gradusque procedere, nec uno impetu montis verticem superare cupit, intelligi & in usum transferri possit; certè multo magis, procul omni dubio, utilitate suâ, quam hæc epistolæ, quæ non nisi partem continent, eamque ita, ut dictum est, scriptam, se publico commendaret. Sed jam mihi responsionem tuam audire videor: Quid obstat, Huddeni, quominus utriusque nos participes facias?

Nam bene conveniunt unaque in sede morantur.
Sed quid utilitatis imperfectior ille, & quasi abortivus
fætus,

fætus, tum allaturus est? Nullum equidem, fortasse, inquires, ubi consummator se conspiciendum præbuerit, sed jam quidem quandiu ille intra penetralia Vestæ latet, cum experienciâ in omnibus pæne scientiis compertum sit, illos, qui earum amore tenentur, vel quibus res curæ & cordi est, eamque quam penitissimè, & quam maxime fieri potest, circumspicere rimari & penetrare cupiunt, raro quid amplius, quam rudi Minervâ delineatam, aut manuductionem ad eam requirant, vel nudam modo, omnibus demonstrationibus, quasi supervacaneis ornamentis, neglectis, veritatem expetant: Ita namque partim magis ad intimam rerum medullam ingenio suo penetrare illis datur, cum ex parte iis quoque investigandi labor incumbat: partim majore voluptate perfunduntur, atque adeo multo aptiores ad aliarum rerum veritatem in apricum producendam evadunt. Cum etiam id experientia doceat, eos, nec ferè alterius generis homines, aliquid, quod communem captum superet, & cornicum quasi oculos configat, elaboratum dare posse. Vnde illud confici videtur, scientiarum amatoribus satis superque dictum, nec mihi fas licitumque esse, illud subducere aut invidere iis, quibus, si non aliis, aliquo modo satisfacere queat. quibus addere posses: alios, licet multis in locis, ejus, quod dicitur, veritatem demonstrationibus fulcitam, & ad unguem elaboratam, (quod variis in locis, levi tantum brachio attigi,) non reperturi sint, nihilo minus multas regulas ad usum, cujus respectu non paucae ad amissim factæ sunt, transferre posse. Atque ita jam causam meam contra me ipsum egisse videor, ut vix mutirevel hiscere adversus ea, quæ dixi, mihi licitum videri possit, si in Lectores, quales esse decet, incidere mihi contingat: sed cum maxima hominum pars eò propendeat, ut ante de re aliqua, quam illam clarè & distinctè perceperit, judicium ferat, remque potius in deter o-

rem, quam meliorem partem interpretetur, atque eorum iudicium sit periculi plenum, si circa res versetur, quæ non exactè scriptæ, dilucidè explicatæ, demonstrationibus subnixæ sunt; eoque magis si illæ paucis verbis indicatæ fuerint, ipsaque res ita sit comparata, ut non nisi difficulter paucis verbis ita se comprehendi sinat, quin alicubi aliquid, quod dubiam, variamque interpretationem suscipere possit, irrepat, seque immisceat: Cumque multo maxima pars eorum quæ epistolis meis continentur talia sint, demonstrationibusque destituta, verbisque paucis, uti jam dictum, indicata, cum Tibi hoc plusquam abundè sufficeret; Satis mihi vel hoc solum, causæ videtur, epistolarum editioni, nulla ex parte suffragari. Pone verò me majori felicitate quam cuiquam sperare fas sit, hac in parte uti, measque literas non nisi in genuinorum veritatis amatorum, qui nihil, exceptâ veritate, investigant, manus incidere, neque meos Lectores tales esse, qui, ubi ad dubium verbum, quasi scopulum, offenderint, veritati consonâ significatione insuper habitâ, eam magis quæ falsitatis aliquid secum trahit, veluti obtorto collo arripiunt, tanquam in sinu gaudentes, & castellanos nescio quos triumphos ducentes, quasi verò jam repererint aliquid, quo suspectam autoris inventionem reddant, ejusque apud alios existimationem elevent, ut ipsi eò majores videantur, atque ita vel alterius nominis, si fieri possit, ruinâ gradum sibi ad gloriam, licet inanem, faciant: Pone inquam

Omnia jam fieri, fieri quæ posse negamus, Tamen adhuc plura obstant: nam, cum non tantum typographicæ emendationis molestiam, satis sæpe tædiosam, Te devoraturum, sed & illa, quæ vernaculâ linguâ à me scripta sunt, Latio Te donaturum, liberaliter, qui tuus est mos, obtuleris, videor mihi satis graviter in publica commoda peccaturus, nisi repulsam feras. Nonne enim
tempus

tempus illud, quod operæ illi impendere necesse habebis, nec id modicum, tum propter rite in Latinum sermonem convertendi, tum propter recte, ubi prælo subjecta fuerint, corrigendi molestiam, melioribus curis impendere, bonasque horas melius collocare posses? nisi enim me experientia docuisset, quid non possis, ubi penitus cogitationes tuas in rem aliquam defixeris, quamque multis in rebus, quarum ego sum conscius, optatum Tibi exitum consequutus fueris, facilius assensum præberem. Ne igitur impræsentiarum ægrè feras, quod is audire nolim, qui, cum temporis tuo non contemnendam partem suffuratus fuerit, meliora, quæ alioquin invenires, publico invidisse videri possit. Atque adeo omnes hæ rationes eo me impellerent, ut, nisi à mea consuetudine abborreret, amicis aliquid denegare, jam sine omni dubio repulsam ferres. Quid ergo in re dubia consilii? Si edendi copiam faciam, haud leviter peccabo; sin id recusem, optimo meorum amicorum præter consuetudinem refragabor. sed in omnes partes mentem versando, tandem videor mihi Gordio huic nodo gladium reperisse, & rationem, qua anceps malum effugere queam. Nimirum: nec assentior, nec repugno editioni epistolarum, sed totum hoc, quicquid est, Tibi plane trado & committo, ut id, quod optimum Tibi videbitur, probes & sequaris, ubi rationum mearum momenta non præoccupato, sed libero ac provido animo perpenderis, libraverisque. Vale, Vir Amicissime, & me, quod facis, amare perge.

Datum Amstelædami ipsis
Calendis Aprilis 1658.

IOHANNIS HVDDENII
EPISTOLA PRIMA
DE
REDVCTIONE
ÆQVATIONVM.

Clarissimo, Præstantissimoque Viro,
D. FRANCISCO SCHOTENIO
IOHANNES HVDDÉ

S. P. D.

Doleo, Vir Amicissime, quòd dubia valetudi-
ne & negotiis impeditus amicæ petitioni tuæ,
de iis latius deducendis, quæ de Reductione
Æquationum ad Amicum quempiam ante
aliquot annos breviter perscripseram, ha-
tenuis satisfacere nequiverim. Impræsentiarum ergo
aliquid temporis (quamvis parum eo abundem) deci-
dam, ut promissa, si non in totum, ex parte saltem exsol-
vam, ne vel nimis longa te offendat mora, vel nomen
malum apud te audiam, quamvis non videaris immeritò
mibi crimen illud impingere posse, sed tamen velim me-
mor sis Belgici adagii: Die noch wat betaalt, wil noch
betalen, en is van de quaatste slag niet.

Quod igitur ad *Reductionem* Æquationum attinet,
eam duobus modis considero, vel quatenus æquatio *ab-*
solutè considerari potest, vel *relativè* in quantum scili-
cet illam ad aliquod Problema, è quo originem duxit,
referre licet.

Primò verò eam *absolutè* considerabo, omiſſa vulgari
Reductione, quæ per additionem, subtractionem, mul-
tiplicationem, divisionem & extractionem procedit:
ponamque tantùm Reductionum Regulas quasdam,
quarum plurimas non ita pridem inveni, easque exem-
plis, ut mentem meam meliùs percipias, illustrabo, re-
lictis earum demonstrationibus, tum quòd maxima ea-
rum pars sit perquàm inventu facilis, tum, quod rei
caput

caput est, quòd hominis foret otio suo abutentis, eas tibi (cui, quicquid in Mathesi inaccessible aliis videtur, perspectum est,) transmittere.

Et ut distinctius meos conceptus exprimam, primo restringam meas Regulas ad eas æquationes, in quibus una tantum incognita quantitas reperitur, quam semper nominabo x ; & in quibus Primus Terminus (Primum Terminum eum dico, in quo x plurimarum est dimensionum; Secundum, ubi x est unâ dimensione minor, & sic porro) non est multiplicatus aut divisus per aliquam cognitam quantitatem, atque semper affectus signo $+$: Quia non tantum hoc pacto omnes æquationes considerare consuevimus, sed etiam quia nullo, aut parvo admodum labore, ut cuilibet notum est, ad talem formam, si eam non habeant, redigi possunt.

SEQUENTES NOVEN REGVLÆ SE EXTENDVNT
AD OMNEM ÆQVATIONEM, SIVE IN EA
IRRATIONALES QVANTITATES ET FRA-
CTIONES, SIVE NVLLÆ INVENIANTVR.

I. REGVLA.

Si in æquatione literali una vel plures literæ seu quantitates cognitæ supponantur $\infty 0$, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est neque Propositam æquationem reducibilem fore; at verò si *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ista resultans reduci non poterit.

Exem-

Exemplum, ubi ultimus Terminus non evanescit.

Sic in æquatione $x^3 - 3axx + 2bbx - 3a^3 \infty 0$, si suppo-

$$\begin{array}{r} -b \\ +3ab \\ +4aa \\ -5aab \\ -4bba \end{array} - b^3$$

natur $a \infty 0$, resultabit, inde $x^3 - bxx + 2bbx - b^3 \infty 0$. Quia autem hæc æquatio reducibilis non est, certum est neque Propositam reducibilem fore.

Exemplum, ubi ultimus Terminus evanescit.

Si in æquatione $x^6 - 6abx^4 + 6c^3x^3 + 6a^3bxx - 12aac^3x + 12c^5d \infty 0$

$$\begin{array}{r} -3aa + ccd \\ -bba \\ +6aab^3 \end{array} - 6abcc - 12abb^3$$

supponantur d & $a \infty 0$, resultat inde $x^3 + 6c^3 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum reduci nequit, argumentum est neque Propositam ad pauciores dimensiones quàm ad tres, reducibilem fore.

Sic etiam supponendo d & $b \infty 0$, vel tantum $c \infty 0$, orientur hæc duæ æquationes

$$\begin{array}{l} x^5 - 3aa x^3 + 6c^3 xx - 12aac^3 \infty 0. \\ x^5 - 6abx^3 - bbaxx + 6a^3bx + 6aab^3 \infty 0. \\ -3aa \end{array}$$

Quæ si reduci non poterunt, denotabunt Propositam æquationem, ad pauciores dimensiones quàm ad 5, reduci non posse.

Dico, *illam non ad pauciores dimensiones reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. quemadmodum contingit in hac $x^4 - 4ax^3 + 4aaxx + 2b^3x - 4ab^3 \infty 0$, supponendo $a \infty 0$: exsurgit enim $x^3 + 2b^3 \infty 0$, quæ non potest reduci, & tamen æquatio Proposita est reducibilis per $x - 2a \infty 0$.

II. REGVLA.

Si in æquatione literali pro una, vel pluribus, vel omnibus literis seu quantitatibus cognitis, supponan-

Fff

tur

tur numeri, vel aliæ quantitates ad libitum, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, sive numeralis, sive literalis, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est, neque Propositam æquationem reducibilem fore; si verò *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones, quàm ista Resultans, reduci non poterit.

Exempla, ubi ultimus Terminus non evanescit.

$$\begin{array}{r} 1. \text{ Si in hac æquatione } x^3 - 2axx + 3bbx - 3a^3 \infty 0 \text{ sup-} \\ -b + 3ab - 3b^3 \\ + 4aa - 6aab \\ + 9abb \end{array}$$

ponatur $a \infty 1$, & $b \infty 1$, resultabit inde æquatio numeralis $x^3 - 3xx + 10x - 3 \infty 0$. Quæ, quoniam non est reducibilis, indicabit, neque Propositam æquationem reducibilem esse.

$$\begin{array}{r} 2. \text{ Sic etiam, si habeamus hanc } x^5 + 4aabbx - 10a^4b \infty 0, \\ -\frac{3a^3bb}{a-b} - \frac{2b^3aa}{3} \end{array}$$

atque supponamus $4aabb \infty \frac{3a^3bb}{a-b}$, seu $b \infty \frac{1}{4}a$, exsurget inde $x^5 + 2\frac{49}{9}a^5 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio reduci non potest, certum est, neque Propositam reducibilem fore.

$$\begin{array}{r} 3. \text{ Non secus, si in æquatione } x^5 + 8a^3xx + 4ca^3x - 2a^3cd \infty 0 \\ -2aac + acd \end{array}$$

supponatur $-8a^3 - 2aac \infty 0$, seu $c \infty -4a$; ac $4ca^3 + acd \infty 0$, seu $d \infty -\frac{4aa}{c}$, fiet inde $x^5 + 8a^5 \infty 0$. Quoniam verò hæc æquatio non reducibilis existit, certum est, &c.

4. Eodem modo se res habet in æquationibus, ubi quantitates Irrationales reperiuntur: nam, exempli gratiâ, si detur hæc æquatio $x^5 + xx\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb} + a^3b\sqrt{C.\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{27}abb} \infty 0$, supponendo $\frac{1}{4}aa+bb \infty 0$, seu $bb \infty -\frac{1}{4}aa$, resultabit $x^5 + a^3b\sqrt{C.\frac{25}{216}a^3} \infty 0$. quæ, quoniam reduci non potest, certum est, &c.

Exem-

Exempla, ubi æquatio Resultans pauciores quàm Proposita dimensiones habet.

$$\begin{array}{r} 1. \text{ Si habeatur } x^4 + 4cx^3 + 4ccxx - 4bbcx + b^4 \infty 0, \text{ ac} \\ -dd \quad -bbdd \\ -2bb \end{array}$$

supponatur $c \infty 1$, $b \infty 1$, $d \infty 1$, resultabit inde æquatio numerica $x^4 + 4xx + 1x - 4 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum non existit reducibilis, etiam æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ad tres reduci non poterit.

$$\begin{array}{r} 2. \text{ Si proponatur } x^3 - \frac{1}{4}ab\sqrt{xx+aa-bb} + 3axx + \frac{1}{4}abx - aab \infty 0, \\ +bb\sqrt{3aa+bb} \end{array}$$

& supponatur $aa-bb \infty 0$, seu $a \infty b$, resultabit $x^3 + 3axx + x^2 \infty 0$. quæ etiam non poterit reduci, ideoque indicabit Propositam æquationem ad pauciores quàm ad tres dimensiones reduci non posse.

Dico non ad pauciores dimensiones illam reducibilem fore, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. Quod etiam in 1^{ma} Regula locum habuit, ibique explicatum est. Sed si roges, quot ego dimensiones 2^{do} huic exemplo adscribam? respondeo, me tot dimensiones cuilibet æquationi adscribere, quot ejus incognita quantitas ad summum dimensiones habet, dempto omni signo radicali, quod illam incognitam quantitatem includit: ideoque illud 2^{dum} exemplum habiturum 6 dimensiones, postquam signum radicale ante quantitatem incognitam, nempe $\sqrt{xx+aa-bb}$, ablatum fuerit.

NOTÆ duæ in hanc I^{ca} II Regulam.

I. Notandum est, utramque hanc Regulam non tantum magnum habere usum in inquirendo, utrum æquatio aliqua literalis reducibilis sit, verum etiam eodem modo inquire posse:

1^{mo}. Num æquatio illa vel etiam quantitas quævis composita, per aliam æquationem vel quantitatem, quæ rationalis sit, dividi possit.

2^{do}. Num admittat radicem quadratam, cubicam, vel aliam.

F f f 2

3^{tio}.

3^{io}. Num duæ vel plures æquationes, vel quantitates dictæ, admittant communem aliquem divisorem.

Nam, si non admittant divisorem rationalem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem, illud plerumque, monstratam jam ineundo viam, vel uno intuitu, vel saltem admodum facile, innotescet; præsertim in æquationibus vel quantitatibus valde compositis, atque ex multis diversis literis constantibus, quod sæpenumero ineundo aliam viam valde difficile inventu esset, magnumque & laborem & industriam requireret. Hæc enim Methodus tantum exigit, ut æquationes, vel quantitates dictæ, determinentur (supponendo unam vel plures literas nihilo, vel unitati, vel numero, vel quantitati, ad libitum sumendis, æquales,) ad alias, quas aliunde scimus non admittere reductionem, vel rationalem divisorem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem. Quod omne, exemplis explicare, supervacuum erit, quemadmodum etiam omnem ejus methodi usum enumerare, quem satis insignem esse jam patuit; ac vel eo nomine, quod ipsa nec fractiones, nec irrationales quantitates moretur, non raro magnum adfert compendium.

Denique, si æquationes, vel quantitates compositæ, admittant reductionem, vel divisorem rationalem, vel aliquam radicem, vel communem divisorem, possunt etiam illa omnia in multis casibus hæc Methodo satis compendiosè inveniri. sed hæc non sunt hujus loci, posthac fortassis aliquid de iis indicabo.

II. Quid velim per æquationem ex Proposita Resultantem; necessarium videtur, ut paulò clariùs exponam: maxime quia id etiam in sequentibus Regulis, ubi litera aliqua ∞ o supponitur, usum suum habebit. Quando enim una pluresve literæ vel quantitates ∞ o sumuntur, liquet, omnes quantitates, ex multiplicatione harum per alias productas, etiam æquales nihilo fieri; ideoque in Proposita æquatione necessariò evanescere. quemadmodum in allatis exemplis quoque est videre. Adcò ut in æquationibus, quæ literales fractiones non includunt, pateat, quid per æquationem Resultantem intelligam. Sed si literales fractiones dantur, tunc quidem facile, nisi quis probè animum advertat, error committi posset. Etenim fractionis numeratore ∞ o existente, tollenda est ista fractio ex Proposita æquatione; at denominatore ∞ o existente, oportet terminos omnes æquationis primùm per ejusmodi deno-

denominatores multiplicare. Quo peracto, erit æquatio hæc, in quâ scilicet nulla amplius reperitur fractio literalis, cujus denominator est ∞ o, & in qua conditiones omnes assumptæ, sive suppositiones, sunt adimpletæ, illa, quam ex Proposita resultare dico.

Exempla.

ÆQUATIONES PROPOSITÆ.	ÆQUATIONES RESULTANTES.
$xx - \frac{c}{a}x + cc \infty o.$ $+ b - \frac{aa}{a}$ $- \frac{cb}{a}$ $+ ab$	$xx + bx - aa \infty o$ $+ ab$ $- ccx - ccb \infty o, \text{ seu } x + b \infty o.$
$xx - cx + \frac{c^3}{2a} \infty o.$ $+ a - \frac{1}{2}cc$ $+ \frac{ac}{a+b} - \frac{cca}{2a+2b}$ $- \frac{cc}{2a}$	$c \infty o$ $xx + ax \infty o, \text{ seu } x + a \infty o$ $a \infty o$ $- \frac{ccx}{2} + \frac{c^3}{2} \infty o, \text{ seu } x - c \infty o.$

$$x^5 ** + \frac{2ac - ab}{3a - b}xx + \frac{ccb^3}{3aa - ab}x + \frac{b^3a^3}{a + b} \infty o,$$

suppositâ $3a - b \infty o$:

$$\text{habebitur } 2ac - ab \text{ in } xx, + \frac{ccb^3}{a}x \infty o, \text{ seu } + 2acx + \frac{ccb^3}{a} \infty o.$$

$- ab$

Vnde, suppositione $3a \infty b$ adimpletâ, resultat

$$+ 2acx + 27aac \infty o.$$

$- 3aa$

Nec tantum hoc observandum in æquationibus, sed etiam in quantitatibus compositis, quarum communis mensura, vel divisor, vel radix petitur. Vt, exempli gratiâ, si inquirere velis, num $\sqrt{Q}$ extrahi possit ex $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc - 2cd + dd} + 2bb$, & in eum finem supposuisses $cc - 2cd + dd \infty o$: retinendum esset b^4 , non autem $2bb$. Si enim $2bb$ retineres, concludendum foret,

Fff 3 meam.

meam sequendo methodum, quòd $\sqrt{Q}$ ex $cc - 2cd + dd +$
 $\frac{b^4}{c - 2cd + dd} + 2bb$ extrahi non posset, quæ tamen est
 $c - d + \frac{bb}{c - d}$.

SEQUENTES 3, 4, ET 5 REGVLÆ SE EXTENDVNT
 AD OMNES ÆQVATIONES, QVÆ EX MVLTIP-
 LICATIONE DVARVM ALIARVM PROD-
 CI POSSVNT, IN QVARVM VNA ALIQVA LI-
 TERA INCLVDITVR, QVÆ IN ALTERA NON
 CONTINETVR.

III. REGVL A,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ
 produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, qua-
 rum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera
 non continetur; & quæ litera non habet eundem dimen-
 sionum numerum in diversis Terminis.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates,
 in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic divi-
 di possunt, ut litera illa evanescat, $\infty 0$. Atque hoc in
singulis literis instituo, verum *uno tantum modo*. Quippe
 id interdum variis modis fieri potest, quo casu illi præ
 cæteris eligendi veniunt, qui facillimas æquationes
 subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæ-
 situm pervenire licet. Et, si Proposita æquatio ex dua-
 bus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit,
 etiam per aliquam harum fictarum æquationum, in
 quibus dictæ *literæ* sunt sublata, divisibilis erit.

I^{mum} genus exemplorum, in quibus Propositæ æqua-
 tiones nec numerales nec literales fractiones continent.

1. Proponatur hæc æquatio

$$\begin{aligned} x^4 - 6ax^3 + 4bcxx - 16abcx + 16bbca \infty 0. \\ + 4ac - 16aac + 48aab \\ + 16aa - 8aab + 32a^3c \\ + 4ab - 16a^3 \end{aligned}$$

Primò

Primò itaque periculum faciam in litera *a*, supponendo
 $- 16a^3x + 32a^3c \infty 0$. Quæ sunt omnes quantitates per a^3 di-
 visibiles, quæ in Proposita æquatione inveniuntur, & in quibus
 factâ divisione litera *a* evanescit: oritur enim $- 16x + 32c \infty 0$,
 seu, dividendo per $- 16, x - 2c \infty 0$.

Iam tento, num Proposita æquatio dividi queat per $x - 2c \infty 0$.
 Nam si per hanc dividi non possit, uti & si hæc $x - 2c \infty 0$ ab omni
 fractione non libera fuisset, (quod huic quidem primo exemplorum ge-
 neri est proprium) ad aliam literam transissem. (Quamvis enim
 aliæ adhuc quantitates in æquatione reperiantur, in quibus *a* con-
 tinetur, quæque omnes per aliam quàm a^3 dividi possunt, sic ut li-
 tera *a* ubique evanescat, utpote supponendo

$$+ 16aa xx - 16aacx + 48aabc \infty 0, \text{ ut } \& \\ - 8aab$$

$$- 6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca \infty 0; \\ + 4ab$$

tamen id uno modo in hac Regula tentasse sufficit.) Hinc cum Pro-
 posita æquatio per $x - 2c \infty 0$ divisibilis non sit, transeo ad aliam
 literam, puta *b*. Quoniam autem hîc una tantum quantitas exi-
 stit, in qua *bb* reperitur; nempe $16bbca$, idcirco & hanc transeo,
 quandoquidem per $16bbca$ nullus valor ipsius *x* obtineri potest,
 & considero literam *c*, ponendo

$$4bcxx - 16abcx + 16bbac \infty 0. \text{ Hæc igitur cum absque} \\ 4ac - 16aac + 48aabc \\ + 32a^3c$$

fractione dividatur per $4bc + 4a^6$, ac oriatur $xx - 4ax + 4ab \infty 0$:
 $+ 8aa$

inquirendum ulteriùs restat, an Proposita æquatio dividi possit
 per $xx - 4ax + 4ab \infty 0$. inveniturque divisionem fieri posse.
 $+ 8aa$

Dixi in Regula, quòd sufficiat, rem singulis literis uno tantum modo
 tentasse, & quòd illi modi præ cæteris eligendi veniant, qui facillimas æ-
 quationes subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæsitum
 pervenire licet. Sic enim breviorẽ viam ingressus essem, si quanti-
 tates sumpsissem, in quibus *a* ubique unam tantum dimensionem
 habet. Nam quoniam tunc obtineo $- 6ax^3 + 4acxx + 4abxx -$
 $16abcx + 16bbca \infty 0$, primo intuitu apparet, cum 4 per 6 dividi
 nequeat, quòd hæ quantitates non sine fractione dividi possint.

2. Eo-

2. Eodem modo, ad reducendam hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 - 3cxx + abx - 2aab \infty 0: \\ -2a \quad +6ac \quad +3abb \\ +3b \quad -9bc \end{array}$$

quia quantitas $-2aab$ in eâ sola reperitur, in qua a duas habet dimensiones; & quantitas $+3abb$ sola, in qua b duas dimensiones habet: idcirco transeo ad literam c , obtineoque

$$-3cxx + 6acx \infty 0 \text{ seu } -3cx + 6ac \infty 0. \text{ Id quod divisum}$$

$$\frac{-9bc}{-9bc}$$

per $-3c$, dat $x - 2a \infty 0$. Cujus ope Proposita æquatio dividi

potest. Quod, si aliter evenisset, postquam jam periculum in omnibus factum esset literis, indicio fuisset, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

3. Similiter examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + bxx + 2b\sqrt{ab+3bb} \text{ in } x - 6bb\sqrt{ab+3bb} \infty 0, \\ -\sqrt{ab+3bb} \quad +18b^3 \end{array}$$

exordiens à litera a , invenio æquationem $-\sqrt{ab+3bb}$ in xx , $+2b\sqrt{ab+3bb}$ in x , $-6bb\sqrt{ab+3bb} \infty 0$. Quam divido per $-\sqrt{ab+3bb}$, & evanescit a , obtineoque hanc $xx - 2bx + 6bb \infty 0$; per quam Proposita dividi potest. Quod si verò hæc divisio non fieri potuisset, progrediendum fuisset ad literam b . Quia autem liquet per b , secundum singulas etiam suas dimensiones considerata, non posse aliquem ipsius x valorem inveniri: conclusissem, ut ante, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

4. Nec aliter se res habet in hac æquatione

$$\begin{array}{r} x^3 - xx\sqrt{xx+aa} - 2cxx + 2cx\sqrt{xx+aa} - 6acx - a\sqrt{3cc+aa} \text{ in } \sqrt{xx+aa} \infty 0. \\ +2a \quad +ax\sqrt{xx+aa} - 3aax \quad +3aa\sqrt{3cc+aa} \\ +ax\sqrt{3cc+aa} \end{array}$$

Nam primò video literam a negligi posse, quia sola $-3aax$ reperitur, nec ulla alia, quæ per a sic dividi possit, ut ipsa a prorsus evanescat. Transeo itaque ad literam c , supponendo

$$-2cxx + 2cx\sqrt{xx+aa} - 6acx \infty 0 \text{ seu } -2cx + 2c\sqrt{xx+aa} - 6ac \infty 0,$$

& fit, dividendo ubique per $-2c$, $x - \sqrt{xx+aa} + 3a \infty 0$. Cujus ope

ope Propositam æquationem dividere licet. Quæ si per hanc dividi non potuisset, quia jam res singulis literis tentata esset, conclusissem, ut prius, Propositam æquationem, &c.

2^{um} genus exemplorum, in quibus Proposita æquationes fractiones continent.

Inter hæc & præcedentia exempla, nulla alia differentia respectu operationis existit, quàm quòd Ficta æquatio, per quam divisio Propositæ tentatur, non necessariò, sicut ibi, ab omni fractione libera esse debeat. Quocirca unicum exemplum in medium adduxisse suffecerit.

$$\begin{array}{r} \text{Proponatur æquatio } x^3 + \frac{2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x - \frac{1}{2}a^3 \infty 0. \\ +2b \quad +\frac{3}{4}aa \quad +\frac{1}{2}acc \\ \quad -cc \quad +2abb \\ \quad +ab \quad -2cbb \\ \quad \quad +2aab \\ \quad \quad -2bcc \end{array}$$

Transeo literam a , propter quantitatem $-\frac{1}{2}a^3$, quoniam a nusquam amplius 3 dimensionum reperitur. Hinc transiens ad b , invenio $2bxx + abx + 2aab - 2ccb \infty 0$, seu dividens ubique per $2b$, $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$, per quam Proposita dividi potest.

