НБ ОНУ імені І.І.Мечникова

НБ ОНУ імені І.І.Мечникова

ІСНН
№ 3626

Sintchenco

J. Tintchenco

RENATI DES-CARTES GEOMETRIA.

EDITIO TERTIA,

Multis acceſſionibus exornata, & plus alterâ ſui parte adaucta.

МАТЕМАТИЧНИЙ КАБІНЕТ
Од. Фіз. Хем. Мат. Ін-т
Інв. № 1577

НБ ОНУ імені І.І. Мечникова

Primus inaccessum qui per tot sæcula verum
Eruit è tetris longæ caliginis umbris,
Mysta sagax, Natura, tuus, sic cernitur Orbi
Cartesius. Voluit sacros in imagine vultus
Jungere victuræ artificis pia dextera famæ,
Omnia ut aspicerent quem sæcula nulla tacebunt.

CONSTANTINI HVGENII F.LY

GEOMETRIA,

à

RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Vnà cum NOTIS

FLORIMONDI DE BEAVNE,

In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN,

in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

1683

CATALOGVS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

RENATI DES CARTES Geometria, tribus libris comprehensa.

FLORIMONDI DE BEAVNE in illam NOTÆ BREVES.

FRANCISCI à SCHOOTEN in eandem Commentarii recogniti & aucti.

—— Ejusdem APPENDIX, de Cubicarum Æquationum Resolutione.

—— item ADDITAMENTVM, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis; & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis.

JOHANNIS HVDDENII Epistolæ duæ, quarum altera de Æquationum Reductione, altera de Maximis & Minimis agit.

HENRICI VAN HEVRAET Epistola, de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheseos Vniversalis, seu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum.

FLORIMONDI DE BEAVNE duo Tractatus posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

Нац. та університетська бібліотека Одеського університету
Ин-27272

SERE-

SERENISSIMÆ PRINCIPI

ELISABETHÆ.

FRIDERICI BOHEMIÆ REGIS, Comitis Palatini, & Electoris Sacri Romani Imperii, Filiæ natu maximæ.

SERENISSIMA PRINCEPS,

CVm ea Celsitudinis tuæ sit claritas, ut maximorum hominum monumenta, tanti nominis splendore illustrata, in lucem jam pridem prodierint; quid mirum, si & ego lucubrationes hasce Celsitudini tuæ consecrandas esse duxerim? Nam, ut reliquas virtutes, quæ in Te eximiæ sunt, taceam, tantâ cum prudentiâ singularis ingenii tui perspicacia conjun-

cta

cta eſt, ut, ſpretis illis artibus & ſcientiis, quæ inanis potiùs gloriæ, altercandique ſtudio, quàm veri inquiſitionis causâ addiſcuntur, eas ſolas amplexa fueris, quæ placidè philoſophantes, nihilque niſi evidens admittentes, continuâ ſimplicium rationum ſerie ad abſtruſiſſimarum rerum cognitionem perducunt. Vnde fieri non potuit, quin ad ſublimem illam ſapientiam, quam in Te ſuſpicimus ac veneramur, feliciſſimè tempore breviſſimo perveneris. Singularem tuum in Mathematicis profectum non eſt quòd hic commemorem; cum majorum tuorum exemplo, laudatiſſimæque memoriæ Principum, qui ſanguinis vinculo tibi fuêre juncti, atque ex harum

harum artium cultura immortalem ſibi gloriam reportarunt, eas non minùs colas, quàm hæreditatis jure in iiſdem excellas. Quippe quæ in earum adyta ita penetraſti, ut Artem Analyticam, ipſam in Mathematicis inveniendi viam, in qua ingenii præſertim acumen requiritur, optimè cognoveris, eâque ratione, quantùm incomparabilis ingenii tui induſtria præſtare valeat, ſatis ſuperque oſtenderis. Quæ cum ita ſint, atque inſuper in me ipſo compertum habeam, quanto favore Matheſeos cultores proſequaris; jure meritiſſimo effecêre, ut publicum hoc tanti beneficii, tantorumque meritorum tuorum teſtimonium extare vellem, atque hoc qualecun-

HB OPVIMEHI I.I. Mequroba

lecunque, ſive grati animi monumentum, ſive obſervantiæ in Celſitudinem tuam meæ pignus, offerrem. Quod, ut ſolito favore excipiat, ſubmiſsè rogo,

SERENISSIMÆ CELSITVDINIS TVÆ

Dabam Leydæ, XII Cal. Julii
Anni CIↃ IↃC XLIX.

Devotiſſimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCVS à SCHOOTEN

LECTORI

S.

NOvennium eſt, & quod excurrit, Benevole Lector, cùm Geometria hæc Nobiliſsimi atque incomparabilis Viri RENATI DES CARTES, *quam vernaculâ linguâ anno 1637 inter Philoſophiæ ſuæ ſpecimina in lucem edidit, è Gallica à me in Latinam linguam verſa commentariusque illuſtrata primùm prodiit. Interea autem temporis cum operam, quum hoc in negotio collocâram, Viris literatis & ingenioſis pluribus, quos ſtupenda Authoris noſtri eruditio latère non potuit, haud ingratam fuiſſe compererim; non potui non, diſtractis exemplaribus, cùm novam editionem Typographus adornaret, quin honeſtæ ipſius petitioni locum darem, eaque flagitanti concederem, quæ ad Operis hujus commendationem illuſtrare vel addere valebam. Quid hìc autem nunc demum præſtiterim, ſi candido Lectoris judicio relinquam, facilè ex utriuſque editionis inter ſe collatione dignoſcet. Cujus etiam laboris nunquam me pœnituit, tum quòd regiam hìc ad pœnitiora univerſæ Matheſeos adyta viam, quam cuique ingredi licet, patere ſciebam, tum quòd hanc ſummi Viri Geometriam publici intereſſe, & è re eorum fore, qui Mathematicis operam dant, in me ipſo cum aliis ſtrenuis Methodi noſtræ cultoribus, non ſine voluptate indies experiebar. Verùm enimvero cum illius utilitas tanta ſit ut, ſi eam vel paucis deſcriberem, paginæ, quæ præfationi hìc inſervient, deficerent, indicaſſe ſuffecerit, vix quicquam in univerſa Matheſi ita difficile aut arduum occurrere poſſe, quò non inoffenſo pede per hanc Methodum penetrare liceat, quodvè Geometriæ hujus legibus non ſubjici ſolvique poſsit. Accedit, quòd nullis Problematum finibus aut numero coërceatur, ſed fructum, qui vel à Veterum Analyſi vel à Recentiorum Algebra exſpectandus erat, omnem in ſe contineat, nec quicquam hìc deſiderari poſſe videatur; atque adeò fruſtra ſit, quòd de aliâ ſibi quis exoptandâ Methodo, ad Matheſeos culturam perfectionemque in*

 poſte-

НБ ОНУ імені І.І. Мечникова

posterum cogitet. Quippe hæc illa est, cujus exercitio Author mentem excolendo, non modò in Mathematicis Scientiis summas difficultates adolescens adhuc superavit, aliisque in inveniendo palmam præripuit; sed tantam quoque ingenii promptitudinem facilitatemque sibi deinceps conciliavit, ut primus clavem, quà mysteria Universi reseranda sunt, & cujus ope natura naturæ ac lux orbi magis magisque redditur, invenerit: adeò ut eorum, quæ lumine naturali cognosci queunt, nihil tam abditum, densisque immersum fuisse tenebris, putandum sit, quod ingenii sui felicitate eruere ipse desperasset. Versionem quod attinet, cum fidelissimus ubique verborum interpres, salvo rerum pondere, esse studuerim, vix est, quòd censuram aliquorum metuam; præsertim ubi illam ab Authore, cui pro jure integrum fuit suum ubique sensum vel interpretari vel clariorem reddere, postea recognitam fuisse sciverint. Verùm cum hæc Geometria à paucis, cum propter eruditam brevitatem, tum propter quæstionum, quæ inibi pertractantur, difficultatem, non sine abstrusa attentione ac indefesso studio per se intelligi potuerit, periculum erat, ne laborum impatientes Lectores, cùm metam vel ipsi ignorarent, vel improbi negarent, arenam desererent. Conscius itaque ego illam non in eum finem ab Authore conscriptam esse, quasi ipsius Methodum ex ea unusquisque quàm facillimè haurire posset, sed tantum ut eximia aliquot ejus specimina ederet: operæ pretium duxi in commune consulere, & difficiliora loca passim à me explicata uberioribus hinc inde exemplis altiùs illustrare. Scopum Authoris quod spectat, eum hoc loco exponere haudquaquam duxi necessarium, cum cujusque libri argumentum commentariis meis præmiserim, veterumque circa Geometriæ Problemata opiniones ac decreta, scitu non injucunda, ibidem explicaverim, quò operis summam atque adeò commentariorum nostrorum usum breviter complecterer. Porrò ne quid deesse videretur, unde hæc Geometria majorem adhuc lucem sortiretur, additæ etiam sunt Notæ a Clarissimo atque Amplissimo Viro D. FLORIMONDO DE BEAVNE, *Consiliario Blesensi, in eandem olim Gallicè conscriptæ. Quæ eodem modo in Latinam linguam à me translatæ, postquam huic Geometriæ primò ejus permissu essent annexæ, dein ab ipso recognitæ & emendatæ, nunc denuo vel hoc nomine, ni fallor, acceptiores sunt accessuræ. Præterea, quò unusquisque instructus iis, quibus ad adyta ejus Methodi perducatur, se ad ipsam Geometriam legendam accingere posit; haud omittendum duxi, quin simul*

simul Introductionem nostram, quam Vir Clarissimus, mihique amicissimus, D. ERASMIUS BARTHOLINUS, *nunc Medicinæ & Matheseos in Academia Hafniensi Professor Regius, in eum finem olim conscripsit ac anno 1651 publici juris fecit, prout illam uterque jam demum recognovimus, editioni huic adjungerem. Quo quidem negotio futurum spero, ut, quod propriis condimus horreis, ex aliena non opùs sit messe emendicare, licèt Author antehac, tum ad suam Geometriam intelligendam Lectorem in aliis Geometriæ libris jam versatum præsupposuerit, ne quæ inibi dicta sunt & demonstrata repetere cogeretur; tum etiam ad suam Methodum addiscendam leviorem vulgaris Algebræ cognitionem requisiverit. Nec enim video, quid impræsentiarum, post mediocrem in Arithmeticæ & Geometriæ elementis exercitationem, calculique, eâdem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat. Et quanquam optandum fuisset, hæc omnia ab Authore ipso fuisse præstita; quippe qui tantùm regulas suæ Methodi maxime necessarias hìc exposuit; attamen quia animadvertit laborem atque industriam, quam Lector in investigandis reliquis, demonstrandisque iis, quæ tantùm intento digito indicavit, impenderet, præcipuum esse in hac Scientia, quo cujusque ingenium excolatur: a semetipso impetrare non potuit, ut ea fusius pertractaret. Hinc cum successu temporis inter eos, quibus hanc Geometriam sedulò versare ejusque arcana penitissimè rimari cordi fuit, non pauci reperti sint, qui, Authoris vestigiis arctè insistentes, præclara multa, ad excellentiam illius Methodi plurimùm facientia, invenerint, omnesque inter, præ copia inventorum eorumque dignitate, subtilissimus ac præstantissimus* D. IOHANNES HVDDENIVS, *Amstelodamensis, amicus meus integerrimus, primas facilè obtineat: visum fuit ea, quæ ab ipso de Æquationum Reductione ac de Maximis & Minimis, maximam partem Belgicè conscripta, inter alia per literas mihi sunt communicata, postquam à me Latinè essent reddita, Geometriæ huic pariter subjungere. Quibus tanquam colophonem addere placuit Epistolam, quam acutissimus, mihique ut* HVDDENIO *nostro conjunctissimus,* D. HENRICVS VAN HEVRAET, *Harlemensis, Salmurio nuper ad me transmisit. In qua cum brevem exponat Methodum, inter peregrinandum à se novissimè excogitatam, transmutandi*

demonſtrationum amuſsim, omni ambage ac ingenii defatigatione evitatâ, ablegarem. Quibus quidem omnibus, ſi ſingulis ſatisfacere non licet, habeo ſaltem de quo abundè mihi gratuler, quòd noſtros in hoc ſtudiorum genere labores rerum æſtimatoribus haud diſplicuiſſe nec diſplicere ſciam. Vale. Scripſi Leidæ, anno reparatæ ſalutis CIↃ IↃCLIX.

INDEX MATERIARVM, IN HAC GEOMETRIA CONTENTARVM.

LIBER I.

De Problematis, quæ conſtrui poſſunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas. Pag. 1

Quomodo Geometricè fiat Multiplicatio, Diviſio, & radicis Quadratæ Extractio. 2

Quo pacto notis uti liceat in Geometria. ib.

Quomodo ad Æquationes perveniendum ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviunt. 4

Quænam ſint Problemata Plana, & quomodo ipſa reſolvantur. 5 & 6

Quæſtio deſumpta ex Pappo. 7

Reſponſum ad Quæſtionem Pappi. 11

Quomodo ponendi ſint termini in hac Quæſtione, ut ad Æquationem deveniatur. 13

Quo pacto cognoſcatur, Problema hoc eſſe planum, quando illud in quinque tantùm lineis eſt propoſitum. 15

LIBER II.

De natura linearum curvarum.

Quænam ſint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi poſſunt. 17

Ratio diſtinguendi eas in certa genera: Et cognoſcendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum. 21

Continuatio explicationis Quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata. 24

Solutio hujus Quæſtionis, cùm ipſa in 3 aut 4 tantùm lineis eſt propoſita. 25

Demonſtratio ejuſdem ſolutionis. 32

Quid intelligendum ſit per loca Plana, & Solida: Et ratio ipſa inveniendi. 34

Quænam ſit prima & ſimpliciſſima linearum curvarum, Veterum Quæſtioni inſervientium, cùm ipſa Quæſtio in 5 lineis eſt propoſita. 35

Quænam curvæ lineæ in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur, inveniendo plura earum puncta. 38

Quænam etiam illæ ſint, quæ ope fili deſcribuntur, & ibidem recipi poſſunt. 39

Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, ſufficiat ſcire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum, & modum ducendi lineas rectas, quæ ipſas ſecent in omnibus illis punctis ad angulos rectos. 40

Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ ſecent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos. ibid.

Exemplum hujus operationis in Ellipſi; Et in Parabola ſecundi generis. 41 & 42

Aliud exemplum in Ellipſi ſecundi generis. 42

Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoide. 49

Explicatio quatuor generum novarum Ovalium, Opticæ inſervientium. 50

Proprietates harum Ovalium, concernentes reflexiones & refractiones. 55

Demonſtratio harum proprietatum. 57

Quomodo vitrum fieri poſſit, cujus una ſuperficies tam convexa aut concava ſit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto prodeunt, colligat rurſus in altero dato puncto. 61

Quomodo aliud fieri poſſit, quòd idem præſtet, cujus convexitas unius ſuperficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius. 63

НБ ОНУ імені І.І. Мечникова

Quomodo id omne, quod hic de lineis curvis, in plana superficie descriptis, dictum fuit, applicari possit ad illas, quæ describuntur in spatio trium dimensionum sive superficie aliqua curva. 65.

LIBER III.

De constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

Quænam curvæ lineæ adhiberi possint ad constructionem cujusque Problematis. 67
Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium. ibid.
De natura Æquationum. 69
Quot haberi possint radices in qualibet Æquatione. ibid.
Quænam sint falsæ radices. ibid.
Quomodo diminui possit dimensionum numerus alicujus Æquationis, quando cognoscitur aliqua ex ejus radicibus. ibid.
Quâ ratione indagari queat, num data quantitas sit valor alicujus radicis. 70
Quot haberi possint veræ radices in qualibet Æquatione. ibid.
Quomodo faciendum sit, ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falsæ. ibid.
Quomodo augeri vel diminui possint Æquationis radices, ipsis non cognitis. 71
Quòd, augendo veras radices, falsæ diminuantur, & contra. 72
Quâ ratione secundus terminus Æquationis tolli possit. ibid.
Quo pacto fiat ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falsæ. 74
Quomodo faciendum sit, ut loca omnia Æquationis sint completa. ibid.
Quomodo multiplicari vel dividi possint Æquationis radices, ipsis incognitis. 75
Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros. ibid.
Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ. 76
Quòd radices tam veræ quàm falsæ possint esse reales, vel imaginariæ. ibid.
Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema est Planum. ibid.
Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem. 77
Quænam Problemata sint Solida, Æquatione existente Cubica. 79
Reductio Æquationum quatuor dimensionum, cùm Problema est Planum. Et quænam illa sint, quæ Solida sunt dicenda. ibid.
Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam. ibid.
Exemplum ostendens usum harum reductionum. 82
Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt. 84
Modus generalis construendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimensionum. 85
Inventio duarum mediarum proportionalium. 91
Ratio dividendi angulum in tres partes æquales. ibid.
Quòd omnia Solida Problemata reduci possint ad hasce duas constructiones. 92
Modus exprimendi valorem radicum omnium, Æquationum Cubicarum, ac per consequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt. 94
Cur Problemata Solida construi non possint absque sectionibus Conicis, nec quæ magis composita sint sine aliis lineis, magis compositis. 96
Modus generalis construendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, sex dimensiones non excedentem. 97
Inventio quatuor mediarum proportionalium. 104.

RENA-

RENATI DESCARTES GEOMETRIÆ

LIBER PRIMVS.

De Problematibus, quæ construi possunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

Mnia Geometriæ Problemata facilè ad hujusmodi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionem, opùs tantùm sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere.

Et quemadmodum Arithmetica tota ex quatuor aut quinque solummodo operationibus constat, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio, (quæ pro quadam Divisionis specie haberi potest:) Ita similiter in Geometria, quod spectat ad lineas, quæ quæruntur, præparandas, ut cognitæ fiant, aliud faciendum non est, quàm ut vel ipsis addantur, vel ab iisdem subtrahantur aliæ; vel etiam si una sit, (quæ vocetur unitas, ut eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet) atque præter hanc adhuc aliæ duæ, ut ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut est altera ad unitatem, quod idem est, atque Multiplicatio; vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione; vel denique, ut inter unitatem & aliam quandam rectam inveniantur una, aut duæ, plu-

Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas.

A

B, C

D

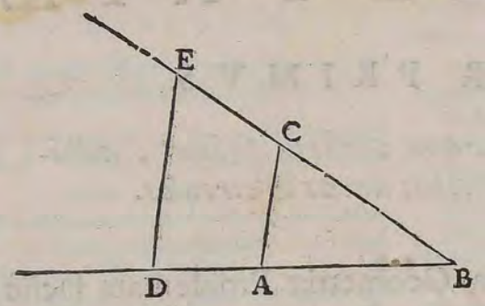
E

 resve

Quomodo Geometrice fiat.

resve mediæ proportionales, quod idem est, quod radicis Quadratæ, aut Cubicæ, &c. extractio. Neque enim hosce Arithmetices terminos, ut faciliùs intelligi possim, in Geometriam introducere verebor.

Multiplicatio.

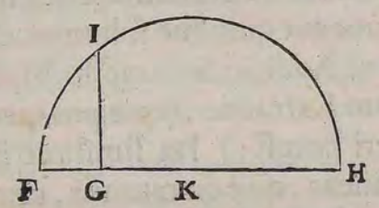


Sit, exempli gratiâ, A B unitas, oporteatque multiplicare B D per B C: jungo puncta A & C, ductâque D E parallelâ A C, erit B E productum hujus multiplicationis.

Divisio.

Vel si dividenda sit B E per B D, junctis punctis E & D, duco A C parallelam ipsi D E, eritque B C quotiens hujus Divisionis.

Extractio radicis Quadratæ.



Vel denique si ex G H extrahere oporteat radicem Quadratam, adjungo ipsi in directum lineam rectam F G, quæ unitas est; divisâque F H bifariam in puncto K, centro K intervallo F K seu K H describo circulum. quo facto, erit G I, quæ ex puncto G perpendicularis ducitur super F H usque ad I, radix quæsita.

Quo pacto notis uti liceat in Geometria.

Nihil hîc de radice Cubicâ, nec de aliis dico, quòd de iis in sequentibus commodiùs sim acturus.

At verò sæpe non est opùs, hasce lineas ita in charta ducere, sed sufficit illas litteris quibusdam designare, singulas singulis. Vt ad addendam lineam B D lineæ G H, voco unam a & alteram b, scriboque $a + b$; Et $a - b$, ad subtrahendam b ex a; Et ab, ad multipli-

tiplicandam unam per alteram; Et $\frac{a}{b}$, ad dividendam a per b; Et aa, seu a^2, ad multiplicandam a in se; Et a^3, ad eandem adhuc semel multiplicandam per a, atque ita in infinitum; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, ad extrahendam radicem Quadratam ex $a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, ad extrahendam radicem Cubicam ex $a^3 - b^3 + abb$, & sic de cæteris.

Vbi notandum est, quòd per a^2 vel b^3, similesve, communiter, non nisi lineas omnino simplices concipiam, licèt illas, ut nominibus in Algebra usitatis utar, Quadrata aut Cubos, &c. appellem.

Deinde etiam notandum, quòd omnes ejusdem lineæ partes, quando unitas in quæstione non est determinata, æque-multis semper dimensionibus exprimi debeant, ut hîc a^3 tot habet dimensiones, quot abb, aut b^3, ex quibus composita est linea, quam nominavi $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$; Sed hoc non est necesse, cùm unitas determinata existit, quoniam illa ubique subintelligi potest, ubi vel nimis multæ, vel nimis paucæ dimensiones reperiuntur. Vt si radix Cubica sit extrahenda ex F
$aabb - b$, cogitandum est, quantitatem $aabb$ semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem esse multiplicatam.

Cæterùm ut quis facilè linearum nominum recordetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ

A B ∞ 1, hoc est, A B æqualis est 1, seu unitati.
G H ∞ a
B D ∞ b, &c.

G

Quomodo ad Æquationes pervenendum

Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessa-

ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviunt.

ceſſariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ ſunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter lineas haſce cognitas & incognitas facto diſcrimine, evolvenda eſt Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à ſe invicem dependeant, donec inventâ fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim ſunt termini modi unius terminis modi alterius. Iam verò tot hujuſmodi Æquationes invenire oportebit, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ.

GG Vel ſi totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæſtione deſiderantur, omittatur, argumentum eſt, illam non penitùs eſſe determinatam. Tunc enim ad arbitrium aſſumi poſſunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non reſpondet aliqua Æquatio.

GGG Poſtea verò ſi plures adhuc ſuperſint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, ſive illam conſiderando ſeparatim, ſive ipſam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis

H lineis; atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, ſive cubus, ſive quadrato-quadratum, ſive ſurde-ſolidum, ſive quadrato-cubus, &c. æqualis ſit ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione duarum, pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita ſit, reliquæ autem compoſitæ ex quibuſdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, ſive cubum, ſive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto deſigno.

$z \infty b$, aut

$z^2 \infty - az + b^2$, aut

$z^3 \infty + az^2 + b^2 z - c^3$, aut

$z^4 \infty + az^3 + b^2 z^2 - c^3 z + d^4$, &c.

Hoc

Hoc eſt, z, quam pro quantitate incognita ſumo, eſt æqualis ipſi b; aut quadratum à z æquale eſt quadrato ex b, minus producto ex a in z; aut cubus à z æqualis eſt producto ex a in quadratum ipſius z, plus quadrato ex b ducto in z, minus cubo ex c. & ſic de cæteris.

Poſſunt autem ſemper quantitates incognitæ ita ad unam ſolam reduci, atque tum Problema conſtrui per rectas lineas & circulos, aut per ſectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ nonniſi uno duobuſve gradibus magis ſit compoſita.

Sed nolo hîc prolixus eſſe, ut hoc magis particulatim explicem, eò quod vobis voluptatem præriperem diſcendi id ipſum veſtro marte, & utilitatem ingenium veſtrum excolendi, dum vos in eo exercetis, quæ, meo quidem judicio, præcipua eſt, quam ex hac ſcientia percipere licet. Deinde etiam, quòd nihil hîc adeò difficile deprehendam, ut ab illis, qui utcunque in Geometria communi atque Algebra verſati ſunt, & obſervaturi porrò ſunt, quæ tractatu hoc continentur, inveniri non poſſit.

Atque ideo ſufficiet, Vos monere, ſi quis in reducendis hiſce Æquationibus non omiſerit uti diviſionibus omnibus quæ fieri poſſunt, ipſum quoque infallibiliter habiturum ſimpliciſſimos terminos, ad quos quæſtio reduci poſſit. I

Quænam ſint Problemata Plana.

Iam verò ſi illa per Geometriam communem reſolvi poteſt, hoc eſt, utendo tantùm rectis lineis & circularibus, in plana aliqua ſuperficie deſcriptis, poſtquam ultima Æquatio omnino fuerit reducta, relinquetur nil præter quadratum aliquod incognitum, æquale ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione ejus radicis, multiplicatæ per quantitatem ali-

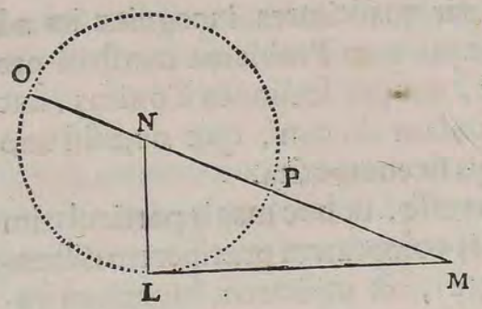
 quam

quam cognitam, & alterius cujusdam quantitatis cognitæ.

Quomodo ipsa resolvantur.

Tuncque radix illa, sive incognita linea, facilè invenitur. Nam si, exempli gratiâ, habeatur

$$zz \infty az + bb,$$

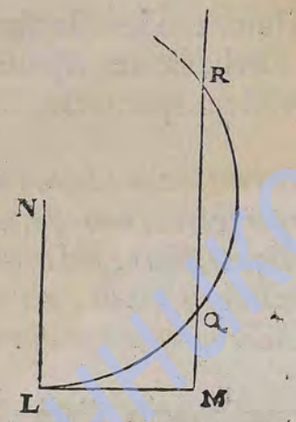


facio triangulum rectangulum N L M, cujus unum latus L M sit æquale b, radici videlicet quadratæ quantitatis cognitæ bb, alterum autem latus L N æquale $\frac{1}{2}a$, semissi nimirum reliquæ quantitatis cognitæ, quæ multiplicata est per z, quam suppono lineam esse incognitam. Deinde productâ M N, base ejusdem
K trianguli, usque ad O, ita ut N O sit æqualis N L: erit tota O M æqualis z, lineæ quæsitæ. Quæ quidem sic exprimitur

$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Quòd si verò habeatur $yy \infty -ay + bb$, atque y sit quantitas, quam invenire oportet, facio rursus idem triangulum N L M, & à base ejus M N aufero N P, æqua-
L lem N L, eritque reliqua P M, æqualis y, radici quæ-
M sitæ. Ita ut fiat $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nec aliter fit, si proponatur $x^4 \infty -ax^2 + b^2$. P M enim esset x^2, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: atque ita de aliis.

Deni-



Denique si habeatur

$$zz \infty az - bb:$$

facio N L æqualem $\frac{1}{2}a$, & L M æqualem b, ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M & N, ut in duobus aliis casibus, sed duco M Q R parallelam ipsi L N; centroque N descripto per L circulo, secante M Q R in punctis Q & R, erit M Q vel M R æqualis lineæ quæsitæ z. Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur, nimirum $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel etiam $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Quòd si circulus centrum suum habens in puncto N, N
transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam M Q R, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat constructionem Problematis propositi esse impossibilem.

Cæterum possunt hæ ipsæ radices infinitis fermè aliis modis inveniri; sed prædictos tantùm in medium afferre volui, velut admodum simplices, ut hâc ratione pateat, Problemata omnia Geometriæ communis construi posse, faciendo tantùm ea pauca, quæ quatuor præcedentibus figuris exposui. Quod quidem non credo à Veteribus fuisse animadversum, cum aliàs laborem eâ de re tantos libros conscribendi non suscepissent, in quibus vel solus ordo propositionum satis nobis ostendit, quòd ipsis non constiterit vera ratio inveniendi omnes, sed quòd solummodo collegerint illas, in quas fortè inciderunt.

Quod etiam ex iis, quæ Pappus initio sui septimi libri scribit, evidentissimè liquet. Vbi postquam aliquamdiu in recensendis illis omnibus, quæ ab antecessoribus suis in

Quæstio desumpta ex Pappo.

Geo-

HB Olympia Morhof

Geometria ſcripta ſunt, occupatus fuit, tandem de quæſtione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quiſquam alius penitùs reſolvere potuerat, his verbis:

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius: ſed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm Conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Paulò autem poſt explicat, quæſtionem illam eſſe hanc ſequentem.

At locus ad tres & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi. Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit poſitione datum ſolidum locum, hoc eſt, unam ex tribus conicis ſectionibus. Et ſi ad quatuor rectas lineas poſitione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data ſit: ſimiliter punctum datam coni ſectionem poſitione continget. Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus oſtenſus eſt. Quòd ſi ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, ſed lineas tantùm dictas; quales autem ſint, vel quam habeant proprietatem, non conſtat: earum unam, neque primam, & quæ manifeſtiſſima videtur, compoſuerunt, oſtendentes utilem eſſe, propoſitiones autem ipſarum hæ ſunt.

Si ab aliquo puncto, ad poſitione datas rectas lineas, quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit

ſit proportio ſolidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad ſolidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, & datâ quâpiam lineâ, punctum poſitione datam lineam continget. Si autem ad ſex, & data ſit proportio ſolidi tribus lineis contenti ad ſolidum, quod tribus reliquis continetur; rurſus punctum continget poſitione datam lineam. Quòd ſi ad plures quàm ſex, non adhuc habent dicere, an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur: quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus.

Vbi velim ut ex occaſione notetis, Veteres Mathematicos, ex eo, quòd vocabulis in Arithmetica uſitatis, ad operationes Geometricas ſignificandas, liberè uti noluerint, ſæpe in modos eas explicandi valde intricatos & obſcuros incidiſſe, cujus rei non alia potuit cauſa eſſe, quàm quòd non ſatis accuratè perceperint, quænam ſit inter illas duas ſcientias affinitas. Pergit enim Pappus hoc modo.

Acquieſcunt autem his, qui paulò ante talia interpretati ſunt, neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes, quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones hæc, & dicere, & demonſtrare univerſè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, ſi ſint ſeptem; ſi verò octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget poſitione datas lineas. Et ſimiliter quotcunque ſint impares vel pares multitudine, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas reſpondeant, nullum igitur poſuerunt, ita ut linea nota ſit &c.

Quæſtio itaque quam Euclides reſolvere inceperat atque Apollonius continuaverat, ſed quæ à nemine fuit perfecta, erat hujuſmodi.

Datis poſitione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis; quæritur primò punctum, à quo totidem aliæ rectæ lineæ, ſingulæ ad ſingulas datarum duci poſſint, quæ cum ipſis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum, ſub duabus contentum, datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, ſi ſint tres; vel ad rectangulum reliquarum duarum, ſi ſint quatuor; Aut ſi quinque ſint, ut parallelepipedum, quod ſub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod ſub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data; Aut ſi ſex ſint, ut parallelepipedum ſub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum ſub tribus reliquis comprehenſum; Aut ſi ſint ſeptem, ut hoc, quod producitur ex multiplicatione quatuor ductarum in ſe invicem, datam habeat rationem ad illud, quod ex mutua multiplicatione reliquarum trium & alia quadam data producitur; Aut ſi ſint octo, ut id, quod ex quatuor ductis inter ſe multiplicatis producitur, datam habeat rationem ad productum ex reliquis quatuor. Atque ita porrò quæſtionem hanc, ad omnem alium linearum numerum, extendere licet.

Deinde, quia ſemper infinita ſunt puncta, quæ ſatisfacere poſſunt iis, quæ hîc quæruntur, requiritur inſuper, ut cognoſcatur atque deſcribatur linea, in quâ illa omnia reperiantur.

Dicit autem Pappus, ſi tantùm 3 aut 4 lineæ dentur, lineam illam tunc aliquam ex ſectionibus Conicis exiſtere. Verùm non ſuſcipit ipſam determinare neque deſcribere, non magis quàm explicare lineas illas, in quibus quæſita puncta inveniri debent, quando quæſtio propoſita

ta eſt in pluribus lineis. Tantùm addit, quòd Veteres unam ex illis ſibi imaginati fuerint, quam ibidem utilem eſſe monſtrarunt, ſed quæ manifeſtiſſima videretur, nec tamen prima exiſteret. Quod occaſionem mihi præbuit tentandi, num illâ, quâ utor, methodo, æquè longè, quàm illi pervenerunt, progredi liceret.

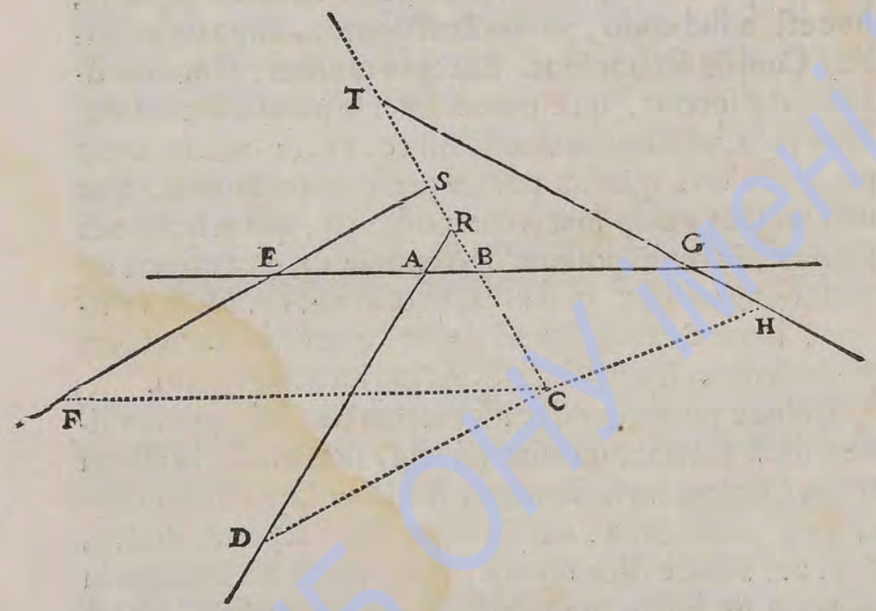
Primò autem inveni, quòd, dum hæc quæſtio in tribus, quatuorve, aut quinque duntaxat lineis proponitur, puncta quæſita per ſimplicem ſemper Geometriam inveniri queant; hoc eſt, ut non niſi regulâ atque circino utamur; nec aliud quidquam, quàm quod jam traditum eſt, faciamus. Præterquam ſi quinque lineæ dantur, quæ omnes inter ſe parallelæ fuerint. Quo caſu, ut & quum quæſtio in 6, 7, 8, aut 9 lineis proponitur, quæſita puncta per Solidorum Geometriam inveniri poſſunt; hoc eſt, adhibendo, ad conſtructionem, aliquam ex tribus Conicis ſectionibus. Excepto tantùm, ſi novem lineæ datæ fuerint, quæ omnes inter ſe parallelæ exiſtant. Quo caſu, ut & quum quæſtio in 10, 11, 12, aut 13 lineis propoſita eſt, quæſita puncta per curvam lineam, quæ uno tantùm gradu magis compoſita eſt, quàm ſectiones Conicæ, inveniri poſſunt. Excepto in 13, quæ omnes inter ſe ſint parallelæ. quo caſu, ut & in 14, 15, 16, & 17 lineis, linea curva adhiberi debet, quæ uno gradu ſupra præcedentem compoſita eſt. Atque ita in infinitum.

Reſponſum ad Quæſtionem Pappi.

Deinde inveni quoque, ſi tantùm tres aut quatuor lineæ datæ fuerint, quæſita puncta, non modò in aliqua trium Conicarum ſectionum, ſed interdum etiam in circuli circumferentia, aut in recta linea reperiri. Et ſi 5, 6, 7, aut 8 lineæ datæ fuerint, tum puncta illa incidere in aliquam ex lineis, uno gradu magis compoſitis, quàm ſectiones Conicæ. Quarum quidem nullam, quæ ad hanc quæſtionem non ſit utilis, imaginari licet. Sed poſ-

ſunt rurſus illa etiam in ſectione Conica, aut in Circulo, aut linea recta reperiri. Similiter ſi 9, 10, 11, aut 12 lineæ datæ fuerint, reperientur hæc puncta in aliqua linea, quæ non niſi uno gradu ſupra præcedentes poterit eſſe compoſita: quemadmodum etiam nullam earum imaginari licet, quæ ibidem utilis eſſe non poſſit. Atque ita porrò in infinitum.

Denique prima & poſt Conicas ſectiones ſimpliciſſima, ea eſt, quæ per Parabolæ & rectæ lineæ interſectionem deſcribi poteſt, quemadmodum pòſt explicabitur. Adeò ut exiſtimem, me prorſus ſatisfeciſſe iis, quæ Pappus nobis commemorat hîc à Veteribus fuiſſe quæſita. quorum quidem demonſtrationem paucis ſubjicere conabor. Quippe me tædet jam multa hac de re ſcripſiſſe.



Sint AB, AD, EF, GH, &c. lineæ quotcunque poſitione datæ, oporteatque invenire punctum, ut C, à quo

à quo ſi ducantur totidem aliæ ad poſitione datas, ut CB, CD, CF, & CH, in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, &c. ut hoc, quod producitur ex multiplicatione certarum quarundam harum linearum, ſit æquale illi, quod producitur ex multiplicatione reliquarum; vel etiam ut unum ad alterum datam habeat rationem. id enim quæſtionem difficiliorem non reddit.

Quomodo ponendi ſint termini in hac Quæſtione, ut ad Æquationem deveniatur.

Primò itaque rem ut jam factam ſuppono, atque ut ex harum omnium linearum confuſione me expediam, conſidero unam ex datis, atque unam ex quæſitis, exempli gratiâ, AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Ponendo nimirum ſegmentum lineæ AB, quod intra puncta A & B continetur, vocari x. BC autem vocari y. aliaſque lineas datas omnes productas eſſe, donec ſecent haſce duas, etiam productas, ſi opùs fuerit, & ipſis non ſint parallelæ. quemadmodum hîc apparet illas ſecare, lineam quidem AB in punctis A, E, & G; BC verò in punctis R, S, & T. Deinde quia omnes anguli trianguli ARB dati ſunt, data quoque erit ratio, quæ eſt inter ejus latera AB & BR, quam pono ut z ad b, ita ut, cum AB ſit x, RB futura ſit $\frac{bx}{z}$, CR autem $y + \frac{bx}{z}$: ſiquidem punctum B cadit inter puncta C & R; nam ſi R caderet inter C & B, CR eſſet $y - \frac{bx}{z}$; ſin verò C caderet inter B & R, CR foret $-y + \frac{bx}{z}$. Similiter, dantur quoque tres anguli trianguli DRC, unde & ratio, quæ eſt inter latera CR & CD, quam pono ut z ad c: ita ut, cum CR ſit $y + \frac{bx}{z}$, CD futura ſit $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Poſtea, quia lineæ AB, AD, & EF poſitione datæ ſunt, data quoque erit diſtantia puncti A à puncto E: quæ ſi nominetur k, habebitur EB æqualis $k + x$; foret autem ipſa $k - x$,

 ſi pun-

ſi punctum B caderet inter E & A; at verò $-k+x$, ſi E caderet inter A & B. Rurſus, quoniam anguli trianguli E S B omnes dantur, dabitur quoque ratio lateris B E ad B S: quam ſi ponam eſſe ut z ad d, B S fiet $\frac{dk+dx}{z}$, C S verò $\frac{zy+dk+dx}{z}$; quæ quidem foret $\frac{zy-dk-dx}{z}$, ſi punctum S caderet inter B & C; at verò $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, ſi C caderet inter B & S. Porrò dantur tres anguli trianguli F S C, & conſequenter ratio ipſius C S ad C F, quæ ſit ut z ad e, unde tota C F erit $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Eodem modo, data eſt A G, quam voco l, unde B G erit $l-x$, & quia in triangulo B G T ratio ipſius B G ad B T data eſt, quæ ſit ut z ad f, erit B T $\infty \frac{fl-fx}{z}$, & C T $\infty \frac{zy+fl-fx}{z}$. Rurſus, propter triangulum T C H, data eſt ratio ipſius C T ad C H: quam ſi ponamus ut z ad g, habebitur C H $\infty \frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Atque ita videre eſt, quòd, poſitione datis quotcunque lineis, ex puncto C ſemper totidem aliæ ad illas duci poſſint in datis angulis, (juxta quæſtionis tenorem;) quæ ſingulæ exprimantur ad ſummum per tres terminos; quorum quidem unus compoſitus ſit ex quantitate incognitâ y, multiplicatâ aut diviſâ per aliam quandam cognitam; ſecundus verò ex incognitâ quantitate x, etiam multiplicatâ aut diviſâ per aliam quandam cognitam; ac tertius denique ex quantitate aliquâ omnino cognitâ. Excepto tantùm, ſi datæ lineæ ſint omnes parallelæ, vel lineæ A B, (quo caſu terminus ex quantitate x compoſitus evaneſcet;) vel etiam lineæ C B, (quo caſu terminus ex quantitate y compoſitus evaneſcet;) quemadmodum id plus ſatis per ſe manifeſtum eſt, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem ſpectat ad ſigna

gna + & —, quibus hi termini conjunguntur, ipſa quidem variari poſſunt modis omnibus, quos imaginari licet.