Quòd si verò hæc divisio fieri non potuisset, conclusissem; cum tantum per literam c adhuc explorandum foret, atque hæc ipsa c non magis quàm litera a , sicut ex quantitate $-2ccb$ manifestum est, ad rem quidquam faciat; æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

Ordo verò, quem in hac inquisitione, an nimirum Proposita æquatio per hujusmodi Fictas divisibilis sit, observo, talis est: Primùm inquirò, an nullæ aliæ quantitates, in quibus hæc ablata litera reperitur, in Proposita æquatione existant. Si enim plures reperiantur, tum ipsas omnes, quæ ita per illam dividi possunt, ut ea ubique evanescat, in unam summam colligo. (ut in hoc exemplo, quantitates omnes in quibus b duas dimensiones habet.) Quo peracto, si quotiens non idem sit cum præcedenti, per quod divisio examinatur, concludo, hanc divisionem fieri non

posse. Denique, si nullæ amplius in Proposita æquatione supersint quantitates, in quibus dicta litera reperitur, divido ultimò per illam Fictam æquationem omnes reliquas quantitates, in quibus litera illa non reperitur; quæque simul per dictam Fictam divisibiles sunt futuræ, si quidem Proposita æquatio per eam divisibilis existat.

$$\text{Vt } 2bxx + abx + 2aab - 2bcc \infty \text{ div. per } +2b, \text{ fit } xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty, \\ -cc$$

$$\text{itemq; } \frac{2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + 2abb \infty \text{ div. per } +\frac{2bb}{a+c}, \text{ fit } xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty. \\ -2ebb \quad -cc$$

Si igitur hoc quotiens cum præcedenti non convenisset, etiam Proposita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty$ divisibilis non fuisset.

Quoniam autem conveniunt, & nullæ amplius quantitates in Proposita æquatione supersunt, in quibus litera b reperitur, inquiri tandem, num omnes reliquæ etiam per $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty$

dividi possint. Hinc cum reliquæ quantitates, in quibus b non reperitur, sint $x^3 + \frac{3}{4}aax - \frac{1}{2}a^3$, ipsæque per $xx + \frac{1}{2}ax + aa$

dividi queant, ac oriatur $x - \frac{1}{2}a$; idcirco & Proposita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty$ dividi poterit. Quæ alias, ut manife-

stum est, per illam non divisibilis fuisset, si ultima hæc divisio fieri non potuisset; Quotiens verò est $x - \frac{1}{2}a + \frac{2bb}{a+c} + 2b \infty$.

IV. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem Æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque litera in aliquo termino tot dimensiones habet, quot in nullo alio.

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates, in quibus eadem litera reperitur, quæque simul sic divi-

di

di possunt, ut illa *litera* evanescat, $\infty 0$. Atque hoc in *singulis literis* facio, verum *non uno duntaxat modo*, sicut in præcedenti 3^{ia} Regula, *sed modis omnibus, quibus id fieri potest*. Et si Proposita Æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, erit etiam divisibilis per aliquam harum Fictarum Æquationum, in quibus dictæ *literæ* sunt sublata.

Quoniam autem hæc Regula omnino eadem facienda præscribit, quæ præcedens 3^{ia}; hoc tantum excepto, quod illic in *singulis diversis literis duntaxat uno modo*, uti dictum est, hîc *modis omnibus* sit tentandum; sufficit uno exemplo rem declarare.

Proponatur itaque hæc æquatio

$$x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabbx - \frac{1}{8}aabb \infty 0. \\ -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}abb - \frac{1}{4}ab^3 \\ -\frac{1}{4}bb$$

Exordiens à litera a , prout unam habet dimensionem, obtineo $-ax^3 + \frac{1}{2}aabbx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 \infty 0$, seu $-x^3 + \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3 \infty 0$. Cujus ope Proposita æquatio dividi nequit (quod ipsum in hoc exemplo vel hinc apparet, quod hîc ultimus terminus $-\frac{1}{4}b^3$, ultimum terminum Propositæ æquationis non absque literali fractione dividat). Iam, non quidem ad aliam literam transeo, quemadmodum in præcedenti Regula, sed tamdiu considerabo eandem a , quamdiu adhuc aliæ quantitates in æquatione extant, in quibus illa plurium aut pauciorum dimensionum reperitur. Atque ideo cum ipsa a hîc adhuc 2 dimensionum reperiatur, suppono similiter quantitates omnes, in quibus 2 dimensiones habet, $\infty 0$: nimirum, $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabbx - \frac{1}{8}aabb \infty 0$, seu $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}bb \infty 0$, quæ Propositam æquationem dividere potest. Quod si secus evenisset, ad aliam literam transissem, quandoquidem omnes quantitates, in quibus a continetur, solummodo dividi possunt per a , vel aa . Quocirca facto periculo in singulis literis, & omnibus modis, si comperiat, divisionem æquationis Propositæ per nullam Fictarum succedere, certum est, neque Propositam æquationem, ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci posse.

V. REGVLA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur.

Supponatur aliqua litera $\infty 0$; investigeturque num æquatio, quæ hinc resultat, habeat cum Proposita communem divisorem. Si non habeat, supponatur iterum alia litera $\infty 0$, investigeturque num ista Resultans habeat communem divisorem: atque sic porro, donec aut communis reperiatur divisor, aut nulla amplius litera supersit, quæ non supposita sit $\infty 0$. Et si non inveniatur communis divisor, signum erit, æquationem Propositam, ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur, produci non posse.

Ex. gratiâ, si proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{r} x^5 * + 4abx^3 + 30b^3xx + 34ab^3x + 20ab^4 \infty 0, \\ + bb - 10abb + 7a^4 + 10a^4b \\ + \frac{a^4}{bb} - \frac{2a^4}{b}. \end{array}$$

supponaturque litera $a \infty 0$, resultabit inde $x^5 * + bbx^3 + 30bbbxx \infty 0$, quæ cum Proposita communem habet divisorem, nempe $xx - 3bx + 10bb \infty 0$. Quod, si aliter evenisset, aliam literam, nimirum b , posuissem $\infty 0$. & si inde Resultans æquatio etiam non habuisset communem divisorem, conclusissem æquationem Propositam, quoniam tantum duas istas a & b diversas habet literas, non resultare posse ex multiplicatione duarum aliarum, &c.

Res eodem modo se habet in æquationibus, quæ irrationales quantitates includunt, ita ut non opus sit alia exempla adungere.

SE

SEQUENTES 6^{ta}, 7^{ma}, ET 8^{va} REGVLÆ SE EXTENDVNT AD OMNES ÆQVATIONES, QUÆ EX MVLTIPPLICATIONE DVARVM ALIARVM PRODVCÍ POSSVNT, IN QVARVM VNA IR-RATIONALIS QVANTITAS INCLVDITVR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETVR.

VI. REGVLA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque quantitas non eundem dimensionum numerum in diversis Terminis habet.

Suppono, &c.

VII. REGVLA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque quantitas in aliquo Terminò tot habet dimensiones, quot in nullo alio.

Suppono, &c.

VIII. REGVLA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem comprehendit, quæ in altera non continetur.

Supponatur, &c.

Quoniam inter hanc 6^{tam} & 3^{tiam} Regulam, & inter 7^{mam} & 4^{tam}, nec non inter 8^{vam} & 5^{tam} haud magna disparitas existit, & tantum pro litera poni debet irrationalis quantitas; erunt hæ Regu-

Ggg 3

læ

læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diversa quantitate irrationali duntaxat diversam literam concipias aut ponas, evadent hæc cum illis planè eadem. Atque idcirco hæc verba in 6^{ta} Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimensionum in diversis terminis non existit*; & hæc in 7^{ma}: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimensionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid sit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari posset, hanc 8^{am} Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una est rationalis, hoc est, in qua nullum est signum radicale, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5^{ta} & 8^{va} Regula præsupponunt inventionem communis duarum æquationum divisoris, adjungam hîc, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive æquationum sive quantitatum, divisorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis divisor duarum sequentium æquationum vel quantitatum, (considero enim quantitates haud secus atque æquationes, supponendo sc. illas $\infty 0$: cum suppositio hæc, ad inveniendum earum communem divisorem, nullum errorem inferre possit.)

$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd \infty 0$, & $d^4c - bbcd + caabb - caadd \infty 0$. Primò itaque inquiri, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope singuli utriusque æquationis termini dividi queant. Hoc enim si contingat, oportet priùs ejusmodi divisionem instituere, ut hîc per literam c , fiuntque

$$d^3 - add + 2aab - 2abd \infty 0, \text{ \& } d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty 0.$$

Deinde ad libitum sumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut d , a , vel b . Atque considerando ipsam, puta d , tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{ma}} \text{Æquatio} & 2^{\text{da}} \text{Æquatio} \\ d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0. & d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty 0. \\ & -aa \end{array}$$

Porro valor ipsius d^3 , per 1^{am} æquationem inventus, substituitur

tuatur ubique in locum ipsius d^3 secundæ æquationis: invenieturque

$$d^4 \infty ad^3 + 2abdd - 2abd \infty bbdd, + aadd - aabb$$

seu

$$aadd + 2aabd - 2a^3b - 2aabd + 2abdd$$

$$\text{Hoc est, } aabb - 2a^3b + 2abdd - bbdd \infty 0$$

$$\text{\& } dd \infty \frac{2a^3b - aabb}{2ab - bb} \text{ seu } aa; \text{ \& } d \infty a, \text{ seu } d - a \infty 0.$$

Si jam hujus dd valor substituitur in ipsius locum in 1^{ma} æquatione, habebitur $aad - a^3 - 2abd + 2aab \infty 0$.

Denique substituitur ipsius d valor a in ejus locum in hac ultima, obtinebitur $a^3 - a^3 - 2aab + 2aab \infty 0$.

In hac igitur cum termini omnes se mutuò destruant, indicio est tam æquationem $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$ quam $d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty 0$ esse divisibilem per $d - a \infty 0$, & $-aa$

$d - a$ utriusque maximum communem divisorem existere. Atque adeò, cum duæ Propositæ æquationes (vel quantitates) priùs per c sint divisæ, manifestum est earundem maximum communem divisorem fore $d - a$ in c , seu $dc - ac$.

Quòd si autem aliam literam quàm d ceu incognitam quantitatem consideremus, licebit similiter illius ope eosdem semper divisores invenire. Exempli gratiâ, si a ut incognita quantitas consideretur, obtinebitur pro

1^{ma} Æq.

$$aa - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$

2^{da} Æq.

$$aa - \frac{bbdd + d^4}{bb - dd} \infty 0.$$

$$\text{vel } aa - dd \infty 0, \text{ seu } aa \infty dd$$

$$\text{vel } a - d \infty 0, \text{ seu } a \infty d.$$

Subrogetur jam dd valor ipsius aa , per 2^{am} æquationem inventus, in locum aa primæ æquationis, & invenietur pro ipsa

$$dd - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$

$$- \frac{dd}{2b}$$

Denuo

Denuo in hac ultima in locum ipsius a subrogetur ejus valor d ,
obtinebitur $dd - dd + \frac{d^3}{2b} \infty 0$.

$$- \frac{ddd}{2b}$$

In hac igitur cum rursus termini omnes se mutuò tollant, argumentum est, utramque æquationem, ut ante, &c.

Eadem est ratio, quæcunque tandem litera pro incognita quantitate sumatur.

Si verò accidisset, ut nec per subrogationem valoris ipsius d^3 , nec ipsius dd , nec denique ipsius d , termini omnes se mutuò destruxissent, argumentum fuisset, quòd duæ illæ æquationes $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$, & $d^4 - bdd + aabb \infty 0$
 $- aa$

nullum communem divisorem habuissent, & quòd duarum Propositionum æquationum, quæ prius per c fuerunt divisæ, nullus communis divisor præter c extitisset. Excepto tantum, ubi divisio fieri potest per ejusmodi quantitates, quæ simul possunt fieri $\infty 0$, atque in causa esse, quòd valor ejus literæ, quæ tanquam incognita quantitas consideratur, per istam æquationem inveniri non possit.

Exempli gratiâ, si in Propositis æquationibus literam b , ut incognitam quantitatē considerassem, obtinuissē

$$b \infty \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa} \text{ seu } \frac{dd}{2a}, \text{ \& } b \infty \frac{d^4 - aadd}{dd - aa} \text{ seu } dd$$

vel $b \infty d$.

Vbi videmus, valores ipsius b , nempe $\frac{dd}{2a} \infty d$, se invicem non tollere, ideoque concludendum esset, has duas æquationes non habere communem divisorem, si nempe ejusmodi quantitates non reperirentur, quæ, dum $\infty 0$ ponuntur, efficiunt, ut valor ipsius b inveniri nequeat. Quemadmodum si ponatur $d - a \infty 0$, non poterit valor ipsius b per 1^{am} æquationem inveniri: quippe tum d^3 erit ∞add .

Priusquam itaque concludatur, non dari duarum sive æquationum sive quantitatum communem aliquem divisorem: 1^{mo} observandum venit, num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur, quæ in causa esse possunt, quòd valor incognitæ literæ, seu

seu instar incognitæ consideratæ, per istam æquationem inveniri nequeat. 2^{do} si reperiantur, num utramque æquationem dividant. quemadmodum in hoc exemplo, ubi reperitur $d - a \infty 0$, cujus ope utraque æquatio dividitur, quod, subrogando a in locum d , uno intuitu videre est. At verò si aliter evenisset, conclusissem, non dari, &c.

Vnum adhuc exemplum adjungam.

Proponamus *inveniendum* esse maximum communem divisorem harum duarum æquationum sive quantitatum

1^{ma} Æq.

2^{da} Æq.

$$12a^4 + 11a^3x + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x \infty 0, \text{ \& } 12a^3x - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 \infty 0.$$

Quoniam autem hæ non divisibiles sunt per aliquam literam nec per numerum, considero literam aliquam, ad libitum sumendam, tanquam incognitam quantitatē, puta x , atque operationem porro instituo, ut sequitur

$$\text{per } 1^{\text{mam}} \text{ invenitur } x^4 \infty 4ax^3 - 11a^3x + 20a^3x - 12a^4$$

add.

$$- 3ax^3 + 12a^3x - 16a^3x + 24a^4$$

$$\text{fit pro } 2^{\text{da}} \text{ æquatione } ax^3 + a^3x + 4a^3x + 12a^4 \infty 0$$

div. per a .

$$x^3 \infty ax^2 - 4a^2x - 12a^3$$

Substituatur jam hîc valor ipsius x^3 in ejus locum in alterutra æquatione, utpote primâ (quamvis autem in hoc exemplo parum intersit, potest tamen in multis casibus magnum esse discrimen, tunc enim oportet, brevitatis causâ, eligere eam, per quam operatio facillimè procedit; quemadmodum vulgò, cum duæ sunt, dimensionibus differentes, ea, quæ pauciores habet, eligenda venit), obtinebiturque $xx \infty ax - 6aa$.

Substituatur rursus hîc valor ipsius xx ubique in ejus locum in una præcedentium æquationum, sumendo, brevitatis causâ, præcedentem 3 dimensionum, invenietur

2^{da} Æq.

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \infty ax^2 - 6a^2x \text{ seu } + a^2x - 6a^3 \\ + ax^2 \infty + a^2x - 6a^3 \\ + 4a^2x + 12a^3 \infty + 4a^2x + 12a^3 \end{array} \right\} \infty 0$$

In qua videmus terminos omnes se invicem tollere, quod arguit, hæc Propositas æquationes sive quantitates divisibiles esse

H h h

per

per $xx - ax + 6aa$; quæ ideo maximus est earum communis divisor.

Porro manifestum est, si quis omnes duarum vel plurium sive *Æquationum sive Quantitatum communes divisores* invenire velit, tantum inveniendos esse *divisores omnes Maximi earum communis divisoris*.

Præterea etiam liquet, non tantum in multis casibus, per 1^{am} & 2^{am} Regulam (uti annotatum est) uno intuitu videri posse, duas *Æquationes* vel *Quantitates* non habere communem aliquem divisorem; verum etiam *Regulas omnes*, de *Reductione æquationum* agentes, ad inveniendos omnes ipsarum communes divisores inservire posse.

IX. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, quæ per aliam, cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest.

Ostendam hoc in uno aut altero tantum exemplo, quoniam generalis modus ex iis deprehendi satis poterit.

Proponatur itaque æquatio $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + \frac{1}{2}xx - 7x - 3 \infty 0$, deturque illam dividi posse per aliam duarum dimensionum, cujus ultimus Terminus sit -2 . Esto autem illa $xx + yx - 2 \infty 0$, seu, $xx \infty - yx + 2$. Hunc valorem ipsius xx ubique substituo in ejus locum, aliamque æquationem loco Propositæ obtineo, in qua x tantum unius dimensionis reperitur: nimirum, $y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5$ in x , $-2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0$, quemadmodum ex sequenti operatione videre est.

$xx \infty$

$$\begin{array}{r}
 xx \infty - yx + 2 \\
 \text{ergo } x^4 \infty yyxx - 4yx + 4 \text{ seu } - y^3x + 2yy \\
 \quad - 4yx + 4 \\
 \hline
 x^5 \infty - y^3xx + 2yyx \text{ seu } + y^4x - 2y^3 \\
 \quad - 4yx + 4x \quad + 2yyx \\
 \quad + 4yyx - 8y \\
 \quad + 4x \\
 \quad + 4y^3x - 16 \\
 \quad + 16yx - 8yy \\
 - 4x^4 \infty \quad + 4yyx - 8y \\
 \quad + 8x \\
 + 4x^3 \infty - 4yx + 8x \text{ seu } + 4yyx - 8y \\
 \quad + 8x \\
 + \frac{1}{2}xx \infty \quad - \frac{1}{2}yx + 3 \\
 - 7x - 3 \infty \quad - 7x - 3 \\
 \hline
 \text{summa} \quad + y^4x - 2y^3 \\
 \quad + 4y^3 - 8yy \infty 0. \\
 \quad + 10yy - 16y \\
 \quad + 14\frac{1}{2}y - 16 \\
 \quad + 5
 \end{array}$$

Deinde considero unumquemque terminum separatim æquationis hujus deductæ $\infty 0$, & cum hîc duo tantum sint termini, habeo inde hæc duas æquationes

$$\begin{array}{r}
 \text{I.} \quad y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5 \infty 0, \text{ \& II.} \quad -2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0 \\
 \text{seu} \quad y^3 + 4yy + 8y + 8 \infty 0.
 \end{array}$$

Quarum quidem æquationum, si juxta præcedentem methodum quærat maximus communis divisor, invenietur pro ipso $y + 2 \infty 0$; ita ut Propositæ æquatio, cum y sit $\infty - 2$, divisibilis sit per $xx - 2x - 2 \infty 0$.

Eodem modo, proponatur hæc æquatio $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, deturque ipsam dividi

posse per æquationem duarum dimensionum, cujus ultimus terminus sit $+aa$. Esto autem æquatio illa $xx + yx + aa \infty 0$, adeoque $xx \infty - yx - aa$. Hinc, subrogato hoc valore in locum xx , obtinebitur loco Propositæ æquationis alia, in qua x unius tantum erit dimensionis, nempe $-y^3x - aayy \infty 0$.

$$\begin{array}{r}
 - 2aay - 2a^3y \\
 + ccy + aacc \\
 \text{Hhh } 2
 \end{array}$$

Cujus

Cujus si unusquisque separatus terminus rursus consideretur ∞ ,
habebimus has duas æquationes

I.	II.
$-y^3 - 2ayy + ccy \infty 0, \text{ \& } -aayy - 2a^3y + aacc \infty 0$ feu feu	

$$-yy - 2ay + cc \infty 0 \qquad -yy - 2ay + cc \infty 0.$$

Cum igitur harum communis mensura seu divisor sit $yy - 2ay + cc \propto 0$, quæro hinc valorem ipsius y : invenioque $y \propto -a \pm \sqrt{aa + cc}$, ac proinde æquationem Propositam esse dividibilem per $xx - a \pm \sqrt{aa + cc} \text{ in } x, + aa \propto 0$.

Similiter, si detur, hanc æquationem
 $x^5 + bbx^3 + 3abbxx + 2ab^4 \infty 0$ esse divisibilem per aliam
 $+aa - 2a^3$

3 dimensionum, cujus tertius terminus sit $+2 a a x$: pono pro ipsa $x^3 + y x x + 2 a a x + z = 0$, seu $x^3 = -y x x - 2 a a x - z$. Quo valore ubique in locum x^3 in Proposita æquatione subrogato, obtinebitur

$$\begin{array}{rcl}
 -z & xx & + yz x \quad + aaz \infty o. \\
 + 3aay & + 2a^4 & - yyz \\
 - y^3 & - 2aayy & - bbz \\
 - bby & - 2aabb & + 2ab^4 \\
 + 3abb & & \\
 - 2a^3 & &
 \end{array}$$

Quoniam autem hæc æquatio 3 habet separatos terminos, habebuntur inde hæc 3 æquationes

$$-z + 3 \underset{2^{da}}{aay} - y^3 - bby + 3 \underset{2^{tia}}{abb} - 2a^3 \propto 0,$$

$$yz + 2a^4 - 2aayy - 2aabb \infty 0, aaz - yyz - bbz + zab^4 \infty 0.$$

Hinc per 1^{am} sublatâ z, quæ est $\infty 3 aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$,
 inveniatur pro 2^d: $-y^{4*} + aayy + 3abby - 2aabb \infty 0$,
 $-bb - 2a^3 + 2a^4$

& pro 3^{ta}: $+y^5 - 4aay^3 + 2a^3yy + 3a^4y + 5a^3bb \infty$
 $+ 2bb - 3abb - 4aabb - 2a^5$
 $+ b^4 - ab^4$

Quarum duarum maxima communis mensura per superiorem me-

methodum est $y - a \propto 0$, ideoque $y \propto a$; cumque z sit $\propto 3 a a y - y^3 - b b y + 3 a b b - 2 a^3$, erit inde z etiam $\propto + 2 a b b$. *Æquatio* autem, per quam *Proposita* dividi potest, posita erat $x^3 + y x x + 2 a a x + z \propto 0$. Quocirca si in hac subrogentur valores quantitatum incognitarum y & z , invenietur pro ipsa $x^3 + a x x + 2 a a x + 2 a b b \propto 0$.

Atque ita de aliis omnibus Propositis æquationibus, five rationalibus five irrationalibus, & vel aliquam vel nullam fractionem habentibus; atque etiam five ultimus Terminus, five aliquis alius, quem libuerit, æquationis, per quam Propositæ dividi queunt, datus fuerit, five alicui quantitati (ut in his exemplis), five nihilo æqualis sit; cujus quidem generis nullum exemplum affero, cum operatio haudquaquam diversa existat. Id tantum addam, hæc omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejusdem formæ æquationum inveniri posse.

IO^{ma}, ET II^{ma} REGVLÆ SE EXTENDVNT AD
OMNEM ÆQVATIONEM, SIVE IN EA IRRAT-
TIONALES QVANTITATES ET FRACTIONES,
SIVE NVLLÆ REPERIANTVR, EXCEPTIS
TANTVM ILLIS ÆQVATIONIBVS, IN QVI-
BVS SIGNA RADICALIA SVNT, QVÆ INCO-
GNITAM QVANTITATEM INCLVDVNT.

Cum autem hæ duæ Regulæ Methodum requirant, qua omnia signa radicalia, quæ incognitam quantitatem includunt, si in æquatione Proposita talia fortè fuerint, primùm tollantur; sequentes verò Regulæ, quibus omnia signa sine discrimine primùm auferantur: præmittam

*Modum tollendi signa radicalia ex qualibet
equatione Proposita.*

Proponatur, verbi gratiâ, æquatio $n \propto e + g + h + k + m$, &c. in qua 1^o. quælibet litera quantitatem designet, signo radicali $\sqrt{\quad}$ Q adfectam. Multiplicetur utraque pars quadratè, & evanescet signum quantitatis n . Quoniam autem reliquæ literæ e, g, h, k, m , &c. aut unam aut duas dimensiones habebunt, signumque radicale, in quantum duas habent, evanescet; manifestum est, ob-

tineri posse æquationem, in qua e æquatur aliis terminis, in quibus e non comprehenditur. Quæ æquatio si rursus eodem modo in se ducatur quadratè, evanescet pariter signum radicale ipsius e ; & quoniam in hac ultima æquatione tunc reliquæ literæ habebunt aut 1, aut 2, aut 3, aut 4 dimensiones, ac ipsæ in quantum ex paribus dimensionibus constant nullum signum radicale habent, & quantum ex imparibus constant ratione tollendi signi radicalis solummodo considerandæ sunt tanquam unâ duntaxat dimensione constantes, cum duæ signo radicali semper carent: manifestum est rursus inveniri posse æquationem, in qua g sit æqualis aliquot terminis, in quibus g non comprehenditur. Quæ æquatione denuo quadratâ, sublatum item erit signum radicale ipsius g . Atque ita facile est intelligere, quâlibet quadratione unum signum radicale tolli.

Majoris perspicuitatis ergo addatur sequens operatio, existente $n \propto e + g + h + k$, ubi quadrando utramque partem æquationis prodit æquatio $nn \propto ee + gg + hh + kk + 2eg + 2eh + 2ek + 2gh + 2gk + 2hk$. Brevitatis autem causâ, pro $\frac{nn - ee - gg - hh - kk}{2}$ scribatur pp ; cum hæ quantitates signo radicali careant; & fit $pp \propto eg + eh + ek + gh + gk + hk$, sive $e \propto \frac{pp - gh - gk - hk}{g + h + k}$. Vnde quadrando rursus utramque partem invenitur:

$$ee \propto \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhhh - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2eggh + 2eghk + 2egkk}{gg + hh + kk + 2gh + 2gk + 2hk},$$

feu

$$p^4 + gghh + ggkk + hhhh - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2eggh + 2eghk + 2egkk - 2ghkk - gg - hh - kk - 2gh - 2gk - 2hk \text{ in } ee \propto 0.$$

Supponatur, ut ante, brevitatis causâ,

$$p^4 + gghh + ggkk + hhhh - gg - hh - kk \text{ in } ee \propto q^4 + 2kk - 2pp - 2ee \propto rr + 2hh - 2pp - 2ee \propto ss + 2gg - 2pp - 2ee \propto tt,$$

erit-

eritque $q^4 + rrrh + ssgk + tthk \propto 0$

$$\frac{q^4 + tthk}{rrh + ssk} \propto -g$$

$$\frac{q^8 + t^4 h h k k + 2 q^4 t t h k}{r^4 h h + s^4 k k + 2 r r s s h k} \propto g g$$

$$q^8 + t^4 h h k k + 2 q^4 t t h k - r^4 h h - s^4 k k - 2 r r s s h k \text{ in } g g \propto 0.$$

Supponatur rursus, brevitatis causâ,

$$q^8 + t^4 h h k k - r^4 h h g g - s^4 k k g g \propto v^8, \\ \& 2 q^4 t t - 2 r r s s g g \propto w^6:$$

fietque $v^8 + w^6 h k \propto 0$

$$\frac{v^8}{v^8} \propto -w^6 h k$$

& invenietur $v^8 \propto w^6 h h k k$. Quæ æquatio ab omnibus signis radicalibus liberata est.

Deinde ponatur unaquæque litera æquationis superioris $n \propto e + g + h$, &c. designare quantitatem signo radicali $\sqrt{C}$ affectam. In hac igitur si loco quadratæ multiplicationis utraque pars multiplicetur cubicè, evanescet signum radicale ipsius n , & unaquæque reliquarum literarum, e, g, h , &c. acquirat 1, 2, aut 3 dimensiones. In quantum autem tres dimensiones habent, in tantum carent etiam signo radicali, adeò ut hâc ratione obtineri queat æquatio, in qua e non nisi 1 aut 2 dimensiones habere potest. Quocirca multiplicando omnes hosce terminos per e , obtinebitur æquatio, in qua e præter 1, 2, & 3 dimensiones habere nequit. In quantum autem 3 habet, in tantum quoque signum radicale, uti dictum est, evanescit; ac proinde ipsa e in hac æquatione etiam non nisi 1 & 2 dimensiones retinere poterit. Hinc si ope hujus æquationis quæratur valor ipsius ee , isque in locum ee præcedentis substituatur, obtinebitur æquatio in qua e unam tantum dimensionem habebit, atque ideo inveniri poterit e æqualis aliquot terminis, in quibus ipsa non comprehenditur. Quæ æquatio, si deinde cubetur, dabit aliam, in qua similiter signum radicale ipsius e prorsus evanescet. vel potest rursus per e multiplicari, & valor ee de novo inveniri, qui iterum, ut antea, positus loco ee , habes valorem ipsius e alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem comparati, æquationem dabunt, in quâ $\sqrt{e^{\text{am}}}$ ipsius

ipſius e non reperies. Atque ſic omnia alia ſigna radicalia ex æqua-
tione tolli poſſunt; quod facillimè perſpicitur, ſi tantum adver-
tamus, quòd, verbi gratiâ, $g, gg, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6, g^7, g^8, g^9, g^{10}, g^{11}, g^{12}, g^{13}, g^{14}$, &c.
ſolummodo habendæ ſint pro g, gg , cum g^3 ſignum radicale de-
ponat. Quæ ut magis perſpicua evadant, ſequentem operationem
adjicere viſum fuit.

$$\text{Sit ex. gr.} \quad \begin{array}{r} n \infty e + g \\ n^3 \infty e^3 + 3 e e g + 3 e g g + g^3 \\ n^3 - e^3 - g^3 \infty 3 e e g + 3 e g g. \end{array}$$

Eſto jam, brevitatis cauſâ, $n^3 - e^3 - g^3 \infty f^3$, quoniam ipſæ
Aſymmetriâ carent, fietque $f^3 \infty 3 e e g + 3 e g g$

$$\begin{array}{r} f^3 e \infty 3 e^3 g + 3 e e g g \\ \& \frac{f^3 e - 3 e^3 g}{g} \infty 3 e e g. \end{array}$$

Invento valore ipſius $3 e e g$ in ejus locum in æquatione præ-
cedente ſubrogato, habebitur:

$$\begin{array}{r} f^3 \infty \frac{f^3 e - 3 e^3 g}{g} + 3 e g g \\ \frac{f^3 g \infty f^3 e - 3 e^3 g + 3 e g^3}{f^3 g + 3 e^3 g \infty f^3 e + 3 e g^3} \\ \frac{f^3 g + 3 e^3 g}{f^3 + 3 g^3} \infty e. \end{array}$$

Denique ponatur, brevitatis cauſâ, $f^3 + 3 e^3 \infty p^3$, & $f^3 + 3 g^3 \infty q^3$, cum ſingulæ ſignum radicale deponant,
eritque $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$

& $\frac{p^3 g^3}{q^3} \infty e^3$. Quæ æquatio ab Aſymmetria libera eſt. Vel
hoc modo: multiplicetur $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$ per e , erit $\frac{p^3 g e}{q^3} \infty e e$; & quo-
niam inventa eſt $f^3 \infty 3 g e e + 3 g g e$, ſeu, $\frac{f^3 - 3 g g e}{3 g} \infty e e$

$$\text{erit } \frac{p^3 g e}{q^3} \infty \frac{f^3 - 3 g g e}{3 g}$$

$$\& 3 g g p^3 e \infty q^3 f^3 - 3 q^3 g g e$$

$$\text{ergo } e \infty \frac{q^3 f^3}{3 g g p^3 + 3 q^3 g g} \infty \frac{p^3 g}{q^3}$$

& $q^3 f^3 \infty 3 g^3 p^6 + 3 g^3 p^3 q^3$. Quæ æquatio
iridem ab omni ſigno radicali libera eſt.