Deinde videre etiam licet, quòd multiplicando ita haſce lineas in ſe invicem, quantitates x & y, quæ in producto reperiuntur, ſingulæ non plures dimenſiones habere poſſint, quàm extiterint lineæ, (quarum explicationi inſerviunt.) quæ ita ſunt multiplicatæ. Adeò ut nunquam plures duabus habituræ ſint dimenſiones, ubi productum illud ex duarum tantùm linearum multiplicatione naſcitur; nec plures tribus; cùm productum illud ex trium tantùm linearum multiplicatione genitum fuerit, & ſic in infinitum.

Quo pacto cognoſcatur, Problema hoc eſſe planum, quando illud in quinque tantùm lineis eſt propoſitum.

Cæterùm quia ad determinandum punctum C unaduntaxat conditio adimplenda eſt, nimirum ut hoc quod ex multiplicatione certi numeri harum linearum producitur ſit æquale, vel (quod nihilo difficilius) datam habeat rationem ad illud quod provenit ex reliquarum multiplicatione: poſſumus ad libitum aſſumere alterutram quantitatem incognitam x vel y, atque alteram invenire per hanc Æquationem. Vbi liquet, ſi quæſtio in quinque tantum lineis propoſita fuerit, quantitatem x, quæquidem expreſſioni primæ lineæ non inſervit, poſſe ſemper non plures quàm duas dimenſiones recipere. Ita ut, ſi pro y ſumatur quantitas aliqua cognita, relinquatur tantùm $xx \infty +$ vel $-ax +$ vel $-bb$. Et tum quidem quantitatem x invenire poterimus regulæ atque circini beneficio, quemadmodum ſuperiùs explicatum fuit. Adeoque ſi in infinitum alia atque alia magnitudo ſumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujuſmodi eſt punctum C, quorum ope quæſita curva linea deſcribetur.

Fieri

Fieri etiam poteſt, quum quæſtio in ſex aut pluribus lineis proponitur, ſi inter datas fuerint, quæ ipſi A B vel B C parallelæ exiſtant, ut una duarum quantitatum, x, y, duas tantùm aut etiam unam in Æquatione dimenſiones habeat, adeò ut punctum C regulæ ac circini beneficio inveniri poſſit. Sed contra, ſi omnes ſint parallelæ, etiamſi quæſtio in quinque tantùm lineis propoſita fuerit; non poterit tamen punctum C dictâ ratione inveniri: quia, dum quantitas x nuſquam in Æquatione reperitur, permiſſum non erit ampliùs pro illa, quæ y vocata fuit, quantitatem cognitam aſſumere, cum hæc ea ipſa futura ſit, quam quærere oportet. Et quandoquidem illa tres dimenſiones habebit, non poterit ipſa niſi radicem ex Cubica Æquatione eliciendo inveniri. Quod quidem in genere, niſi ad id aliqua ad minimum Conica ſectio adhibeatur, fieri nequit. Rurſus, licèt lineæ ad novem uſque datæ ſint, dummodo non ſint omnes parallelæ, ſemper fieri poteſt, ut Æquatio non altius quàm ad quadrato-quadratum aſcendat. quare ipſa per Conicas ſectiones reſolvi quoque ſemper poterit, eo modo, quem poſtea ſum explicaturus. Ac denique, licèt habeantur uſque ad 13 lineas, efficere ſemper poſſumus, ut Æquatio quadrato-cubum non excedat. Ita ut illam deinde reſolvere queamus beneficio lineæ, quæ uno duntaxat gradu ſupra ſectiones Conicas eſt compoſita, quemadmodum etiam poſt explicabitur. Atque hoc primum eſt, quod hîc eram demonſtraturus; ſed antequam ad ſecundum progrediar, opùs eſt ut in genere aliquid de curvarum linearum natura dicam.

GEOMETRIÆ

LIBER SECVNDVS.

De natura linearum curvarum.

М. ТЕМАТИЧНИЙ КАБІНЕТ Од. Фіз. Хем. Мат. Інв. № 1577

Ма-27272

Quænam ſint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi poſſunt.

VEteres optimè conſiderârunt, quòd Geometriæ Problematum alia ſint Plana; alia Solida; alia denique Linearia; hoc eſt, quòd quædam eorum conſtrui poſſint, ducendo tantùm rectas lineas & circulos; cum alia conſtrui nequeant, niſi ad minimum adhibeatur Conica aliqua ſectio; ac reliqua denique, quin ad conſtructionem eorum aſſumatur alia quædam linea magis compoſita.

Verùm ſatis mirari non poſſum, quòd non ulteriùs progreſſi lineas haſce magis compoſitas in certos diſtinxerint gradus; neque etiam planè capio, cur illas potiùs Mechanicas, quàm Geometricas nominaverint. Etenim, ſi dicatur, ideo id fuiſſe factum, quòd inſtrumento quodam, ad illas in plano deſcribendas, uti opùs ſit, circuli quoque & rectæ lineæ ob eandem rationem rejiciendæ eſſent: cum abſque circino & regula, quæ non minùs inſtrumenta dicenda ſunt, in charta deſcribi non poſſint. Neque etiam ideo, quòd inſtrumenta, quæ deſcribendis illis inſerviunt, utpote magis compoſita quàm regula & circinus, nequeant eſſe tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potiùs repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantùm accurata operis convenientia, quæ à manu proficiſcitur, deſideratur, quàm ex Geometria, ubi ſolùm ſpectatur exacta ratiocinatio. quippe quæ proculdubio, tam haſce lineas quàm illas concernens, æquè perfecta eſſe poteſt. Neque tandem

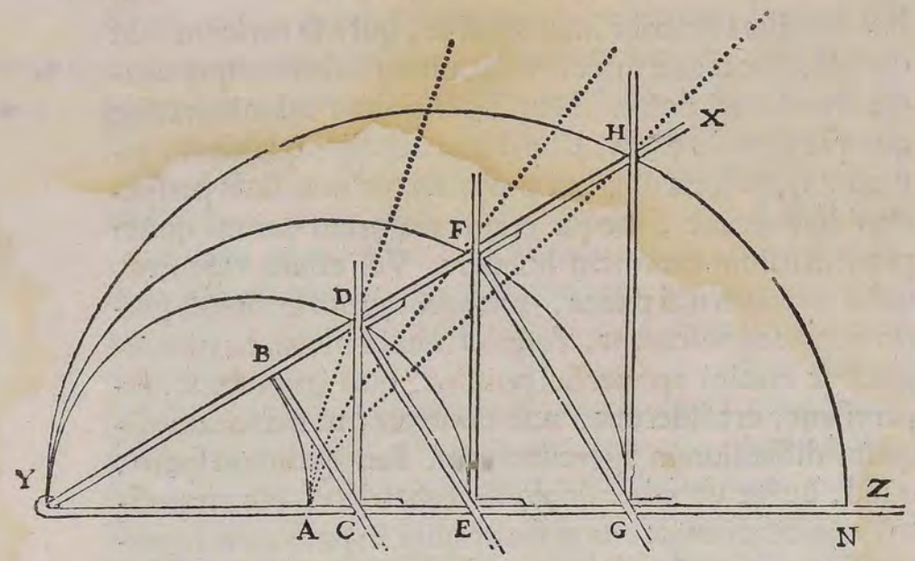
HB Online

ea de caussa, quòd numerum postulatorum suorum augere noluerint ; quodque contenti fuerint, modò liceret, data duo puncta rectâ conjungere lineâ, atque ex dato centro circulum describere, transeuntem per datum punctum: cum ulteriùs, ut de Conicis sectionibus tractarent, supponere veriti non fuerint, datum Conum dato plano secare. Vbi sanè ad describendum lineas omnes curvas, quas hîc introducere instituo, nihil aliud supponere est opùs: quàm ut duarum pluriumve linearum una per alteram moveri possit, ita ut illarum intersectiones alias designent; siquidem id nihilo difficilius mihi videtur. Verum equidem est, quòd sectiones Conicas non omnino in Geometriam suam receperint; neque etiam nomina, quæ usu approbata sunt, immutare volo ; veruntamen evidens admodum est, ut mea fert opinio, quòd, si Geometricum censeamus illud, (ut fieri solet) quod omnino perfectum atque exactum est, & Mechanicum quod ejusmodi non existit; atque Geometriam consideremus ut scientiam, quæ generaliter mensuras omnium corporum cognoscere docet, non magis ex ea excludendæ erunt lineæ maximè compositæ, quàm omnium simplicissimæ : siquidem illas, per motum aliquem continuum, aut per plures, qui se mutuò consequantur, quorumque posteriores à prioribus regantur, imaginari possumus. Hâc enim ratione exactam semper illarum mensuræ cognitionem habere licet. Verùm enimverò fieri potest, ut scrupulus, quem sibi Veteres Geometræ in recipiendis lineis, magis quàm sectiones Conicæ compositis, injecerunt, fuerit, quòd primæ, quas considerarunt, fortè extiterint Spiralis, Quadratrix, atque similes; quæ reverâ non nisi ad Mechanicas pertinent, nec ex illarum numero sunt, quas hîc recipiendas autumo: quandoquidem illas duobus

bus motibus describi imaginamur, qui à se invicem sunt diversi, nec ullam inter se relationem habent, quæ exactè mensurari possit. Nam licèt postea examinaverint quoque Conchoïdem, Cissoïdem, & alias quasdam; tamen, quia fortè illarum proprietates non satis perspectas habuerunt, neque etiam majorem earum quàm præcedentium rationem habuêre. Vel etiam videntes, quòd nondum nisi pauca, quæ ad Conicas sectiones pertinerent cognoscerent, & quòd multa illorum, quæ regulæ ac circini ope perfici possunt, quæ ignorarent, superessent, crediderunt, non oportere, ut materiam aliquam difficiliorem aggrederentur. Sed quoniam spero, quòd, qui in utendo calculo Geometrico, hîc proposito, exercitati erunt, non facilè quid in posterum reperturi sint, in quo hæreant, quod ad Plana, & Solida Problemata attinet: confido, non abs re fore, si illos ad alia investiganda, ubi ipsis nunquam materia se exercendi defutura sit, invitem.

Sunto lineæ AB, AD, AF, & similes, quas suppono descriptas esse ope instrumenti X Y Z, quod compositum est ex pluribus regulis, ita junctis, ut, cùm illa, quæ designatur per Y Z, super lineam A N immota manet, angulus X Y Z aperiri claudique possit; &, illo omnino clauso existente, puncta B, C, D, E, F, G, H omnia in punctum A cadant ; Sed prout aperitur, ut regula BC, quæ ipsi X Y in puncto B normaliter adfixa est, propellat versùs Z regulam C D, quæ super Y Z incedit, faciens continuò cum illa angulos rectos; & rursus, ut C D propellat D E, quæ similiter super Y X incedit, parallela manens ipsi B C; deinde ut D E propellat E F; E F verò ipsam F G; hæcque denuo ipsam G H. Atque ita in infinitum, concipiendo semper alias atque alias, quarum successivè una

 alte-



alteram eodem modo propellit, & quarum aliæ eosdem perpetuò angulos faciunt cum Y X, atque aliæ cum Y Z.

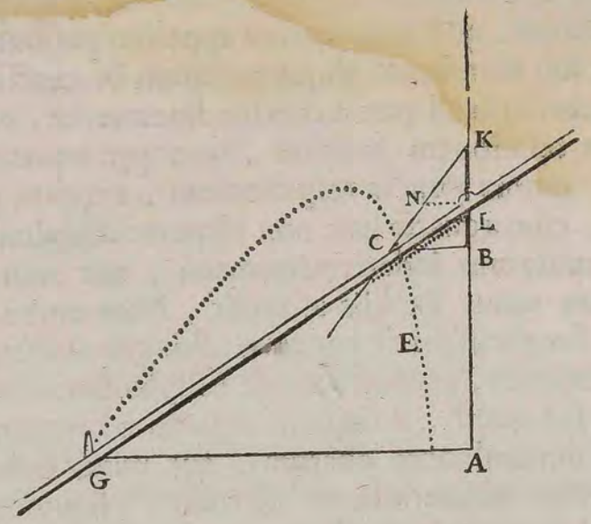
Iam verò dum sic aperitur angulus X Y Z, punctum B describit lineam A B, quæ circulus est; puncta autem D, F, H, ubi cæterarum regularum intersectiones fiunt, describunt alias curvas A D, A F, A H, quarum posteriores ordine magis compositæ sunt quàm prima, hæcque magis quam circulus. Verùm non video quid impedire possit, quò minùs accuratè atque distinctè hujus primæ descriptionem concipiamus quàm circuli, aut Conicarum saltem sectionum; neque etiam quid impedire queat, cur non secundam, tertiam, cæterasque omnes, quæ sic describi possunt, æquè bene concipiamus atque primam; nec per consequens cur non omnes recipiantur, ut Geometriæ contemplationibus inserviant.

Ratio distinguendi eas in certa genera; Et cognoscendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum.

Possem huc adferre plures alios modos describendi atque concipiendi lineas curvas, quæ magis magisque gradatim in infinitum essent compositæ; verùm ut has omnes, quæ in rerum natura sunt, simul comprehendam, easque in certa genera ordine distinguam: aptiùs quidquam afferre nescio, quàm ut dicam, quòd puncta omnia illarum, quæ Geometricæ appellari possunt, hoc est, quæ sub mensuram aliquam certam & exactam cadunt, necessariò ad puncta omnia lineæ rectæ, certam quandam relationem habeant, quæ per æquationem aliquam, omnia puncta respicientem, exprimi possit. Et quòd, cùm æquatio hæc non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut non ultra quadratum unius ex illis ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis; (sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ:) sed quòd, postquam æquatio ad tertiam aut quartam dimensionem duarum, aut unius è duabus quantitatibus indeterminatis ascendit, (siquidem hîc duæ ad relationem unius ad alterum punctum explicandam requiruntur) linea illa tunc secundi sit generis; & quòd, prout æquatio ad quintam aut sextam dimensionem ascendit, illa tunc sit tertii generis; & sic in infinitum de aliis.

Vt si scire cupiam cujus generis sit linea E C, quam suppono descriptam esse per intersectionem regulæ G L & plani rectilinei C N K L; cujus latus K N indefinitè productum est versùs C; quodque, dum movetur supra planum deorsum in recta linea, (hoc est, ut diameter ejus K L perpetuò applicata reperiatur alicubi lineæ B A, utrinque indefinitè continuatæ,) facit, ut regula G L rotetur circa punctum G, quoniam ipsi continuò sic admovetur, ut simul quoque semper transeat per punctum L: eligo rectam aliquam lineam, veluti A B, ut ad diversa ejus puncta referam omnia puncta

hujus curvæ lineæ C E : deinde eligo etiam punctum aliquod in A B , veluti A , ad ordiendum ab eo calculum. Dico autem, me utrumque eligere, quoniam li-



berum eſt , illa aſſumere , prout volumus. Nam licèt plurimi referat, quo pacto illa eligam, ut æquatio poſſit reddi brevior & facilior; tamen, quocunque tandem modo ſumantur , fieri poteſt , ut linea ejuſdem generis eſſe appareat. Quemadmodum facilè demonſtrari poteſt.

Iam verò ad libitum ſumens alquod punctum in curva, ut C, ſuper quod ſuppono inſtrumentum , quod deſcriptioni ejus inſervit, eſſe adplicatum, duco ex C lineam C B parallelam ipſi G A. Deinde quia C B & B A duæ ſunt quantitates indeterminatæ & incognitæ, voco unam y, & alteram x. Porrò ut inveniam relationem unius ad alteram, conſidero etiam quantitates cognitas, quæ hujus curvæ lineæ deſcriptionem determinant, ut G A, quam voco a; K L, quam voco b; & N L parallelam ipſi G A, quam voco c. Tum dico, ut N L eſt ad L K, vel c ad b, ita C B, vel y, eſt ad B K, quæ ideo erit $\frac{by}{c}$; ac proinde B L $\frac{by}{c} - b$, & A L $x + \frac{by}{c} - b$. Denique ut C B eſt ad B L, vel y ad $\frac{by}{c} - b$, ita eſt G A, vel a, ad L A, vel $x + \frac{by}{c} - b$. adeò ut , ſi multiplicem ſecundam lineam per tertiam , producatur $\frac{aby}{c} - ab$, quod æquale erit $xy + \frac{by^2}{c} - by$, ei ſcilicet, quod producitut multiplicando primam lineam per ultimam. Atque ita æquatio, quæ invenienda erat, eſt hujuſmodi, $y^2 \infty cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$. Ex qua cognoſcitur, lineam E C eſſe primi generis, quemadmodum illa re ipsâ nulla alia eſt quàm Hyperbola.

Quòd ſi in inſtrumento, quod ipſi deſcribendæ inſervit, loco rectæ lineæ C N K ſumatur inventa hæc Hyperbola , aut alia quæpiam primi generis curva linea, quæ planum terminet C N K L ; interſectio hujus lineæ & regulæ G L, loco Hyperbolæ E C , aliam curvam deſcribet, quæ ſecundi erit generis. Vt ſi C N K fuerit Circulus , cujus centrum L , deſcribetur prima Conchoïdes Veterum; & ſi Parabola fuerit , cujus diameter K B, deſcribetur curva linea, quam paulò ante dixi primam eſſe ac ſimpliciſſimam pro quæſtione Pappi, cùm quinque tantùm lineæ poſitione datæ ſunt. Sed ſi loco alicujus harum linearum primi generis ſumatur quædam ſecundi, quæ terminet planum C N K L, deſcribetur ejus ope alia tertii generis ; aut ſi quædam tertii generis ſumatur, deſcribetur aliqua quarti, & ſic in infinitum. Vt facilè ex calculo eſt cognoſcere. Et ſanè quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ deſcriptionem quis imaginatus fuerit, modò ipſa ex illarum numero, quas Geometricas voco, extiterit, poterit

Vide Pappum ad prop. 22. lib. 4; & Eutocium in commentariis in ſecund. librum Archimedis de ſphæra & cylindro.

rit ſemper inveniri æquatio, quâ omnia ejus puncta hâc ratione determinentur.

Cæterùm lineas curvas, quæ faciunt ut æquatio hæc ad Quadrato-quadratum adſcendat, ejuſdem generis eſſe pono cum illis, quæ ipſam tantùm ad Cubum perducunt. Atque illas, quarum æquatio ad Quadrato-cubum adſcendit, ejuſdem generis cum illis, quæ ipſam tantùm ad Surdeſolidum perducunt. Et ſic de cæteris.

Cujus rei ratio eſt, quòd generalis regula habeatur reducendi ad Cubum difficultates omnes, quæ aſcendunt ad Quadrato-quadratum; & ad Surdeſolidum omnes illas, quæ aſcendunt ad Quadrato-cubum, ita ut magis compoſitæ cenſeri non debeant.

Notandum autem eſt, quòd inter lineas cujuſque generis, licèt major pars æqualiter ſit compoſita, ita ut ad eorundem punctorum determinationem ſervire poſſint, atque ad eadem Problemata conſtruenda; tamen quædam illarum ſint, quæ ſimpliciores exiſtant, quæque non tantam in ſua potentia extenſionem habeant. Vt, inter lineas primi generis, præter Ellipſin, Hyperbolam, & Parabolam, quæ æqualiter ſunt compoſitæ, etiam Circulus eſt comprehenſus, qui manifeſtò ſimplicior eſt. Et inter illas ſecundi generis, numeratur quoque Conchoïdes vulgaris, quæ ſuam originem ex Circulo ducit; quemadmodum & aliæ præterea reperiuntur, quæ, etiamſi non tantam extenſionem habeant, quantam maxima illarum pars, quæ ejuſdem generis ſunt, tamen inter lineas primi generis poni non poſſunt.

Continuatio explicationis quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata.

Reductis igitur curvis lineis ad certa genera, facilè erit progredi in demonſtratione reſponſi, quod paulò ante dedi ad quæſtionem Pappi. Primùm enim, cum ſupra oſtenderim, quòd, quando tantùm 3 aut 4 lineæ rectæ dantur, æquatio, quæ ad quæſita puncta determinanda

nanda inſervit, non ultra quadratum aſcendat: evidens eſt, lineam curvam, in qua hæc puncta reperiuntur, neceſſariò aliquam eſſe primi generis: quandoquidem hæc æquatio relationem, quam omnia linearum primi generis puncta habent ad puncta lineæ rectæ, explicat. Et quòd, cùm non plures quàm 8 lineæ rectæ datæ ſunt, æquatio hæc tum ad ſummum non ultra Quadrato-quadratum aſcendat, ac per conſequens quæſita linea non niſi ſecundi aut inferioris generis eſſe poſſit. Et quòd, cùm non plures quàm 12 lineæ rectæ datæ ſunt, æquatio tum non ultra Quadrato-cubum aſcendat, ac per conſequens, quæſita linea ſolummodo tertii aut inferioris generis exiſtat. Atque ita de reliquis. Quin etiam, quoniam datarum rectarum poſitio omnifariam variari poteſt, & per conſequens mutare tam quantitates cognitas, quàm ſigna + & — ipſius æquationis, modis omnibus, quos ſibi quis imaginari queat: evidens eſt, nullam primi generis curvam lineam reperiri, quæ ad hanc quæſtionem non ſit utilis, quando illa in 4 lineis eſt propoſita; neque ullam ſecundi, quæ ibidem non inſerviat, quando illa in 8 lineis eſt propoſita; neque etiam ullam tertii, quando illa in 12 lineis eſt propoſita. Et ſic de reliquis.

Adeò ut nulla curva linea, quæ ſub calculum cadit, atque in Geometriam recipi poteſt, reperiatur, quæ ibidem ad aliquem linearum numerum non ſit utilis.

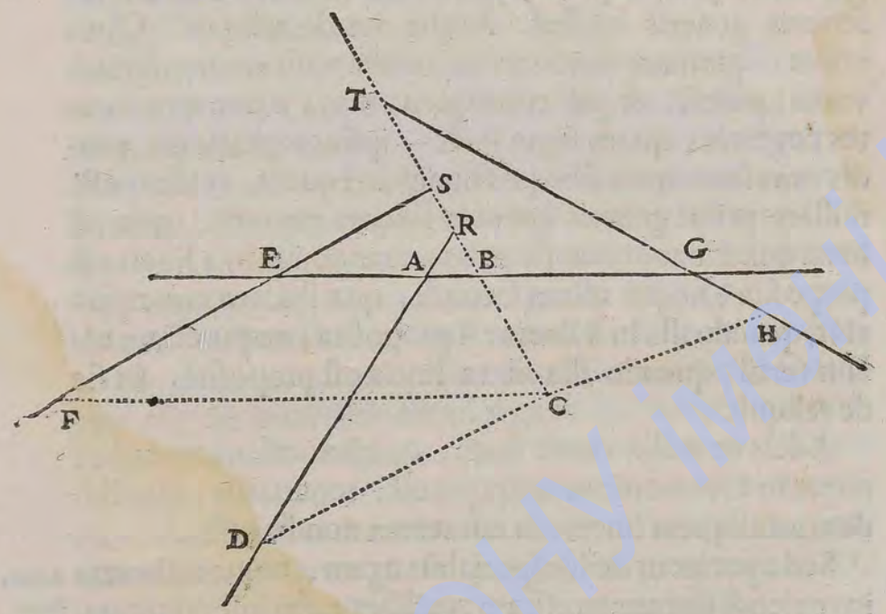
Sed oportet ut de his ſpecialiùs agam, atque rationem inveniendi lineam quæſitam, cuilibet caſui inſervientem, exhibeam, quando tantùm 3 aut 4 lineæ datæ ſunt; atque eâdem operâ videbitur, quòd primum linearum curvarum genus alias nullas, præter tres Sectiones Conicas & Circulum, complectatur.

Solutio hujus quæſtionis, cùm ipſa in 3 aut 4 tantùm lineis eſt propoſita.

Repetamus itaque quatuor lineas AB, AD, EF, & GH,

GH, ſuperiùs datas, oporteatque aliam invenire lineam, in quâ infinita reperiantur puncta, quale eſt C, unde ſi ducantur quatuor lineæ CB, CD, CF, & CH, in datis angulis ad poſitione datas: ut CB multiplicata per CF tantundem producat ac CD multiplicata per CH. hoc eſt, poſitâ CB ∞y, CD $\infty \frac{czy+bex}{zz}$, CF $\infty \frac{ezy+dek+dex}{zz}$, & CH $\infty \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$: æquatio erit

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\right\} y \begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz}.$$



B Saltem ſi ſupponamus quantitatem ez majorem quàm
BB cg. nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna + & —. Vnde ſi in hac æquatione quantitas y nulla ſit, aut minor quàm nihil, poſtquam punctum C ſuppoſuimus in angulo DAG, oporteret & illud ſupponere in angulo DAE,

DAE, aut EAR, aut etiam RAG, mutando ſigna + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd ſi verò in quatuor hiſce poſitionibus valor ipſius y nullus reperiretur, indicio eſſet, quæſtionem caſu propoſito eſſe impoſſibilem. Sed ſupponamus illam hîc poſſibilem eſſe, & ad abbreviandum ejus terminos, loco quantitatum $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ ſcribamus $2m$, & loco $\frac{dezz+cfgz-bcgz}{ez^3-cgzz}$ ſcribamus $\frac{2n}{z}$; ſicque habebimus $yy \infty 2my - \frac{2n}{z}xy \frac{+bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}$, cujus æquationis radix eſt

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}}.$$

Rurſus autem abbreviandi causâ, pro $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}$ ſcribamus o, & pro $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ ſcribamus $\frac{p}{m}$.

Cum enim quantitates hæ omnes datæ ſint, illas, ut placuerit, nominare poſſumus. Atque ita habebimus

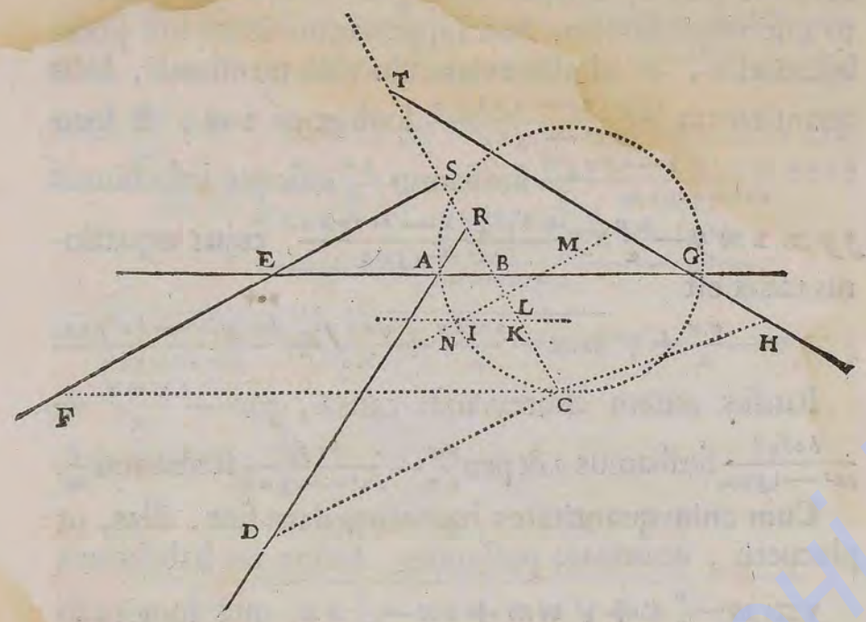
$y \infty m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. quæ longitudo eſſe debet lineæ BC, relinquendo AB, ſeu x, indeterminatam.

Vbi patet, ſi quæſtio in tribus aut quatuor tantùm lineis eſt propoſita, ſemper ejuſmodi terminos inveniri poſſe; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignaque + & — diverſimodè mutari.

His peractis, duco KI parallelam & æqualem ipſi AB, ita ut ex BC ſegmentum auferat BK, æquale ipſi m: quandoquidem hîc habetur $+m$; quod quidem aliàs addidiſſem ipſi BC, ducendo hanc lineam IK ad alteram partem, ſi illic fuiſſet $-m$; eamque nullo modo duxiſſem, ſi quantitas m prorſus defuiſſet. Deinde duco IL, ita ut linea IK ſit ad KL, ſicut z ad n. hoc

 eſt,

est, ut, cùm IK est x, KL sit $\frac{nx}{z}$. Atque hâc ratione innotescit etiam ratio, quæ est inter K L & I L, quam pono eandem, quæ est inter n & a: ita ut, cùm K L est



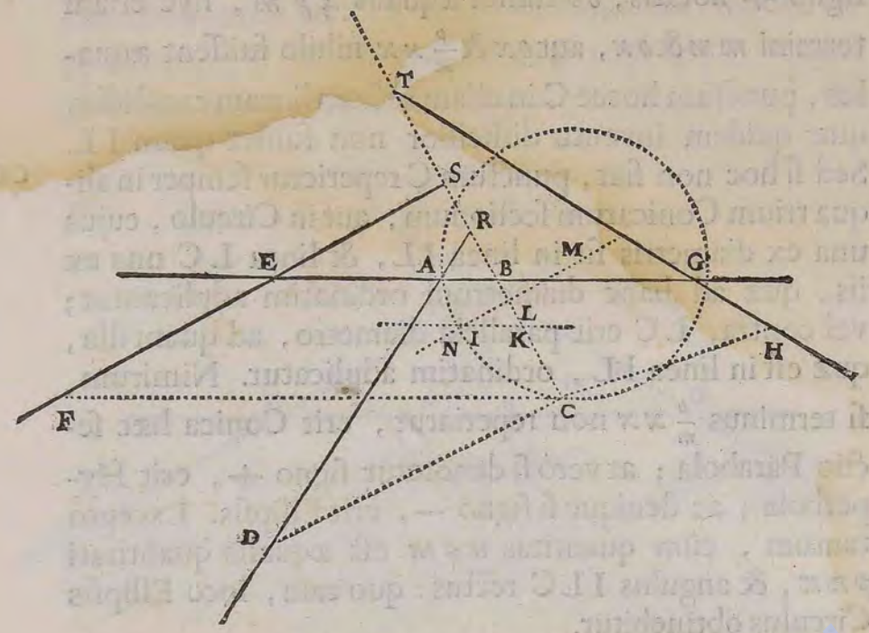
$\frac{nx}{z}$, I L sit $\frac{ax}{z}$: & facio ut punctum K cadat inter L & C; siquidem hîc habetur $-\frac{nx}{z}$; ubi aliàs L sumpsissem inter K & C, si habuissem $+\frac{nx}{z}$. Neque omnino duxissem hanc lineam I L, si $\frac{nx}{z}$ defuisset.

C Hinc nihil mihi ampliùs restare video pro linea L C præter hosce terminos: L C $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Vnde cognosco, quòd, si nulli fuissent, punctum C repertum fuisset in linea recta I L; & si tales extitissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo

signo + notatis, oo fuisset æqualis $4pm$, sive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuissent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quàm I L. Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus una ex diametris sit in linea I L, & linea L C una ex iis, quæ ad hanc diametrum ordinatim adplicantur; vel contra, L C erit parallela diametro, ad quam illa, quæ est in linea I L, ordinatim adplicatur. Nimirum, si terminus $\frac{p}{m}xx$ non reperiatur, erit Conica hæc sectio Parabola; at verò si denotetur signo +, erit Hyperbola; ac denique si signo —, erit Ellipsis. Excepto tantùm, cùm quantitas aam est æqualis quantitati pzz, & angulus I L C rectus: quo casu, loco Ellipsis Circulus obtinebitur. CC

Quòd si hæc sectio Parabola existit, latus rectum æquale erit $\frac{oz}{a}$, diameterque semper in linea I L. atque ad inveniendum punctum N, quod illius vertex est, oportebit I N æqualem sumere $\frac{amm}{oz}$; ita ut punctum I cadat inter L & N, si termini fuerint $+mm+ox$; aut etiam, ut punctum L cadat inter I & N, si illi fuerint $+mm-ox$; aut denique ut N cadat inter I & L, si habeatur $-mm+ox$. Sed nunquam illic haberi potest $-mm$, eo modo, quo termini hîc sunt positi. Postremò verò punctum N erit idem quod punctum I, si quantitas mm nulla sit. Quâ quidem ratione inde facile est invenire hanc Parabolam per Problema 1^{mum} primi libri Conicorum Apollonii. CCC

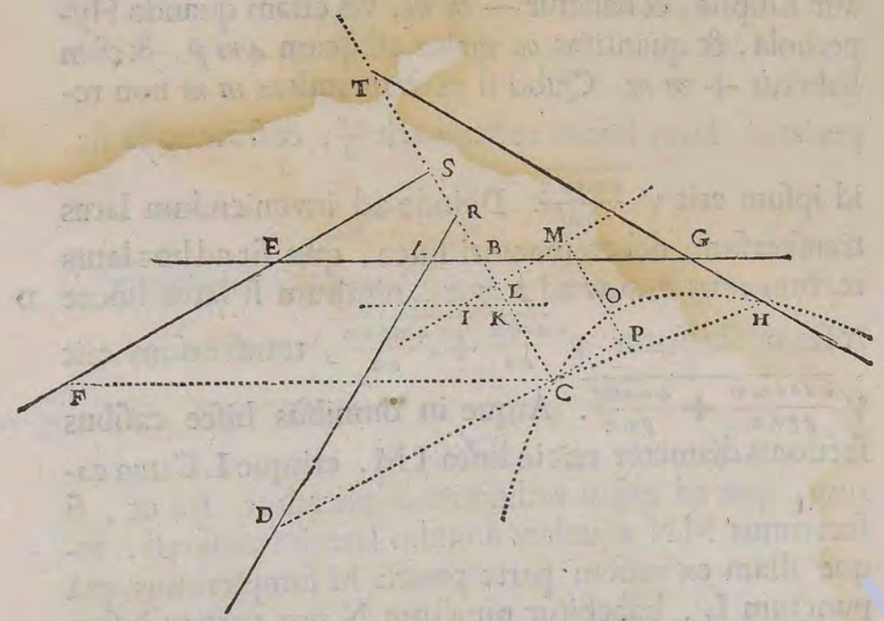
Quòd si quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis, aut denique Hyperbola, oportet primò invenire punctum



ctum M, quod illius centrum eſt, quòdque ſemper in linea recta I L cadit, ubi invenitur, ſumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro I M. Ita ut, ſi quantitas o nulla eſt, centrum hocce cadat ſemper in punctum I. Et ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, erit punctum M ex eadem parte puncti L ſumendum, reſpectu puncti I, ſi habeatur $+ox$; at ſi habeatur $-ox$, ſumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, ſi habeatur $-ox$, centrum illud ſumi debebit versùs L; & ſi habeatur $+ox$, debebit illud ſumi versùs alteram partem. Poſtea figuræ rectum latus ſumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæſita linea eſt Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæſita linea eſt Circulus, aut

aut Ellipſis, & habetur $-mm$; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas oo major eſt quàm $4mp$, & cùm habetur $+mm$. Quòd ſi verò quantitas mm non reperiatur, latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$, & ſi ox nulla ſit, id ipſum erit $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Deinde ad inveniendum latus tranſverſum, debet inveniri linea, quæ ſit ad hoc latus rectum, ut aam ad pzz, nimirum ſi latus hocce D
rectum ſtatuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, tranſverſum erit $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Atque in omnibus hiſce caſibus ſectionis diameter erit in linea I M, eritque L C una earum, quæ ad ipſam ordinatim adplicantur. Ita ut, ſi fecerimus M N æqualem dimidio lateris tranſverſi, atque illam ex eadem parte puncti M ſumpſerimus quâ punctum L, habebitur punctum N pro vertice ipſius diametri. Vnde porrò facile eſt dictam ſectionem invenire, per 2^{dum} & 3^{tium} Problema 1^{mi} Libri Conicorum Apollonii.

Sed ſi, ſectione Hyperbolâ exiſtente, habeatur $+mm$; E
& quidem quantitas oo nulla ſit, aut minor quàm $4pm$; oportebit ex centro M lineam ducere M O P parallelam ipſi L C, nec non C P ipſi L M, atque M O æqualem facere $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$; aut etiam æqualem m, ſi non reperiatur quantitas ox. Deinde conſiderare oportebit punctum O tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter ſit O P, & linea C P, quæ ad illam ſit ordinatim adplicata, cujuſque latus rectum ſit $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, tranſverſum verò $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$. Excepto tantùm cùm ox nulla eſt: ſiquidem eo caſu latus rectum ſit



fit $\frac{2aamm}{pzz}$, & transversum $2m$. Ita ut inde facile sit illam invenire per 3^{tium} Problema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii.

Demonstratio ejusdem solutionis. Quorum quidem demonstrationes perspicuæ sunt. Etenim, si componatur spatium aliquod ex quantitatibus, quas recto & transverso lateri assignavi, atque etiam segmento diametri NL, vel OP, juxta sensum 11^{mi}, 12^{mi}, & 13^{tii} Theorematum primi libri Conicorum Apollonii, invenientur iidem omnes termini, ex quibus compositum est quadratum lineæ CP, vel CL, quæ huic diametro ordinatim est adplicata. Vt in hoc exemplo, auferendo IM, quæ est $\frac{aom}{2pz}$, ab NM, quæ est $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$, relinquitur IN; cui si addatur IL, quæ est $\frac{a}{z}x$, fit summa NL; quæ ideo erit

$\frac{a}{z}x-$

$\frac{a}{z}x-\frac{aom}{2pz}+\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$. Hæc autem multiplicata per $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, quæ est figuræ latus rectum, provenit $x\sqrt{oo+4mp}-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp}+\frac{moo}{2p}+2mm$, pro rectangulo. A quo auferendum est spatium, quod sit ad quadratum ex NL, ut latus rectum ad latus transversum. Hinc cum quadratum ex NL sit $\frac{aa}{zz}xx-\frac{aaom}{pzz}x+\frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp}+\frac{aaoomm}{2ppzz}+\frac{aam^3}{pzz}-\frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}$, oportebit id ipsum dividere per aam, & multiplicare per pzz, propterea quòd hi termini rationem, quæ est inter latus transversum & rectum, explicent, fietque $\frac{p}{m}xx-ox+x\sqrt{oo+4mp}+\frac{oom}{2p}-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp}+mm$. Hoc ergo si auferatur ex rectangulo præcedenti, invenietur $mm+ox-\frac{p}{m}xx$, pro quadrato lineæ CL: quæ proinde una est ex ordinatim adplicatis in Ellipsi, aut Circulo, ad segmentum diametri NL.