Pari

Pari ratione tolli quoque poſſunt ſigna quævis altiora, ſive illa
ejuſdem, ſive diverſæ dimensionis ſint. Sed notandum eſt, quòd
ſigna hæc, ſive ipſa cognitæ, ſive incognitæ quantitibus præfi-
gantur, per hunc modum ſemper quidem tolli poſſint, ſed eum
tæpiſſimè non eſſe breviffimum, quando ſcilicet ſigna radicalia ad
quantitates cognitæ pertinent; quemadmodum pag. 75 Geo-
metriæ cernere licet, ubi conſtat, quædam ſigna tolli poſſe multi-
plicando radicem æquationis per certam aliquam quantitatem,
quo opere ipſa in aliam æquationem tranſmutatur, æquè multas
dimensiones habentem.

Dantur præterea adhuc alia compendia, quorum ſupra allatum
exemplum ſpecimen erit: hæc enim æquatio $f^3 \infty 3 g e e + 3 g g e$
diviſa per n ab una parte, & per $e + g$ (quæ æqualis eſt n),
ab altera parte, dat $\frac{f^3}{n} \infty 3 g e$, cujuſ partes cubicè multiplica-
tæ dabunt $\frac{f^3}{n^3} \infty 27 g^3 e^3$, æquationem, in qua nullum ſignum ra-
dicale invenitur: Sed quoniam propoſui tantummodo hîc gene-
ralem modum indicare, quo ſemper omnia ſigna radicalia tolli
queant, & non compendia, quibus in multis caſibus faciliùs eo
pervenire poſſes, monſtrare; ideo huic rei finem imponam, & ad
Regulas Reductionum revertar.

X. REGVLA.

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem,
ſive literalem, ſive numeralem, cujuſ incognita quan-
titas, (vel alia litera, quæ tanquam incognita con-
ſiderari poteſt) duos vel plures æquales habet valores.*

Primò ſi in Propoſita æquatione duæ æquales radi-
ces exiſtant, multiplico eam per Arithmeticam Pro-
greſſionem pro libitu aſſumptam: nimirum, 1^{um} ter-
minum æquationis per 1^{um} terminum progrefſionis,
 2^{um} terminum æquationis per 2^{um} terminum progref-
ſionis, & ſic deinceps; & Productum, quod inde fit,
erit $\infty 0$. Deinde, cum ſic duas habeam æquationes,

Iii

quæ-

quæro, per Methodum superius explicatam, maximum earum communem divisorem; atque hujus ope æquationem Propositam toties divido, quoties id fieri potest.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio $x^3 - 4xx + 5x - 200$, in qua duæ sunt æquales radices. Multiplico ergo ipsam per Arithmetica Progressionem qualemcunque, hoc est, cujus incrementum vel decrementum sit vel 1, vel 2, vel 3, vel alius quilibet numerus; & cujus primus terminus sit vel 0, vel +, vel - quam 0: Ita ut semper ejus ope talis terminus æquationis tolli possit, qualem quis voluerit, collocando tantum sub eo 0.

Vt si, exempli causâ, ultimum ejus terminum auferre velim, multiplicatio fieri potest ipsius $x^3 - 4xx + 5x - 200$

$$\begin{array}{r} \text{per hanc progressionem} \quad 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0. \\ \hline \text{fietque} \quad 3x^3 - 8xx + 5x - 200 \end{array}$$

Maxima autem communis divisor hujus & Propositæ æquationis est $x - 100$, per quam Proposita bis dividi potest; ita ut ejusdem radices sint 1, 1, & 2.

Sic si cupiam 1^{um} æquationis terminum auferre, multiplicatio institui potest ipsius $x^3 - 4xx + 5x - 200$

$$\begin{array}{r} \text{per hanc progressionem} \quad 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \\ \hline \text{\& fit} \quad * - 4xx + 10x - 600 \end{array}$$

Cujus quidem ac Propositæ æquationis maximus communis divisor, ut antea, est $x - 100$.

Similiter si 2^{um} terminum tollere lubeat, multiplicatio fieri potest, hoc pacto:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4xx + 5x - 200 \\ + 1. \quad 0. \quad - 1. \quad - 2 \\ \hline \text{\& prodibit} \quad x^3 \quad * - 5x + 400 \end{array}$$

Cujus item & Propositæ maximus communis divisor est $x - 100$.

Vbi notandum, non necessarium esse semper uti Progressione cujus excessus sit 1, quanquam ea communiter sit optima.

Cæterum notandum, inter omnes has diversas operationes, quamvis eundem communem divisorem maximum exhibeant, tamen alias aliis sæpe esse præferendas, quandoquidem unius termini destructione sæpenumero multò facilius ad finem pervenitur quam

quàm alterius. Neque etiam tenemur hunc divisorem immediate ex Proposita æquatione & aliqua hujusmodi Progressione genita investigare: cum duæ ex his eligi possint, quarum beneficio eum invenire liceat. Vt sumendo, verbi gratiâ, $3xx - 8x + 500$ & $-4xx + 10x - 600$, vel $3xx - 8x + 500$ & $x^3 - 5x + 400$, vel $-4xx + 10x - 600$ & $x^3 - 5x + 400$. Et sæpe etiam longè compendiosius est, duo hujusmodi producta sibi eligere, ac deinde illorum communem divisorem quærere, quàm uti uno aliquo producto & æquatione Propositâ. Quæ quidem omnia usus hujus Regulæ abundè docebit.

Quemadmodum autem in hoc exemplo, ita in quovis alio Proposito procedo: cum perinde sit, si æquatio numerica, si vel literalis fuerit, & si fractiones aut surdas quantitates includat, si ve non; modò incognita quantitas inter surdas non contineatur: ita ut superfluum sit plura exempla hac de re afferre. Quocirca ad alteram hujus Regulæ partem transeo.

2^{do}. Si in Proposita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmetica Progressionem, ut antea; eritque Productum 00: Hoc Productum rursus multiplico per Arithmetica Progressionem; eritque hoc secundum Productum etiam 00. Si æquatio Proposita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; si 5, quater; & ita semper obtinebuntur tot æquationes, quot radices æquales in æquatione Proposita continentur.

Exempli gratiâ, detur hæc æquatio $x^4 - 6xx + 8x - 300$, habens 3 æquales radices.

$$\begin{array}{r} \text{Primò multiplico eam per} \quad 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \\ \hline \text{\& fit} \quad -12xx + 24x - 1200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Hoc productum iterum multiplico per} \quad 0. \quad 1. \quad 2. \\ \hline \text{\& provenit} \quad 24x - 2400 \end{array}$$

$$\text{eritque communis divisor} \quad x - 100,$$

Ita ut Proposita æquatio habeat has 4 radices 1, 1, 1, & -3. Et sic de aliis omnibus.

Quod verò usum huius Methodi concernit, is tantus est, in inveniendis Tangentibus, determinandis Maximis & Minimis, & quibusvis extremis, ut, quamvis se ad alia non extenderet, immensus tamen dici posset. Etenim reductis talibus Problematis ad Æquationem, in qua hæc sola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis littera, quæ ut incognita consideratur) ad duas æquales radices determinetur: poterit Quæsitum beneficio huius Methodi quam facillimè inveniri. quippe nihil aliud opus est, quam æquationem dicto modo per Arithmeticam Progressionem multiplicare: cum duæ hæ æquationes tunc omnes Problematis conditiones sint comprehensuræ, ita ut ipsæ tantum resolvendæ restent. Et notandum est, hoc sæpe beneficio solius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præstari posse; quod patet in omnibus illis exemplis, quæ de inveniendis tangentibus pagin. 40, 41, & 42 à D^{no} des Cartes in sua Geometria sunt allata, in quibus v & f incognitæ existunt & y quidem cognita, sed quæ ut incognita consideratur: omnes enim illorum Problematum conditiones æquationibus erunt comprehensæ, si illæ ipsæ æquationes sic determinentur, ut dicta quantitas y duas æquales radices obtineat.

Primum dictorum exemplorum est $yy \frac{+qr-2qv}{q-r} y \frac{+qvv-qs}{q-r} \infty 0$
 Multiplico per meam Methodum per 2. I. 0

$$\begin{aligned} \text{fit } 2yy + \frac{qr-2qv}{q-r} y \infty 0 \\ \text{feu } 2qy - 2ry + qr \infty 2qv \\ \& y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r \infty v. \end{aligned}$$

2^{dum} exemplum est

$$\begin{aligned} y^6 - 2by^5 - 2cdy^4 + 4bcdy^3 - 2bbcdyy - 2bccddy + bbccdd \infty 0 \\ +bb - 2ddv + ccd \\ +dd - ddf \\ +ddv \end{aligned}$$

Mult. per $+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2$
 eritque productum

$$\begin{aligned} 4y^6 - 6by^5 - 4cdy^4 + 4bcdy^3 * +2bccddy - 2bbccdd \infty 0 \\ +2bb - 2ddv \\ +2dd \end{aligned}$$

Divi-

Dividendo jam per $2ddy^3$ & transferendo v ad alteram partem, obtinebitur $\frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} - \frac{2cy}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} \infty v$.

$$\begin{aligned} + \frac{bbv}{dd} \\ + y \end{aligned}$$

3^{tium} autem exemplum ejusdem est naturæ cum 1^{mo}.

Vbi patet, in omnibus hisce exemplis Quæsitum ex sola Producta æquatione uno intuitu inveniri, y enim cognita est, atque v , quæ erat incognita ac sola quærebatur, jam etiam innotuit.

At verò sæpe etiam accidit, ut Quæsitum ex sola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit si valorem quantitatis incognitæ f investigare velimus. Quippe tunc valor ipsius v in prima æquatione in ejus locum subrogandus est, vel potius in alia æquatione, per aliam Progressionem productâ, cujus beneficio ex illa prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per 1^{am} Progressionem est sublatus) tolli potest.

Exempli gratiâ, in 1^{mo} exemplo multiplicatum fuit per 2, 1, 0, ac inde inventum $v \infty y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$; Iam si multiplicetur

$$yy + \frac{qr-2qv}{q-r} y + \frac{qvv-qs}{q-r} \infty 0$$

per $+1, 0, -1$:

$$\text{obtinetur } yy * \frac{-qvv+qs}{q-r} \infty 0$$

mult. per $q-r$.

$$\text{div. per } q. \frac{qyy-ryy * -qvv+qs \infty 0}{q-r}$$

$$ss \infty -yy + \frac{ryy}{q} + vv$$

$$\text{fit } s \infty \sqrt{-yy + \frac{ryy}{q} + vv}.$$

Quocirca si in hac æquatione in locum vv subrogetur ejus valor, innotescet inde etiam quantitas s .

Eodem modo, multiplicando in 2^{do} exemplo per hanc Progressionem 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, inveniri potest valor quantitatis s . Vbi si similiter in locum vv , ejus valor substituitur, quantitas s inde innotescet.

Quod si verò contingat, æquationem, per quam v quæritur, esse talem, ut valor ipsius v per eandem æquationem solam sine

ipsius s inclusionem obtineri non possit; quemadmodum hic valor ipsius s absque inclusione ipsius v ex producta æquatione inveniri nequit; potest tamen semper, quotcunque etiam dimensiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud secus ac si illarum communis divisor, ut supra ostensum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cujus radices deinceps sunt inveniendæ.

Exempli gratiâ, si habeatur hæc æquatio

$$y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \infty 0, \\ - 9aaz$$

in qua y & z sint incognitæ, & y ad 2 æquales radices determinari debeat: operationem instituo, ut sequitur.

$$y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \infty 0 \\ - 9aaz$$

$$\begin{array}{r} \text{Mult. per } 0, 1, 2, 3, 4 \\ \text{fit} \quad -12zzyy - 36z^3y + 36z^4 \infty 0 \\ \quad \quad \quad - 36aaz \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{div. per } 12zz. \quad -yy - 3zy + 3zz \infty 0 \\ \quad \quad \quad - 3aa \\ \quad \quad \quad yy \infty - 3zy + 3zz. \\ \quad \quad \quad - 3aa \end{array}$$

Similiter multiplicetur Proposita

$$y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \infty 0 \\ - 9aaz$$

$$\begin{array}{r} \text{per } 4, 3, 2, 1, 0 \\ \text{fit } 4y^4 * - 12zzyy - 12z^3y * \infty 0 \end{array}$$

$$\text{div. per } 4y. \quad y^3 * - 3zzz - 3z^3 \infty 0.$$

Substituendo jam valorem ipsius yy , supra inventum, in ejus locum, habebitur

$$\begin{array}{r} y^3 \infty - 3zyy + 3zzz \text{ seu } + 9zzz - 9z^3 \\ \quad \quad \quad - 3aay \quad \quad \quad + 3zzz + 9aaz \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad - 3aay \\ - 3zzz - 3z^3 \infty \quad \quad \quad - 3zzz - 3z^3 \\ \text{summa} \quad + 9zzz - 12z^3 \infty 0 \\ \quad \quad \quad - 3aay + 9aaz \\ \quad \quad \quad y \infty \frac{4z^3 - 3aaz}{3zz - aa}. \end{array}$$

Quo-

Quocirca substituendo rursus hunc valorem ubique in locum y in hac æquatione $yy \infty - 3zy + 3zz$, exurget inde alia æquatio, in quâ nulla incognita præterquam sola z reperitur, quæque per eam porro inveniri potest.

Denique, quicquid hic de duabus æqualibus radicibus dixi, eodem etiam modo de 3 aut pluribus æqualibus est intelligendum. Si enim æquatio habeatur, quæ omnes conditiones Problematis includat, exceptâ hac solâ, quod incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, ad 3 vel plures æquales radices adhuc sit determinanda: oportet ipsam primùm multiplicare per Arithmetica Progressionem, & hoc productum rursus eodem modo, & sic deinceps, donec totidem æquationes habeantur, quot æquales radices. ut supra dictum atque explicatum fuit. Quo peracto, tantum æquationes eodem modo resolvendæ sunt, ut in superiori exemplo ostensum est, donec una tandem obtineatur æquatio, in qua non nisi una incognita quantitas reperiat. Et demum notandum, infinita Problemata, quæ multis planè artificiosa ac ingeniosa dicuntur, ad talem æquationem, in qua solummodo una hujusmodi determinatio adhuc implenda est, quàm facillimè reduci & deinde per hanc Methodum solvi posse.

XI. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, sive literales, sive numerales, quæ produci possunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt.

Brevitatis causâ, quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam suis signis + & -, vocabo p ; 3^{ti} q ; 4^{ti} r ; 5^{ti} s ; atque sic deinceps: & $-p$, $-q$, $-s$, &c. easdem quantitates designabunt, sed contrariis signis adfectas.

Ex.gr. in hac æquatione $x^4 - 2ax^3 - 4bbxx + 6abbx - 4a^4 \infty 0$,
 $\quad \quad \quad + 3b \quad \quad \quad + 2aab$
 erit $-2a + 3b \infty p$; $-4bb \infty q$; $+ 6abb + 2aab \infty r$; $-4a^4 \infty s$;
 & $+ 2a - 3b \infty -p$; $+ 4bb \infty -q$; &c.

I^{ma}.

I^{ma} Pars.

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribusve terminis careat; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi hæ æquationes seu Divisores copulantur per voculam $\mathcal{E}$; per *aliquam* verò, ubi disjunguntur per voculam *vel*.

$$x^3, pxx, qx, r \infty \dots \text{ per } x + p \infty, \mathcal{E} x + \frac{r}{q} \infty.$$

$$x^4, px^3, qxx, rx, s \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{s}{r} \infty.$$

$$x^4, px^3, *, rx, s \infty \text{ per } x + p \infty, \mathcal{E} x + \frac{s}{r} \infty.$$

$$x^4, px^3, qxx, *, s \infty \text{ per } x + p \infty, \mathcal{E} x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{s}{q}} \infty.$$

$$x^4, *, qxx, rx, s \infty \text{ per } x + \frac{s}{r} \infty, \mathcal{E} x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{t}{s} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{t}{s} \infty.$$

$$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{t}{s} \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty.$$

$$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty \text{ per } x + \frac{t}{s} \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty.$$

$$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty \text{ per } x + p \infty, \mathcal{E} x + \frac{t}{s} \infty.$$

$$x^5, px^4, *, rxx, *, t \infty \text{ per } x + p \infty, \mathcal{E} x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty.$$

x⁵,

$$x^5, *, qx^3, *, sx, t \infty \text{ per } x + \frac{t}{s} \infty, \mathcal{E} x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty \text{ per } x + p \infty, \mathcal{E} x + \sqrt{C. \frac{t}{q}} \infty.$$

$$x^5, *, *, rxx, sx, t \infty \text{ per } x + \frac{t}{s} \infty, \mathcal{E} x + \sqrt{C. r} \infty.$$

$$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty \text{ per } x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty, \mathcal{E} x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{v}{t} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - \frac{v}{t}} \infty,$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{v}{t} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{v}{t} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x + \frac{v}{t} \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, *, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty \text{ per } x + p \infty, \text{ vel per utramque harum duarum}$$

$$x + \sqrt{C. \frac{v}{r}} \infty,$$

$$x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty.$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty \text{ per } x + \frac{v}{t} \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty, \\ \text{ vel } x + \frac{1}{2}p \mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{4}pp - \frac{v}{t}} \infty.$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty \text{ per } x + \frac{v}{t} \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty.$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty \text{ per } x \mathcal{E} \sqrt{-q} \infty, \text{ vel } x \mathcal{E} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty.$$

Kkk

x⁶,

$$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + \frac{v}{t} \infty \infty, \text{vel } x + \sqrt{C.r} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \text{vel } x \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \text{vel } x + \frac{v}{t} \infty \infty, \\ \text{vel } x + \frac{t}{2f} \sqrt{\frac{tt}{4ff} - \frac{v}{s}} \infty \infty.$$

$$x^6, *, qx^4, *, sxx, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + \frac{v}{t} \infty \infty, \text{vel } x \sqrt{-q} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \text{vel } x + \frac{v}{t} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \text{vel } x + \frac{v}{t} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, *, *, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \sqrt[3]{x - \frac{v}{p^3}} \infty \infty, \\ \sqrt[3]{x} \sqrt{-\frac{v}{ppq}} \infty \infty,$$

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{-\frac{v}{q}} \infty \infty.$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, *, *, v \infty \infty \quad \text{per } x \sqrt{-q} \infty \infty, \sqrt[3]{x - \frac{v}{qr}} \infty \infty, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt{C. \frac{v}{r}} \infty \infty.$$

$$x^6, *, *, rx^3, sxx, *, v \infty \infty \quad \text{per } x - \frac{r}{v} \infty \infty, \sqrt[3]{x} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \infty, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt{C.r} \infty \infty.$$

$$x^6, *, *, *, sxx, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + \frac{v}{t} \infty \infty, \sqrt[3]{x - \frac{f^3}{v^3}} \infty \infty, \\ \sqrt[3]{x} \sqrt{\frac{t}{v}} \sqrt{-s} \infty \infty,$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt{C. \frac{st}{v}} \infty \infty,$$

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{-\frac{st}{v}} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \sqrt[3]{x} + \sqrt{C. \frac{v}{r}} \infty \infty, \\ \sqrt[3]{x} + \frac{v}{ppr} \infty \infty.$$

$$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty \infty \quad \text{per } x \sqrt{-q} \infty \infty, \sqrt[3]{x} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \infty.$$

$$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + \frac{v}{t} \infty \infty, \sqrt[3]{x} + \sqrt{C.r} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \sqrt[3]{x} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \infty.$$

x⁶,

$$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + \frac{v}{t} \infty \infty, \sqrt[3]{x} \sqrt{-q} \infty \infty.$$

$$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty \infty \quad \text{per } x + p \infty \infty, \sqrt[3]{x} + \frac{v}{t} \infty \infty.$$

2^{da} Pars.

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit duarum vel plurium dimensionum, ac duorum tantum terminorum; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi per unamquamque æquationem sibi adjunctam.

1^{mo}. Per xx & quantitate aliquâ cognitâ $\infty \infty$.

$$x^3, pxx, qx, r \infty \infty \quad \text{per } xx + q \infty \infty, (\sqrt[3]{x} + p \infty \infty.)$$

$$x^4, px^3, qxx, rx, s \infty \infty \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty \infty, \sqrt[3]{xx} + \frac{1}{2}q \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - s} \infty \infty.$$

$$x^4, px^3, *, rx, s \infty \infty \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty \infty, \sqrt[3]{xx} \sqrt{-s} \infty \infty.$$

$$x^4, *, qxx, *, s \infty \infty \quad \text{per } xx + \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - s} \infty \infty,$$

$$\sqrt[3]{xx} + \frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - s} \infty \infty.$$

$$x^4, *, *, *, s \infty \infty \quad \text{per } xx + \sqrt{-s} \infty \infty, \sqrt[3]{xx} - \sqrt{-s} \infty \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, sxx, t \infty \infty \quad \text{per } xx + \frac{1}{2}q \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - s} \infty \infty,$$

$$\sqrt[3]{xx} + \frac{r}{2p} \sqrt[3]{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty \infty \quad \text{per } xx + q \infty \infty, \sqrt[3]{xx} + \frac{r}{2p} \sqrt[3]{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \infty.$$

$$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty \infty \quad \text{per } xx + q \infty \infty, \sqrt[3]{xx} \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \infty.$$

$$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty \infty \quad \text{per } xx + q \infty \infty, \sqrt[3]{xx} + \frac{t}{v} \infty \infty.$$

$$x^5, *, *, rxx, sxx, t \infty \infty \quad \text{per } xx + \frac{t}{v} \infty \infty, \sqrt[3]{xx} \sqrt{-s} \infty \infty.$$

Kkk 2

x⁵,

$$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty \circ \text{ per } xx + \frac{t}{r} \infty \circ, \mathcal{C}xx + \frac{1}{2}q \mathcal{B} \\ \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty \circ.$$

$$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-s} \infty \circ, \mathcal{C}xx \mathcal{B} \\ \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-s} \infty \circ, \mathcal{C}xx + \\ \frac{r}{2p} \mathcal{B} \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ, \mathcal{C}xx + \frac{1}{2}q \\ \mathcal{B} \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{2p} \mathcal{B} \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{2p} \mathcal{B} \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{2p} \mathcal{B} \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{2p} \mathcal{B} \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \circ, \\ \mathcal{C}xx + \sqrt{C.v} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{p} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{p} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{p} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{r}{p} \infty \circ, \mathcal{C}xx + \\ \sqrt{C.v} \infty \circ.$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{t}{r} \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{t}{r} \infty \circ.$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{t}{r} \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty \circ \text{ per } xx + \frac{t}{r} \infty \circ, \mathcal{C}xx + \\ \sqrt{C.v} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ.$$

x⁶,

$$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty \circ \text{ per } xx \mathcal{B} \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ, \mathcal{C}xx + \\ \sqrt{C.v} \infty \circ.$$

$$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } xx + y \infty \circ, \text{ existente } y^3 - \\ qyy + sy - v \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, *, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } xx + y \infty \circ, \text{ existente } y^3 x \\ + sy - v \infty \circ.$$

$$x^6, *, qx^4, *, *, *, v \infty \circ \text{ per } xx + y \infty \circ, \text{ existente } y^3 - \\ qyy^* - v \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, *, *, *, v \infty \circ \text{ per } xx + \sqrt{C.v} \infty \circ.$$

2^{da}. Per x³ $\mathcal{B}$ quantitate aliquâ cognitâ $\infty \circ$.

$$x^4, px^3, *, rx, s \infty \circ \text{ per } x^3 + r \infty \circ, \mathcal{C}x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ (\mathcal{C}x + p \infty \circ)$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty \circ \text{ per } x^3 + r \infty \circ, x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, \mathcal{C}x^3 \\ + \frac{t}{q} \infty \circ.$$

$$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty \circ \text{ per } x^3 + r \infty \circ, \mathcal{C}x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \\ (\mathcal{C}xx + q \infty \circ)$$

$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \\ \mathcal{C}x^3 + \frac{1}{2}r \mathcal{B} \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \\ \mathcal{C}x^3 \mathcal{B} \sqrt{-v} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, \mathcal{C}x^3 \mathcal{B} \sqrt{-v} \infty \circ.$$

$$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, \mathcal{C}x^3 + \frac{1}{2}r \\ \mathcal{B} \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty \circ.$$

Kkk 3 x⁶,

$$x^6, *, q x^4, *, *, t x, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \mathfrak{E} x^3 \mathfrak{G} \sqrt{-v \infty \circ}.$$

$$x^6, *, q x^4, r x^3, *, t x, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \mathfrak{E} x^3 + \frac{1}{2} r \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{4} r r - v \infty \circ}.$$

$$x^6, *, *, r x^3, *, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} r r - v \infty \circ}, \mathfrak{E} x^3 + \frac{1}{2} r - \sqrt{\frac{1}{4} r r - v \infty \circ}.$$

$$x^6, *, *, *, *, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \sqrt{-v \infty \circ}, \mathfrak{E} x^3 - \sqrt{-v \infty \circ}.$$

3^{tid}. Per x^4 $\mathfrak{G}$ quantitate aliquâ cognitâ $\infty \circ$.

$$x^5, p x^4, *, *, s x, t \infty \circ \text{ per } x^4 + s \infty \circ, \mathfrak{E} x^4 + \frac{t}{p} \infty \circ, (\mathfrak{E} x + p \infty \circ.)$$

$$x^6, p x^5, q x^4, *, s x x, t x, v \infty \circ \text{ per } x^4 + s \infty \circ, x^4 + \frac{t}{p} \mathfrak{E} x^4 + \frac{v}{q} \infty \circ.$$

$$x^6, *, q x^4, *, s x x, *, v \infty \circ \text{ per } x^4 + s \infty \circ, \mathfrak{E} x^4 + \frac{v}{q} \infty \circ, (\mathfrak{E} x x + q \infty \circ.)$$

4^{td}. Per x^5 $\mathfrak{G}$ quantitate aliquâ cognitâ $\infty \circ$.

$$x^6, p x^5, *, *, *, t x, v \infty \circ \text{ per } x^5 + t \infty \circ, \mathfrak{E} x^5 + \frac{v}{p} \infty \circ, (\mathfrak{E} x + p \infty \circ.)$$

3^{tia} Pars.

Si aliqua æquatio 5 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum $\infty \circ$, altera verò aliquem terminum $\infty \circ$; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per unamquamque, ubi vocula $\mathfrak{E}$; per aliquam, ubi vel invenitur: ut antea.