Iam verò si datas omnes quantitates numeris velimus explicare, ponendo, exempli gratiâ, EA ∞ 3, AG ∞ 5, AB ∞ BR, BS ∞ $\frac{1}{2}$BE, GB ∞ BT, CD ∞ $\frac{3}{2}$CR, CF ∞ 2CS, CH ∞ $\frac{2}{3}$CT; & quòd angulus ABR sit 60 graduum; ac denique quòd rectangulum sub duabus lineis CB & CF, sit æquale rectangulo sub duabus reliquis CD & CH; (quandoquidem hæc omnia data requiruntur, ut quæstio sit penitus determinata;) & quòd præterea AB sit ∞ x, & CB ∞ y: inveniemus per modum, supra explicatum, $yy \infty 2y-xy+5x-xx$, & $y \infty 1-\frac{1}{2}x+\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}xx}$: Ita ut BK fieri debeat

beat 1, & K L ſemiſſis ipſius K I vel A B. Cumque angulus I K L ſit 60 graduum, angulus I L K erit rectus. Quoniam autem I K ſeu A B vocata eſt x, K L erit $\frac{1}{2}x$, I L verò $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & quantitas, quæ paulò ante nominabatur z, erit 1; quæ autem a, erit $\sqrt{\frac{3}{4}}$; quæ m, erit 1; quæ o, erit 4; & quæ appellabatur p, erit $\frac{3}{4}$: ita ut habeatur $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro I M, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pro N M. Et quia aam, quæ eſt $\frac{3}{4}$, hîc æquatur pzz, atque angulus I L C eſt rectus, linea curva N C invenitur eſſe circulus. Eodem modo reliqui caſus omnes facilè examinari poſſunt.

Quid intelligendum ſit per loca Plana, & Solida; Et ratio ipſa inveniendi.

Cæterùm, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non aſcendunt, omnes in eo ſunt comprehenſæ, quod jam explicavi; non ſolum Veterum Problema in 3 & 4 lineis hîc penitus ad finem perductum eſt; ſed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum Compoſitionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum
F Planorum, cum illa in Solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud ſunt, quàm cùm in quæſtione aliqua eſt inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipſa prorſus ſit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejuſdem lineæ puncta pro eo accipi poſſunt, quod eſt quæſitum. Etenim lineâ illâ exiſtente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At ſi illa eſt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipſis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotieſcunque autem id evenit, poteſt perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam reſolvi, ſimilis exiſtit. Quòd ſi verò linea, quæ ſic quæſitum punctum determinat, uno gradu magis quàm ſectiones Conicæ ſit compoſita, ipſam eodem modo locum Surſolidum appellare licebit, atque ita
G de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud

lud reperitur, ſuperficies eſt, quæ ſimiliter aut plana, aut ſphærica, aut magis compoſita eſſe poteſt. Verùm ſummus ſcopus, quem ſibi in hac materia Veteres præfixêre, fuit, ut ad Solidorum Locorum compoſitionem pervenirent; Et veriſimile eſt, omne illud, quod Apollonius de Conicis ſectionibus ſcripſit, eò tantùm, ut illam indagaret, reſpexiſſe.

Præterea apparet etiam, illud, quod pro primo linearum curvarum genere ſumpſi, non poſſe alias ullas præter Circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſim complecti. Quod quidem id omne eſt, quod demonſtrare ſuſceperam.

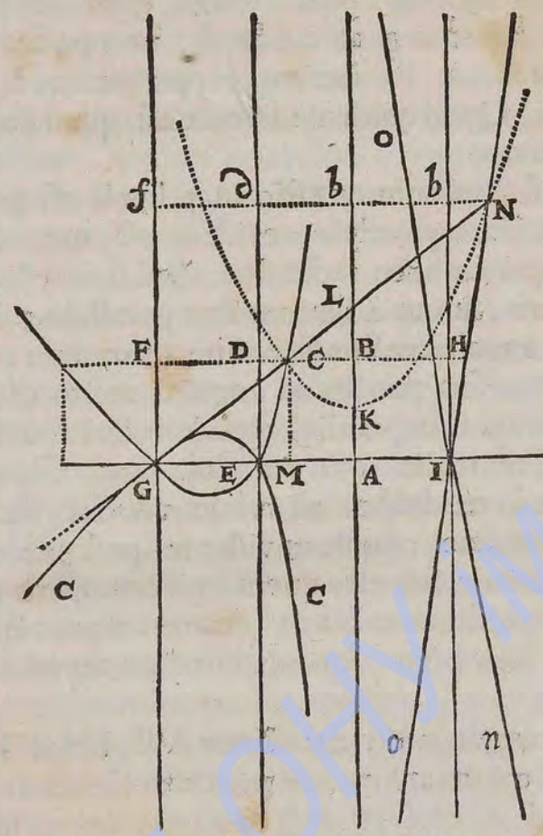
Quænam ſit prima & ſimpliciſſima linearum curvarum, Veterum quæſtioni inſervientium, cùm ipſa quæſtio in 5 lineis eſt propoſita.

Quòd ſi Veterum quæſtio in 5 lineis eſt propoſita, quæ omnes ſunt parellelæ; evidens eſt, quæſitum punctum ſemper in linea recta fore. Sed ſi in 5 lineis propoſita fuerit, ita ut 4 illarum ſint parallelæ, & quæ à quinta ad angulos rectos ſecentur; tum etiam, ut lineæ omnes à quæſito puncto ad angulos rectos illis occurrant; ac demum ut parallelepipedum ex tribus lineis ita ductis ad tres ex iis, quæ parallelæ ſunt, ſit æquale parallelepipedo ex duabus ad reliquas ductis, & ex tertia quadam data linea: (qui, ut videtur, poſt præcedentem ſimpliciſſimus caſus eſt, quem quis concipere poteſt:) punctum quæſitum cadet in lineam curvam, quæ motu Parabolæ deſcribitur, quemadmodum ſuperiùs eſt explicatum.

Sint, exempli gratiâ, datæ lineæ A B, I H, E D, G F, & G A; & oporteat invenire punctum C; ita ut, ducendo C B, C F, C D, C H, & C M ad angulos rectos ad poſitione datas, parallelepipedum ex tribus C F, C D, & C H compoſitum, ſit æquale parallelepipedo compoſito ex duabus reliquis C B, C M, & tertia data linea, quæ ſit A I.

Pono CB ∞ y, CM ∞ x, AI vel AE vel GE ∞ a; ita ut existente puncto C inter lineas AB & DE, habeam CF ∞ $2a-y$, CD ∞ $a-y$, & CH ∞ $y+a$; & multiplicando hasce tres in se invicem, habeam $y^3 - {}^2ayy - aay + {}^2a^3$, æquale producto trium reliquarum, quod est axy.

Post hæc considero lineam curvam CEG, quam



imaginor descriptam esse per intersectionem Parabolæ CKN, interea dum movebatur in linea recta AB, atque secabatur à regula GL, rotata circa punctum G, semperque transeunte per punctum L, in plano Parabolæ.

bolæ. Et facio KL ∞ a, latusque principale, hoc est, quod ad axem Parabolæ pertinet, itidem æquale a, GA verò ∞ $2a$, CB seu MA ∞ y, & CM seu AB ∞ x. Deinde propter similitudinem triangulorum GMC & CBL, GM seu $2a-y$ est ad MC seu x, ut CB seu y ad BL, quæ ideo est $\frac{xy}{2a-y}$. Unde cum LK sit a, BK erit $a - \frac{xy}{2a-y}$, seu $\frac{2aa-ay-xy}{2a-y}$. Denique, quoniam eadem BK, quæ diametri Parabolæ est segmentum, se habet ad BC, quæ ipsi ordinatim est adplicata, ut BC se habet ad latus rectum, quod est a: calculus monstrat, quòd $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ æquabitur axy, & per consequens, quòd punctum C erit illud, quod quærebatur. Quod quidem, ubicunque libuerit, in linea CEG assumi potest; vel etiam in ejus adjuncta cEGc, quæ eodem modo describitur, præterquam quòd Parabolæ vertex versùs alteram partem vergat; vel denique in earundem oppositis NIo, nIO, quæ per intersectionem, quam linea GC facit in altero Parabolæ latere KN, describuntur.

Iam verò etiamsi datæ parallelæ AB, IH, ED, & GF non æqualiter inter se distantes essent, nec GA ipsas ad rectos angulos secaret, neque etiam lineæ à puncto C ad easdem ductæ; tamen non minùs hocce punctum C reperiretur semper in linea curva, quæ ejusdem esset naturæ. Quemadmodum id etiam aliquando contingere potest, licèt nullæ ex datis lineis sint parallelæ. Sed quando ita quatuor parallelæ sunt, & quinta easdem secans; & quidem parallelepipedum ex tribus, à quæsito puncto ductis, quarum una super quintam cadat, & aliæ duæ super duas ex parallelis, æquetur parallelepipedo sub duabus ad duas reliquas parallelas, & tertia quadam data linea: punctum quæsitum

reperietur in linea curva, quæ alterius erit naturæ. ſcilicet in una, cujus omnes ordinatim adplicatæ ad diametrum æquales ſunt ordinatim adplicatis ad diametrum ſectionis Conicæ, cujuſque ſegmenta diametri inter verticem & ordinatim adplicatas interjecta, eandem rationem habent ad datam aliquam lineam, quam hæc ipſa ad ſimilia diametri ſegmenta ſectionis Conicæ, quibus illæ lineæ ordinatim ſunt adplicatæ. Neque aſſeverare auſim, hanc lineam non ſimpliciorem eſſe præcedenti; quam tamen pro prima ſumendam putavi: propterea quòd deſcriptio ejus ac calculus aliquo modo ſint faciliores.

Quod ad lineas attinet, quæ reliquis caſibus inſerviunt, non immorabor iis per ſpecies diſtinguendis, neque enim omnia dicere ſuſcepi: Sed quia modum inveniendi infinita puncta, per quæ tranſire debent, explicui, ſimul modum, quo deſcribendæ ſunt, me ſatis oſtendiſſe puto.

Quænam curvæ lineæ in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur inveniendo plura earum puncta.

Ac proinde non è re fuerit, hîc conſiderare, magnum eſſe diſcrimen, inter hunc modum inveniendi plura puncta, ad deſcribendam aliquam curvam lineam, atque illum, quo utimur in deſcriptione Spiralis & ſimilium. Quandoquidem hoc poſteriore modo, non indifferenter omnia quæſitæ lineæ puncta inveniuntur, ſed tantùm ea, quæ per menſuram aliquam ſimpliciorem determinari poſſunt, quàm eſt ea, quæ ad illam componendam requiritur. Atque ita propriè loquendo nullum ex ejus punctis invenitur, hoc eſt, nullum eorum, quæ ipſi ita propria ſunt, ut non niſi per illam inveniri poſſint. Sed è contra nullum habetur punctum in lineis, quæ quæſtioni propoſitæ inſerviunt, quod non inter illa, quæ modo ſupra explicato determinantur, inveniri queat. Cum autem modus deſcribendi lineam curvam,

curvam, indifferenter plura ejus puncta inveniendo, ad illas tantùm ſe extendat, quæ itidem per motum aliquem ordinatum & continuum deſcribi poſſunt, non erit is omnino à Geometria rejiciendus.

Quæ etiam illæ ſint, quæ ope fili deſcribuntur, & ibidem recipi poſſint.

Quemadmodum non magis etiam ex ea rejiciendus eſt modus, in quo filo ſeu chordâ complicatâ utimur, ad determinandam ſummam vel differentiam duarum pluriumve linearum rectarum, quæ à quolibet quæſitæ curvæ puncto duci poſſunt ad certa quædam alia puncta, vel lineas in certis angulis, ſicut in Dioptrica fecimus, ad explicandam Ellipſin & Hyperbolam. Nam licèt in Geometria nullæ lineæ, quæ chordis ſimiles videntur, hoc eſt, quæ modò rectæ, modò curvæ ſunt, recipi poſſint; (cum ratio, quæ inter rectas & curvas exiſtit, non cognita ſit, nec etiam ab hominibus (ut arbitror) cognoſci queat; nihilque inde, quod exactum atque certum eſt, concludere poſſimus:) Tamen, quia non aliter chordis illis in dictis conſtructionibus utimur, quàm ut earum beneficio lineas rectas determinemus, quarum longitudo exactè cognoſcitur, efficere hoc non debet ut rejiciantur.

Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, ſufficiat ſcire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum;

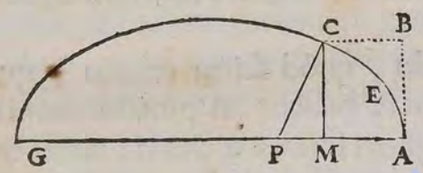
Iam verò ex hoc ſolo, quòd ſcitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem ſupra explicavi; facile quoque eſt invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoſcere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit ſpecialiorem vel ſimpliciorem quàm ad alia: atque ita imaginari diverſos modos illas deſcribendi, ex quibus faciliores eligi poſſunt. Immo verò, poteſt quoque ex hoc ſolo inveniri propemodum omne id, quod determinari poteſt, atque ad ſpacii, quod comprehendunt, magnitudinem

& modum ducendi lineas rectas, quæ ipsas secent in omnibus illis punctis ad angulos rectos.

nem ſpectat : ita ut non opùs ſit de his agere apertiùs. Et denique quantum ad omnes reliquas proprietates, quas lineis curvis attribuere poſſumus, ipſæ tantummodo ab angulorum, quos cum certis quibuſdam aliis lineis efficiunt, amplitudine dependent. Sed ſi lineæ rectæ duci poſſint, quæ illas in punctis, ubi aliæ, cum quibus angulos faciunt, quos menſurare volumus, ipſis occurrunt, ſecent ad angulos rectos, vel, quod hîc pro eodem haberi volo, quæ earum contingentes ſecent: magnitudo horum angulorum non erit inventu difficilior, quàm ſi à duabus rectis lineis comprehenſi eſſent. Atque ideo confidam, me expoſuiſſe hîc omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, poſtquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibuſvis ipſarum punctis ſecent, oſtendero. Nec verebor dicere, Problema hoc, non modò eorum, quæ ſcio, utiliſſimum & generaliſſimum eſſe; ſed etiam eorum, quæ in Geometria ſcire unquam deſideraverim.

K

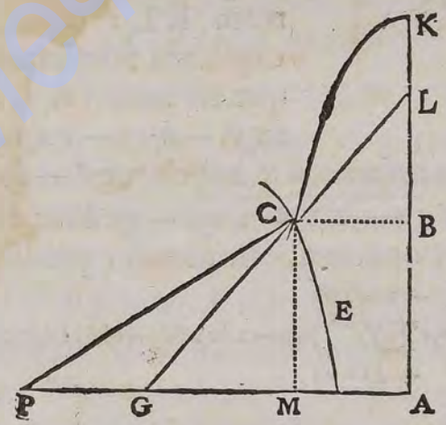
Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ ſecent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.



Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipſa angulos rectos.

Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæſitam eſſe C P, quam produco uſque ad punctum P, ut occurrat rectæ G A, quam ſuppono illam eſſe, ad cujus puncta referenda ſunt puncta omnia lineæ C E: ita ut faciendo M A ſeu C B ∞ y, & C M ſeu B A ∞ x, habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ eſt inter x & y, explicet. Deinde facio P C ∞ s, & P A ∞ v, ſeu P M ∞ $v-y$. Vnde propter triangulum

lum rectangulum P M C invenio ss, quod eſt quadratum baſis, æquale $xx+vv-2vy+yy$, quadratis duorum laterum, hoc eſt, invenio $x \infty \sqrt{ss-vv+2vy-yy}$, aut $y \infty v-\sqrt{ss-xx}$. Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ C E habent ad puncta rectæ G A) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis x vel y. Quod quidem facile eſt, ſi ubique pro x ponamus $\sqrt{ss-vv+2vy-yy}$, & quadratum hujus ſummæ pro xx, & ejus cubum pro x^3, & ita porro; ſi fuerit x, quam tollere velimus; aut ſi fuerit y, ponendo ejus loco $v-\sqrt{ss-xx}$, & quadratum, cubumve, &c. hujus ſummæ, loco yy, aut y^3, &c. Ita ut inde ſemper reſtet æquatio, in qua non niſi una habeatur quantitas indeterminata x, vel y.



L

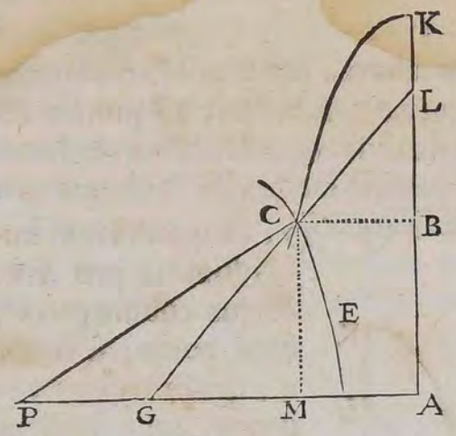
Exemplum hujus Operationis in Ellipſi.

Quemadmodum ſi C E eſt Ellipſis, in qua M A ſit ſegmentum diametri ad quam C M ſit ordinatim adplicata, quodque pro latere recto habeat r; pro tranſverſo autem q: fiet per 13^{tium} Theorema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii: $xx \infty ry-\frac{r}{q}yy$. Vnde tollendo xx, reſtabit $ss-vv+2vy-yy \infty ry-\frac{ryy}{q}$, vel $yy\frac{+qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$ æquale nihilo.

F Præ-

Præſtat enim hoc loco ita totam ſummam conſiderare, quàm unam ejus partem alteri parti adæquare.

Aliud Exemplum in Parabola ſecundi generis.



Eodem modo, ſi C E ſit curva linea, per motum Parabolæ deſcripta, ut ſuperiùs fuit explicatum, & pro G A ponatur b, pro K L, c; & d pro latere recto, pertinente ad Parabolæ diametrum K L: æquatio explicans relationem, quæ eſt inter x & y, erit $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0$. E qua auferendo x, habebitur $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Hoc eſt, ordinando æquationem ope multiplicationis, prodibit

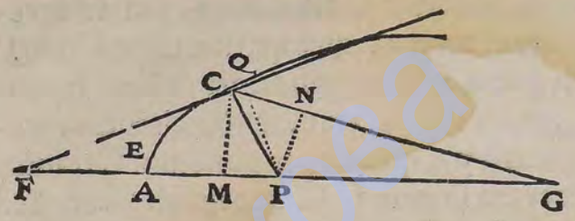
$$y^6 \left.\begin{matrix} -2c\,d \\ -2by + bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0.$$

Atque ita de aliis.

Quinetiam, licèt puncta lineæ curvæ ad puncta lineæ rectæ ſeſe eo, quo dixi, modo non haberent; ſed alio quolibet, quem ſibi quis imaginari poſſet: poterit tamen nihilominus ſemper æquatio ejuſmodi inveniri.

Tertium exemplum in Ovali, ſive Ellipſi ſecundi generis.