Quan-

Quantitatem cognitam 2^{di} termini æquationum sequentium quadratarum, adfectam suis signis + & —, brevitatis causâ, vocabo y , & ultimum terminum z .

$$x^5, p x^4, q x^3, r x x, s x, t \infty \circ \text{ per } x x + p x + \frac{1}{2} q - \frac{r}{2 p} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{2} q - \frac{r}{2 p} \square^t + \frac{t}{p} \infty \circ},$$

$$\text{vel per } x x + \frac{1}{2} p + \frac{t}{2 f} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{2} p + \frac{t}{2 f} \square^t - q} \text{ in } x, + \frac{y^t}{s} \infty \circ,$$

$$\text{vel per } x^3 + r \infty \circ.$$

$$x^5, p x^4, *, r x x, s x, t \infty \circ \text{ per } x x + p x - \frac{r}{2 p} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{r r}{4 p p} + \frac{t}{p} \infty \circ},$$

$$\text{vel per } x x + p + \frac{t}{s} \text{ in } x, + \frac{y^t}{s} \infty \circ.$$

$$x^5, p x^4, q x^3, *, s x, t \infty \circ \text{ per } x x + p x + \frac{1}{2} q \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{4} q q + \frac{t}{p} \infty \circ},$$

$$\text{vel per } x x + \frac{r}{t} x + \frac{1}{2} q \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{4} q q + s \infty \circ}.$$

$$x^5, p x^4, *, *, s x, t \infty \circ \text{ per } x x + p x \mathfrak{G} \sqrt{\frac{t}{p} \infty \circ},$$

$$\text{vel per utramque } \begin{cases} x x + p + \frac{t}{s} \text{ in } x, + \frac{y^t}{s} \infty \circ, \\ \text{harum duarum } \begin{cases} x x, \mathfrak{G} \sqrt{s} \text{ in } x, \mathfrak{G} \sqrt{s \infty \circ}. \end{cases} \end{cases}$$

$$x^5, p x^4, q x^3, r x x, *, t \infty \circ \text{ per } x x + p x + \frac{1}{2} q - \frac{r}{2 p} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{2} q - \frac{r}{2 p} \square^t + \frac{t}{p} \infty \circ},$$

$$\mathfrak{E} \text{ per } x x + p x + \frac{t}{2 r} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{t t}{4 r r} - \frac{p p t}{r} \infty \circ}.$$

$$x^5, p x^4, *, r x x, *, t \infty \circ \text{ per } x x + p x + \frac{1}{2} p p \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{4} p^4 + p r \infty \circ}, \mathfrak{E} \text{ per } x x + p x + \sqrt{C. p t \infty \circ},$$

$$\mathfrak{E} \text{ per } x x + p x - \frac{r}{2 p} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{r r}{4 p p} + \frac{t}{p} \infty \circ}.$$

$$x^5, p x^4, q x^3, *, *, t \infty \circ \text{ per } x x + p x + p p \infty \circ,$$

$$\mathfrak{E} \text{ per } x x + p x + \frac{1}{2} q \mathfrak{G} \sqrt{\frac{1}{4} q q + \frac{t}{p} \infty \circ}.$$

$$x^5, p x^4, *, *, *, t \infty \circ \text{ per } x x + p x + p p \infty \circ,$$

$$\mathfrak{E} \text{ per } x x + p x \mathfrak{G} \sqrt{\frac{t}{p} \infty \circ}.$$

$$x^5, *, q x^3, r x x, s x, t \infty \circ \text{ per } x x + \frac{t}{2 f} \mathfrak{G} \sqrt{\frac{t t}{4 f f} - q \text{ in } x, + \frac{y^t}{s} \infty \circ}.$$

$x^5,$

$x^s, *, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \infty 0$.

$x^s, *, q, x^3, *, sx, t \infty 0$ per $xx + \frac{qs}{t}x + \frac{1}{2}q \sqrt{\frac{1}{4}qq + s \infty 0}$,

$\mathcal{E}$ per $xx, \sqrt{\frac{s}{2}} \ln x, + \frac{1}{2}q \sqrt{\frac{1}{4}qq + s \infty 0}$,

$\mathcal{E}$ per $xx, + \frac{t}{2f} \sqrt{\frac{tt}{4ff} - q \ln x, + \frac{yt}{s} \infty 0}$,

$\mathcal{E}$ per $xx + x \sqrt{C. \frac{ss}{t}} + \sqrt{C. \frac{tt}{s}} \infty 0$.

$x^s, *, *, *, sx, t \infty 0$ per $xx, \sqrt{\frac{s}{t}} \sqrt{s \ln x, \sqrt{s} \infty 0}$,

$\mathcal{E}$ per $xx, \sqrt{\sqrt{s} \ln x, \sqrt{s} \infty 0}$,

$\mathcal{E}$ per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \infty 0$,

$\mathcal{E}$ per $xx, + \sqrt{C. \frac{ss}{t}} \ln x, + \sqrt{C. \frac{tt}{s}} \infty 0$,

$\mathcal{E}$ per $xx, + \sqrt{\beta. t \ln x, + \frac{tt}{ss} \infty 0}$.

Ad 1^{am} & 3^{iam} Partem annotandum venit, si non constet an Proposita æquatio ex duabus aliis, requisitas conditiones habentibus, produci possit, quod id facillimo negotio ut plurimum experiri liceat: quotiescunque enim divisores, qui per voculam $\mathcal{E}$ copulantur, inter se non secundum omnes terminos conveniant, concludendum est, Propositam æquationem ita produci non posse, adeo ut eo in casu divisio irrita foret. Exempli gratiâ, si Proponatur æquatio $x^6, *, *, *, -xx \sqrt{3} - 2 \frac{1}{2}x + 10 \frac{1}{8} \infty 0$, quæ hujus est formulæ $x^6, *, *, *, sx, tx, v \infty 0$, ea divisibilis erit secundum 1^{am} Partem, per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & per $x \sqrt{\sqrt{-s}}$

$\infty 0$; & per $x \sqrt{\frac{t}{v}} \sqrt{-s \infty 0}$; & per $x - \sqrt{C. \frac{st}{v}} \infty 0$; & per $x - \frac{st}{v^3} \infty 0$, si produci possit *ex multiplicatione duarum aliarum*,

quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribusve terminis careat. Ut autem sciatur, utrum hoc fieri queat, non opus est id divisione per aliquem ex divisoribus explorare, cum hîc duo divisores reperiantur inter se non convenientes: nimirum,

$x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x \sqrt{\sqrt{-s \infty 0}}$, nam $\frac{v}{t}$ rationalem, & $\sqrt{\sqrt{-s}}$ irrationalem numerum designat. Atque cum indivisibilitas etiam sæpe

sæpe uno intuitu ex variis signis constet, ut, ex. gr. si loco $-\sqrt{3}$ habuissimus $+\sqrt{3}$, quo casu $\sqrt{Q. ex -s}$ extrahi non potuisset; Poterimus interdum operosas aliquot multiplicationes & divisiones, quæ alioquin essent faciendæ, insuper habere. Majoris perspicuitatis gratiâ alterum exemplum addam. Divisores æquationis $x^s, *, *, *, sx, t \infty 0$ sunt, secundum 3^{iam} Partem, $xx \sqrt{\frac{s}{t}} \sqrt{s}$ in $x, \sqrt{s} \infty 0$; $xx \sqrt{\sqrt{s} \ln x, \sqrt{s} \infty 0}$; $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \infty 0$; $xx + \sqrt{C. \frac{ss}{t}} \ln x + \sqrt{C. \frac{tt}{s}} \infty 0$; & $xx + \sqrt{\beta. t \ln x + \frac{tt}{ss} \infty 0}$: si jam comperiatur $\sqrt{\frac{s}{t}} \sqrt{s}$ non esse $\infty \sqrt{\sqrt{s}}$, vel $\infty \frac{t}{s}$ vel $\infty \sqrt{C. \frac{ss}{t}}$, vel $\infty \sqrt{\beta. t}$, quæ sunt quantitates cognitæ 2^{di} termini; vel ultimos terminos $\sqrt{s}$, & $+\frac{tt}{ss}$, &c. non inter se convenire; indicio esset æquationem Propositam produci non posse *ex multiplicatione duarum aliarum*, quarum altera habet duas dimensiones, & nullum terminum $\infty 0$, altera verò aliquem terminum $\infty 0$.

4^a Pars.

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum $\infty 0$; altera verò unum, pluresve terminos $\infty 0$; erit ea divisibilis per $xx + yx + z \infty 0$, cujus y & z valores per sequentes æquationes ac sequenti modo sunt inveniendi.

Æquationem Propositam, siue in ea aliquis terminus deficiat, siue non, sic designabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2^{di} termini, vel 0, si is deficiat; q quantitatem cognitam 3^{ti} termini, vel 0, si is defit; r 4^{ti} termini, &c.

$$A \quad zz - 2qz + ppq \infty 0 \quad zz - \frac{t}{p}z + 2v \infty 0 \quad y \infty p$$

$$\begin{array}{r} -pp \quad -rp \\ +\frac{r}{p} \quad +f \\ \hline -\frac{t}{p} \end{array} \quad \begin{array}{r} -f \\ +rp \\ \hline -ppq \\ \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

$$B \quad y^3 - pyy + qy - r \infty 0 \quad yy - \frac{qt}{v}y + \frac{t^4}{v^3} \infty 0 \quad z \infty \frac{yv}{t}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{2v}{t} + \frac{pv}{t} \\ -p + \frac{rt}{v} \\ +\frac{rtt}{vv} \\ -\frac{t^3f}{v^3} \\ \hline 2 \end{array}$$

$$C \quad y^4 - \frac{q}{p}y^3 + 3qyy - \frac{f}{p}y + \frac{t}{p} \infty 0 \quad y^4 - \frac{t}{f}y^3 + ppyy - 2pqy + qq \infty 0$$

$$\begin{array}{r} -2p + pp \quad -2pq + qq \\ -2p + \frac{tp}{f} \quad -\frac{tq}{f} \quad -\frac{vq}{f} \\ \frac{qq}{p} - \frac{rq}{p} \\ +r \\ +2q + \frac{vp}{f} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{t}{f}y^3 + \frac{tp}{f}yy - \frac{tq}{f}y - \frac{vq}{f} \infty 0 \quad z \infty -py + yy + q \\ +\frac{q}{p} - q \quad +\frac{vp}{f} - \frac{t}{p} \\ +\frac{f}{p} + \frac{rq}{p} \\ +\frac{qq}{p} \\ -r \end{array}$$

$$D \quad +qy^3 + sy - t \infty 0 \quad +sy^4 - ty^3 + 2qfyy - tqy + qqf \infty 0$$

$$\begin{array}{r} +qq + rq \\ -vq \\ z \infty yy + q \end{array}$$

e
 $y \infty p$
 $z \infty q$

f
 $y \infty p$
 $z \infty q - \frac{r}{p} \infty \frac{vp}{t}$

g
 $y \infty \frac{t}{f}$
 $z \infty \frac{v}{f}$

Quam

Quando nulli termini in æquatione Propofita funt $\infty 0$, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, C, e, f, g.

Quando est $p \infty 0$... per aliquam harum B, D, g

q	—	—	—	A, B, C, f, g
r	—	—	—	A, B, C
f	—	—	—	A, B, C, e, f
t	—	—	—	A, C, e
p, q	—	—	—	B, D, g
p, r	—	—	—	B, D
p, f	—	—	—	B, D
p, t	—	—	—	D
q, r	—	—	—	A, B, C
q, f	—	—	—	A, B, C, f
q, t	—	—	—	A, C
r, f	—	—	—	A, B, C
r, t	—	—	—	A, C
f, t	—	—	—	A, C, e
p, q, r	—	—	—	B, D
p, q, f	—	—	—	B
p, r, f	—	—	—	B, D
p, r, t	—	—	—	D
q, r, f	—	—	—	A, B, C
q, r, t	—	—	—	A, C
q, f, t	—	—	—	A
r, f, t	—	—	—	A, C
p, q, r, f	—	—	—	B
p, q, f, t	—	erit $y^{6**} + ry^{3**} + v \infty 0$,		
		& $z \infty yy$		
q, r, f, t	—	—	—	A
p, q, r, f, t	—	erit $y^{6****} + v \infty 0$,		
		& $z \infty yy$.		

Lll 2

i. Pro

1. Pro A, vel B, vel C assumere licet, vel unam æquationum juxta positarum, quam libuerit, quærendo ejus tantum ope valorem ipsius y , vel z ; vel duas eandem quantitatem incognitam habentes, quærendoque, ut superius ostensum est, earum communem divisorem, qui, aut unius, aut plurium futurus est dimensionum. si unius, habebitur quæsitus valor ipsius y vel z ; si plurium, eundem ex hoc communi divisore investigare oportet.

2. Si primò per capitales sive majusculas A, B, C, D explorare velimus, reliquæ e, f, g, non sunt necessariae; sed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3xx - 13x - 500.$$

Cum nullus terminus hîc deficiat, examinanda est æquatio per A, B, C, e, f, g. & quidem per omnes, si à minusculis g, f, e incipiamus, si autem à capitalibus, erunt minusculæ insuper habendæ. Incipiamus igitur à capitalibus, ac primùm ab A, pro qua itaque sumere licet æquationem $zz - 2qz + ppq = 0$,

$$\begin{array}{r} -pp \quad -rp \\ + \frac{r}{p} \quad + f \\ \hline - \frac{t}{p} \\ \hline 2 \end{array}$$

vel $zz - \frac{t}{p}z + 2v = 0$, vel utramque.

$$\begin{array}{r} -f \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

Si primam sumamus, obtinebitur pro ipsa (quoniam $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$, $f = 3$, $t = 13$, & $v = 5$) $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} = 0$; si alteram, obtinebitur $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 100 = 0$, quarum communis divisor est $z + 5 = 0$. Quoniam autem $y = p$

$y = p = 2$, dividendum est per $xx + yx + z = 0$ $xx + 2x - 5 = 0$, invenieturque pro quotiente $x^4 + 2xx + 3x + 1 = 0$. Et manifestum est, nos etiam alterutra tantum duarum illarum æquationum uti potuisse. Facilius itaque via eligenda erit: non enim semper illa per communem divisorem brevior est, neque semper longior; verum hanc habet prærogativam, quæ sanè non parva est, quòd inutiles radices abscindat. Quemadmodum sequenti exemplo clariùs patebit.

Esto æquatio Proposita $x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 5x - 100$. Quoniam hîc p est ∞ , reductio tentanda erit per B, D, g. Incipiendo à B, invenietur pro $1^{\text{ma}} y^3 - pyy + qy - r = 0$,

$$- \frac{2v}{t} + \frac{pv}{t}$$

hæc æquatio $y^3 - \frac{2}{5}yy - 2y - 300 = 0$; & pro $2^{\text{da}} yy - \frac{q}{v}y + \frac{t}{v^3} = 0$,

$$\begin{array}{r} -p + \frac{rt}{v} \\ + \frac{rtt}{vv} \\ - \frac{t^3f}{v^3} \\ \hline 2 \end{array}$$

hæc $yy + 230y - 30500 = 0$: est enim in hoc exemplo $q = 2$, $r = 3$, $f = 3$, $t = 5$, & $v = 1$. Vnde, quærendo earum communem divisorem, comperietur nullum dari, ac proinde divisionem per B fieri non posse. Hinc transeo ad D, ubi pro 1^{ma} æquatione $qy^3 + sy - t = 0$ invenio $-2y^3 + 1y - 100 = 0$,

$$+qq + rq$$

& pro 2^{da} $sy^4 - ty^3 + 2qsy - tqy + qqf = 0$ invenio $-vq$

$-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 1400 = 0$. Quarum æquationum divisor communis est $y + 1 = 0$; adeoque $200y + q = 1$; ita ut divisio sit facienda per $xx + yx + z = 0$ $xx - 1x - 1$, eritque quotiens $x^4 + 1x^3 + 4x + 1 = 0$.

Vbi notandum, modum hunc quærendi communem divisorem in altioribus præsertim æquationibus permagni esse usus, non autem tanti usus, cum æquationes, quarum divisor communis investigandus est, solummodo sunt 2 dimensionum, aut etiam trium, quoniam tum divisores faciles sunt inventu. Vt in

æquatione superiori $-2y^3 + 1y - 1 \infty 0$, ubi protinus apparet y esse $\infty - 1$, adeoque si ipsa dividatur per $y + 1 \infty 0$, obtinebitur $-2yy + 2y - 1 \infty 0$. Cujus radices quoniam sunt impossibiles, solum superest $y \infty - 1$; adeo ut divisio æquationis Propositæ tentanda sit per $xx - 1x - 1 \infty 0$.

Sic & si habeatur æquatio $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 \infty 0$, comperietur ejus divisionem fieri posse beneficio æquationum juxta B, ubi pro una invenitur $2yy - 5y + 3 \infty 0$, & pro altera $y^3 - 4yy + 5y - 2 \infty 0$, & pro communi divisore $y - 1 \infty 0$.

Et quoniam z est $\infty \frac{y}{t} \infty 1$, erit $xx + yx + z \infty \infty xx + 1x + 1 \infty 0$.

Per quam igitur si Proposita æquatio dividatur, fiet pro quotiente $x^4 + 1x^3 + 1xx + 1 \infty 0$.

Si autem detur æquatio $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 1xx + 14x + 2 \infty 0$, in qua r est 0 , oportet ipsam examinare per A, B, & C. Incipiendo autem ab A, loco æquationis $zz - 2qz + ppq \infty 0$

$$\begin{array}{r} -pp \quad -rp \\ + \frac{r}{p} \quad + f \\ \hline - \frac{t}{p} \\ \hline 2 \end{array}$$

invenitur $zz - 4z + 1 \infty 0$; & loco æquationis $zz - \frac{t}{p}z + 2v \infty 0$

$$\begin{array}{r} -f \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

invenitur eadem $zz - 4z + 1 \infty 0$. Ex qua, quia utriusque communis divisor est, radices invenire oportet, quæ sunt $z \infty 2 + \sqrt{3}$, & $z \infty 2 - \sqrt{3}$. Vnde cum y sit ∞p , hoc est, 2 , pro $xx + yx + z \infty 0$ obtinebuntur hæ duæ $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, & $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$. Per quas igitur si Proposita æquatio divisa fuerit, comperietur ipsam produci posse multiplicatione harum trium $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$, & $xx - 2x + 2 \infty 0$.

5^a Pars.5^a Pars.

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit multiplicatione duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant, in quarum alterutra unus pluresve termini sint $\infty 0$; erit ipsa divisibilis vel per æquationem tantum 2 terminorum, juxta 2^{am} partem, vel per æquationem $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$, in qua tantum alterutra vel y vel z est $\infty 0$; quarumque $y, z, & w$ valores inveniuntur per sequentes æquationes.

Æquationem Propositam, si in ea aliquis terminus deficiat, siue non, sic designabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2^{di} termini, vel 0 , si is deficiat; q quantitatem cognitam 3^{ti} termini, vel 0 , si is deficit; r quarti termini, &c.

$$A \quad 2z^3 - 3qzz - rpz - sq \infty 0 \quad + qqzz + 4fqz - 4ff \infty 0 \quad w \infty \frac{f+xx-qx}{p}$$

$$\begin{array}{r} +pp \quad +2f +tp \quad +p^4 \quad -3pqr \quad -4ppv \\ +qq \quad \quad \quad -4f \quad -2ppf \quad +4pfr \\ +2pr \quad +2tp \quad +fq \quad q \\ -q^3 \quad -ptq \\ -rp^3 \quad -sqpp \\ +qqpp \quad +tp^3 \end{array}$$

 $y \infty 0$.

$$B \quad y^4 - \frac{qt}{v}y^3 + \frac{pq}{v}yy - \frac{ft}{v}y - qq \infty 0 \quad y^4 - 2py^3 + qyy - ry + pr \infty 0$$

$$\begin{array}{r} -p \quad +qp - \frac{tt}{v} \quad + \frac{2v}{t} \quad +pp - pq - f \\ - \frac{qq}{v} + \frac{rt}{v} \quad \quad \quad - \frac{3pv}{t} + \frac{2qv}{t} - \frac{pqv}{t} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{ppv}{t} \\ w \infty \frac{t}{q-py+yy} \\ z \infty 0. \end{array}$$

$$C \quad zz - qz + f \infty 0 \quad ww - rw + v \infty 0 \quad y \infty 0.$$

$$D \quad yy - py + q \infty 0 \quad ww - rw + v \infty 0 \quad z \infty 0.$$

$$e \quad z \infty q \quad w \infty \frac{f}{p} \quad y \infty 0.$$

$$f \quad y \infty p \quad w \infty \frac{t}{q} \quad z \infty 0.$$

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt $\infty 0$, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, e, f.

Quando est $p \infty 0 \dots$ per aliquam harum C, B

q	—	—	—	A, B
r	—	—	—	A, B, e, f
f	—	—	—	A, B
t	—	—	—	A, D
p, q	—	—	—	C, B
p, r	—	—	—	C, B
p, f	—	—	—	B
p, t	—	—	—	C, D
q, r	—	—	—	A, B
q, f	—	—	—	A, B
q, t	—	—	—	A
r, f	—	—	—	A, B
r, t	—	—	—	A, D
f, t	—	—	—	A, D
p, q, r	—	—	—	C, B
p, q, f	—	—	—	B
p, q, t	—	—	—	C
p, r, f	—	—	—	B
p, r, t	—	—	—	C, D
p, f, t	—	—	—	D
q, r, f	—	—	—	A, B
q, r, t	—	—	—	A
q, f, t	—	—	—	A
r, f, t	—	—	—	A, D
p, q, r, f	—	—	—	B
q, r, f, t	—	—	—	A

1. Pro A vel B assumere licet vel unam æquationum juxta positarum, quam libuerit, quærendo ejus tantum ope valorem ipsius y , vel z ; vel duas, eandem in-

cogni-

cognitam quantitatem habentes, quærendoque per earum communem divisorem valores ipsius y vel z eodem modo quo in Parte 4^{ta} dictum est.

2. Si primò per capitales A, B, C, D, examen fiat, tum examen per reliquas e & f superfluum habendum est, sed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 600.$$

Quoniam nulli termini desunt, Reductio erit tentanda per A, B, e, f; incipiendoque à minusculis, ac primùm ab e, habebitur $z \infty q \infty 4$, & $w \infty \frac{f}{p} \infty 5$, adeoque pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$, fiet $x^3 + 4x + 5 \infty 0$. Cum verò Proposita æquatio per hanc dividi nequeat, transeo ad f, obtineoque $y \infty p \infty 1$; $w \infty \frac{t}{q} \infty \frac{1}{4}$; $z \infty 0$; & in locum $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtineo $x^3 + 1xx + \frac{1}{4} \infty 0$. Et cum Proposita per hanc quoque non divisibilis existat, transeo ad A, & pro $2z^3 - 3qzz - rpx - fqq \infty 0$

$$+pp + 2f + tp + qq$$

obtineo $2z^3 - 11zz + 18z - 9 \infty 0$, cujus radices sunt $+3$, $+1$, & $+1\frac{1}{2}$. Quia autem omnes hæ radices sunt rationales, ac æquatio Proposita fractis numeris caret, non poterit nobis hæc ultima radix inservire. Vnde explorandum tantum restat per $z \infty 3$, & $z \infty 1$. Sumendo autem $z \infty 1$, reperitur divisionem fieri non posse, ac idcirco si sumatur $z \infty 3$, fiet $w \infty \frac{f+zz-qq}{p} \infty 2$.

Quoniam verò y est $\infty 0$, pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtinebitur $x^3 + 3x + 2 \infty 0$, per quam si divisio Propositæ tentetur, comperietur ipsam fieri posse, atque oriri $x^3 + 1xx + 1x + 3 \infty 0$. Sed loco 1^{ma} æquationis juxta A sumere potuissimus 2^{dam}, unâ dimensionem depressoem, pro qua obtinuissimus $13zz - 60z + 63 \infty 0$. Quæ unam tantum radicem rationalem absolutam admittit, quæ, ut supra, est $+3$.

Et notandum, quòd, inventis duabus æquationibus, (quæ semper, si per communem divisorem Quæsitum obtinere velimus, inveniri debent;) quæri potest radix alterutrius æquationis, si nempe ea facilis sit inventu, atque explorari, num & altera æqua-

Mmm

tio

tio dictam radicem admittat: Quo sæpe nonnihil laboris abscondi potest.

Priusquam huic XI Regulæ finem imponam, adjungam, quòd, eodem modo, quo hæ Regulæ inventæ sunt, & reliquæ altiorum æquationum inveniri possint; uti & multæ, ne dicam infinitæ aliæ ad æquationes 6, & pauciorum dimensionum, quarum aliquot ex facilioribus indicare volui, prætermittens nonnullas, non quidem admodum difficiles, sed quæ determinationem aliquam invollebant. Ut in 1^{ma} Parte, ubi æquationi $x^6, px^5, qx^4, * \sqrt{xx}, tx, v\infty 0$, loco divisoris $x + \frac{1}{2}p \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\infty 0}$, adjungere potuissim dividerem $x - \frac{v-qf}{pf-t} \infty 0$: quem, cum determinationem involvat, (siquidem $x + 3\infty 0$, divisor æquationis $x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 5xx + 25x + 30\infty 0$, per illum inveniri nequit:) omitendum duxi, præferendo ei alterum $x + \frac{1}{2}p \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\infty 0}$, qui determinationi nulli obnoxius est.

Denique, usus hujus XI Regulæ se longè lateque extendit, quod nemo facilè negaverit, qui modò viderit, non necesse esse, vel fractiones, vel cognitæ quantitates surdas priùs ex æquatione tolli; & quot modis una eademque æquatio, præsertim valde composita, & multarum dimensionum, ex multiplicatione duarum aliarum produci queat; tumque inter omnes illas ex quibus produci possit, tantùm unam requiri, in qua unus pluresve termini deficiant, ut Reductio per has Regulas inveniat.

SEQUENTES 12, 13, 14, 15 REGULÆ SE EXTENDUNT AD ÆQUATIONES, IN QVIBVS NEC SIGNA RADICALIA, NEC LITERALES FRACTIONES INVENIVNTVR.

XII. REGVL A.

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, quæ in ultimo Terminò non contineatur; si illa non nisi semel in æquatione extet, vel semel tantùm reperiatur secundùm eundem dimensionum numerum, (ut in Æquatione $x - 2ax^3 + aaxx - 2abbx + aabb\infty 0$,

$$- 2c + bb - 2acc$$

$$+ 4ac$$

$$- dd$$

in

in qua d semel duntaxat reperitur, duas habens dimensiones) æquatio semper indivisibilis erit per x , aut xx , &c. + vel - quantitate quâvis cognitâ atque rationali.

XIII. REGVL A.

Si pluries in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, quæ in ultimo terminò non contineatur; si illa ubique eodem signo + vel - sit adfecta, ac per incognitam quantitatem, impares ubique aut ubique pares dimensiones habentem, multiplicata: æquatio illa semper indivisibilis erit per $x +$ vel -, vel per xx, x^3 , &c. - quantitate quâvis cognitâ atque rationali. ut hæc Æquatio $x^4 + 4cx^3 - ddxx + 4bbcx + b^4\infty 0$, in

$$- 2bbd$$

quâ c bis tantùm reperitur adfecta signo +, ac multiplicata per x unius & trium dimensionum. aut hæc $x^6 - ax^5 + cfx^4 - c^3x^3 - c^4xx - ddcx + c^3d^3\infty 0$, + $b - dd - add + ddff + d^3bb$

ubi a ter invenitur adfecta ubique signo -; aut b bis signo +; ac ducta utraque in x , ubique habentem dimensiones impares: aut in quâ etiam f bis reperitur adfecta signo +, ac ducta in x , ubique pares dimensiones habentem.

XIV. REGVL A.

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, quæ in nullo alio quàm in ultimo terminò contineatur; si ejus dimensionum numerus sit minor numero dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerato, (ut in hac $x^6 - bbx^4 + b^3cxx + bcd^4, \infty 0$, in qua

$$- bbcc + 2bd^5$$

Mmm 2

d tan-

d tantum in ultimo termino continetur, habens ad summum 5, & x plures, nimirum 6 dimensiones) certum est illam æquationem per $x +$ vel $-$ quantitate quavis rationali atque cognita esse indivisibilem; Si ejus dimensionum numerus sit minor semisse numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, (ut in eodem exemplo, si loco ultimi termini $bc d^4 + 2b d^5$ ponatur $bc^3 dd + 2b^2 d$) certum est illam æquationem per $xx +$ vel $-$ quantitate quavis rationali atque cognita indivisibilem existere. Si ejus dimensionum numerus sit minor triente numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, certum est illam æquationem per $x^3 +$ vel $-$ &c. non posse dividi. atque ita porro in infinitum.

XV. REGULA.

Si in æquatione Proposita litera cognita reperitur, quæ in ultimo termino non continetur, atque ea divisibilis sit per x, xx, x^3 , &c. $+$ vel $-$ aliquâ quantitate rationali & cognita; facile erit beneficio alterius æquationis dictum divisorem invenire.

Vt in hac æquatione

$$x^5 - fx^4 + bfx^3 - 16bcdxx + \frac{1}{2}bbcfx - 8ccd b^2 \infty 0$$

$$+ 1\frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}bcf + \frac{1}{2}bbcc$$

in quâ si in ultimo termino non continetur, opus tantum est, ut omnes quantitates, in quibus *faque multas* habet dimensiones nihilo æquales ponantur, atque porro investigetur utriusque, inventæ scilicet atque Propositæ æquationis, communis divisor. Quocirca posito $-fx^4 + bfx^3 - \frac{1}{2}bcfx x + \frac{1}{2}bbcfx \infty 0$, seu $-x^3 + bxx - \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bbc \infty 0$, invenitur, secundum Methodum ante descriptam, pro earum communis divisore $xx + \frac{1}{2}bc \infty 0$.

Sic

Sic etiam si proponatur hæc æquatio

$$x^4 - ax^3 + aaxx + c^3 x - bc^3 \infty 0 \text{ in qua } a \text{ in ultimo ter-}$$

$$-b + ab - baa + c^4$$

$$+c - ac + aac$$

mino non continetur; posito $-ax^3 + abxx \infty 0$, erit $x - b + c \infty 0$.

Divisio itaque tentanda est per $x - b + c \infty 0$; quoniam nullus præter hunc communis divisor haberi potest. Eundem Divisorem obtinuissimus si quantitates omnes ubi a est duarum dimensionum posuissimus $\infty 0$. Notandum est in his 12, 13, 14 & 15 Regulis, non opus esse, ut literales Fractiones semper prius ex æquationibus auferantur: Nam si contingat, his Fractionibus sublatis, *literam*, de qua ibi agitur, nihilominus tamen in ultimo Termino tantum inveniri, quemadmodum in Regula 14 requiritur: vel illâ ablatione factâ in ultimo Termino non inveniri, quod in tribus aliis requiritur; ablatio talium Fractionum necessaria non est.