Quemadmodum ſi C E eſt linea, habens ejuſmodi relationem ad tria puncta F, G, & A, ut lineæ rectæ, à quolibet ejus puncto, ut C, ad punctum F ductæ, excedant lineam F A, quantitate aliqua, quæ datam habeat rationem ad quantitatem, quâ G A excedit lineam, quæ ab eodem puncto C ducitur ad punctum G: facio G A ∞ b, A F ∞ c, ſumendoque punctum C ad libitum



bitum in curva, ſuppono, quantitatem, quâ C F ſuperat F A, eſſe ad illam, quâ G A ſuperat G C, ſicut d ad e: ita ut ſi prior illa quantitas indeterminata vocetur z, F C ſit $c + z$, G C verò $b - \frac{ez}{d}$. Deinde ponendo M A ∞ y, G M erit $b - y$, & F M $c + y$: & quandoquidem triangulum C M G rectangulum eſt, ſi auferam quadratum ex G M à quadrato ex G C, relinquetur quadratum ex C M, $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Non ſecus, ſi à quadrato ex F C auferam quadratum ex F M, relinquetur itidem quadratum ex C M in aliis terminis, videlicet $zz + 2cz - 2cy - yy$. Vnde cum hi termini præcedentibus ſint æquales, oſtendunt y ſeu M A fore $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$. Ac proinde, ſubſtituendo hanc ſummam loco y in quadrato ex C M, invenietur, illud exprimendum eſſe hiſce terminis $\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy$.

Porrò ſuppono, lineam rectam P C occurrere curvæ C E ad angulos rectos in puncto C, faciendoque P C ∞ s, & P A ∞ v, ut ante, P M erit $v - y$; habebiturque propter triangulum rectangulum P C M, $ss - vv + 2vy - yy$ pro quadrato ex C M. Vbi ſi rurſus pro y ſubſtituamus ſummam ipſi æqualem, exurget

$$zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - eddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} \infty 0,$$

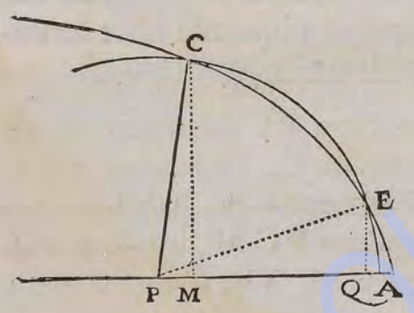
pro æquatione, quam quærebamus.

Poſtquam igitur invenimus talem æquationem, non eâ utemur ad cognoſcendas quantitates x, y, vel z, quæ

hîc

hîc datæ ſunt, quia punctum C eſt datum, ſed ad inveniendam quantitatem v vel s, quæ quæſitum punctum P determinant. In quem finem conſiderari debet: ſi punctum P tale eſt, quale deſideratur, quòd circulus, cujus id ipſum eſt centrum, quique per punctum C tranſit, tangat ibidem curvam lineam C E, nec ipſam ſecet. Sed quòd, ſi idem punctum P propiùs aut remotiùs ſumatur à puncto A, quàm oportet, circulus hic non ſolùm in puncto C, ſed etiam neceſſariò in alio quodam puncto curvam C E ſit ſecturus.

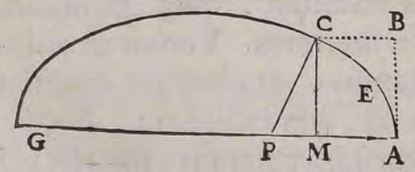
Deinde conſiderandum quoque eſt, quòd, quando hic circulus lineam curvam C E ſecat, æquatio, per quam quantitas x vel y, vel quædam alia ſimilis quæritur, ſupponendo P A & P C eſſe cognitas, neceſſariò duas contineat radices, quæ ſunt inæquales. Nam ſi, exempli gratiâ, circulus hic ſecet curvam C E, in punctis C & E, ac ducatur E Q parallela ipſi C M: nomina quantitatum indeterminatarum x & y æquè bene convenient lineis E Q & Q A, atque ipſis C M & M A, exiſtente P E æquali P C, propter circulum. Adeò, ut quærendo lineas E Q & Q A, per P E & P A, (quæ tanquam cognitæ ſupponuntur) eandem habituri ſimus æquationem, quam ſi quærerentur C M & M A per P C & P A. Vnde liquidò conſtat, ipſius x, vel y, vel alterius ejuſmodi quantitatis, quam ſuppoſuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc eſt, æquationem duas admiſſuram radices, quæ ſunt inæquales; quarum quidem una futura eſt C M, & altera E Q, ſi fue-



fuerit x, quam quærimus; aut quarum una futura eſt M A, & altera Q A, ſi fuerit y, quæ quæritur. Verum equidem eſt, quòd, cùm punctum E non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto C, una tantùm duarum harum radicum ſit vera, & altera inverſa ſeu minor quàm nihil: ſed quò hæc puncta C & E ſibi invicem ſunt propiora, eò quoque differentia inter radices haſce erit minor, quæ denique omnino inter ſe æquales futuræ ſunt, ſi bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc eſt, ſi circulus, qui per C tranſit, curvam C E ibidem tangat, nec omnino ſecet.

Præterea conſiderandum eſt, quòd æquatio, in qua duæ ſunt radices æquales, neceſſariò eandem formam habeat, ac ſi in ſe ipſam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam ſupponimus, multata quantitate cognitâ ſibi æquali: & deinde hæc ultima ſumma, ſi non tot dimenſiones habet, quot præcedens, rurſus per aliam ſummam multiplicetur, totidem, quot alteri deſunt, dimenſiones habentem, ſic ut ſeparatim æquatio inter ſingulos unius atque ſingulos alterius terminos haberi poſſit.

Vt, exempli causâ, dico, primam æquationem ſupra inventam, nimirum: $yy \frac{+qry - qvy + qvv - qss}{q - r}$, eandem formam habituram, quam illa, quæ producitur, faciendo e æqualem y, atque multiplicando $y - e$ in ſe, unde exſurgit $yy - 2ey + ee$; ita ut ſeparatim ſingulos earum terminos inter ſe comparare poſſimus, ac dicere: quòd, poſtquam primus terminus, qui eſt yy, in utraque æquatione planè idem eſt,



eſt, ſecundus, qui in una eſt $\frac{qry - 2qvy}{q-r}$, ſit æqualis ſecundo alterius, qui eſt $-2ey$. Vnde quærendo quantitatem v, quæ quantitatem lineæ P A deſignat, invenietur $v \infty e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$. vel quia e æqualem ſuppoſuimus ipſi y, habebitur $v \infty y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Non ſecus inveniri quoque poſſet s per tertium terminum $ee \infty \frac{qvv - qss}{q-r}$; ſed quia quantitas v ſatis determinat punctum P, quod ſolum quærebamus, neceſſe non erit ulteriùs progredi.

Eâdem ratione ſecunda æquatio ſuperiùs inventa: nempe,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd,$$

eandem debet habere formam, quam ſumma, quæ producitur multiplicando $yy - 2ey + ee$ per $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, quæ eſt

$$y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4.$$

ita ut ex binis hiſce æquationibus alias ſex eliciam, quæ ad inveniendas ſex quantitates f, g, h, k, v, & s inſerviunt.

Vnde facilè eſt intelligere, quòd, cujuſcunque generis linea curva propoſita eſſe poſſit, tot ſemper hoc procedendi modo æquationes reſultent, quot quantitates incognitas ſupponere coacti fuerimus. Verùm ut ordine æquationes haſce disjungamus, tandemque quantitatem v (quæ quidem ea ſola eſt, qua indigemus, & cujus occaſione cæteræ quæruntur) inveniamus: oportet primò per ſecundum terminum quærere f, primam quantitatum incognitarum ultimæ ſummæ, invenieturque $f \infty 2e - 2b$.

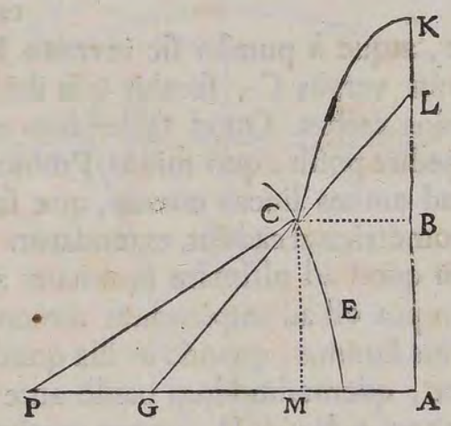
Dein-

Deinde per ultimum quærenda eſt k, ultima quantitatum incognitarum ejuſdem ſummæ, fitque $k^4 \infty \frac{bbccdd}{ee}$.

Porrò per tertium terminum quærenda eſt g, ſecunda quantitas, & fit $gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Denique per penultimum invenienda eſt h, penultima quantitas, & fit $h^3 \infty \frac{2bccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Atque ita eodem ordine uſque ad ultimam progrediendum eſſet, ſi plures ejuſmodi quantitates in eadem ſumma haberentur: ſiquidem hoc eodem ſemper modo fieri poteſt.

Præterea per terminum, qui in hoc ipſo ordine ſequitur, atque hîc quartus eſt, oportet inveſtigare v, & fit



$$v \infty \frac{3e^3}{dd} - \frac{4bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}.$$

vel, ponendo y loco e, quæ ipſi eſt æqualis, habebitur

$$v \infty \frac{3y^3}{dd} - \frac{4byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3},$$

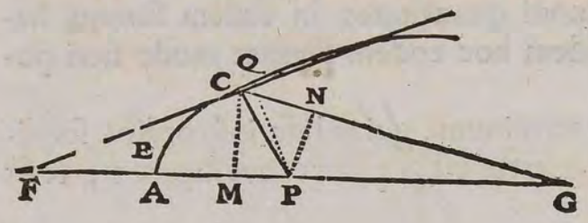
pro linea A P.

Simi-

Similiter quoque tertia æquatio, quæ eſt

$$zz \frac{+2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-}{bdd+cee+eev-} \frac{-cddss+cddvv}{-ddv}$$

, eandem formam habet, quam $zz-2fz+ff$, ſupponendo f æqualem z: ita ut obtineatur rurſus æquatio inter $-2f$, vel $-2z$ & $\frac{+2bcdd-2bcde-2cddv-2bdev}{bdd+cee+eev-ddv}$ Vnde cognoſcitur quantitatem v fore $\frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{cdd+bde-eez+ddz}$.



Ideoque ſi componamus lineam A P ex hac ſumma, ipſi v æquali, cujus quantitates omnes ſunt cognitæ, atque à puncto ſic invento P rectam lineam ducamus versùs C, ſecabit ipſa ibidem curvam C E ad angulos rectos. Quod faciendum erat. Nec video quid impedire poſſit, quo minùs Problema hoc eodem modo ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum aliquem Geometricum cadunt, extendatur.

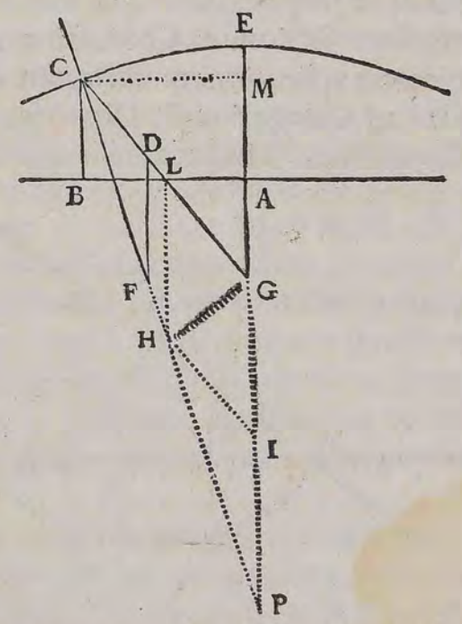
Et quidem quod ad ultimam ſummam attinet, quæ pro libitu ſumpta eſt ad implendum dimenſionum numerum alterius ſummæ, quando in illa quædam dimenſiones deſunt, quemadmodum paulò ante ſumpſimus $y^4+fy^3+ggyy+h^3y+k^4$, operæ pretium eſt ut advertamus, ſigna + & — talia ibi ſupponi poſſe, qualia quis voluerit, nec propterea lineam v, ſeu A P diverſam inveniri, ut facilè experienti conſtabit. Si enim demonſtrandis Theorematis omnibus, quorum hîc mentionem aliquam facio, immorarer, conſcribendus mihi eſſet liber multò major, quàm quidem mihi eſſet animus.

mus. Attamen obiter vos monere volo, quòd inventio hæc ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una ſola naſcantur plures aliæ, (cujus hîc exempla vidiſtis,) infinitis aliis Problematis inſervire poſſit, neque una ex minimis, methodi, quâ utor, exiſtat.

Non adjungo conſtructiones, ſecundùm quas contingentes, ſive perpendiculares quæſitæ, poſt calculum, quem jam explicavi, ſunt ducendæ: quandoquidem illæ ſemper facilè inveniri poſſunt; etiamſi aliquâ ſæpe induſtriâ, ut breves atque ſimplices reddantur, opùs ſit.

Vt, exempli causâ, ſi C E eſt prima Conchoïdes Veterum, cujus G ſit Polus, & A B regula, cujus ope ducta N

Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoide.



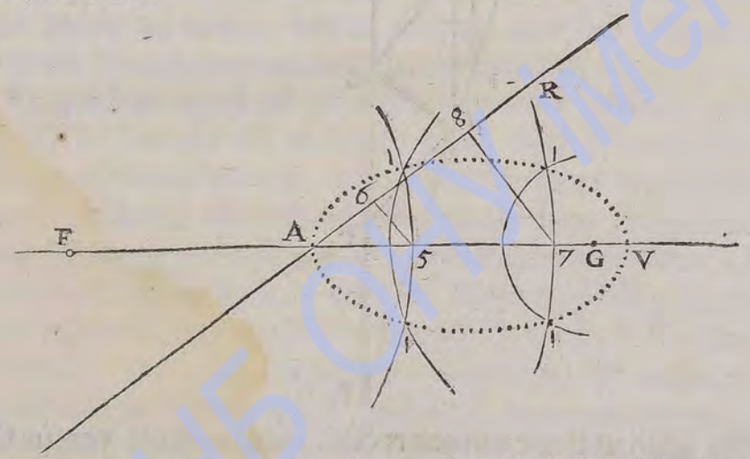
eſt; adeò ut lineæ omnes rectæ, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E, & rectam A B continentur,

G (ut

(ut E A & C L) ſibi invicem ſint æquales: Velimuſque rectam lineam ducere C F, quæ ſecet hanc Conchoïdem in dato puncto C ad angulos rectos: Quærendo juxta methodum, à nobis expoſitam, in linea A B punctum, per quod dicta linea C F tranſire debet, incidemus in calculum, nullo præcedentium breviorem; & nihilominus conſtructio inde elicienda valde brevis eſt. Oportet enim duntaxat in linea recta C G ſumere C D æqualem C B, quæ perpendiculariter cadit in B A, & deinde ex puncto D ducere D F, parallelam G A, ac æqualem L G: quâ ratione habebitur punctum F, per quod quæſita linea C P eſt ducenda.

Explicatio quatuor generum novarum Ovalium Opticæ inſervientium.

Cæterùm ut ſciatis, conſiderationem curvarum linearum, hîc propoſitarum, non carere uſu, & quòd illæ diverſas habeant proprietates, quæ nullâ ratione cedunt proprietatibus ſectionum Conicarum, libet præterea hîc ſubjicere explicationem certarum quarundam Ovalium, quas ad Catoptricæ & Dioptricæ Theoriam utiliſſimas eſſe videbitis. Modus autem quo illas deſcribo, talis eſt.



Primùm ductis rectis lineis F A & A R, ſeſe inter-

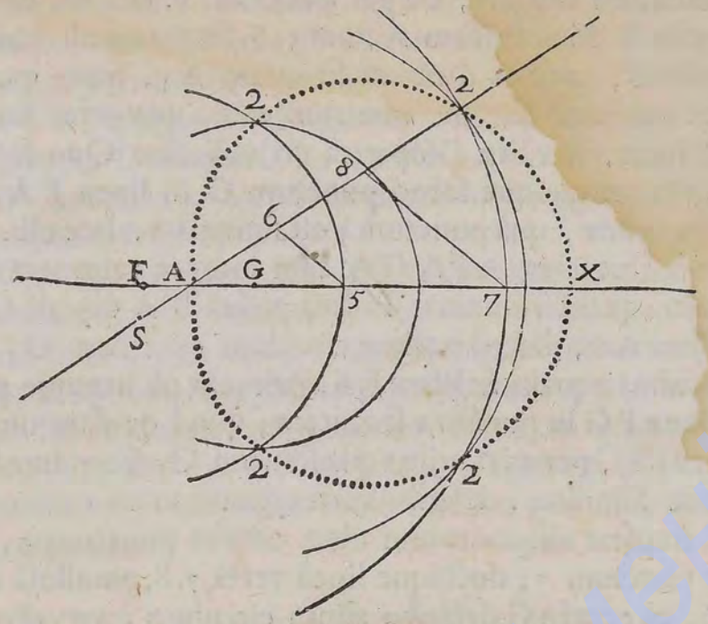
ſecan-

ſecantibus in puncto A, ad quoslibet angulos, ſumo ad arbitrium in una ex ipſis punctum F, hoc eſt, propiùs aut remotiùs ab A puncto, prout Ovales haſce majores aut minores deſcribere animus eſt; atque ex puncto F, ceu centro, deſcribo circulum, tranſeuntem aliquantulum ultra A, ut per punctum 5. Deinde ex hoc puncto 5 duco lineam rectam 5, 6, ſecantem alteram in puncto 6; ita ut A 6 minor ſit quàm A 5, juxta quamlibet rationem datam, nimirum eam, quæ refractiones menſurat, ſi eâ in Dioptrica uti velimus. Quo facto, ad libitum quoque ſumo punctum G in linea F A, ex eadem parte, quâ punctum 5 eſt ſumptum, hoc eſt, faciendo, ut lineæ A F & G A eam inter ſe rationem habeant, quam volumus. Poſtea poſitâ R A æquali G A in linea A 6, deſcribo alium circulum ex centro G, cujus radius æqualis ſit lineæ R 6, priorem ab utraque parte lineæ F G in puncto 1 ſecantem; quod quidem unùm eſt ex illis, per quæ prima quæſitarum Ovalium tranſire debet. Similiter, deſcribo rurſus circulum ex centro F, qui tranſeat aliquantulum ultra citrave punctum 5, ut per punctum 7; ductâque lineâ rectâ 7, 8, parallelâ ipſi 5, 6, ex centro G deſcribo alium circulum intervallo lineæ R 8, priorem, qui per punctum 7 tranſit, ſecantem in puncto 1, quod aliud præterea punctum eſt ejuſdem Ovalis. Atque ita invenire licet tot alia puncta, quot voluerimus, ducendo ſemper alias atque alias lineas ipſi 7, 8 parallelas, nec non alios alioſque circulos ex centris F & G.

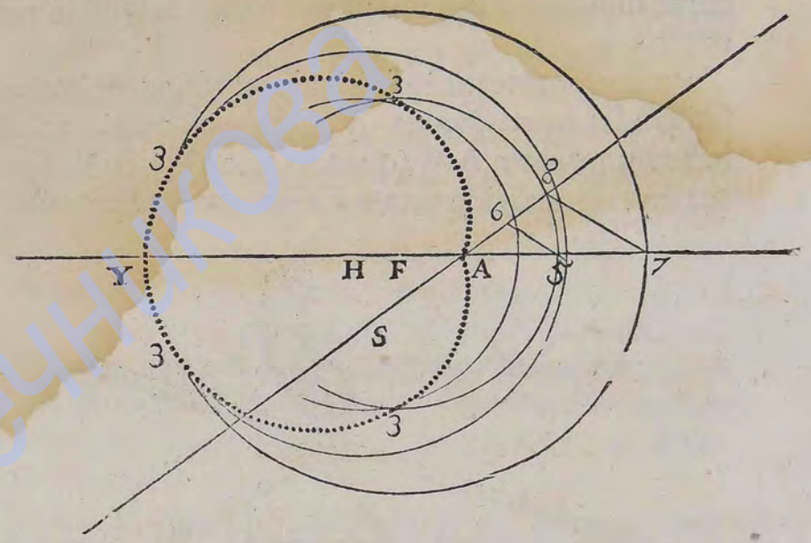
Quod ad ſecundæ Ovalis deſcriptionem attinet, ibi nulla quidem alia differentia advertenda occurrit, quàm quòd loco A R ſumere oporteat A S ipſi A G æqualem, ex altera parte puncti A, & quòd radius circuli, ex centro G deſcripti, ad ſecandum eum, qui ex centro F per

 pun-

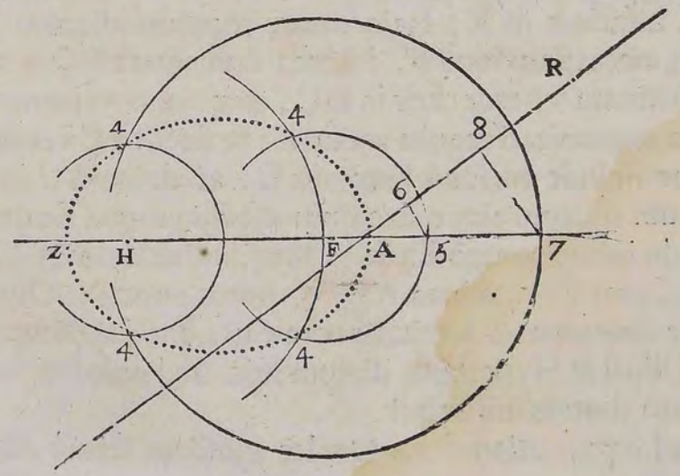
punctum 5 descriptus est, æqualis sumendus sit lineæ S 6; aut etiam æqualis lineæ S 8, si illum, qui per punctum 7 transit, secare debeat. Atque ita de aliis. Quâ
00 quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.



Porrò quod spectat ad tertiam & quartam, loco lineæ A G sumenda erit A H ex altera parte puncti A, nimirum ex eadem parte, qua punctum F est sumptum. Vbi ampliùs observandum venit, lineam hanc A H excedere debere ipsam A F, quæ quoque nulla esse potest, ita ut punctum F idem sit, quod punctum A, in descriptione omnium harum Ovalium. Deinde postquam lineæ A R & A S sic ipsi A H sunt æquales factæ, ad describendam tertiam Ovalem A 3 Y, describo circulum ex centro H, cujus radius sit æqualis lineæ S 6, circulum ex centro F, descriptum per punctum 5, secantem

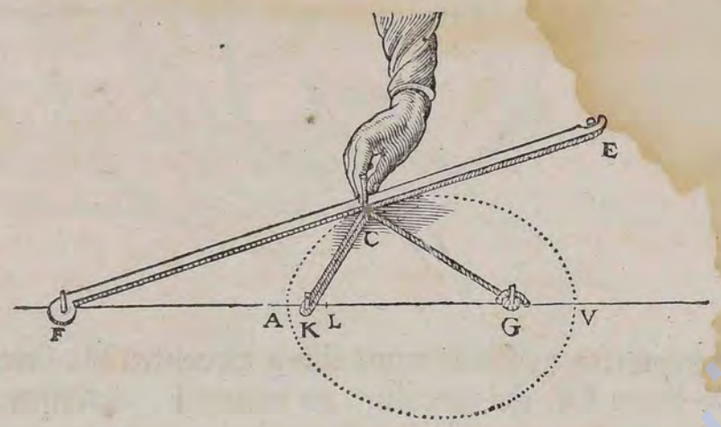


tem in puncto 3; similiterque alium ex centro H, intervallo lineæ S 8, qui circulum ex centro F, descriptum per punctum 7, secet in puncto itidem notato 3. atque ita de aliis. Denique pro ultima, describo circulos ex



centro H, quorum radii ſint æquales lineis R 6, & R 8, atque ſimilibus, qui reliquos circulos ſecent in punctis notatis 4.

Poſſent præterea infiniti alii modi excogitari ad deſcribendas haſce Ovales. Vt, exempli causâ, ad deſcribendam primam A V, quando lineæ F A & A G ponuntur æquales: divido totam F G in puncto L; ita ut F L ſit

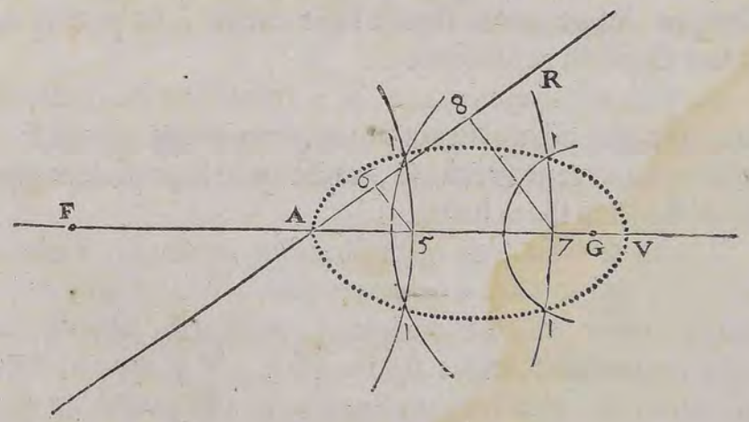


ad L G, ſicut A 5 ad A 6. hoc eſt, ut ipſæ inter ſe rationem ſervent, quæ refractiones metitur. Deinde ſectâ A L bifariam in K, facio rotare regulam aliquam, ut F E, circa punctum F, interea dum juxta ipſam velut agglutinata tenetur chorda E C, quæ, uno extremo annexa extremitati regulæ versùs E, ſe flectit à C versùs K, atque deinde rurſus à K versùs C, ac denuo à C versùs G, ubi alterum ejus extremum eſt alligatum; ſic ut longitudo ipſius compoſita ſit ex longitudine lineæ G A plus A L, plus F E, minus A F, & motus puncti C Ovalem hanc deſcribat: ad imitationem ejus, quod in Dioptrica de Ellipſi & Hyperbola dictum fuit. Sed nolo huic argumento diutiùs immorari.

Ad hæc, etiamſi hæ Ovales ejuſdem fermè naturæ viden-

videntur, ipſæ nihilominus quatuor diverſorum ſunt generum, quorum unumquodque ſub ſe infinita alia genera continet, & unumquodque rurſus tot diverſas ſpecies, quot facit Ellipſium aut Hyperbolarum genus. Etenim prout ratio, quæ inter lineas A 5 & A 6, ſimileſve, conſiſtit, diverſa eſt, genus quoque ſubalternum harum Ovalium fit diverſum. Deinde prout ratio inter lineas A F & A G vel A H mutatur, Ovales quoque cujuſque ſubalterni generis mutantur ſpecie. Prout autem A G vel A H major vel minor eſt, ipſæ magnitudine quoque differunt. Quòd ſi verò lineæ A 5 & A 6 æquales ſumantur, loco Ovalium primi aut tertii generis, deſcribentur tantùm lineæ rectæ; ſed loco ſecundi, omnes Hyperbolæ; & loco ultimi, omnes Ellipſes.

Vlteriùs in qualibet harum Ovalium conſiderandæ ſunt etiam duæ partes, quæ diverſas proprietates habent; quippe in prima pars illa, quæ eſt versùs A, facit ut radii, qui in aëre exiſtentes ex puncto F prodeunt, detorqueantur omnes versùs G punctum, poſtquam in convexam vitri ſuperficiem inciderunt, qualis hîc eſt 1 A 1. Et in quo vitro refractiones ſic fiunt, ut juxta ea, *Proprietates harum Ovalium concernentes reflexiones & refractiones.*



quæ

quæ in Dioptricis dicta ſunt, illæ omnes per rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6, aut ſimiles, quarum ope hæc Ovalis deſcripta eſt, obtinetur, menſurari poſſint.

Verùm pars illa, quæ eſt versùs V, facit ut radii, qui ex puncto G prodeunt, omnes versùs F reflectantur, ſi in ſuperficiem concavam ſpeculi inciderint, cujus figu-
P ra ſit 1 V 1; & quod ex tali materia conſtet, ut vim horum radiorum, ſecundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonſtravimus, liquet, hoc poſito, futurum, ut etiam reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales exiſtant, atque eodem modo menſurari poſſint.

In ſecunda Ovali, pars 2 A 2 ſimiliter reflexionibus inſervit, quarum anguli inæquales ſupponuntur. Si enim illa ſuperficiem ſpeculi, ex eadem materia, qua præcedens, confecti, referret, faceret ut radii omnes, qui ex puncto G venirent, ſic reflecterentur, perinde ac ſi poſt reflexionem illam viderentur procedere ex puncto F. Et notandum eſt, quòd, ſi linea A G multò major ſit aſſumpta quàm A F, ſpeculum hoc in medio versùs A concavum ſit futurum, atque concavum in extremitatibus. Quippe hujus lineæ figura talis exiſtit, ut potiùs cor quàm Ovalem repræſentet.

At verò altera ejus pars 2 X 2 refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre ſunt, ac tendunt versùs F, ſe omnes incurvent versùs G, tranſeundo ſuperficiem vitri, quod figuram illam habet.

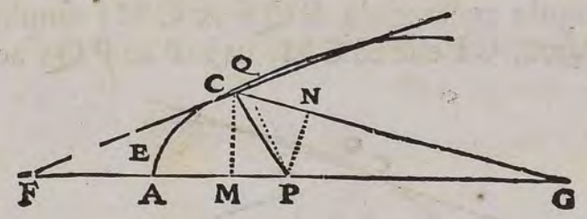
Tertia Ovalis tota refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre exiſtentes versùs F tendunt, in vitro ſe omnes versùs H recipiant, poſtquam ſuperficiem
PP ejus tranſiêrunt, cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam versùs A, ubi paululùm concava

cava exiſtit, ita ut ipſa pariter atque præcedens cordi haud ſit abſimilis. Differentia autem, quæ eſt inter duas ejus partes, in eo conſiſtit, quòd punctum F uni ex illis propius ſit, quàm punctum H; quodque ab altera remotius quàm idem punctum H exiſtat.

Eodem modo ultima Ovalis omnino reflexionibus inſervit, facitque, ut radii, qui ex puncto H veniunt, atque in ſuperficiem concavam alicujus ſpeculi ejuſdem cum præcedentibus materiæ incidunt, cujuſque figura eſt A 4 Z 4, reflectantur omnes versùs F.

Ita ut puncta F, & G ſeu H Focos harum Ovalium appellare liceat, ad exemplum eorum, quæ in Ellipſibus & Hyperbolis habentur, atque in Dioptrica ita nominata ſunt.

Omitto multas alias refractiones & reflexiones, quæ harum Ovalium ope diriguntur: cum enim harum ſolummodo converſæ aut contrariæ ſint, ex iis facilè deduci poterunt.

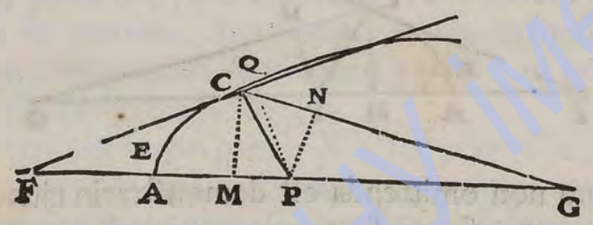


Verùm non omittenda eſt demonſtratio ejus, quod dixi. In quem finem ſumamus, exempli causâ, punctum C pro libitu in priore parte primæ harum Ovalium: deinde ducamus lineam rectam C P, quæ ſecet hanc curvam in C, ad angulos rectos. Quod quidem facile eſt, per Problema præcedens. Etenim, ſumendo b pro A G, c pro A F, $c + z$ pro F C; ſupponendoque, quòd ratio, quæ eſt inter d & e, (quam hîc ſem- *Demonſtratio harum proprietatum.*

ſemper pro ea ſumam, quæ propoſiti vitri refractiones metitur) illam quoque, quæ eſt inter lineas A 5, & A 6, ſimilesve, quibus in Ovalis hujus deſcriptione uſi ſumus, deſignet: ipſi G C attribuit $b - \frac{ez}{d}$, inveniturque lineam A P eſſe $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ut ſupra eſt oſtenſum.

Porrò ex puncto P deductâ ſuper rectam F C perpendiculari P Q, nec non P N perpendiculari ſuper G C, conſiderandum eſt, num P Q ſit ad P N, ſicut *d* ad *e*, hoc eſt, ut lineæ, quæ vitri convexi A C refractiones metiuntur: hoc enim ſi fiat, radius, qui à puncto F venit ad punctum C, ita ſe ibidem incurvare debebit, intrando hocce vitrum, ut inde versùs G tendat. Quemadmodum ex iis, quæ in Dioptrica tradidi, manifeſtiſſimum eſt. Atque eapropter per calculum exploremus, num verum ſit, P Q eſſe ad P N. ſicut *d* ad *e*. Vt ſequitur.

Triangula rectangula P Q F & C M F ſimilia ſunt, unde liquet, C F eſſe ad C M, ut F P ad P Q; ac proin-



de F P multiplicatam per C M atque diviſam per C F, eſſe æqualem ipſi P Q. Eodem modo, triangula rectangula P N G & C M G ſimilia ſunt; unde ſequitur, G P multiplicatam per C M & diviſam per C G, eſſe æqualem ipſi P N. Deinde, quia multiplicationes vel diviſiones duarum quantitatum per eandem rationem,

nem, quæ inter ipſas eſt, non mutant: ſi F P multiplicata per C M, & diviſa per C F, eſt ad G P, etiam multiplicatam per C M, & diviſam per C G, ſicut *d* ad *e*: dividendo utramque ſummam per C M, & deinde multiplicando utramque per C F, ac denuo per C G: relinquitur, F P multiplicatam per C G, in eadem ratione eſſe ad G P multiplicatam per C F, ut eſt *d* ad *e*. At verò per conſtructionem F P eſt $c \frac{+bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ſive F P $\infty \frac{bcdd + ccdd + bddz + cddz}{bde + cdd + ddz - eez}$, & C G eſt $b - \frac{ez}{d}$

Vnde ſi multiplicemus F P per C G, proveniet

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz}{bde + cdd + ddz - eez}$$

Similiter G P eſt $b \frac{-bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ſive G P $\infty \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, & C F eſt $c + z$.

Ideo ſi multiplicemus G P per C F, exurget

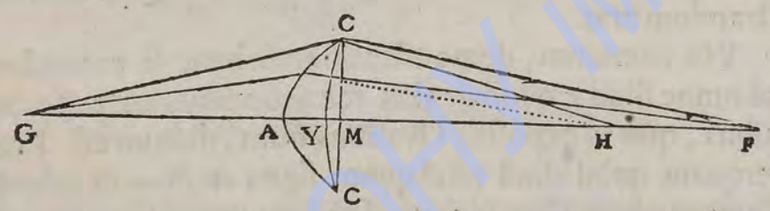
$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}$$

Et quia prima harum ſummarum diviſa per *d*, eadem eſt quæ, ſecunda diviſa per *e*: manifeſtum eſt, quòd F P multiplicata per C G ſit ad G P, multiplicatam per C F, hoc eſt, quòd P Q ſit ad P N, ſicut *d* ad *e*. Quod demonſtrandum erat.

Vbi ſciendum, demonſtrationem hanc ſe extendere ad omne illud, quod de aliis refractionibus aut reflexionibus, quæ in expoſitis Ovalibus fiunt, dictum eſt. Præterquam quòd aliud nihil quàm ſigna + & — in calculo ſit mutandum. Quæ ideo unuſquiſque proprio marte examinare poterit, ita ut huic rei diutiùs immorari non ſit opùs.

Sed oportet, ut nunc id præſtem, quod in Dioptrica omiſi, cùm ibi oſtenſum eſt, plurium diverſarum figurarum vitra haberi poſſe, quæ ſingula faciunt, ut radii,

dii, ab eodem objecti puncto venientes, coëant rursus omnes in aliud punctum, postquam per illa transiêrunt; & quòd horum vitrorum illa, quæ ab una parte admodum convexa sunt, & concava ab altera, majorem efficaciam ad comburendum habeant, quàm illa, quæ ab utraque parte æqualiter sunt convexa; cum hæc posteriora contra pro perspicillis sint meliora: Contentus enim ibi fui explicare tantùm illa, quæ ad praxin existimavi fore optima, habendo præcipuè rationem difficultatis, quæ artificibus in iis expoliendis occurrere possit. Adeoque ne quid, quod ad ejus scientiæ Theoriam spectat, desiderari queat, explicanda hîc mihi superest vitrorum figura, quæ unam ex superficiebus suis tam convexam aut concavam habeant, quàm quis voluerit, & nihilominus efficiant, ut radii omnes, qui ab uno puncto effunduntur, aut paralleli sunt, colligantur rursus in alio puncto: Quemadmodum etiam figura vitrorum, quæ idem præstant, & æqualiter ab utraque parte sunt convexa; aut in quibus convexitas unius superficiei datam habet rationem ad convexitatem alterius.



Quomodo vitrum fieri possit, cujus una superficies sam convexa aut

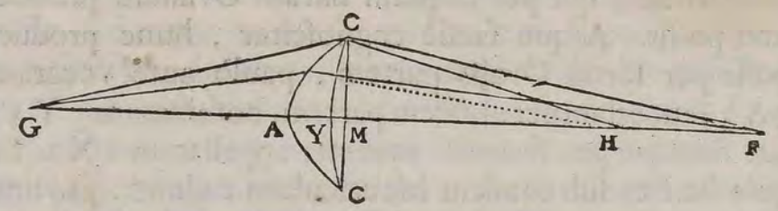
Ponamus igitur pro primo casu, quòd, cùm dantur puncta G, Y, C, & F, radii omnes, qui ex puncto G veniunt, aut ipsi G A sunt paralleli, colligi debeant in puncto F, postquam vitrum transierint, ita concavum, ut, Y in medio ejus superficiei interioris existente, extremitas

mitas sit in puncto C; ita ut chorda C M C, & sagitta Y M, arcus C Y C datæ sint. Quæstio eò recidit, ut primò considerandum sit, cujusnam ex Ovalibus jam explicatis superficies vitri Y C figuram requirat, ad faciendum, ut radii omnes, qui intra illud existentes versùs idem punctum, ut H, quod nondum est cognitum, tendunt, egrediendo se versùs aliud punctum recipiant, ut F. Quippe nullus effectus est, rationem, quâ hi radii reflexione aut refractione detorquentur, concernens, qui per aliquam harum Ovalium produci non possit. Atque facilè cognoscitur, hunc produci posse per tertiæ Ovalis partem, paulò ante vocatam 3 A 3; aut etiam per ejusdem partem, nominatam 3 Y 3; aut denique per secundæ partem, appellatam 2 X 2. Et quia hæ tres sub eundem hîc calculum cadunt, pro una pariter atque pro altera punctum Y sumendum erit pro ipsarum vertice; C autem pro uno ex punctis, quæ in ipsarum sunt circumferentia; & F pro uno ex focis; post quæ tantùm punctum H quærendum restat, quod alter focus esse debet. Illud autem invenitur, considerando, quòd differentia, quæ est inter lineas F Y & F C, se habere debeat ad differentiam, quæ est inter lineas H Y & H C, sicut *d* est ad *e*, hoc est, ut major linearum, quæ vitri propositi refractiones metiuntur, ad minorem. Quemadmodum ex harum Ovalium descriptione perspicere licet. Et quoniam lineæ F Y & F C datæ sunt, datur quoque ipsarum differentia, & per consequens etiam illa, quæ est inter lineas H Y & H C: quandoquidem ratio, quæ inter duas hasce differentias consistit data est. Ampliùs, quia Y M est data, datur quoque differentia, quæ est inter M H & H C; & tandem, quia C M est data, superest tantùm inveniendum M H, latus trianguli rectanguli C M H, cujus latus

concava sit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto prodeunt, colligat rursus in altero dato puncto.

tus C M datum eſt, quemadmodum etiam differentia, quæ eſt inter C H baſin, & M H latus quæſitum. Vnde illud facilè inveniri poteſt. Si enim ſumatur k pro exceſſu, quo C H excedit M H, & n pro longitudine lineæ C M, habebitur $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pro M H.