SEQUENTES 16, 17, 18, 19 ET 20 REGULÆ SE EXTENDUNT AD ÆQUATIONES, VBI NECSIGNA RADICALIA, NEC FRACTIONES LITERALES VEL NUMERALES INVENIUNTUR.

Hucusque perinde est, an Propositæ æquationis omnia membra, sive terminorum partes separatæ per signum $+$ vel $-$ junctæ eundem habeant dimensionum numerum vel secus: In his sequentibus verò 16, 17, 18, 19, & 20 Regulis considerabo, brevitatis causâ, ejusmodi tantum æquationes, quarum omnia Membra habent eundem numerum dimensionum; potest enim omnis æquatio, hanc conditionem non habens, facili in talem permutari, ut cuique notum est.

Quomodo omnia radicalia signa ex æquatione tolli possint, jam antea ostendi. Quomodo verò omnes Fractiones tolli queant, nihil difficultatis habet, & satis à D^{no} des Cartes monstratum est in Fractionibus numeralibus, quod etiam eodem modo in literalibus locum habet. Sed cum in his Regulis sequentibus divisores rationales ultimi Terminii necessariò sciri debeant, præmittam

Modum inveniendi omnes rationales Divisores ultimi Termini surdis & Fractionibus carentis.

Ultimus Terminus æquationis Propositæ aut ex *uno* aut ex *pluribus Membris* seu quantitatibus, per + & — junctis constabit. Si *unius tantum Membri* sit, notum est quâ ratione ipsius divisores inveniantur. Quod si autem ex *pluribus Membris* constiterit, sæpenumero difficile est eos omnes reperire. Hinc ad eos inveniendos, considero seorsim ultimum Terminum æquationis Propositæ, supponendo ipsum $\infty 0$, atque pro lubitu eligo aliquam ex literis, quam pro incognita quantitate hujus fictæ æquationis habeo, cujus respectu fictam æquationem illam in ordinem redigo.

Exempli gratiâ, ex ultimo Termino hujus æquationis,

$$\begin{array}{r} x^4 - 4ax^3 + 2ccxx - 4accx + c^4 \quad \infty 0 \\ + 7aa \quad - 4aac \quad - 4a^4 \\ + 2ac \quad - 6a^3 \quad + 8a^3c \\ \quad \quad \quad + 2ac^3 \\ \quad \quad \quad + 3aacc \end{array}$$

sumendo literam *c* pro incognita quantitate, invenio æquationem hanc $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 \infty 0$.

Deinde inquirō per antecedentes vel sequentes Regulas utrum hæc Ficta per aliam rationalem dividi possit; Si enim hoc fieri nequeat, manifestum est ultimum Terminum æquationis Propositæ nullos quoque divisores rationales admittere (nisi unitatem atque ipsum ultimum Terminum integrum inter divisores numerare velimus; sed hi in æquationibus literalibus, ubi omnes quantitates eundem dimensionum numerum habent, nullius usus sunt); Quod si verò dividi possit, oportet rursus eodem modo quærere divisores hujus divisoris & quotientis, atque ita evidens erit, quo pacto omnes rationales æquationes, quæ hanc Fictam

etiam æquationem dividere possunt, inveniri queant, quæ quidem æquationes tunc futuræ sunt quæsitæ divisores ultimi Termini æquationis Propositæ.

Per præcedentes autem uti & per sequentes Regulas omnes divisores hujus Fictæ æquationis, non cognitis ejus divisoribus ultimi Termini, ut plurimum facillimo negotio inveniri poterunt, imo perpaucae æquationes occurrunt, quarum divisores ultimi Termini non per sequentem 21 Regulam, & dicto modo inveniri possent. Quoniam verò aliquando tales dantur, quarum divisores nec per hanc 21 Reg. nec per aliquam præcedentium obtineri queant; ulterius videndum est, num Fictæ æquationis ultimus Terminus, *unum an plura membra* habeat. Si enim *unum tantum membrum* habuerit, quemadmodum in hoc exemplo, in quo ultimus Terminus est $-4a^4$, notum est quo pacto ejusdem divisores investigare liceat, possuntque deinde eorum ope per sequentes Regulas inveniri æquationes omnes rationales, per quas hæc Ficta divisibilis erit, atque ita habebuntur etiam omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ, qui requirebantur.

Quod si verò ultimus Terminus Fictæ æquationis *plurium membrorum* fuerit, tum rursus eundem, ut ante, supponerem $\infty 0$, ac iterum agerem, quemadmodum jam dictum est, donec inveniat æquatio, vel cujus rationales divisores per aliquam præcedentium, si-ve per 21 Regulam facillimè inveniantur; vel cujus ultimus Terminus tantum *unius membri* existit. & ad alterutrum obtinendum parum temporis requiritur; & alterutro invento, Quæsitum obtineri potest, quoniam tunc per sequentes Regulas inveniri possunt æquationes omnes, ultimam hanc Fictam dividentes; atque ita inventis omnibus divisoribus ultimi Termini proximè ante-

antecedentis Fictæ æquationis possunt denuo per easdem Regulas, ope horum divisorum ultimi Termini, inveniri æquationes omnes, quæ huic proximè antecedentem Fictam dividere queunt, sicque ulterius ascendendo obtinebuntur tandem divisores omnes, quicunque fuerint, ultimi Termini Propositæ æquationis, qui inveniendi proponebantur.

Exempli gratiâ, si proponantur inveniendi divisores omnes ultimi Termini hujus æquationis

$$\begin{array}{rcl}
 x^4 * - 14aa xx + 32aac x + a^4 & \infty 0, \\
 + 4ac & + 4acd & - 10aacc \\
 + 2cc & - 16add & - 2accd \\
 + 4dd & & + 4aadd \\
 + dc & & + 4ac^3 \\
 & & + 4a^3c \\
 & & + dcaa \\
 & & + 24acdd \\
 & & + 4ccdd \\
 & & + 4cd^3 \\
 & & + c^4 \\
 & & + dc^3
 \end{array}$$

nimirum ope Regularum sequentium, æquationes omnes rationales, per quas aliqua Proposita dividi potest, detegentium beneficio divisorum ultimi Termini: suppono ejus ultimum Terminum $\infty 0$, atque unam ex ipsius literis considero ceu incognitam quantitatem, ut puta a , obtineoque æquationem in ordinem redactam,

$$\begin{array}{rcl}
 a^4 + 4ca^3 - 10ccaa - 2ccda + 4ccdd & \infty 0. \\
 + 4dd & + 4c^3 & + 4cd^3 \\
 + dc & + 24cdd & + c^4 \\
 & & + dc^3
 \end{array}$$

Quoniam autem hujus ultimus terminus etiam plura membra habet, suppono ipsum rursus, ut ante, $\infty 0$ sumendoque c pro incognita quantitate, obtineo inde hanc æquationem

$$c^4 + dc + 4ddcc + 4d^3c \infty 0.$$

Quæ divisa per c dat $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$, quæ est æquatio in qua ultimus Terminus $4d^3$ tantum unum Membrum habet.

habet. Constat autem quo pacto divisores hujus ultimi termini inveniantur, qui, postquam cogniti erunt, inservire poterunt, ut eorundem ope per sequentes Regulas quarantur, æquationes omnes rationales, hanc ultimam Fictam $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$ dividentes, ac proinde etiam æquationes, quæ $c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \infty 0$ dividere possunt, quæ quidem est ultimus Terminus Fictæ æquationis proximè præcedentis

$$\begin{array}{rcl}
 a^4 + 4ca^3 - 10ccaa - 2ccda + 4ccdd & \infty 0. \\
 + 4dd & + 4c^3 & + 4cd^3 \\
 + dc & + 24cdd & + c^4 \\
 & & + dc^3
 \end{array}$$

Inventis verò divisoribus omnibus ultimi hujus æquationis Termini, possunt denuo per easdem Regulas inveniri omnes æquationes rationales hanc ipsam dividentes; quibus cognitis inventum est, quod quærebatur, cum æquatio hæc Ficta ultimus sit Propositæ æquationis Terminus.

Hinc liquet per solam sequentem XVII Regulam semper omnes divisores ultimi Termini inveniri posse: sed, quoniam per præcedentes uti & per reliquas sequentes Regulas sæpe primo intuitu cernitur tales divisores non dari, si non dentur, & ii qui dantur sæpe minori labore inveniuntur, poterunt & hæ Regulæ magno cum fructu adhiberi.

XVI. REGULA.

Quæ modum docet inveniendi omnes æquationes rationales, duos tantum Terminos habentes, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, sive literalis sive numeralis sit, dividi possit.

Fiat alia æquatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitatibus, aut etiam terminis Propositæ æquationis; atque juxta hanc suppositionem inveniatur valor ipsius x ; vel sumatur tantum aliquis valor pro x , ut libet. Deinde substituto hoc valore Ficto ipsius x , vel eo quem ex æquatione Ficta invenimus, ubique in locum ipsius x æquationis Propositæ: Si termini se mutuo destruerent

N n n

struere

struere reperiantur, erit Proposita æquatio divisibilis per x — hoc Fictio valore $\infty 0$; si autem hi termini se mutuo non destruant, quærantur divisores aggregati horum omnium terminorum (quod quidem aggregatum, ut ab ultimo termino æquationis distinguatur, in posterum vocabo *Terminum Fictum*); atque ab unoquoque divisore unius dimensionis auferatur valor Fictus ipsius x , at ab unoquoque divisore duarum dimensionum auferatur ejusdem valoris quadratum, & sic deinceps. Quo peracto, videndum erit num aliqua horum reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ; si enim nulla eorum cum iis consentiant, indicio est æquationem Propositam per aliam duos tantum Terminos habentem, seu per x , aut xx , &c. $+$ vel $-$ quantitate quavis cognitâ atque rationali non esse divisibilem: Si verò aliqua consentiant, oportet, facto unoquoque consentiente $+$ x earundem dimensionum, $\infty 0$, explorare per quam harum æquationum æquatio Proposita dividi possit; si enim per nullam ipsarum divisibilis sit, erit quoque Proposita per x , aut xx , &c. $+$ vel $-$ quavis quantitate cognitâ atque rationali indivisibilis. Quæ quidem omnia sequenti exemplo clariora evadent.

Vt ad investigandos divisores, si qui sint, hujus æquationis $x^3 - 21axx - bbx + 20abb \infty 0$, suppono $x^3 \infty 21axx$,

$$+ 20aa$$

vel $bbx \infty 20abb$, vel ad libitum quemlibet pro x valorem assumo, ut puta a vel b : sed assumamus $x^3 \infty 21axx$, sive $x \infty 21a$. Deinde subrogando $21a$ ubique in locum x in æquatione Proposita $x^3 - 21axx - bbx + 20abb \infty 0$ (rejiciendo brevi-

$$+ 20aa$$

tatis causâ terminos, ex quibus æquatio Ficta est conflata, cum ipsi, dum nihilo sunt æquales positi, necessario evanescant) obtineo pro terminorum omnium aggregato $- 21abb + 21$,

$$20a^3$$

$20a^3 + 20abb$, vel $-abb + 21$, $20a^3$, quod quidem aggregatum voco *Fictum Terminum*, cujus divisores hi quatuor existunt $+a$, & $-a$; $-bb + 21$, $20aa$, & $+bb - 21$, $20aa$. Porro subducto hoc Fictio valore $21a$ ab utroque priorum; & ab utroque duorum sequentium ejusdem valoris quadrato, (quoniam ipsi duarum sunt dimensionum;) relinquentur $-20a$, $-22a$; $-bb - 21aa/bb - 41$, $21aa$. Quo peracto, si videatur num aliqua horum Reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini $+20abb$ æquationis Propositæ, comparietur solummodo $-20a$ consentire. Quocirca ad $-20a$ additâ x unius dimensionis, siquidem $-20a$ unius tantum dimensionis existit, explorandum duntaxat restat num æquatio Proposita dividi possit per $x - 20a$. quod, si non contingat, erit ea per x , aut xx , $+$ vel $-$ quavis aliâ quantitate cognitâ atque rationali indivisibilis, quemadmodum quoque si nulli divisores congruentes reperti fuissent. at verò hæc æquatio dividi poterit per $x - 20a$, oriaturque pro quotiente $xx - ax - bb \infty 0$.

Hic autem quædam consideranda veniunt, quæ breviter saltem indicabo.

1. Per hanc viam omnes æquationes duorum terminorum, quibus æquatio Proposita dividi possit, eadem operâ inveniuntur.

2. In formanda nova æquatione, aut cum ipsi x affingitur aliquis valor, observandum est, cum brevitatis causâ ita fingi posse, ut ipso in locum x subrogato resultet inde tale quantitatum aggregatum seu *Fictus terminus*, cujus divisores faciles sint inventu, ac pauci numero. id quod communiter levi negotio obtineri potest.

3. Sæpenumero supervacaneum est, ut omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ quærantur; ut in superiore exemplo videre est, ubi quæ restabant Reliqua, ex divisoribus Ficti Termini & ex assumpto valore ipsius x & xx facta, hæc erant quatuor $-20a$, $-22a$, $-bb - 21aa$, $+bb - 41$, $21aa$, quorum duo posteriora non possunt congruere cum divisoribus ultimi Termini $20abb$ æquationis Propositæ, cum duo Membra habeant, atque hic terminus tantum unum. deinde apparet etiam, quod $22a$ divisor esse non possit ipsius $20abb$, quoniam numerus 22 major est numero 20 ; atque ea propter considerare tantum oportet

tet — 20 a , ita ut solummodo inquirendum sit num ultimus Terminus 20 $a b b$ divisibilis sit per — 20 a . Possumus quoque eodem modo, quando divisores ultimi Termini æquationis Propositæ cogniti sunt, invenire divisores omnes *Ficti Termini*, qui nobis inservire queunt, reliquis qui inutiles sunt prætermisissis. Quin imò in multis casibus, præsertim cum æquatio indivisibilis est, parcere possumus labori, qui in quærendis divisoribus tam ultimi Termini æquationis Propositæ quàm *Ficti Termini* esset impendendus, si modò ipsos inter se comparaverimus, quod modicâ experientiâ longè clariùs, quàm multis verbis patescet.

4. Si fortè contingat ut divisores Congruentes multi adhuc numero existant, ita ut etiamnum nimis laboriosum foret omnibus istis divisoribus divisionem æquationis Propositæ tentare, poterimus aliam æquationem fingendo aut ipsi x alium valorem assignando rursus operari, & ut ante, *Reliqua* (quæ singulis divisoribus huius ultimi *Ficti termini*, — ultimò ipsius x , aut $x x$, &c. fictis valoribus sunt æqualia, quemadmodum in Regula fuit dictum,) cum jam inventis Congruentibus comparare, & iterum congruentes, si qui sint, eligere, si verò nulli reperiantur, argumentum est æquationem per x , aut $x x$, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali esse indivisibilem. Et si adhuc nimis multi fuerint, eodem modo denuo quidam rescindi possunt. Sed hoc rarò accidit in æquationibus literalibus.

5. Si æquatio Proposita Fractionibus carens sit divisibilis per aliam æquationem rationalem, duos tantum Terminos habentem, non opus est, ad inveniendum hunc divisorem, omnia signa radicalia ex Proposita æquatione auferre, sed ea solummodo, quæ in ultimo Termino reperiuntur.

Potest etiam hæc Regula XVI dividi in duas partes, hæc modo:

Inquire primùm num Proposita æquatio sit divisibilis per aliam in qua unus pluresve termini desunt, secundum XI Regulam; Si non sit, tantum secundum jam descriptam XVI Regulam inquirendum est, num sit divisibilis per x + vel — aliquo divisore ultimi Termini,

DE REDUCTIONE ÆQUATIONVM. 469
mini, omissis omnibus reliquis divisoribus duarum pluriusve dimensionum.

XVII. REGULA.

Quæ docet modum inveniendi omnes æquationes rationales, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, sive literalis, sive numeralis sit, dividi possit.

Æquatio talis erit divisibilis per aliam rationalem fractionem carentem, in qua vel unus pluresve termini deficiunt, vel nullus. Primò itaque inquirendum est per XI Regulam, num per rationalem fractionem carentem, in qua unus pluresve termini deficiant, dividi possit; si comperiatur id fieri non posse, erit ea divisibilis per æquationem nullo termino carentem, & quidem unius dimensionis, si Proposita sit 3 dimensionum; vel per aliquam unius vel duarum dimensionum, si Proposita sit 4 vel 5 dimensionum; vel per aliquam 1, 2, 3, si Proposita sit 6 vel 7 dimensionum; vel per aliquam 1, 2, 3 vel 4 dimensionum, si Proposita habeat 8 vel 9 dimensiones; & sic in infinitum.

Modum verò inquirendi an ea divisibilis sit per æquationem simplicem sive unius dimensionis, antea ostendi: unde solummodo restat, quo modo reliqui divisores, seu æquationes duarum, trium, &c. dimensionum inveniri queant.

Et sciendum, me quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam suis signis + & — vocare p ; 3^{ti} termini q ; 4^{ti} r ; 5^{ti} s ; 6^{ti} t ; 7^{mi} v : at divisorem ultimi termini, similiter signis suis adfectum, h .

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 4^{or} DIMENSIONVM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per æquationem
N n n 3 ratio-

rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r-hp}{h}x + b \infty 0.$$

Excepto tantùm, cùm $\frac{s}{h}$ est ∞h , ac simul $r \infty hp$, id est, $h \infty 8\sqrt{s}$, & $h \infty \frac{r}{p}$ tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \frac{1}{2}p \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2b - q} \text{ in } x, + b \infty 0.$$

1. Et cum æquatio Proposita sit liberata ab omnibus fractis & surdis quantitatibus, atque dividi queat

per æquationem rationalem: sequitur, $\frac{r-hp}{h}$ debere integram esse quantitatem rationalem. Patet etiam f nunquam esse posse ∞hb , nisi f quadratum fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficiet etiam illos solùm divisores ultimi Termini qui ipsius $\sqrt{Q^{\text{am}}}$ non excedunt considerare, nimirum, si æquatio sit numeralis; sed si sit literalis, opus tantùm erit divisoribus uti duarum dimensionum, atque ex his semper alterutro tantùm duorum talium, quorum productum constituat ultimum Terminum.

Exempli gratiâ, si proponatur hæc æquatio numeralis $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \infty 0$, quæ dividi potest per aliquam rationalem; & si compertum sit ipsam indivisibilem esse per x , + vel - aliquo divisore ultimi Termini, ut & per æquationem 2 dimensionum, in qua aliquis terminus deficit; dividi

poterit per hanc $xx + \frac{r-hp}{h}x + b \infty 0$.

Quia igitur hîc p est $\infty -3$
 q , quâ non indigemus, prætereo,
 $r \infty -30$
 $f \infty -200$,

hinc

$$\text{hinc erit } xx + \frac{r-hp}{h}x + b \infty xx + \frac{-30+3b}{h}x + b \infty 0.$$

Sunt autem Divisores ultimi Termini radicem Quadratam non excedentes; seu valores ipsius b , $\infty +1$ vel -1

$$\begin{array}{ll} +2 & -2 \\ +4 & -4 \\ +5 & -5 \\ +8 & -8 \\ +10 & -10 \end{array}$$

Vnde sumendo $b \infty +1$, erit $\frac{-30+3b}{h}$ fractio, similiterque

si sumatur $b \infty -1$; $\infty +2$; $\infty -2$; $\infty +4$; $\infty -4$, & $\infty +5$. At si sumatur $b \infty -5$, obtinebitur -1 , ac proinde tentanda erit divisio per $xx - 1x - 5 \infty 0$. Quoniam autem per hanc fieri nequit, transeo ad alium valorem ipsius b , puta $+8$. Sed cum sic rursus prædicta quantitas fractio evaderet; ut & quando pro b assumitur -8 , transeo ad $b \infty +10$. Quia verò r fit ∞hp , ac idcirco $xx + b \infty 0$, non poterit similiter hic valor nobis inservire; ita ut nobis solùm restet $b \infty -10$. Vnde obtinetur æquatio $xx - 2x - 10 \infty 0$, per quam Proposita dividi potest.

Eodem modo, si proponatur æquatio literalis

$$\begin{array}{l} +4abb \\ x^4 - bb - a^3 - 4b^4 \\ +2abxx - 4b^3x + 2aabb \infty 0, \\ +aab \end{array}$$

Quoniam p est $\infty 0$

$$\begin{array}{l} r \infty 4abb - a^3 - 4b^3 + aab \\ f \infty 2aabb - 4b^4, \\ \text{erit } xx + \frac{r-hp}{h}x + b \infty xx + \frac{4abb - a^3 - 4b^3 + aab}{2aabb - 4b^4 - h}x + b \infty 0. \end{array}$$

Divisores ultimi Termini, duas habentes dimensiones, seu valores ipsius b , sunt $+bb$, & $-4bb + 2aa$,

$$\begin{array}{ll} -bb, & +4bb - 2aa, \\ +2bb, & +2bb + aa, \\ -2bb, & -2bb - aa. \end{array}$$

Quorum tantùm prioribus 4 indigemus, nimirum, $+bb$, $-bb$,
 $+2bb$,

+ 2 bb, — 2 bb: quoniam reliqui per hos multiplicati ultimum Terminum producant.

Sumendo autem $h \infty + bb$, 2^{us} terminus erit fractio. Hinc transeundo ad $h \infty + 2bb$, obtinebitur æquatio $xx + \frac{b}{a}x + 2bb \infty 0$. Per quam Proposita dividi potest, invenitur enim pro quotiente hæc $xx - \frac{a}{b}x - \frac{2bb}{aa} \infty 0$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 5^{que} DIMENSIONVM.

Si æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; poterit ipsa dividi per æquationem hanc

$$xx - \frac{t}{2h} + \frac{1}{2}p \sqrt[3]{-\frac{t}{2h} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{3}} - q + h + \frac{s}{h} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

Et cum æquatio hæc debeat esse rationalis quæ nullas admittat fractiones; sequitur 2^{dum} terminum debere esse integram quantitatem rationalem.

Exemplum.

Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{rcl} x^5 & + & 8aabxx + 2ab^3x - b^5 \infty 0. \\ & - & 63a^3 \quad + 16a^3b \quad + a^4b \\ & + & 8abb \quad + 15aabb \quad - ab^4 \\ & - & b^3 \quad - b^4 \quad + a^3bb \\ & & - 4a^4 \end{array}$$

Postquam constat, æquationem hanc dividi non posse per ullam aliam, 2 aut 3 dimensiones habentem, in qua unus aut plures termini deficiunt, nec per $x \sqrt[3]{}$ aliquo divisore ultimi termini; erit illa divisibilis per superiorem

$$xx - \frac{t}{2h} + \frac{1}{2}p \sqrt[3]{-\frac{t}{2h} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{3}} - q + h + \frac{s}{h} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

Quan-

Quantitates cognitæ sunt $p \infty 0$

$$q \infty 0$$

r nullius hîc est usus.

$$f \infty 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$$

$$t \infty -b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb,$$

& divisores ultimi Termini, duas dimensiones habentes, seu valores ipsius h sunt $\infty ab + bb$, vel $-ab - bb$, vel $bb - aa$, vel $-bb + aa$

$$\text{vel } ab - bb, \text{ vel } -ab + bb$$

$$\text{vel } aa + ab + bb, \text{ vel } -aa - ab - bb:$$

hinc si h sumatur $\infty ab + bb$, obtinebitur

$$xx - \frac{t}{2h} + \frac{1}{2}p \sqrt[3]{-\frac{t}{2h} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{3}} - q + h + \frac{s}{h} \text{ in } x, + h$$

æquale $xx - 4ax + ab \infty 0$. Per quam si tentetur utrum Proposita dividi queat, invenietur divisionem fieri posse, atque pro

quotiente oriri $x^3 + 4axx + 16aax - b^3 \infty 0$.

$$- ab + a^3$$

$$- bb$$

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 6 DIMENSIONVM.

Si æquatio Proposita 6 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; erit ipsa divisibilis vel per æquationem 2 dimensionum, vel per aliquam 3 dimensionum. Si divisibilis sit per æquationem rationalem 2 dimensionum, poterit dividi per æquationem $xx + yx + h \infty 0$,

$$\text{existente } y \infty \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{2v}{h}} \sqrt[3]{\frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{2v}{h}} \square^{\frac{1}{3}} + f - \frac{v}{h} + hb - qb.}$$

Si divisibilis sit per æquationem rationalem 3 dimensionum, erit divisibilis

Ooo

per

atque similiter in Regula pro 4^{or} dimensionibus, si $\frac{f}{b} - b$ reperiatur $\infty 0$, sed non perinde $r - bp \infty 0$: quòd tum inquam valor assumptus ipsius b , quòd hoc contingit, nobis inservire non possit.

Exempla 1^{mi} Casus.

Proponatur inquirendum, an hæc æquatio

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx^* + 8 \infty 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 2 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum igitur hîc p sit $\infty -3$

$$q \infty 7$$

$$r \infty -5$$

$$s \infty 4$$

$$t \infty 0$$

$$v \infty 8$$

$$\text{erit } y \infty \frac{ph - \frac{t}{b}}{2h - \frac{2v}{b}} \& \sqrt{\frac{ph - \frac{t}{b}}{2h - \frac{2v}{b}}} \square^{\text{te}} \frac{+s - \frac{v}{b} + hb - qb}{h - \frac{v}{b}}$$

æqualis

$$\frac{-3b}{2h - \frac{16}{b}} \& \sqrt{\frac{-3b}{2h - \frac{16}{b}}} \square^{\text{te}} \frac{4 - \frac{8}{b} + hb - 7b}{h - \frac{8}{b}}$$

Divisores autem ultimi Termini, seu valores ipsius b sunt

$$+1, \text{ vel } -1$$

$$+2, \quad -2$$

$$+4, \quad -4$$

$$+8, \quad -8.$$

Hinc si primò sumatur $b \infty +1$, poterit radix ex

$$\frac{-3b}{2h - \frac{16}{b}} \square^{\text{te}} \frac{4 - \frac{8}{b} + hb - 7b}{h - \frac{8}{b}} \text{ extrahi, inveniturque}$$

$y \infty -1$, sed æquatio proposita non poterit dividi per xx
 $-1x$

$-1x + 1 \infty 0$, ac proinde transeo ad $b \infty +2$, sed cum sic b fiat $\infty \sqrt{C.v}$, deberet, juxta determinationes superiores, y esse $\infty \frac{-f + q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{C.v} - \sqrt{C.v}}$, hoc est, $\infty \frac{+10}{6}$. Id

quod cum fractio existat, transeo ad $b \infty +4$, atque inde obtineo $y \infty \frac{-12}{+7} \& \frac{2}{7}$, hoc est, $y \infty -2$, aut $\infty -\frac{10}{7}$. Quorum quidem non nisi $y \infty -2$ retinendum est, adeoque divisio tentanda per $xx + yx + b \infty xx - 2x + 4 \infty 0$. Hæc autem procedere comperitur, oritur namque pro quotiente $x^4 - 1x^3 + 1xx + 1x + 2 \infty 0$.

Eodem modo, si examinare velimus hanc æquationem $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 2xx + 4x + 8 \infty 0$: quoniam p est $\infty 1$, $q \infty 1$, $r \infty -2$, $s \infty 2$, $t \infty 4$, & $v \infty 8$, invenitur

$$y \infty \frac{1b - \frac{4}{b}}{2h - \frac{16}{b}} \& \sqrt{\frac{1b - \frac{4}{b}}{2h - \frac{16}{b}}} \square^{\text{te}} \frac{+2 - \frac{8}{b} + hb - b}{h - \frac{8}{b}}$$

Sumendo autem $b \infty +1$, non poterit $\sqrt{Q}$. extrahi; quocirca transeo ad $b \infty +2$, invenioque b fore $\infty \sqrt{C.v}$, ac $b \infty \sqrt{\frac{t}{p}}$, ut & $b \infty \frac{f}{q}$. Vnde fit ut juxta dictam determinationem valorem quæram ipsius y per hanc æquationem.

$$y^3 - pyy + \frac{f}{\sqrt{C.v}}y + 2p\sqrt{C.v} \infty 0, \\ -3\sqrt{C.v} - r$$

hoc est, $y^3 - 1yy - 5y + 6 \infty 0$.

E qua æquatione pro y nullus valor rationalis invenitur præter 2, ac proinde divisio tentanda relinquitur per $xx + yx + b \infty xx + 2x + 2 \infty 0$. Comperitur autem fieri posse, oritur enim pro quotiente $x^4 - 1x^3 + 1xx - 2x + 4 \infty 0$.

Exempla 2^{di} Casus.

Esto examinandum, an hæc æquatio

$$x^6 + 1x^4 + 3x^3 + 6xx + 3x - 4 \infty 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 3 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Ooo 3

Cum

Cum hinc p sit ∞ 0

$$q \infty 1$$

$$r \infty 3$$

$$s \infty 6$$

$$t \infty 3$$

$$v \infty -4$$

$$\text{erit } y^3 - \frac{pv}{h} - 2ph + pph - 2t - \frac{v}{h} + b \text{ in } r, -qh + t \text{ in } p$$

$$\frac{v}{h} + b \quad y \quad \frac{v}{h} + b \quad y \quad \frac{v}{h} + b$$

$$+ qy \quad \frac{v}{h} - b$$

æqualis

$$y^3 * \frac{+1y}{-6} \frac{4}{h} + b \text{ in } 3$$

$$-\frac{4}{h} + b \quad -\frac{4}{h} + b$$

$$-\frac{4}{h} - b$$

Divisores ultimi Termini, seu valores ipsius b , qui soli sunt considerandi, sunt $+1$, vel -1 , vel $+2$. Vnde sumendo $b \infty +1$, obtinebitur $y^3 * +3y^* - 10 \infty 0$. Sed cum y hujus æquationis nullum valorem rationalem admittat, transeo ad alium, nempe $+2$.

Cum autem sic $\frac{v}{h} + b$ fiat $\infty 0$, atque etiam p sit $\infty 0$, erit, juxta dictam determinationem, $y \infty \frac{r}{t}$, hoc est, $y \infty 2$. At quoniam

pro $z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + b - r}{2y - p}$ invenitur fractio, transeo

demum ad $b \infty -1$, atque hinc obtineo $y^3 * -1y^* \infty 0$, hoc est, $y \infty +1$, & $y \infty -1$. E quibus tandem invenendus superest valor ipsius z . Quocirca si primum sumatur $y \infty +1$, invenietur inde $z \infty 1$, & $x^3 + yxx + zx + b \infty x^3 + 1xx + 1x - 1 \infty 0$. Per quam æquationem Proposita dividi potest, oritur enim pro quotiente $x^3 - 1xx + 1x + 4 \infty 0$. Quod si autem per eam dividi non potuisset, ut nec per aliam, ubi y est $\infty -1$, æquatio Proposita dicto modo non divisibilis fuisset, quandoquidem sic omnes ipsius b valores examini subjecissemus.

Simi-

Similiter examinaturi hanc æquationem

$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 28 \infty 0$,
in qua p est $\infty -6$, $q \infty 25$, $r \infty -36$, $s \infty 3$, $t \infty 16$, $v \infty -28$,
& $b \infty +1$ vel -1 , aut $+2$ vel -2 , aut $+4$ vel -4 , (negle-
ctis scilicet reliquis divisoribus, radicem quadratam ultimi termi-
ni excedentibus:) inveniemus, faciendo, ut ante, periculum cum
unoquoque valore ipsius b , si pro b assumitur -2 , æquationem
hanc $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{3}y + 31 \infty 0$, in qua y admittit tantum-
modo unum valorem rationalem, qui integer numerus est nem-
pe -3 . Per hunc autem quero valorem ipsius z . Sed cum hinc
 $2y$ sit ∞p , & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + b - r \infty 0$, non possum eun-

dem per hanc æquationem $z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + b - r}{2y - p}$ in-
venire, quo circa illum quero per hanc $z \infty \frac{t + byy - qb}{\frac{v}{h} - b}$, atque

invenio $z \infty 3$, &

$x^3 + yxx + zx + b \infty x^3 - 3xx + 3x - 2 \infty 0$.
Per quam igitur examinando an Proposita dividi queat, compe-
rietur divisionem fieri posse, orieturque pro quotiente $x^3 - 3xx$
 $+ 13x + 14 \infty 0$. Si verò in hoc ultimo exemplo, ubi $2y$ est ∞p ,
non fuisset $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + b - r \infty 0$, oportuisset transire
ad alium valorem ipsius b .

Vbi notandum per has Regulas pro æquationibus 4, 5, & 6 di-
mensionum non solum sciri posse, an Proposita aliqua æquatio per
aliam rationalem, in qua omnes Termini extant, divisibilis sit;
sed etiam utrum ipsa divisibilis sit per rationalem, in qua aliquis
Terminus deficiat. Verum cum idem facilius cognosci queat per
XI Regulam, hanc iis duntaxat æquationibus, in quibus nulli
termini deficiunt, applicare volui.

2. Quoniam autem usus harum Regularum vel eo major est,
quo pauciores divisores ultimus Terminus Propositæ æquationis
admittit, haud inconsultum fuerit hinc adjungere modum, quo
plerumque levi negotio Propositam æquationem in aliam trans-
mutare licet, in qua ultimus Terminus pauciores habeat dimen-
siones, quæque indivisibilis sit si Proposita sit indivisibilis, at di-
visi-

visibilis, si Proposita divisibilis fuerit, & ex cujus æquationibus ipsam dividendibus facile quoque inveniri possint æquationes, Propositam dividentes.

Assumpto in hunc finem valore aliquo pro x , ut lubet, eoque subrogato ubique in locum x , quærantur divisores omnes aggregati omnium terminorum; &, si divisores hi non pauciores numero fuerint divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ, sumatur rursus alius valor pro x , exploreturque num hinc aggregatum pauciorum divisorum inveniat; quod si non fiat, denud pro x alius valor assumendus est, idque tam diu continuetur, donec inde aggregatum resultet, quod pauciores divisores habeat. Quo peracto, ponatur $x \infty z$, + assumpto ipsius x valore, huiusmodi aggregatum pauciorum divisorum suggerente, atque hinc valor $z + \&c.$ ubique in locum x substituatur, obtinebiturque alia æquatio, in qua z erit incognita quantitas, & ultimus Terminus dictum aggregatum inventum pauciorum divisorum; ita ut hæc æquatio talis futura sit, qualis requiritur, nimirum indivisibilis si Proposita indivisibilis sit, at divisibilis si Proposita divisibilis fuerit.

Exempli gratiâ, esto inveniendâ ejusmodi æquatio loco hujus

$$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty 0.$$

Sumatur $x \infty 1$, fietque $x^5 \infty + 1$

$$\begin{array}{r} + 2x^4 \infty + 2 \\ - 58x^3 \infty \dots - 58 \\ - 49xx \infty \dots - 49 \\ - 50x \infty \dots - 50 \\ - 600 \infty \dots - 600, \end{array}$$

& $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty + 3 - 757$, hoc est, $\infty - 754$. cujus quidem numeri divisores multo pauciores existunt quàm ipsius -600 .

Hinc ponendo $x \infty z + 1$,

erit

$$\begin{array}{r} \text{erit} \quad x^5 \infty z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10zz + 5z + 1 \\ + 2x^4 \infty + 2z^4 + 8z^3 + 12zz + 8z + 2 \\ - 58x^3 \infty - 58z^3 - 174zz - 174z - 58 \\ - 49xx \infty - 49zz - 98z - 49 \\ - 50x \infty - 50z - 50 \\ - 600 \infty - 600, \end{array}$$

$$\& z^5 + 7z^4 - 40z^3 - 201zz - 309z - 754 \infty 0.$$

Quæ æquatio per præcedentes Regulas examinata divisibilis reperitur per $zz + 3z - 58 \infty 0$, ac proinde cum x sit $\infty z + 1$, erit $z \infty x - 1$. Vnde si in locum z subrogetur $x - 1$, obtinebitur $zz + 3z - 58 \infty xx + 1x - 60 \infty 0$. per quam itaque Proposita quoque æquatio divisibilis erit.

Quod si autem post primam positionem ipsius $x \infty + 1$ obtinuissimus aggregatum, quod nobis non inservisset, id est, quod non pauciores aut adhuc nimis multos divisores admisisset, ponere potuissimus $x \infty - 1$; quod si verò & hinc quæsitum aggregatum nondum invenissemus, ponere possemus $x \infty + 2$; deinde $x \infty - 2$, atque ita porro; vel etiam possemus nonnullos terminos supponere $\infty 0$, si aliqui fuerint è quibus idonea quantitas pro x inveniri posset. Exempli gratiâ, possemus in æquatione allata duos priores terminos $x^5 + 2x^4$ supponere $\infty 0$, atque sic invenire $x \infty - 2$, quærendo tantum ulterius aggregatum reliquorum Terminorum $- 58x^3 - 49xx - 50x - 600$. Porro, quod hinc de æquationibus numeralibus diximus, idem quoque locum obtinet in literalibus. Si enim, verbi gratiâ, habeatur æquatio literalis hæc $x^5 * - 6abx^3 + 30aabbxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0$,
+ $10a^4$

ponere possumus $x \infty + a$, vel $x \infty - a$, vel $x \infty + b$, vel $x \infty - b$, &c. vel etiam supponere terminos aliquos $\infty 0$, ut $- 6abx^3 \infty + 30aabbxx$, prout visum fuerit.

3. Verum enimvero magnum hinc commodum in literalibus æquationibus elucet: Nam *non tantum, cum hoc aggregatum nullos divisores præter unitatem ac se ipsum admittit* (quos quidem divisores in æquationibus literalibus, ubi omnia cujusque termini membra eundem dimensionum numerum habent, quemadmodum in his de quibus agimus, prætermittere soleo, cum nulla divisio per eos fieri possit), *manifestum est, æquationem*

Ppp

nem

nem Propositam per aliam rationalem, in qua sive omnes sive non omnes termini extant, & sive unius sive plurium est dimensionum, penitus esse indivisibilem; Sed præterea etiam liquet, æquationem Propositam nunquam fore divisibilem per æquationem rationalem, cujus dimensionum numerus non congruit cum dimensionum numero alicujus ex divisoribus ultimi Termini vel dicti aggregati. Quocirca si æquatione existente 6 dimensionum divisores non nisi 1 & 5 dimensionum fuerint, erit ea indivisibilis per æquationem 2, 3, & 4 dimensionum; & si divisores tantum 2 & 4 dimensionum fuerint, erit ipsa indivisibilis per æquationem 1, 3, & 5 dimensionum, atque ita de omnibus aliis.

Ita ut per hanc considerationem non tantum multi casus refecari queant, quando æquatio per aliam rationalem divisibilis est; sed etiam si inquirere velimus, num Proposita aliqua æquatio rationalis per aliam rationalem divisibilis sit, poterit sæpissimè parvo admodum labore indivisibilitas, si ea sit indivisibilis, cognosci.

Si enim, exempli causâ, proponatur æquatio

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0,$$

$$\begin{array}{r} \text{ponaturque } x \infty a, \text{ obtinebitur } x^5 \infty + a^5 \\ - 6abx^3 \infty \dots - 6a^4b \\ + 30aabxx \infty + 30a^4b \\ + 24a^3bx \infty \dots - 24a^4b \\ + 10a^4x \infty + 10a^5 \\ + 120ab^4 \infty + 120ab^4 \end{array}$$

$$\text{\& fit aggregatum } + 11a^5 + 120ab^4.$$

Cujus divisores (omissis unitate ac ipso aggregato) tantum sunt $+a, -a, 11a^4 + 120b^4$, & $-11a^4 - 120b^4$, unius scilicet & 4^{or} dimensionum: ita ut Proposita æquatio, si per rationalem unius dimensionis divisibilis non fuerit, penitus per rationalem futura sit indivisibilis. Quoniam autem hîc x est $\infty z + a$, addi debet a divisoribus $+a$, & $-a$, ad habendos valores ipsius x , idcirco tantummodo $x - 2a \infty 0$ pro divisore assumi posset. Sed per

per hunc æquatio Proposita non est divisibilis, quare illa etiam per nullam æquationem rationalem dividi poterit. Quod si juxta unam positionem non ita accidisset, facile fuerit aliam instituere, ponendo $x \infty b$, vel $\infty - a$, vel $\infty - b$, &c. Et rarò continget, quin per hanc transmutationem æquationis Propositæ in aliam aliquod commodum consequuturi atque operæ plurimum sublevaturi simus.

XVIII. REGVLA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem sive literalem sive numeralem, & quæ ex multiplicatione duarum aliarum, quarum ultimi Termini sunt quantitates rationales, fractioneque carentes, produci possunt.

Hæc Regula parum à præcedenti differt, nisi quòd se latius extendat, & per hanc quoque Reductiones ejusmodi æquationum semper inveniri possint, quæ ex duabus aliis, sive rationales, sive irrationales sint, produci possunt, hoc tantum excepto, quòd ultimi earum termini sint quantitates rationales: cum præcedens Regula se solum extendat ad æquationes, quæ non nisi ex rationalibus produci possunt: ideoque tantum opus est, ut solummodo iisdem Regulis utamur, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd necesse sit, ut illæ æquationes, ex quibus Proposita æquatio produci potest, sint rationales, quod hîc non requiritur. Exempli loco sit prima

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 4^{or} DIMENSIONVM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per aliam, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, & cujus ultimus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r-bp}{b}x + b \infty 0.$$

Excepto tantum, cum $\frac{s}{h}$ est $\propto h$, ac simul $r \propto hp$, id est,
 $h \propto \sqrt[3]{s}$, & $h \propto \frac{r}{p}$, tunc enim divisibilis erit per

$xx + \frac{1}{2}p \sqrt[3]{\frac{1}{2}pp + 2h - q}$, in $x, + h \propto 0$.
 ubi patet $\int$ nunquam esse posse $\propto hh$, nisi $\int$ quadratum
 fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficit etiam illos solum divisores ultimi termini,
 qui ipsius radicem quadratam non excedunt, conside-
 rare, &c.

Exempli gratia, examinaturus hanc æquationem

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0:$$

quoniam $p \propto -2a$, $q \propto 2aa - cc$, $r \propto -2a^3$, $\int \propto a^4$, hinc erit

$$xx + \frac{s}{h} - bx + h \propto xx \frac{a^4}{h} - b x + h \propto 0.$$

Sunt autem divisores ultimi Termini, seu valores ipsius h , $+aa$ &
 $-aa$. Vnde sumendo $h \propto aa$, obtinebitur $\frac{a^4}{h} - b \propto 0$, ac etiam

$-2a^3 + 2ah \propto 0$ (hoc est, $\frac{s}{h} \propto h$, & simul $r \propto hp$.) ac proinde
 tentanda erit divisio per $xx + \frac{1}{2}px \sqrt[3]{\frac{1}{2}pp + 2h - q}$, $x, + h$
 $\propto 0$, hoc est, per $xx - ax + \sqrt{aa + cc}$, $x, + aa \propto 0$, vel per
 $xx - ax - \sqrt{aa + cc}$, $x, + aa \propto 0$: Quæ divisio per utram-
 que succedit.

Ita etiam se res habet in

REGULA PRO ÆQVATIONIBVS 5^{que} DIMEN- SIONVM.

Si enim æquatio Proposita 5 dimensionum divisibi-
 lis sit per aliam plures quàm unam dimensionem ha-
 bentem, in qua nullus terminus deficiat, cuiusque ul-
 timus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx - \frac{1}{2h} + \frac{1}{2}p \sqrt[3]{-\frac{1}{2h} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{2}} - q + h + \frac{s}{h}} \text{ in } x, + h \propto 0.$$

Et

Et sic porro de cæteris Regulis, tantum, uti dictum est, omni-
 bus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo,
 quod necesse sit, ut illæ æquationes ex quibus Proposita æquatio
 produci potest, illic sint rationales, quod solum hinc non requi-
 ritur.

Animadvertendum quoque est, hanc Regulam se non solum
 extendere ad æquationes, in quibus nec signa radicalia, nec Fra-
 ctiones inveniuntur, (quemadmodum præcedens illis tantum
 quadrat,) sed quoque ad illas, in quibus & radicalia signa & Fra-
 ctiones reperiuntur, hoc tantum excepto, quod non sint in ulti-
 mo Terminò, ut antea dictum.

Denique notandum est, quod idem etiam sequenti modo inve-
 niri possit.

REGULA PRO ÆQVATIONIBVS 5 DIMEN- SIONVM.

Quare communem divisorem duarum æquationum,
 $yy + \frac{t}{hb}y + q \propto 0$, & $yy - \frac{f}{t}y - hb p - t + rh$
 $-p - b + \frac{b^3}{t} \frac{t}{b} \propto 0$,
 $-\frac{s}{h}$

& per eum, valorem ipsius y ; eritque Proposita æquatio
 divisibilis per $xx + yx + b \propto 0$.

REGULA PRO ÆQVATIONIBVS 6 DIMEN- SIONVM.

Si Proposita æquatio divisibilis est per

$$xx + yx + b \propto 0,$$

quærat communis divisor duarum æquationum,

$$byy - \frac{v}{hb}yy - phy - f \propto 0, \text{ \& } y^3 - p yy + qy - r \propto 0,$$

$$+ \frac{t}{h} + \frac{v}{h} - 2b + ph$$

$$- hb - \frac{v}{hb} + \frac{t}{h}$$

$$+ qb$$

& per eum, valor ipsius y .

Ppp 3

Si

Si Proposita æquatio est divisibilis per $x^3 + yxx + zx + b \infty 0$, possunt per eandem methodum, quâ priores æquationes inventæ sunt, etiam inveniri duæ aliæ, altera trium, altera 4^{or} dimensionum, quarum communi divisore invento, per eum valor incognitæ quantitatis y inveniri potest; valor verò ipsius z quærat eodem modo, quo antea. Eadem est ratio in altioribus æquationibus.

Sed si nullus inveniat communis divisor, assumptum valorem ipsius b relinquo, & alium assumo. Et si omnes termini alterius æquationis se invicem tollant, per alteram inveniendus est valor ipsius y .

XIX. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem Fractione 2^{da} termino carentem, quæ dividi possit per aliam cuius 2^{da} terminus sit rationalis, &c.

Primum inquiri per XI Regulam, an Proposita æquatio divisibilis sit per aliam in qua non omnes termini extant; quod si fieri nequit, erit divisibilis per aliam in qua omnes termini extant, quam sequenti modo invenio. 1^{mo}. Experiatur num dividi possit per $x +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini; si neque hoc succedat, facio æquationem ejusdem formæ, quam multiplicatione deduco ex tot aliis paribus, quot paria ita sumi queunt, ut productum totidem habeat dimensiones quot Proposita æquatio, non annumerando æquationem unius tantum dimensionis. Exempli gratiâ, si æquatio Proposita habeat 8 dimensiones, considero duas æquationes, habentes 2 & 6, 3 & 5, 4 & 4 dimensiones; aut, si 9 dimensiones habeat, duas, quæ 2 & 7, 3 & 6, 4 & 5 dimensionum fuerint, ex quarum multi-

plicatione Proposita posset produci. 3^{tiò}. Post hæc transmuto Propositam æquationem in aliam, cujus incognita quantitas designet quantitatem 2^{di} Termini, unius harum duarum æquationum, quæ, (si inæqualium dimensionum fuerint,) pauciores dimensiones habeat, 4^{to}. Postremò inquiri num inventa æquatio divisibilis sit per incognitam quantitatem $+$ vel $-$ aliquo divisore ultimi sui Termini. &c.

Sumamus, verbi gratiâ, hanc æquationem 6 dimensionum,

$x^6 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0$,
in qua q designet quantitatem cognitam tertii termini suis signis $+$ & $-$ adfectam; r quarti; s quinti; t sexti; & v ipsum ultimum terminum: Et quam suppono indivisibilem per aliam æquationem, in qua unus aut plures Termini deficiunt, ut & per x , $+$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini.

Primò itaque inquiri utrum ipsa divisibilis sit per æquationem 2 dimensionum, in qua omnes termini extant, hoc pacto:

$$\begin{array}{r} x^4 - yx^3 + zxx + kx + l \infty 0 \\ xx + yx + w \infty 0 \\ \hline x^6 - yx^5 + zx^4 + kx^3 + lxx \\ + y \quad - yy \quad + yz \quad + yk \quad + ylx \\ + w \quad - wy \quad + wz \quad + wk \quad + wl \\ \hline x^6 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0. \end{array}$$

Vnde hæc 5 æquationes resultant

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{ma}}. z - yy + w \infty q \\ 2^{\text{da}}. k + yz - wy \infty r \\ 3^{\text{tia}}. l + yk + wz \infty s \\ 4^{\text{ta}}. yl + wk \infty t \\ 5^{\text{ta}}. wl \infty v. \end{array}$$

Per 1^{am} fit $z \infty q + yy - w$, qui valor si in locum ipsius z in reliquis æquationibus subrogetur, habebitur

$$\begin{array}{ll} \text{pro } 2^{\text{da}}. k + qy + y^3 - 2wy \infty r \\ 3^{\text{tia}}. l + yk + qw + yyw - ww \infty s \\ 4^{\text{ta}}. yl + wk \infty t \\ 5^{\text{ta}}. wl \infty v. \end{array}$$

Per

Per 2^{am} fit $k \propto r - qy - y^3 + 2wy$, qui valor in locum ipsius k in reliquis æquationibus substitutus dat

pro 3^{ia}. $l + ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \propto f$

4^{ta}. $yl + rw - qwy - y^3w + 2wwy \propto t$

5^{ta}. $wl \propto v$.

Per 3^{tiam} fit $l \propto f - ry + qyy + y^4 - 3wyy - qw + ww$, qui valor in reliquis æquationibus substitutus dat

pro 4^{ta}. $fy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \propto t$

5^{ta}. $fw - ryw + qyyw + y^4w - 3wwyy - qw + ww^3 \propto v$.

Per 4^{tam} æquationem invento valore ipsius ww (aut ipsius $3ww$), substituo ipsum in locum ww (aut $3ww$) in 5^{ta} æquatione, obtineoque 6^{tam} æquationem, in qua w tantum 1 dimensionem habet, nimirum:

$$w \propto \frac{y^5 + 6qy^4 - 4ry^3 + 5fy^2 + qqy^2 - 5ty^3 - rryy + qfy - 9vyy - qty + fry - tr}{14y^6 + 8qy^4 + 5ry^3 + 2qqyy - 6fyy + qry - 3ty - rr}.$$

Qui valor si jam in 4^{ta} æquatione in locum w subrogetur, habebitur pro ipsa

$$y^{15} + 4qy^{13} - 2ry^{12} + 6qqy^{11} + 10ty^{10} - 2qfy^9 + 12qty^8 - 3rtty^7 + 10sty^6 - 2f - 6qr - 26v + 6rf - 24qv - 3orv + 4q^3 - 6qqr - 7ff + 2qqf + 4qrf + q^4 + 2r^3 - 2q^3r$$

$$\begin{aligned} & - 12tly^5 + 2qsty^4 - 5qttty^3 - 6rttyy - qqtty - qrtt \propto 0. \\ & + 6qrt - 6qrv + 7rst + 2r^3f + 3st + t^3 \\ & - 18qqv - 6rrt + 3rrv + qrst + rrtf \\ & - 6qff + 8rff + qqr + 3qrv - r^3v \\ & - 6rrf - 2qqr - 4q^3v - 9rtv \\ & + 2q^3f + 2qr^3 + qqf - rt \\ & + 54fv - 18tv + 18qfv - rrf \\ & - 4f^3 \\ & - 2qrf \\ & - r^4 \\ & - 27vv \end{aligned}$$

Hæc autem æquatio ea est, quæ juxta Regulam erat quærenda, nempe in qua y designat quantitatem secundi Termini hujus æquationis $xx + yx + w \propto 0$, quæ una est duarum, ex quarum multiplicatione Proposita supponitur esse producta, quæque pauciores habet dimensiones.

Nunc verò inquirendum restat, num hæc æquatio divisibilis sit per $y +$ vel — aliquo divisore ultimi Termini — $qrtt + t^3 + rrtf - r^3v$; Si enim divisibilis sit, erit quoque w cognita, poterit-

teritque Proposita æquatio dividi per $xx + yx + w \propto 0$. Invenitur namque valor ipsius w per quartam æquationem

$$fy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \propto t$$

$$ww \propto \frac{4yyw + \frac{t}{3y} - f + ry - qyy - y^4}{3}$$

$$\frac{\frac{2}{3}q}{-\frac{1}{3}r}$$

Vel ipsa inveniri quoque potest per 5^{tam}; ut & per 6^{tam}, cum 5^{ta} per 4^{tam} non est divisibilis.

Quod si jam hæc æquatio 15 dimensionum non fuerit divisibilis per $y +$ vel — aliquo divisore ultimi Termini, poterimus rursus eodem modo æquationem ejusdem formæ facere, supponendo Propositam esse productam per multiplicationem duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant, investigando æquationem, in quâ incognita quantitas rursus designet quantitatem 2^{di} termini alterutrius harum æquationum. Hæc autem ascendet ad 20 dimensiones, sed ubique parium erit dimensionum; ita ut hæc divisio tunc exploranda sit per incognitæ quantitatis quadratum + vel — aliquo divisore ultimi Termini.

Haud secus si Proposita æquatio sit 5 aut 4 dimensionum, atque constet ipsam dividi non posse per aliam æquationem in qua unus pluresve Termini deficiant, nec per $x +$ vel — aliquo divisore ultimi Termini, erit ea divisibilis per æquationem 2 dimensionum, in qua omnes Termini extant. Itaque ex hac æquatione 5 dimensionum

$$x^5 + qx^3 + rxx + fx + t \propto 0,$$

si solummodo in operatione præcedenti ponamus $l \& v \propto 0$, inveniemus

$$\text{pro } 3^{\text{ia}}. ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \propto f,$$

$$\& \text{pro } 4^{\text{ta}}. rw - qwy - y^3w + 2wwy \propto t.$$

Per 3^{tiam} autem valor ipsius ww est $\propto ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - f$, qui valor in locum ipsius ww substitutus in 4^{ta} dabit

$$\text{pro } 5^{\text{ta}}. w \propto \frac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^5 + 2fy + t}{r + 5y^3 + qy}.$$

Porro subrogato hoc valore ubique in locum ipsius w in 3^{tia}, obtinebitur

$$y^{10*} + 3qy^8 - ry^7 + 3qqy^6 - 2qry^5 - 2qsy^4 + 4sry^3 - 4ssyy - 4sty - tt \infty 0.$$

$$- 3f + 11t - rr + 4qt + 7rt + r^3 - rrf$$

$$+ q^3 - qqr + qqf + tqg + tqr$$

$$- qrr$$

Et hæc est æquatio quæ inservit dividendis æquationibus 5 dimensionum, quæ quærebatur.

Pro æquationibus autem quatuor dimensionum, utpote $x^4* + qxx + rx + f \infty 0$, concipiendo k, l, t , & $v \infty 0$, invenio

pro 2^{da}. $qy + y^3 - 2wy \infty r$,
 & pro 3^{ta}. $qw + yyw - ww \infty f$.

Ponendo jam valorem ipsius $w \infty \frac{qy + y^3 - r}{2y}$ in 3^{ta}, obtinebitur

$$y^6 + 2qy^4 + qqyy - rr \infty 0.$$

$$- 4f$$

Quæ æquatio erit divisibilis per yy , + vel - aliquo divisore ultimi Termini, atque æquatio Proposita $x^4* + qxx + rx + f \infty 0$ per $xx + yx + w \infty 0$, ut & per $xx - yx + z \infty 0$; hoc est,

$$\text{per } xx + yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}yy - \frac{r}{2y} \infty 0,$$

$$\& xx - yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}yy + \frac{r}{2y} \infty 0.$$

Vbi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadrata reduci possunt, esse planè eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80, & 81 suæ Geometriæ descripsit. Nec dubitare possim, quin ipsam eodem modo, vel certè non multum absimili invenerit; præsertim si ea, quæ pagin. 84 in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipsius Methodo secantium, & quæ deinceps pag. 49 exposuit. Adeò ut, iudicio meo, ne quidem verisimile videatur, imprimis si concinnam præcedentium cum sequentibus cohærentiam spectemus, ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generositate, (ut novisti & tu & quotquot ejus familiaritate usi sunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, sed parvus etiam hîc ejus tractatus tam varia profundæ & admirandæ eruditionis specimina summique ingenii inventa exhibet, & quæ

& quæ præ Antiquorum monumentis adeò sunt generalia, utilia, ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipsorum scripta cum hujus scriptis comparaverit, in hæc cogitationes incidere unquam possit; Quemadmodum nemo tam præposterò est ingenio, ut fulgentem solis lucem à micantibus stellis derivandam arbitretur. Non tamen hîc quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus stellis assimilo; credo enim stellas dari, quæ in se sint ipso etiam sole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem nostrum respectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes imprimis ac Diophantus, multique alii, qui superiori & hoc nostro sæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æstimationis sunt, ac suis etiam monumentis immortalem in omnes Posteris nominis gloriam promeritos lubentissimè fateor. At majorem post illos lucem mundo exortam esse, ipsi etiam, si reviviscerent, in nostro Cartesio non tantum agnoscerent, sed etiam sibi ex ejus lumine majus lumen accendere satagerent, aliosque ut illo potius, quàm suo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs sed tutiùs etiam in solis lumine vivitur, & per compendiosiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentius ac distinctius quàm in stellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantum ex ipsius scriptis, sed præsertim ex intima familiaritate, quæ tibi cum eo à multis retrò annis intercessit, penitus pernovisti, quemque interea non semel maximo cum stupore admiratus es, cum videres eum quæstiones in Mathesi difficillimas è vestigio tantâ promptitudine resolvere, ac si non difficilliores, quàm omnium facillimæ, ipsi fuissent, quæ nihilominus à præstantissimis etiam Mathematicis in ea usque tempora, aut non, aut non nisi maximâ cum perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipse passus es) quòd non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanarunt, fideliter chartis mandata custodieris, id mihi satis amplum testimonium est, unde certus sim, tibi, ut mihi, ne quidem verisimile fieri posse, Illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se potius transfuisse, quàm ex propriis fundamentis, fœcundissimis illis omnium scientiarum seminariis, eruisse atque invenisse. Sed de his satis.

Iam ad Regulam revertar, & paucis innuam, quòd ex operatione hìc factà eluceat generalis Methodus tollendi ordine omnes, quæ quidem possunt, quantitates incognitas, vel eas quæ ut incognitæ considerantur; quod, meo quidem iudicio, magni usus est, cum sæpenumero quæstiones difficiliore, unam tantum incognitam quantitatem supponendo, aut non resolvi posse, aut multo majori labore, aut certè ad eas resolvendas alias vias quàm hactenus imitari consuevimus ineundas esse, deprehenderim; quod etiam Cartesium nostrum non latuisse ex pag. 4, aliisque passim locis luculenter constat. quod nihilominus haud ita pridem ab insigni Mathematico in dubium revocari comperi, cuius rei causam hanc conjicio, quòd in aliorum scriptis magis quàm in hujus versatus fuerit. Dixi autem hanc Regulâ tolli eas quantitates, quæ quidem tolli possunt: non enim semper omnes possunt, neque etiam unâ exceptâ, neque duabus, &c. Nam si quæstio non sit Theorema, omnes tolli nequeunt; & si determinata sit, omnes unâ exceptâ tolli possunt; si verò una deficiat conditio, quò minus determinata existat, omnes tolli queunt duabus exceptis, & sic deinceps, ut nosti. Neque, quod sedulò observo, etiam semper per quamlibet æquationem una quantitas incognita tolli potest. Exempli gratiâ, in duabus hisce æquationibus $x^3 - 3zx + bbx - zzb = 0$,

$$+ bz - zbb \\ + 2zz$$

$$\& x^3 - 4zx + zbx - 2zzb = 0, \text{ in quibus } x \& z \text{ duas} \\ + 4zz - 2zbb \\ + bb$$

incognitas quantitates designant, potest x vel z per neutram ex altera tolli. Quod, ubi accidit, indicio est, Problema, è quo hæ duæ æquationes fuerunt deductæ, si omnes ejus conditiones includant, non determinatum esse, atque unam in eo conditionem, ut prorsus determinatum sit, deficere. Non rarò etiam licet in resolvendo aliquo Problemate determinato diversas invenire æquationes, unam eandemque incognitam quantitatem habentes, idque magno cum emolumento. Sed de his aliàs.

Porro quomodo easdem Regulas aliâ adhuc Methodo inveniam, breviter adjungam.

Sit

Sit æquatio Proposita, ut ante,

$$x^6 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0,$$

& inquiratur num dividi possit per æquationem duarum dimensionum cui nullus terminus desit, pone per $xx + yx + w = 0$. si itaque per eam divisibilis sit, erit $xx = -yx - w$, quo valore ipsius xx , ubique in locum xx subrogato, resultabit æquatio in qua x unam tantum habebit dimensionem, nimirum

$$\begin{array}{rcl} -3wxy - w^3 & = & 0. \\ -y^5 & - & wy^4 \\ +4wy^3 & + & 3wyy \\ -qy^3 & + & qww \\ +2qwy & + & rwy \\ -rw & - & sw \\ +yyr & - & qwy \\ -sy & + & v \\ +t & & \end{array}$$

Deinde pono singulos terminos $= 0$, adeò ut tum habeas has duas æquationes,

$$-3wxy - y^5 \&c. = 0. \quad \& \quad -w^3 - wy^4 \&c. = 0.$$

easdem quæ præcedentes 4^{ta} & 5^{ta}; Ita ut w , eodem quo ibi modo, ablatâ, eandem tandem æquationem nanciscaris

$$y^{15} + 4qy^{13}, \&c. = 0$$

Eodem modo se res habet in reliquis.

Illud verò notandum est, hanc positionem $xx - yx - w = 0$ seu $xx = yx + w$ paulò faciliorem reddere operationem, cum in subrogatione valoris ipsius xx non opus sit ut signa mutantur, quod alioqui secundum priorem positionem $xx + yx + w = 0$ contingit: Itaque hæc pro illa potius est eligenda. Et quod hanc non elegerim, ideo factum est, ut idem effectus utriusque methodi evidentiùs pateret. Eodem modo, si præcedens æquatio inquirenda esset, num dividi posset per æquationem trium dimensionum, in qua nullus terminus deficiat, ponerem illam $x^3 = yxx + wx + z$, sed non $x^3 + yxx + wx + z = 0$, quemadmodum, si aliam Methodum sequer, facturus essem.

Supervacaneum verò est me dicere, has tres præcedentes Regulas æquationum 6, 5, & 4^{or} dimensionum, (quamvis illæ tanquam exemplum generalis Regulæ in medium allatæ sint) se extendere ad omnes casus: nam cum q denotet quantitatem cognitam tertii termini Propositæ æquationis, affectam suis signis + & —; manifestum est in Regulis valorem ipsius q tantum subrogandum esse in locum q ; vel si fortè tertius hic terminus in æquatione deficiat, omnes quantitates per q multiplicatas, cum etiam tum sint $\infty 0$, delendas esse. ita quoque se res habet in r , s , & t . Verbi gratiâ, si hæc æquatio 5 dimensionum $x^5 * * + 6xx - 25x - 39 \infty 0$ divisibilis esset per rationalem duarum dimensionum, in qua nullus terminus deest; Oportet, cum in hac æquatione q sit $\infty 0$, $r \infty 6$, $s \infty -25$, $t \infty -39$, loco hujus $y^{10} * * + 3qy^8 - ry^7$ &c. $\infty 0$, scribere hanc $y^{10} * * - 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621 \infty 0$. quâ y invenitur $\infty -1$, ideoque $w \infty \frac{-2ryy + 2qy^3 \&c.}{r + 5y^3 + qy} \infty -3$; & pro

$xx + yx + w \infty 0$, hæc $xx - 1x - 3 \infty 0$, per quam Propositæ æquatio erit divisibilis. atque ita in reliquis. Adeò ut hinc pateat, sicut etiam in 17^{ma} aliisque Regulis, quomodo omnes casus æquationum æqualium dimensionum, sive aliqui termini desint, sive non, vel quo tandem modo signis + & — affecti sint, sub una eademque Regula comprehendi possint, adeò ut sexcenti ejusmodi casus ad unum referri & multi labores rescindi queant. Quod satis superque Regula æquationum 4 dimensionum, cum omnibus casibus, quos aliqui elaborarunt, comparata, immensusque labor, quem illis hoc negotium peperit, demonstrant; præsertim si eâdem ratione omnes casus æquationum 5 & 6 dimensionum describere vellent.

Denique notandum, cum dico, primum inquirendum esse num æquatio Propositæ dividi possit per aliam in qua omnes termini non extant, non adeò rigidè illud sequendum esse; non enim id necessarium, sed plerumque brevissima via est ad æquationem Propositam reducendam.

XX. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem

tionalem 4 dimensionum, fractioneque carentem, 2^a verò termino, si adsit, manente, ad aliam trium, & hanc iterum, si fieri potest, ad alias pauciorum dimensionum.

Postquam exploratum est æquationem Propositam non esse divisibilem per aliam, duos duntaxat terminos habentem, inveniendus est valor hujus æquationis

$$y^3 - qyy - 4sy - spp \infty 0. \\ + pr + 4qs \\ - rr$$

ubi p designat quantitatem cognitam, suis signis + vel — affectam 2^{di} termini; q , tertii; r , quarti; s , quinti. Invento autem valore ipsius y , poterit æquatio Propositæ ejusdem ope dividi in duas æquationes sequentes, quæ singulæ duas dimensiones habent, nimirum in

$$xx + \frac{1}{2}px + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \infty 0,$$

$$\& xx + \frac{1}{2}px - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \infty 0.$$

Quòd si verò valor ipsius y non sit æqualis alicui ex divisoribus ultimi termini $- spp + 4qs - rr$, non poterit æquatio Propositæ ulterius quàm ad tres dimensiones reduci.

Exempli gratia, si reducere velimus æquationem $x^4 - 2x^3 - 2xx - 2x + 1 \infty 0$, quæ per æquationem, duos solummodo terminos habentem, est indivisibilis, invenio

$$y^3 - qyy - 4sy - spp \infty y^3 + 2yy * - 16 \infty 0. \\ + pr + 4qs \\ - rr$$

(nam $p \infty -2$; $q \infty -2$; $r \infty -2$; $s \infty 1$). quæ dividi potest per $y - 2 \infty 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæc duæ

$$xx - 1x + 1 \infty 0, \& xx - 1x + 1 \infty 0.$$

$$+ \sqrt{5}$$

$$- \sqrt{5}$$

Eodem modo si habeatur æquatio $x^4 * * - 12x - 5 \infty 0$, obtineo

$$\text{tineo } y^3 * + 20y - 144 \infty 0, \text{ pro } y^3 - qyy - 4sy - spp \infty 0 \\ + pr + 4qf \\ - rr$$

(nam $p \infty 0, q \infty 0, r \infty -12, s \infty -5$.) quæ divisibilis est per $y - 4 \infty 0$, ita ut loco duarum æquationum habeas has duas

$$xx + 2x + 5 \infty 0, \\ \& xx - 2x - 1 \infty 0.$$

Similiter si proponatur æquatio literalis

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0, \text{ erit } p \infty -2a; \\ - cc$$

$$q \infty 2aa - cc; r \infty -a^3; s \infty a^4, \text{ ideoque in locum æquationis } \\ y^3 - qyy - 4sy - spp \infty 0, \text{ scribenda } y^3 - 2aayy^* - 4a^4cc \infty 0, \\ + pr + 4qf \\ - rr$$

quæ dividi potest per $y - 2aa \infty 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$xx - ax + x\sqrt{aa + cc}, + aa \infty 0, \\ \& xx - ax - x\sqrt{aa + cc}, + aa \infty 0.$$

Si verò hæ æquationes per $y +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini non fuissent divisibiles, non potuissent etiam æquationes Propositæ ulterius quàm ad 3 dimensiones reduci.

XXI. REGULA.

Hactenus Regulæ, quas tradidi, respexerunt æquationes, in quibus una tantum incognita quantitas, quam x nominavi, inveniebatur, ut meos conceptus distinctius exprimerem. Iam uno adhuc verbo adjiciam: *Quòd in Proposita æquatione quamlibet cognitam pro incognita & vice versa quamlibet incognitam pro cognita respectu Reductionis considerare liceat; & quòd sæpe compendio sit incognitam tanquam cognitam & unam ex cognitis tanquam incognitam considerare & sic Reductionem inquirere.* Nam primò in omnibus æquationibus, quæ ex duabus rationalibus oriri possunt, æquè per quamlibet cognitam, eam tanquam incognitam considerando, quàm per incognitam reductio inveniri potest, & sæpe etiam brevius, si ex solis irrationalibus produci possunt. Dein quòd hoc sæpe compendio sit, vel hinc

hinc manifestum fit, quia rarò admodum omnes literæ eundem dimensionum numerum habent, atque adeò, si aliquam ex cognitis pro incognita consideres, sæpe quoque aliqua æquatio exsurgat, quæ pauciorum sit dimensionum quàm Proposita; & adhuc pauciorum, si etiam inter ipsas cognitatas delectum instituas; aut saltem reductio hoc vel illo modo facilior evadet.

Considerando itaque omnes sine discrimine literas ut cognitatas, ejusmodi ex illis eligere & pro incognita supponere integrum erit, quæ ad reductionem facillimè expediendam (per præcedentes Regulas) maximè conducere judicabitur. Et hæc omnium, quas tradidi, Regularum, respectu Reductionum, utilissima est.

Et per eam non tantum Reductiones ultimarum æquationum, quæ omnes Propositi Problematis condiciones includunt, ope Regularum supra explicatarum sæpe compendiosissimè inveniuntur, sed etiam priusquam ad ultimam deveniatur, quam plurimæ reductiones rescindi & simplicissimæ sæpe æquationes haberi possunt. Et quidem operæ pretium foret, rem hanc aliquot exemplis clariorem reddere, sed ne te atque etiam me diutius remorer, unum tantum & alterum exemplum adjungam.

Quo modo reducere possis omnem rationalem æquationem, quæ per aliam rationalem, non cognitatis ultimi Termini divisoribus, dividi queat, remanente etiam, si placet, omni Fractione, quæ in illa reperitur; nimirum, si in æquatione illa aliqua litera, sive cognita, sive incognita reperiat, secundum quam æquatio ordinata non plures quàm quatuor dimensiones habeat; seu in qua litera aliqua reperitur non plures habens quàm 1, vel 1 & 2, vel 1, 2, & 3, vel 1, 2, 3 & 4 dimensiones, vel etiam plures, sed quæ ex his derivari possint: Id quod semper ex investigatione valoris hujus literæ, quæ vel incognita est, vel ut incognita consideratur, innotescit, uno tantum casu excepto, quem postea indicabo.

1. *Exemplum*, in quo litera b ubique unam tantum dimensionem habet.

$$\text{Esto æquatio Proposita } x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 \infty 0 \\ + b - ab + ba^3$$

$$\text{Ergo } bx^3 - abxx + ba^3 \infty -x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4 \\ \text{div. per } x^3 - axx + a^3. \quad \text{fit } b \infty -x + a$$

& $x - a + b \infty 0$. Æquatio, per quam Proposita dividi potest.

2 *Exemplum*.

$$\text{Esto æquatio Proposita } x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 \infty 0 \\ - 2a + 70ab - 60aab$$

$$\text{Ergo } -20bxx + 70abx - 60aab \infty -x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3 \\ \text{div. per } -20xx + 70ax - 60aa. \quad \text{fit } b \infty \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}. \text{ Hujus}$$

autem maximus communis divisor, per Methodum ante descriptam, est $x - 2a$, per quem si fractio abbrevietur,

$$\text{fiet } b \infty \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}, \text{ vel } \frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$$

seu, quod idem est, $xx - 20bx + 30ab \infty 0$. Ita ut æquatio

Proposita in hanc, & præcedentem $x - 2a \infty 0$ divisa sit.

3 *Exemplum*, in quo quantitas c tantum 1 & 2 habet dimensiones.

$$\text{Esto æquatio Proposita } x^4 + 8acxx - 4aacx + 12aaccc \infty 0 \\ - aa$$

$$\text{Ergo } 12aaccc \infty -8axxc - x^4 \\ + 4aacx + aaxx \\ \text{div. per } 12aa. \quad \text{fit } cc \infty \frac{4ax - 8xx}{12a} \text{ in } c, + \frac{aaxx - x^4}{12aa}$$

Vnde extractâ radice invenietur

$$c \infty \frac{ax - xx}{2a}, \text{ hoc est, } xx - ax + 2ac \infty 0$$

$$\text{vel } c \infty \frac{-ax}{6a}, \text{ hoc est, } xx + ax + 6ac \infty 0.$$

Ita ut æquatio Proposita in hæc duas sit divisa. Quoniam autem

tem in ea a quoque 1 & 2 tantum dimensiones habet, potuisset idem etiam quærendo valorem ipsius a investigari.

Vbi notari potest, quod, ad inveniendas radices alicujus æquationis, in quâ litera, cujus valor quæritur, non plures habet dimensiones quàm 1 & 2, vel 2 & 4, vel 3 & 6, &c. scire non sit necesse, cujusnam illa sequentium formularum existat.

$$xx - ax + bc \infty 0$$

$$xx + ax + bc \infty 0$$

$$xx + ax - bc \infty 0$$

$$xx - ax - bc \infty 0.$$

Etenim posita $xx, px, q \infty 0$, si p statuatur pro 2^{do} , & q pro ultimo termino, erit semper $x \infty -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

4 *Exemplum*.

Porro quoniam æquationes omnes quatuor dimensionum reduci possunt ad æquationes trium dimensionum, & in omnibus quidem æquationibus secundus terminus tolli potest, ostendendum solummodo restat, quo pacto divisores æquationis inveniri queant, in quâ incognita quantitas, vel alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur, tantum 1 & 3 dimensiones habet. In quem itaque finem proponatur æquatio $x^3 \infty *qx.r$.

In qua x designet quantitatem, cujus valor quæritur; q & r autem quantitates cum suis signis, quales illæ in æquatione reperiuntur.

Est etiam $x \infty y + z$

$$\text{Eritque } x^3 \infty y^3 + 3zyy + 3zzz + z^3 \infty qx + r.$$

Ex hac autem æquatione fiant jam duæ aliæ, ponendo

$$\text{div. per } y + z. \quad \text{fit } 3zyy + 3zzz \infty qx, \quad \& \quad y^3 + z^3 \infty r \\ \text{fit } 3zy \infty q \quad \text{vel } y^3 \infty r - z^3$$

$$y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 \infty \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} \infty r - z^3$$

$$z^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}, \\ \& y^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}, \text{ quia } y^3 \infty r - z^3 \\ \text{Rrr } z \quad \text{vel}$$

$$\text{vel } y \propto \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}, \text{ quia } y \propto \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$\& x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{quia } x \propto z + y$$

$$\text{vel } x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quoniam verò in prima parte prioris valoris ipsius x reperitur signum $\sqrt[3]{}$, & in secunda signum contrarium $\sqrt[3]{}$, atque quantitates per ea conjunctæ omnino eadem existunt; & quoniam ad obtinendum valorem ipsius x , duæ illæ partes simul addi debent; poterunt ipsa determinari, ponendo pro uno $+$, & pro altero $-$, ita ut habeatur

$$x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r - \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{vel } x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quocirca quærendo juxta hanc Regulam valorem quantitatis x , licebit ipsius beneficio æquationem, si reducibilis sit, in duas rationales dividere: quoniam tunc $\sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$ extrahi poterit, excepto tantum, quando quantitate q signo $+$ adfecta, $\frac{1}{4}rr$ minor est quam $\frac{1}{27}q^3$.

Vbi difficultas aliqua superesse videtur in radicis Cubicæ ex binomiis hisce extractione; sed cum $\sqrt[3]{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ pag. 389 extrahi queat, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex binomio literalis inveniri, cum pro literis numeros ad arbitrium assumere liceat, &c.

Quoniam autem sæpenumero in reducendis æquationibus hujus quarti exempli contingat, ut Quæsitum per aliquam ex aliis Regulis facilius inveniatur, poterit tamen interdum hæc Regula, præsertim in æquationibus numeralibus, ubi divisores ultimi Termini complures existunt aut difficiles sunt inventu, cum fructu usurpari.

Quibus præmissis, potero generalem Regulam commodius exprimere, quæ talis est:

Si in æquatione Proposita, quæ in duas alias rationales est divisibilis, quærat^{ur} valor quantitatis incognitæ vel

vel alicujus alterius, quæ ut incognita consideratur, poterimus ipsam aut dividere (sicut in 1^{mo} exemplo); aut fractionem inde ortam per communem aliquem divisorem abbreviare (sicut in 2^{do} exemplo) aut denique radicem quadratam (sicut in 3^{io} exemplo) aut radicem cubicam extrahere, excepto tantum, ut diximus, uno casu, ubi q designat quantitatem signo $+$ adfectam, existente $\frac{1}{4}rr$ minore quam $\frac{1}{27}q^3$.

Vbi tandem id advertendum, Regulam hanc in resolvendis æquationibus trium & quatuor dimensionum eandem esse cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex superiori calculo manifestum sit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri possit. Hanc verò eandem esse, vel hinc evidens fit, si ex illa sola conficiamus hæc quatuor: quippe ponendo quantitates q & r signo $+$ adfectas esse, obtinebimus, existente $x^3 \propto +qx + r$,

$x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r - \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$
Si q designet quantitatem signo $+$, r autem quantitatem signo $-$ adfectam, obtinebimus, existente $x^3 \propto +qx - r$, (mutando tantum in Regula signa, quæ ipsi r impares dimensiones habenti præfiguntur)

$x \propto \sqrt[3]{C. -\frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. -\frac{1}{2}r - \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$
Si q designet quantitatem signo $-$, & r signo $+$ adfectam, obtinebimus, existente $x^3 \propto -qx + r$, (mutando signa, quæ ipsi q impares dimensiones habenti præfiguntur)

$x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}r - \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}.$
Denique si q & r signo $-$ sint adfectæ, obtinebimus, existente $x^3 \propto -qx - r$, (mutando signa, ut supra)

$x \propto \sqrt[3]{C. -\frac{1}{2}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. -\frac{1}{2}r - \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}.$
Et nota, quòd eodem modo operando similes regulæ pro altioribus æquationibus inveniri possint.

2. Sed cum Methodus hæc reducendarum æquationum, ubi incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, trium vel

quatuor dimensionum est, aliquando paulò longior sit, præstat tum ejus loco vigesimâ Regulâ uti, per quam omnes casus trium vel quatuor dimensionum, nullo excepto, reduci possunt; Vel etiam regulâ 17, ubi non adstringeris æquationibus quatuor dimensionum, sed omnes rationales, quæ per aliquam rationalem æquationem dividi queunt, reducere poteris, atque adeò etiam omnem Propositam rationalem æquationem, quæ per aliquam rationalem divisibilis est, si modo aliqua litera, quam libuerit, tanquam incognita, & reliquæ omnes ut cognitæ considerentur.

3. Sæpe autem satis breviter Reductio æquationum, quæ tantummodo per irrationales reduci possunt, inveniri potest. exempli gratiâ, si habeas hanc æquationem,

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0 \\ - cc$$

vel $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$ addas utrimque quantitatem aliquam per xx multiplicatam, (cum ab altera parte habeas cc in xx) talem nempe ut $\sqrt{\quad}$ quadrata ex altera parte extrahi possit, quod statim per extractionem reperies esse $+aaxx$, ideoque utrimque hac $+aaxx$ addita, & radice quadrata extractâ invenies

$$xx - ax + aa \infty x\sqrt{aa + cc}$$

atque ideo Proposita æquatio ex multiplicatione duarum sequentium æquationum resultare poterit

$$xx - ax + aa \infty 0. \\ - \sqrt{aa + cc} \\ xx - ax + aa \infty 0. \\ + \sqrt{aa + cc}$$

4. Magnum quoque usum habent aliæ quædam Regulæ, tam in reducenda æquatione, quæ per rationales, quàm quæ tantummodo per irrationales reduci possunt. ex. gr. per 11 Regulam, omnes æquationes reduci poterunt, quæ non tantum ex duabus aliis per multiplicationem produci possunt, in quarum alterutra, unus pluresve termini deficiunt, si æquatio consideretur secundum incognitam quantitatem, sed etiam si tantum quævis alia litera, sive cognita, sive incognita, reperitur, quæ ut incognita consideratur, & æquatio secundum illam in ordinem redacta talis sit, ut ex duabus aliis produci possit, in quarum alterutra unus plu-

DE REDUCTIONE ÆQUATIONVM. 503
pluresve termini deficiunt. sic quamvis sequens æquatio 6 dimensionum

$$x^6 - 2axx + 3abx + 6a^3 \infty 0 \\ + 6abb$$

$$\text{per } x^3 + 2axx + 4aax - 4a^3 \infty 0 \\ + 2ab - 8b^3$$

Product. x^6 , &c.

produci non possit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel plures termini deficiunt, si scilicet x ut incognita quantitas consideretur, poterit tamen ex duabus talibus produci, si vel a vel b ut incognita quantitas consideretur, ut ex æquationibus, ex quibus producta est, patet; ac proinde æquatio illa Proposita per XI Regulam reduci poterit.

Hic ergo hanc Regulam abrumpam, & celeriori in sequentibus gradu ad finem, quem jam dudum desidero, festinabo.

Diversas adhuc alias Regulas in paratu habeo, quas hinc simul adjungerem, si non aliquid in futurum reservare animus esset: Nimirum inter cæteras una est, per quam omnes irrationales radices tam numeralium, quàm literalium æquationum invenio; una per quam omnes æquationes numerales, quæ ex duabus rationalibus produci possunt, ad easdem reduco, non cognitæ divisoribus ultimi termini; item alia, per quam sæpe literales æquationes reduco, quæque in eo consistit, quod unam aut alteram literam ponam $\infty 0$, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, & quod hanc æquationem inde resultantem prius reducere coner, & postea etiam Propositam per hanc. Exempli loco adjungam hanc

REGVLA M,

Quæ omnes rationales æquationes, quæ nullas fractiones continent & reduci possunt, reducuntur, si ponendo unam aut plures literas $\infty 0$, aut ∞ alii quam libuerit quantitati, talis inde æquatio resultet, quæ una tantum dimensione minor & irreducibilis sit.

$$\text{Ex. gr. habeatur hæc æquatio } x^3 - 5axx + 6bbx - 18abb \infty 0, \\ - 9bc - 9a^3 \\ - 9aa + 27abc$$

in

in qua si a ponatur $\infty 0$, exsurgit hæc

$$x^3 + 6bbx - 9bcx \infty 0$$

seu $xx + 6bb - 9bc \infty 0$, quæ non potest reduci.

Regula verò per quam reductionem Propositæ æquationis jam instituo, talis est:

Dividantur per ultimum terminum exortæ æquationis, si non ex diversis partibus aut Membris constet, (partes aut Membra eas nomino quantitates, quæ in eodem termino signis + vel — cæteris connectuntur) vel aliàs per unum membrum ultimi termini quodcunque libuerit, (quemadmodum hîc per + 6bb, vel — 9bc) omnia Membra ultimi termini Propositæ æquationis, quæcunque per illud dividi possunt, atque illud quotiens, sive unum sive plura fuerint, addatur quantitati x, & per hanc summam Propositæ æquatio dividi poterit.

Vt in hoc exemplo, dividendo — 18abb per + 6bb, exsurgit quotiens — 3a, quod additum ipsi x, quia in Propositæ æquatione inter membra ultimi termini nullum aliud habetur, quod per + 6bb sit divisibile, exsurgit $x - 3a$, quod Propositam æquationem dividere poterit. Vel si alterum exortæ æquationis Membrum assumptum fuisset, nimirum — 9bc, similiter prodiret — 3a, quia solum + 27abc inter Membra ultimi termini in Propositæ æquatione reperitur, quod per — 3a dividi potest.

Nota, quòd per hanc methodum, dum literam unam aut plures pono $\infty 0$, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, non tantum rationales literalium æquationum radices, sed etiam irrationales tam literalium quàm numeralium æquationum inveniri possint. Nam etiam Regulæ, quarum ope quarundam Cubicarum æquationum radices investigantur, quas Cardanus Authori Scipioni Ferreo ascribit, hac etiam methodo inveniri possunt, quæ alia est, quàm quæ in 21 Regula ostensa fuit.

Hactenus æquationes absolutè tantum consideravi, nunc superest, ut eas etiam relativè, quatenus referuntur ad Problema, ex quo educuntur, considerem.

Sed priusquàm hoc aggrediar pauca quædam de iis Regulis, quas hucusque tradidi, dicenda restant. Illæ verò sunt duorum generum, quædam enim aliquibus in casibus docent Propositam æqua-

æquationem vel non esse reducibilem, vel in quantum, vel per quales non sit reducibilis, ut Regula 1, 2, 12, 13, & 14, & 15. quædam etiam docent, quo pacto æquationes reduci debeant, quas scimus reducibiles esse, vel per aliquam in qua aliquis terminus datus, aut $\infty 0$ est, quales sunt 9 & 11, vel per aliquam rationalem, ut sunt 16 & 17, vel denique per alias. Sed quia sæpe latet, utrum Propositæ æquatio, vel quæ ex Problemate quodam educta est, reducibilis sit, nec ne, ad hoc inquirendum aliquis ordo observandus est. Et quem harum Regularum respectu optimum judico, talis est: Inquirerem primò ope priorum Regularum anne æquatio sit irreducibilis; quod in æquationibus irreducibilibus primo plerumque intuitu apparet, aut saltem magna ex parte; adeò, ut multi labores tali in casu præscindantur. At si hoc non ita appareret, transirem ad Regulam XI, (imprimis si Ultimus æquationis terminus multos divisores, vel qui inventu difficiles sint, admittat, vel si æquatio surdas quasdam aut fractas quantitates contineat) per quam omnes æquationes reduci possunt, quæ divisibiles sunt ope alterius in qua una aut plures quantitates desunt, sive æquationem in ordinem redigas respectu incognitæ, sive respectu alicujus cognitæ, quæ ut incognita consideratur.

Et sic omnes pæne literales & reducibiles æquationes, ut & quàm plurimæ numerales reduci possunt. Si verò nec hoc pacto succedat Reductio, eam per cæteras Regulas inquirerem.

Possunt etiam hîc quædam adjungi de signis, ex quibus cognoscitur si ne aliqua æquatio reducibilis nec ne; Verùm cum hoc unum sit ex primariis rei capitibus, plus otii & patientiæ, quam quidem in præsentiarum mihi suppetit, ad id requiritur.

Quod igitur alteram partem Reductionum concernit, quæ refertur ad Problema, ex quo æquatio est deducta, multa adhuc dici possent, tam de ultimæ æquationis (in qua omnes Problematis conditiones includuntur) Inventionem, quàm omnes aut saltem multæ Reductiones rescindi queunt; quàm de aliis Reductionibus, quæ sæpe illis supra descriptis breviores existunt. Nam quod primum attinet, experientia docet in omnibus ferè Problematis multos esse, eosque diversos modos ultimam æquationem inveniendi, & ad pauciorum dimensionum æquationem,

nem, si hunc, quàm si alium modum sequaris, perveniendi. Imò non tantum diversâ, sed etiam eâdem methodo utendo, tandem in æquationem plurium aut pauciorum dimensionum pervenies. Atque ita breviori ac faciliori viâ non tantum multum laboris inveniundo postremam æquationem præteribis, sed etiam reductiones valde inventu difficiles, quæ alioqui, si ad altiores æquationes delabaris, quærendæ essent, rescindes.

Vide Sectionem
XXI
tuarum
Exercitationum
Mathe-
maticarum.

Quod alterum spectat, ejus à me specimen habes, ubi nempe æquationes omnium figurarum ordinarum circulo inscriptarum inveniuntur, in eo nempe consistens, quod cum ultimam æquationem, quæ omnes Problematis condiciones includit, habeas, præterea adhuc aliam, sed aliâ methodo, investigates, quæ itidem omnes condiciones comprehendat, adeò ut, cum duas æquationes eandem incognitam quantitatem includentes obtinueris, ipsas à se invicem tam diu, quàm fieri possit, subtrahas, vel quod eodem redit, earum communem divisorem invenias, quemadmodum tunc in inveniendis illis æquationibus satis fusè ostendi.

Et hujus Methodi utilitas se longè lateque diffundit, præsertim ad Problemata difficiliora, quorum æquationes ad plures dimensiones excurrunt. Nam sæpe numero, si earum reductionem per præcedentes Regulas investigares, ætatem consumeres, quod alioquin, si hanc viam sequaris, breviter, & ut ita dicam, uno momento absolvere posses.

Cum igitur utrumque & Reductiones in principio in totum vel ex parte rescindendi, & eas in multis casibus adhuc compendiosius quàm per præscriptas Regulas inveniendi, majoris momenti sit, quàm ut hîc dignè pertractari possit; atque ego etiam scribendo, tu verò legendo, defessi simus: præstat, ut hîc substamus atque aliquantulum respiremus, reliquâque opportuniore tempore reservemus.

Interim vale & me ama.

Datum Amstelædami Prædie
Iduum Julii A° 1657.

IOHANNIS HVDDENII
EPISTOLA SECUNDA,

DE

MAXIMIS ET
MINIMIS.

Clarissime Vir,

QUod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua x designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r = 0$$

ipsaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy = 0$, id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left. \begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array} \right\} = 0$$

Sss 2

in

in qua etiam duæ radices æquales comprehenduntur, videlicet $x \propto y$, ac denuo $x \propto y$. Vel si illam multiplicassemus per $xx + 2yx + yy \propto 0$, obtinuissimus duas falsas radices æquales: utcunque autem hæc multiplicatio fiat, si pro y ponatur ejus valor, habebitur

$$\left. \begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array} \right\} \propto 0.$$

Si jam unumquodque horum quatuor productorum, seu, quod eodem redit, $+1, -2, +1$ (quoniam dividi potest per xx , & multiplicatores x^3, pxx, qx , & r nullam mutationem efficiunt) multiplicetur per Arithmetica Progressionem: erit productum hujus multiplicationis $\propto 0$.

Nam

Mult. $+1, -2, +1$ per $a, a+b, a+2b$ fit $a, -2a-2b, +a+2b$ seu $+2a-2a, +2b-2b \propto 0$.	Mult. $+1, -2, +1$ per $a, a-b, a-2b$ fit $a, -2a+2b, a-2b$ seu $2a-2a, +2b-2b \propto 0$.
---	---

Huc usque universaliter consideravi omnes æquationes, duas æquales radices habentes, quomodocunque ipsæ proponantur, hoc est, sive in iis termini quidam desint sive non, ut & quomodocunque signa $+$ & $-$ sese habuerint. Quod manifestum erit consideranti nobis solummodo rem esse cum hisce numeris $+1, -2, +1$, non autem cum multiplicatoribus x^3, pxx, qx , & r .

Similiter respectu Arithmetice Progressionis res etiam generalis manet, quandoquidem duo priores termini $a, a+b$, & $a, a-b$ indeterminati sunt. Quod restat, ex sola inspectione præcedentis exempli, conferendo duas sequentes multiplicationes, perspicuum fiet.

$\begin{array}{r} x^3 + pxx + qx + r \propto 0 \\ xx - 2xx + xx \propto 0 \\ \hline xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array} \left\} \propto 0.$	$\begin{array}{r} x^3 + pxx + qx + r \propto 0 \\ xx - 2yx + yy \propto 0 \\ \hline x^5 - 2yx^4 + yyx^3 \\ + px^4 - 2pyx^3 + pyyx^2 \\ + qx^3 - 2qyx^2 + qyyx \\ + rxx - 2ryx + ryy \end{array} \left\} \propto 0.$
Mult. per $a, a \ 8 \ b, a \ 8 \ 2b, a \ 8 \ 3b, a \ 8 \ 4b, a \ 8 \ 5b.$	

Nam

Nam quoniam hæc producta $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$, & $xx - 2xx + xx$ in x^3 eadem existunt, erit etiam $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ multiplicatum per $a, a \ 8 \ b, a \ 8 \ 2b$ æquale 0; sic & quoniam $+px^4 - 2pyx^3 + pyyx^2$ idem est quod $xx - 2xx + xx$ in pxx , erit quoque $px^4 - 2pyx^3 + pyyx^2$ multiplicatum per $a \ 8 \ b, a \ 8 \ 2b, a \ 8 \ 3b$ (siquidem, ut ex præcedentibus liquet, primus terminus Progressionis ad libitum sumi potest) æquale 0; atque sic deinceps. Vnde fit, ut etiam Productum totius æquationis per hanc seriem proportionalium sit $\propto 0$, nec non ut unus valor ipsius $x \propto y$, quæ una duarum radicum æqualium est, necessario includatur. Et cum hic rursus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum: erit Propositum Theorema universaliter demonstratum de quibuscunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Hinc emanat

Si in æquatione aliqua 3 sint radices æquales, & ipsa multiplicetur per Arithmetica Progressionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum est, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices istarum trium; ac proinde Productum hoc denuo per Arithmetica Progressionem multiplicari poterit. Quod si autem in Proposita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipsa multiplicetur per Arithmetica Progressionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices istarum 4, & sic porro, quotcunque æquales radices æquatio habuerit, semper per singulas ejusmodi multiplicationes una tantum istarum æqualium radicum tolletur.

Hoc itaque demonstrato, transeo ad meam Methodum de Maximis & Minimis, quæ sic se habet.

Positis quotcunque quantitatibus Algebraicis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsæ $\propto z$; & ordinatæ æquatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmetica, eo modo, quo dictum est: & Pro-

Sss 3

ductum

ductum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonstrationem tantummodo probandum restet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonstratu adeò facile est, ut huic rei ulterius insilire nihil aliud sit, quàm operam & oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus est. Particulares verò, quas antehac in aliquibus exemplis vidisti, hinc resultant. quemadmodum ex subjunctis operationibus, utroque modo factis, perspicere licebit.

1. Cum Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, non nisi unam incognitam quantitatem continent, & nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, multiplico tantum unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitæ quantitatis, neglectis quantitibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, & suppono Productum $\infty 0$.

Ex.gr. fit $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab \infty$ alicui maximo.

mult. per $\frac{3}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{1}{1}$

fit $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x \infty 0$, vel $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \infty 0$.

Iuxta generalem Methodum erit

$3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab \infty 0$.

mult. per Arithm. Progr. $\frac{3}{3} \quad \frac{3 \cdot 2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{0}{0}$.

& fit, ut ante, $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x \infty 0$, seu

$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \infty 0$.

2. Si Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, unam tantum incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, operatio institui poterit, hoc pacto:

Primò deleo omnes quantitates cognitæ. Deinde si reliquæ quan-

quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata Denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum designantem, ac unumquodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitæ istius Membri, postquam ab eodem numero est ablatum dimensionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc Membrum Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejusmodi producta simul $\infty 0$, ut ex sequentibus exemplis clariùs patebit.

1 Exemplum.

Esto $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \infty$ alicui maximo.

Deletâ quantitate cognitâ ab , reliquisque terminis sub communi Denominatore reductis, obtinebitur

$\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4}{x^3}$.

Mult. num. per $-3, -2, +2, +1, +1$:

fit $-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4$ mult. per $x^3 \infty 0$.

& dividendo per x^3 ,

$-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4 \infty 0$.

Iuxta generalem Methodum

est $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \infty 0$,

id est, $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4 + abx^3 \infty 0}{-z}$;

Seu, ordinatâ æquatione, $x^5 - ax^4 + abx^3 + 5a^3x + 4aab^3 \infty 0$.

$+b - z$

$+2, +1, 0, -1, -2, -3$
 $2x^5 - ax^4 * * - 10a^3x - 12aab^3 \infty 0$.

$+b$

2 Exemplum.

Esto $\frac{baax + aaxx - bx^3 - x^4}{baa + x^3} - a + x \infty$ alicui maximo,

De-

Deletâ quantitate cognitâ a , & reliquis sub communi divisore
reductis, habebitur $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3}$.

Porro pro $\frac{+1, +2, +3}{2baax + aaxx - bx^3}$, scribo $2baax + 2aaxx - 3bx^3$ in baa } ∞
 $\frac{-2, -1, 0}{2baax + aaxx - bx^3}$, scribo $-4baax - aaxx$ in x^3 }

Divisis per aax , habebitur $\frac{2baa + 2aax - 3bxx \text{ in } b}{-4bx - xx \text{ in } xx}$ } ∞

adeoque $-x^4 - 4bx^3 - 3bbxx + 2aabx + 2bbaa \infty$.

Sic & si fuerit $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3 + 2bxx - 3aax - c^3} \infty$ alicui maximo,

Pro $\frac{-2, -1, 0, -3}{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}$, scribo $-4baax - aaxx - 3a^4$ in $4x^3$ }

pro $\frac{-1, 0, +1, -2}{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}$, scribo $-2baax - bx^3 - 2a^4$ in $2bxx$ } ∞

pro $\frac{0, +1, +2, -1}{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}$, scribo $+aaxx - 2bx^3 - a^4$ in $-3aax$ }

pro $\frac{1, 2, 3, 0}{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}$, scribo $+2baax + 2aaxx - 3bx^3$ in $-c^3$ }

Iuxta generalem Methodum

est $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty z$

vel $2baax + aaxx - bx^3 \infty baa z + x^3 z$

seu $-bx^3 + aaxx + 2baax - baa z \infty 0$

$-z$

Arith. Prog. $\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3bx^3 + 2aaxx + 2baax \infty 0, \text{ hoc est,} \\ -3z \\ -3bx^3 + 2aaxx + 2baax \infty z \end{matrix}$

ac proinde $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty \frac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$

& ut supra, $x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa \infty 0$.
Patet

Patet itaque, duas has speciales Regulas in generali illa Me-
thodo esse fundatas respectu hujus Progressionis 0, 1, 2, 3, 4, &c.
multiplicando scilicet terminum, in quo incognita quantitas x
non reperitur per 0; ubi x unam habet dimensionem per 1; &
sic porro. Sed in genere notandum, quod, dum operando juxta
generalem Methodum Progressionem illam Arithmetica ad li-
bitum sumere licet, semper is terminus æquationis, quem libue-
rit, tolli possit, multiplicando illum tantum per 0. Atque ita va-
lor ipsius z per unam Progressionem simplicius obtineri poterit,
quàm per aliam: ut, si in præcedenti exemplo, ubi multiplicavi-
mus per 3, 2, 1, 0, multiplicassemus per 0, 1, 2, 3, obtinuisset-
mus $aaxx + 4baax - 3baaz \infty 0$, seu $\frac{xx + 4bx}{3b} \infty z$.

Vnde apparet, ipsam quantitatem z (sive maximum vel mi-
nimum), si x cognita supponatur, inveniri atque exprimi posse
multis diversis modis, è quibus faciliores pro Constructione eli-
gere licebit: Aut si z cognita supponatur, poterit x totidem di-
versis modis inveniri. Porro considerando z & x , ut incognitas,
poterimus ad alterutram tollendam æquationem instituere inter
duos ex simplicissimis valores: ut, in superiori exemplo, inter
 $z \infty \frac{-3bxx + 2aax + 2baa}{3xx}$ & $z \infty \frac{xx + 4bx}{3b}$.

3. Si termini Algebraïci, Maximum aut Minimum
designantes, plures unâ quantitate incognitâ includunt,
suppono ipsos ∞z ; & per hanc æquationem & per cæteras datas,
seu quæ ex natura Problematis manant, (quæque semper simul, si
omnes Problematis conditiones includunt, tot numero existunt,
quot incognitæ quantitates, unâ exceptâ, habentur, nimirum si
unum tantum Maximum aut Minimum inter infinitas magnitu-
dines quæritur, non autem inter infinita Maxima;) reduco æqua-
tiones omnes ad unam, in qua necessariò duæ quantitates inco-
gnitæ continebuntur, & inter eas z . Cumque tunc sola z ad Ma-
ximi vel Minimi inventionem nota esse debeat, manifestum est in
eum finem duntaxat concipiendum esse, alteram quantitatem in-
cognitam duas æquales radices habere.

Sumamus, exempli gratiâ, tres æquationes, quibus maximam
latitudinem curvæ determinavi, quales illæ pag. 498 Exercita-
tionum tuarum Mathematicarum reperiuntur; excepto tantum

quòd Maximum hîc appellem z , & quod ibi z nominatum est, hîc appellem v .

$$1^{\text{ma}} \text{Æq. } y^3 - n y x + x^3 \infty 0$$

$$2^{\text{da}} \text{Æq. } v - x \infty y$$

$$3^{\text{tia}} \text{Æq. } \frac{1}{2} v - y \infty z \text{ maximo.}$$

Substituto valore ipsius y 2^{da} æquationis in locum ipsius y 1^{ma} & 3^{tia}, habebitur

$$\text{pro } 1^{\text{ma}} \text{Æq. } v^3 - 3 v v x + 3 v x x \infty v n x - n x x$$

$$\text{\& pro } 3^{\text{tia}} \text{Æq. } x \infty z + \frac{1}{2} v.$$

Subrogato autem valore ipsius x 3^{tia} æquationis in ejusdem locum in 1^{ma}, fiet pro

$$1^{\text{ma}} \text{Æq. } \frac{1}{4} v^3 + 3 v z z \infty \frac{1}{4} n v v - n z z$$

$$\text{vel } \frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 z z v + n z z \infty 0.$$

Atque hæc quidem æquatio jam sola relicta est, in qua igitur ut ultimæ conditioni Problematis satisfiat, hoc est, ut ea ita determinetur, ut z fiat Maximum, multiplico (quemadmodum ibi factum fuit) eandem æquationem

$$\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 z z v + n z z \infty 0$$

per Arith. Prog. 3, 2, 1, 0:

$$\text{obtineoque } \frac{3}{4} v^3 - \frac{1}{2} n v v + 3 z z v \quad * \quad \infty 0$$

$$\text{vel } 3 z z \infty \frac{1}{2} n v - \frac{3}{4} v v.$$

Hinc subrogato valore ipsius $z z$, per hanc æquationem invento, in ejus locum in præcedenti $\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 z z v + n z z \infty 0$, obtinebitur $\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + \frac{1}{2} n v v - \frac{3}{4} v^3 + \frac{1}{6} n n v - \frac{1}{4} n v v \infty 0$

$$\text{hoc est, } -\frac{1}{2} v^3 + \frac{1}{6} n n v \infty 0$$

$$\text{vel } v v \infty \frac{1}{3} n n.$$

Si Arithmetica Progressio fuisset 0, 1, 2, 3, invenissemus $3 z z \infty \frac{n v v}{8 v + 4 n}$; si 2, 1, 0, -1, habuisssemus $3 z z \infty \frac{\frac{3}{2} v^3 - \frac{3}{4} v v n}{n}$

Et siue valor ipsius $z z$, per utramlibet harum æquationum inventus, in præcedenti subrogetur æquatione $\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 z z v + n z z \infty 0$, siue alter alteri adæquetur, ponendo $\frac{1}{2} n v - \frac{3}{4} v v$

$$\infty \frac{n v v}{8 v + 4 n}, \text{ vel } \infty \frac{\frac{3}{2} v^3 - \frac{3}{4} v v n}{n}, \text{ obtinebitur semper } v v \infty \frac{1}{3} n n.$$

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factæ hîc parum inter

inter se differant, potest tamen sæpe numero, ut supra monui, contingere, ut una multo prolixior ac difficilior sit quàm alia, quo quidem casu commodiorem viam, quæ facîle perspicitur, eligere satius erit.

Cæterum notandum, ultimam hanc æquationem $\frac{1}{4} v^3 + 3 v z z \infty \frac{1}{4} n v v - n z z$ determinari etiam posse per secundum modum præcedentem. Etenim existente $z z \infty \frac{\frac{1}{4} n v v - \frac{1}{4} v^3}{3 v + n}$, & $z z \infty$ maximo: erit etiam hic valor ipsius $z z$ omnium maximus, ideoque

$$\frac{\frac{1}{4} n v v - \frac{2}{4} v^3 \text{ in } 3 v}{\frac{2}{4} n v v - \frac{3}{4} v^3 \text{ in } n} \infty 0$$

$$\text{div. per } v v. \text{ vel } \frac{\frac{1}{4} n - \frac{2}{4} v \text{ in } 3 v}{\frac{2}{4} n - \frac{3}{4} v \text{ in } n} \infty 0, \text{ id est, } \frac{\frac{3}{4} n v - \frac{6}{4} v v}{\frac{2}{4} n n - \frac{3}{4} n v} \infty 0$$

$$\text{vel } \frac{\frac{2}{4} n n - \frac{6}{4} v v}{\frac{1}{4} n n \infty v v} \infty 0$$

Quoniam verò in multis casibus æquatio ultimò relicta non finit ut valor ipsius z vel $z z$, aut z^3 , &c. in ejusmodi terminis, in quibus ipse z non invenitur, exprimi possit, visum fuit in exempli hujus operatione generalem Methodum indicare.

Atque hîc, Vir Amicissime, multa adhuc dicenda restarent, sed ne rursus epistola mea voluminis instar se extendat, scriptio- nis meæ filum abruptam; præsertim cum id, quod hîc desideratur, non difficile sit ex præcedentibus colligere. At verò ne te lateat, quid hîc desiderari putem, adjungam argumentum tractatus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios usus adornavi, quemque nuper obiter & quasi per transfennam inspe- xisti. In eo autem pertractantur

I. *Methodus de Maximis & Minimis.* Termini verò Algebraici, Maximum vel Minimum designantes, considerantur

1. *Vel respectu cognitionis nostræ, sic ut certi simus in iis Maximum esse comprehensum, si aliquod detur Maximum; aut Minimum, si aliquod Minimum detur.*

Termini autem hi Algebraici in se continent

Vel unam duntaxat incognitam quantitatem, habentem

1. *Vel fractionem nullam, in cuius Denominatore incognita reperitur quantitas.*
2. *Vel fractiones, in quarum Denominatore ipsa reperitur.*

Vel plures unâ incognitâ quantitate, quæ duplices sunt

1. *Vel tot simul cum iis æquationes dantur, seu in natura Problematis includuntur, quot sunt incognitæ quantitates una exceptâ;*
2. *Vel non totidem, aut etiam nullæ.*
2. *Vel respectu nostræ inscientiæ, id est, cum incerti sumus, utrum in iis aliquod Maximum aut Minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur, ipsos autem rursus confidero vel absolutè, vel relativè ad aliquod Problema.*
2. *Ejusdem usus atque utilitas, quæ quidem se longè lateque extendit, ac præsertim ad ea Problemata, quæ aliàs difficulter ad æquationem revocari possunt. Cujus exemplum illustre est Determinatio omnium æquationum, quæ res adeò generalis atque utilis, hujus Methodi tantum corollarium existit.*

Vale, Vir Amicissime, & me amare perge.

Dabam Amsteladami
6 Cal. Februar.
A° 1658.

Tui

Observantissimum

IOHANNEM HVDD.

F I N I S.

DE
TRANSMUTATIONE
CURVARVM LINEARVM
IN RECTAS.

Clarissimo Viro

D. FRANCISCO à SCHOOTEN
HENRICVS van HEVRAET
S. D.

Cum nuperrimè ex tuis ad me datis, Vir Clarissime, intellexerim, desiderio te teneri videnti Methodum à me inventam, cuius beneficio complures curvæ lineæ (ut tibi indicavit D. Huddenius) in rectas possunt transmutari: non omitendum duxi, quin eandem tibi ocyùs transmitterem, tuoque inprimis iudicio exponerem. Verùm præmonere te volui, eam à me tunc temporis excogitatam esse, cum iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quæ ea de re dici queunt, perpendere, nec quæ ante discessum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, sed me totum aliis studiis applicare constitui, adeò ut vix quicquam prælo dignum me scribere posse confidam. Attamen ut petitioni tuæ utcunque satisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde carum est: visum fuit in memoriam revocare, ac breviter conscribere, quæ ante circa hanc rem meditatus sum, ea-que paucis hîc subicere. Quæ, si Mathematicis non displicitura iudices, Commentariis tuis adungere poteris.

Dat. Salmurii, die 13
Ianuarii. A° 1659.

Vale, & perge amare
ex asse tuum

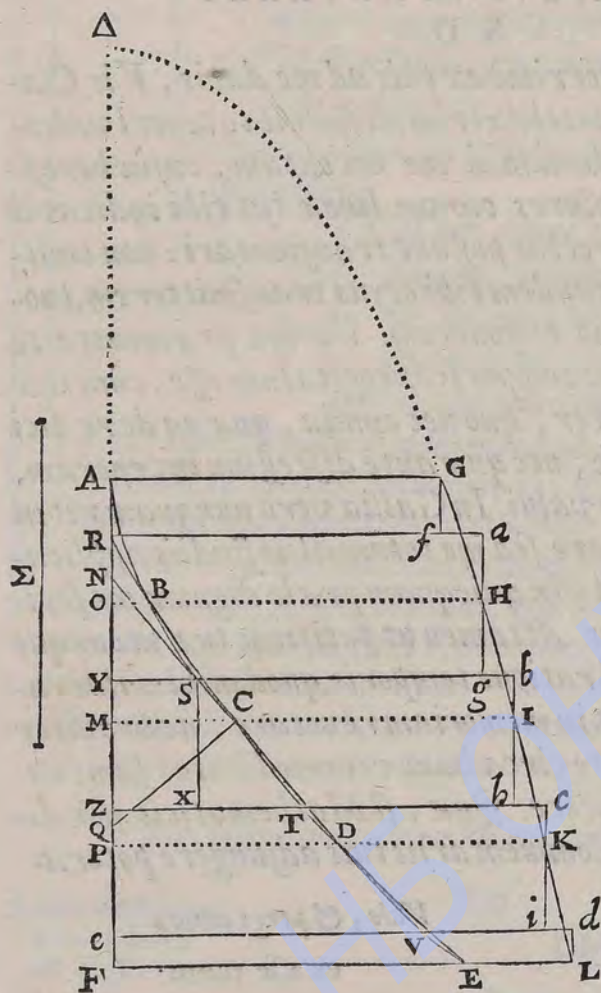
Huddenius noster te
salutat diligenter.

HENRICVM van HEVRAET.

Ttt 3

Si

Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratia, $AB C D E$, $G H I K L$, & recta $A F$, ejus naturæ, ut, (ductâ ex puncto M , in linea $A F$ pro libitu assumpto, perpendiculari $M I$, secante datas curvas in C & I , uti & $C Q$ perpendiculari ad curvam $A B C D E$,) $M C$ sit ad $C Q$, sicut linea aliqua data Σ ad $M I$: erit superficies $A G H I K L F$ æqualis rectangulo comprehenso sub data linea Σ & alia recta æquali curvæ $A B C D E$.



Dividatur linea
A F in partes quot-
cunque, verbi gra-
tiâ, in punctis O,
M, & P, ducantur-
que perpendicula-
res O H, M I, P K,
secantes curvam
A B C D E in pun-
ctis B, C, & D, at
curvam G H I K L
in punctis H, I, &
K; & per puncta
A, B, C, D, & E
agantur tangentes,
quæ sibi mutuò oc-
currant in R, S, T,
& V; & per hæc
puncta ducantur li-
neæ R a, Y b, Z c,
e d perpendiculares
ipsi A F; & per
puncta G, H, I, K,
& L agantur lineæ
ipsi A F parallelæ,
secantes R a in f &
a, Y b in g & b, Z c
in

in b & c , e d in i & d ; denique ex S ducatur SX parallela lineæ AF , producaturque tangens TS usque in N .

Propter rectum angulum NCQ , erit CM ad CQ , ut MN ad NC . Atqui MN est ad NC , ut SX ad ST . Quare erit SX ad ST , ut CM ad CQ . Et quia CM est ad CQ , ut Σ ad MI , erit & SX ad ST , ut Σ ad MI , ac proinde rectangulum sub SX five YZ & MI five Yb æquale rectangulo sub ST & Σ . Eodem modo demonstrabitur, rectangulum ce esse æquale $\square^{lo}$ sub TV & Σ , & $\square dF \propto \square VE$, Σ , & $\square aY \propto \square^{lo}$ sub RS & Σ . Quapropter omnia hæc rectangula simul sumpta æqualia erunt rectangulo sub Σ & alia recta æqualia omnibus tangentibus simul sumptis. Vnde cum illud verum sit, quocunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis constans, si eorum numerus in infinitum augeatur, desinat in superficiem $AGHIKLF$, ac tangentes similiter in lineam curvam $ABCDE$, liquet superficiem $AGHIKLF$ æqualem esse rectangulo sub Σ & recta æquali curvæ $ABCDE$. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ investigari possit, sequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva A B C D E ejus naturæ, ut, sumpto in linea A F pro libitu puncto M, ductâque perpendiculari M C, si A M vocetur x , & M C vocetur y , semper yy sit $\propto \frac{x^3}{a}$. Deinde positis A Q $\propto f$, C Q $\propto v$, & M I $\propto z$: erit Q M $\propto f - x$, & ejus quadratum $\propto ff - 2fx + xx$. Cui si addatur quadratum ex M C, hoc est, yy sive $\frac{x^3}{a}$, inveniatur $ff - 2fx + xx + \frac{x^3}{a} \propto vv$.

Propter duas æquales radices

mult. juxta meth. Huddenii per $\begin{array}{ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 0, \\ \hline & & & & & & \end{array}$
 & inveniatur $-2 \int x + 2 x x + \frac{3 x^3}{3} \infty 0.$

Vnde A Q five $\infty x + \frac{3xx}{2a}$. à qua si subtrahatur A M ∞x , re-
manebit M Q $\infty \frac{3xx}{2a}$, cujus quadratum est $\frac{9x^4}{4a^2}$. cui adde $\square$ C M
feu $\frac{x^3}{a}$, & proveniet $\square$ C Q $\infty \frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}$. Erit jam ut C M $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$
ad C Q $\sqrt{\frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}}$, ita cognita aliqua linea, puta $\frac{1}{3}a$, (licet
enim

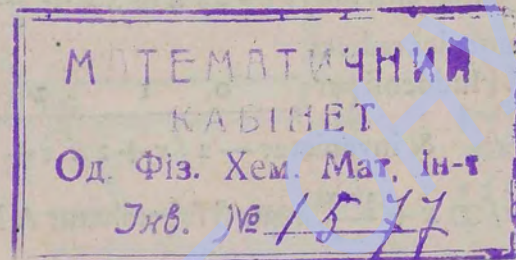
enim eam pro libitu assumere) ad $MI \propto z$, eritque $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}aa}$.
 Id quod arguit, lineam $GHIKL$ esse Parabolam, cujus vertex
 est in Δ , existente $A \Delta \propto \frac{4}{9}a$, & latere recto $\propto \frac{1}{4}a$. ac proinde
 longitudo lineæ curvæ $ABCDE$ est $\sqrt{\frac{y^3}{a} - \frac{2}{27}a}$, existente
 $\Delta F \propto v$.

Similiter si loco $yy \propto \frac{x^3}{a}$ ponatur hæc æquatio $y^4 \propto \frac{x^5}{a}$, aut
 $y^6 \propto \frac{x^7}{a}$, aut $y^8 \propto \frac{x^9}{a}$, atque sic porrò in infinitum: invenietur
 semper superficies $AGHIKLF$ ejus naturæ ut quadrari possit,
 ac proinde omnes hæ curvæ in rectam sunt permutabiles.

Si verò $ABCDE$ sit Parabola, cujus axis AG , & latus re-
 ctum $\propto a$: invenietur $MQ \propto \frac{2x^3}{aa}$, & ejus quadratum $\propto \frac{4x^6}{a^4}$. cui
 adde quadratum CM , & habebitur $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ pro $\square CQ$. Hinc
 ut $CM \frac{xx}{a}$ ad $CQ \sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}}$, sic cognita aliqua linea, puta a ,
 ad $MI \propto z$: eritque $z \propto \sqrt{4xx + aa}$, & linea $GHIKL$ Hy-
 perbola, cujus axis linea AG , centrum punctum A , latus re-
 ctum $\propto \frac{1}{2}a$, & transversum $\propto 2a$.

Quod ipsum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri
 non posse, quin simul inveniatur quadratura Hyperbolæ, & vi-
 ce versâ.

F I N I S.



НБ ОНУ імені І.І.Мечникова

106

2074 106 3.3.82
 794
 Олександр Радман 9 Вол

НБ ОНУ імені І. Мечникова