Poſtquam igitur ſic inventum eſt punctum H, ſi illud longiùs reperiatur diſſitum à puncto Y, quàm inde diſtat punctum F, linea C Y debet eſſe prima pars Ova-



lis tertii generis, quæ ante nominata fuit 3 A 3: ſed ſi H Y minor eſt quam F Y, aut in tantum H F ſuperat, ut differentia ipſarum, ratione totius F Y, major ſit, quàm eſt e, minor linearum, quæ refractiones metiuntur, comparata cum d majore, hoc eſt, ut faciendo H F ∞ c, & H Y ∞ $c+h$, dh ſit major quàm $2ce+eh$, & tunc C Y debet eſſe ſecunda pars ejuſdem tertiæ Ovalis, quæ paulò antè vocata fuit 3 Y 3; ſed erit ſecunda pars Ovalis ſecundi generis, quæ ſupra nominata fuit 2 X 2, ſi dh æqualis vel minor eſt quàm $2ce+eh$. Et denique ſi punctum H illud ipſum eſt, quod punctum F, quod quidem non contingit, niſi cùm F Y & F C ſunt æquales, tum dicta linea Y C erit Circulus.

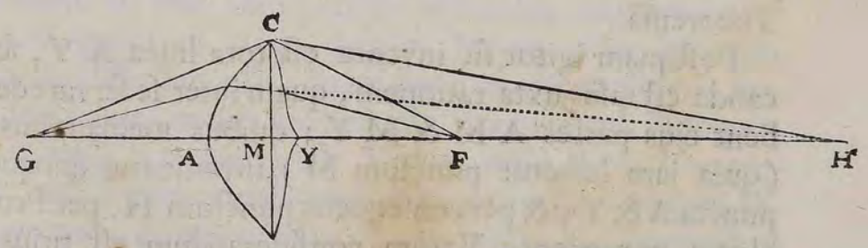
Poſt hæc quærenda eſt C A C altera hujus vitri ſuperficies, quæ debet eſſe Ellipſis, cujus focus H, ſi radii incidentes paralleli ſupponantur. Quo etiam caſu facile eſt illam invenire. Sed ſi ſupponantur à puncto G veni-

G venire, tum quidem ſuperficies illa debet eſſe prima pars Ovalis primi generis, cujus bini foci ſint G & H, quæque tranſeat per punctum C. unde porro invenitur punctum A, vertex ipſius Ovalis; conſiderando ſcilicet, quòd G C excedere debeat G A, quantitate aliquâ, quæ ſit ad illam, quâ H A ſuperat H C, ſicut d ad e. Etenim, ſumptâ k pro differentia, quæ eſt inter C H & H M; ſi pro A M ſupponatur x, habebitur $x-k$, pro differentia, quæ eſt inter A H & C H. Deinde ſi ſumatur g pro differentia, quæ eſt inter G C & G M, quæ datæ ſunt, habebitur $g+x$ pro illa; quæ eſt inter G C & G A. Et quandoquidem hæc ultima $g+x$ eſt ad alteram $x-k$, ſicut d ad e, habebitur $ge+ex \infty dx-dk$, hoc eſt, $\frac{ge+dk}{d-e}$, pro linea x vel A M, per quam determinatur punctum A, quod quærebatur.

Quomodo aliud fieri poſſit, quod idem præſtet, cujuſque convexitas unius ſuperficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius.

Ponamus jam pro caſu altero, quòd tantùm dentur puncta G, C, & F, ut & ratio, quæ eſt inter lineas A M & M Y, & quòd invenienda ſit figura vitri A C Y, quæ faciat ut radii omnes, à puncto G venientes, coëant rurſus in punctum F.

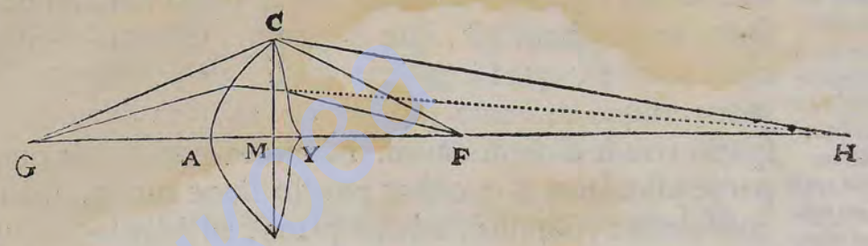
Hîc autem rurſus duabus Ovalibus uti poſſumus, quarum una A C pro focis habeat puncta G & H, altera



autem C Y puncta F & H. Qui igitur ut inveniantur, ſupponendo primùm punctum H, quod utrique eſt com-

commune, esse cognitum, quæro A M per tria puncta G, C, & H, ratione modò explicatâ; nimirum sumendo k pro differentia, quæ est inter C H & H M, & g pro eâ, quæ est inter G C & G M. Vnde cùm A C est prima pars Ovalis primi generis, invenio $\frac{ge+dk}{d-e}$ pro A M. Deinde quæro etiam M Y per tria puncta F, C, & H, ita ut C Y sit prima pars Ovalis tertii generis; sumendoque y pro M Y, & f pro differentia, quæ est inter C F & F M, habebo $f+y$ pro ea, quæ est inter C F & F T: hinc cum habeam k pro illa, quæ est inter C H & H M, habebo $k+y$ pro ea, quæ est inter C H & H Y, quam scio esse debere ad $f+y$, sicut e ad d, propter Ovalem tertii generis. unde invenio y seu M Y esse $\frac{fe-dk}{d-e}$; ita ut addendo simul quantitates inventas pro A M & M Y, habeam $\frac{ge+fe}{d-e}$ pro tota A Y. E quibus manifestum fit, quòd, ad quamcunque partem punctum H suppositum fuerit, dicta linea A Y semper composita sit ex quantitate aliqua, quæ sit ad differentiam, quâ G C & C F simul sumptæ superant G F, ut est e minor duarum linearum, quæ dimetiendis refractionibus vitri propositi inserviunt, ad $d-e$, differentiam, quâ major minorem excedit. Quod quidem satis scitum est Theorema.

Postquam igitur sic inventa est tota linea A Y, secanda est ipsa juxta rationem, quam inter se servare debent ejus partes A M & M Y; quibus mediantibus, (quia jam habetur punctum M) invenientur quoque puncta A & Y; & per consequens punctum H, per Problema præcedens. Verùm considerandum est priùs, num linea A M sic inventa, sit major quàm $\frac{ge}{d-e}$, an minor, an verò ipsi æqualis. Nam si major fuerit, cognoscitur



scitur inde, quòd curva A C esse debeat prima pars Ovalis primi generis, & C Y prima tertiæ, quemadmodum hîc suppositæ fuêre: cum aliàs, si minor fuerit, id indicet, quòd C Y debeat esse prima pars Ovalis primi generis, & A C prima pars tertiæ. Et denique si A M æqualis fuerit ipsi $\frac{ge}{d-e}$, quòd duæ hæ curvæ A C & C Y debeant esse duæ Hyperbolæ.

Possent extendi hæc duo Problemata ad infinitos alios casus, quibus quidem deducendis supersedeo, quòd nullum eorum usum in Dioptricis deprehenderim.

Possem quoque ulteriùs progredi, & dicere, cùm una ex vitri superficiebus data est, modò illa sit aut plana, aut à sectionibus Conicis, aut Circulo effecta, quomodo altera ejus superficies confici debeat, ut radios omnes ab uno dato puncto venientes transmittat ad aliud punctum etiam datum. Neque enim hoc ullo modo difficilius est, quàm quod modò explicavi; immo verò res multò facilior est, quoniam via illuc perveniendi jam aperta est. Verùm malo alios id quærere, ut, si inter investigandum negotii adhuc aliquid repererint, eò pluris inventionem rerum hîc demonstratarum æstiment.

Cæterùm in toto hoc libro locutus sum tantùm de *Quomodo id omne,*

 lineis

quod hic de lineis curvis, in plana superficie descriptis, dictum fuit, applicari possit ad illas, quæ describuntur in spatio trium dimensionum sive superficie aliqua curva.

lineis curvis quæ in superficie aliqua plana describi possunt; verùm facile est, quæ de iis dixi, etiam ad omnes alias referre, quas imaginari possumus formatas esse, motu aliquo ordinato punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum. Nimirum demittendo duas perpendiculares à quolibet puncto lineæ curvæ, quam considerare volumus, ad duo plana, ad angulos rectos se invicem secantia, unam ad unum, & alteram ad alterum: quippe perpendicularium harum extremitates singulæ duas alias curvas lineas describunt, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum puncta omnia modo superiùs explicato determinari ac referri possunt ad puncta lineæ rectæ, quæ utrique plano est communis, ut hâc ratione puncta curvæ, tres dimensiones habentis, omnino sint determinata. Ita etiam si rectam lineam ducere velimus, quæ hanc curvam in dato puncto ad angulos rectos secet, opùs tantùm est duas alias rectas lineas ducere, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum singulæ singulas curvas ibidem secent in punctis, ubi cadunt perpendiculares, quæ à dato puncto ad utrumque planum sunt deductæ. Etenim postquam duo alia plana, unum super unam, & alterum super alteram, erecta sunt, quæ ad utrumque planum, in quibus lineæ illæ sunt, recta existant, erit horum duorum planorum communis intersectio linea recta quæsita. Atque ita arbitror me omnia tradidisse Elementa, quæ ad curvarum linearum cognitionem sunt necessaria.

GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

De Constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

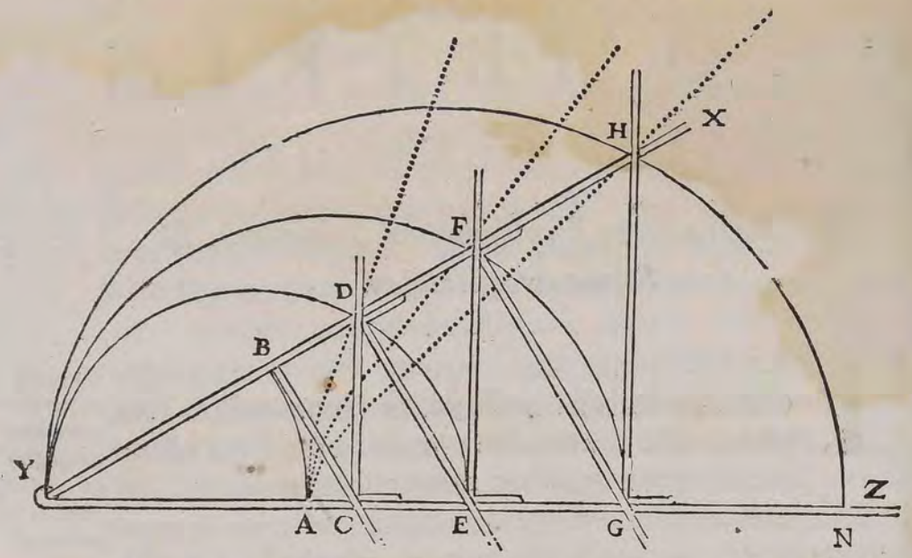
Quænam curvæ lineæ adhiberi possint ad constructionem cujusque Problematis.

TAmetsi omnes lineæ curvæ, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sunt recipiendæ, non ideo tamen permissum est uti indifferenter quâlibet, quæ primùm occurrat, ad Problematis cujusque constructionem; sed cura semper adhibenda est, ut simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, eligamus. Vbi quidem observandum est, per simplicissimas non solùm intelligendas esse illas, quæ omnium facillimè describi possunt; neque quæ propositi Problematis constructionem vel demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim, quæ simplicissimi sunt generis, quod ad quantitatem quæsitam determinandam inservire queat.

Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium.

Quemadmodum, exempli causâ, ad inveniendas tot medias proportionales, quot libuerit, non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quàm si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum X Y Z (supra explicatum) describuntur. Etenim si inter Y A & Y E duas medias proportionales invenire libeat, oportet tantùm circulum describere, cujus diameter sit Y E, qui curvam A D secet in puncto D, eritque Y D una ex quæsitis mediis proportionalibus. Cujus rei demonstratio ex sola instrumenti hujus ad lineam Y D adplicatione perspicua est.

НБ ОНТУ ім. І.І. Мечникова



Nam ſicut Y A ſeu Y B, quæ ipſi eſt æqualis, ſe habet ad Y C; ſic Y C ſe habet ad Y D; & Y D ad Y E.

Eodem modo ad inveniendas 4 medias proportionales inter Y A & Y G; aut ad inveniendas 6 inter Y A & Y N, deſcribendus eſt tantùm circulus Y F G, qui ſecans curvam A F in puncto F determinat lineam rectam Y F, quæ una eſt ex quatuor quæſitis proportionalibus; aut circulus I H N, qui ſecans curvam A H in puncto H determinat ipſam Y H, quæ una eſt ex ſex quæſitis proportionalibus. Et ſic de cæteris.

Verùm quia linea curva A D ſecundi eſt generis, & duæ mediæ proportionales inveniri poſſunt per ſectiones Conicas, quæ ſunt primi generis; tum etiam, quoniam 4 & 6 mediæ proportionales inveniri queunt beneficio linearum, generum non adeò compoſitorum atque A F & A H: peccatum eſſet in Geometria, ſi illæ hîc adhiberentur. Quemadmodum etiam ex altera parte pro peccato reputandum eſſet, ſi quis inutiliter in con-

conſtruendo Problemate aliquo per genus linearum ſimplicius, quàm natura ejus permittit, deſudaret.

Quocirca ut hîc adducere poſſim regulas quaſdam, quibus utrumque peccatum evitetur, opùs eſt, ut in genere aliquid dicam de natura Æquationum; hoc eſt, de ſummis, quæ ex pluribus terminis ſunt compoſitæ, partim cognitis, partim verò incognitis, quorum alii aliis ſunt æquales, vel potiùs, qui omnes ſimul conſiderati nihilo ſunt æquales. Quippe ſæpe præſtat illos hâc ratione conſiderare. *De natura Æquationum.*

Sciendum itaque, quòd incognita quantitas in qualibet Æquatione, tot diverſas radices ſeu diverſos valores habere poſſit, quot ipſa habet dimenſiones. Nam ſi, exempli gratiâ, x ſupponatur æqualis 2, ſeu $x - 2$ æqualis nihilo; & rurſus $x \infty 3$, ſeu $x - 3 \infty 0$; & multiplicetur $x - 2 \infty 0$ per $x - 3 \infty 0$: habebitur $xx - 5x + 6 \infty 0$, ſeu $xx \infty 5x - 6$. quæ Æquatio eſt, in qua quantitas x valet 2, & præterea etiam 3. Quòd ſi rurſus fiat $x \infty 4$, atque $x - 4 \infty 0$ multiplicetur per $xx - 5x + 6 \infty 0$, producetur $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$. quæ alia eſt Æquatio, in qua x habens tres dimenſiones, tres quoque habet valores, qui ſunt 2, 3, & 4. *Quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione.*

Verùm ſæpe accidit, quòd quædam harum radicum ſint falſæ, ſeu minores quàm nihil: ut, ſi ſupponatur x deſignare quoque defectum alicujus quantitatis, utputa 5, ita ut habeatur $x + 5 \infty 0$, quæ multiplicata per $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, faciat $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, pro Æquatione, in qua quatuor ſunt radices, nimirum tres veræ, quæ ſunt 2, 3, & 4, atque una falſa, quæ eſt 5. A *Quænam ſint falſæ radices.*

Vnde liquidò conſtat, quòd Æquationis ſumma, quæ plures radices continet, dividi ſemper poſſit per binomium, quod compoſitum eſt ex quantitate incognita, B *Quomodò diminui poſſit dimenſionum numerus ali-*

cujus Æquationis, quando cognoſcitur aliqua ex ejus radicibus.

gnita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem ſit, aut plus valore alicujus ex falſis. cujus diviſionis ope dimenſiones ejus in tantum diminuuntur.

C *Quâ ratione indagari queat, num data quantitas ſit valor alicujus radicis.*

Et viciſſim ſi Æquationis ſumma dividi non poſſit per binomium, conſtans ex quantitate incognita + vel — certa alia quadam quantitate; indicio eſt, quantitatem hanc non eſſe valorem alicujus ex ejus radicibus. Quemadmodum hæc ultima $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, dividi quidem poteſt per $x - 2$, per $x - 3$, per $x - 4$, & per $x + 5$; ſed nullo modo per $x +$ vel — quacunque alia quantitate. Id quod oſtendit, ipſam non poſſe admittere alias radices præter haſce quatuor 2, 3, 4, & 5.

D *Quot haberi poſſint veræ radices in qualibet Æquatione.*

Ex quibus etiam cognoſcitur, quot veræ & quot falſæ radices in unaquaque Æquatione haberi poſſint. Nimirum, tot in ea veras haberi poſſe, quot variationes reperiuntur ſignorum + & —; & tot falſas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna +, vel duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequuntur. Vt in ultima, quia poſt $+x^4$ habetur $-4x^3$, quæ eſt una variatio ſigni + in —, & poſt $-4x^3$ habetur $-19xx$, quæ ſunt duo ſigna ſimilia; & poſt $-19xx$ habetur $+106x$; & poſt $+106x$ habetur -120, quæ ſunt adhuc duæ aliæ variationes: cognoſcitur quòd illa tres admittat veras radices, & unam falſam; propter duo ſigua — terminorum $4x^3$ & $19xx$, quæ ſe invicem ſequuntur.

E *Quomodo faciendum ſit, ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falſæ.*

Porrò facile eſt efficere, ut in una eademque Æquatione radices omnes, quæ falſæ erant, evadant veræ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ veræ erant, falſæ fiant. Nimirum mutando ſigna omnia + & —, quæ in 2do, 4to, 6to, aliiſve locis reperiuntur, qui per numeros pares deſignantur; reliquis 1^{mi}, 3^{tii}, 5^{ti}, ſimiliumque locorum,

rum, qui per impares numeros deſignantur, non mutatis.

Vt ſi loco

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0,$$

ſcribatur

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0,$$

habebitur Æquatio, in quâ una tantùm eſt vera radix, quæ eſt 5; & tres falſæ, quæ ſunt 2, 3, & 4.

Quomodo augeri vel diminui poſſint Æquationis radices, ipſis non cognitis.

Quòd ſi verò non cognito radicum alicujus Æquationis valore, ipſas augere vel diminuere velimus quantitate aliquâ cognitâ, oportet tantùm in locum incogniti termini ſubſtituere alium, qui eâdem hâc quantitate major ſit vel minor, eumque ubique primi loco ſubrogare.

Vt ſi augere velimus 3^{nario} radicem hujus Æquationis $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$, ſumenda eſt y loco x, & cogitandum, quantitatem hanc y majorem eſſe quàm x, exceſſu 3, ita ut $y - 3$ ipſi x ſit æqualis; loco autem xx ſcribendum eſt quadratum ex $y - 3$, quod eſt $yy - 6y + 9$; & loco x^3 ſumendus eſt ejus cubus, qui eſt $y^3 - 9yy + 27y - 27$; & denique loco x^4 ponendum eſt ejus quadrato-quadratum, quod eſt $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$. Vnde ſi ſcribamus ſummam præcedentem, ſubſtituendo ubique y pro x, invenietur F

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
 & - 19yy & + 114y & - 171 \\
 & & - 106y & + 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
\end{array}$$

$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * \infty 0$, vel $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$. ubi vera radix, quæ erat 5, jam eſt 8, propter ternarium ipſi additum.

Sin

Sin verò contra ternario radicem ejusdem Æquationis diminuere velimus, facienda est $y + 3 \infty x$, & $yy + 6y + 9 \infty xx$. Atque ita porrò. Ita ut loco

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0.$$

scribatur

$$\begin{array}{l} y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 \\ \quad + 4y^3 + 36yy + 108y + 108 \\ \qquad\qquad - 19yy - 114y - 171 \\ \qquad\qquad\qquad - 106y - 318 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 120 \\ \hline y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0. \end{array}$$

Quòd, augendo veras radices, falsæ diminuantur, & contra.

Vbi notandum est, dum veræ radices alicujus Æquationis augentur, falsas eâdem quantitate diminui; & contra, dum veræ diminuuntur, falsas augeri: Et quidem tum has tum illas prorsus evanescere, si quantitate ipsis æquali diminuantur; si verò quantitate ipsas superante, tum ex veris falsas evadere, & ex falsis veras. Vt hîc, augendo ternario veram radicem, quæ erat 5, diminuitur ternario quælibet ex falsis; ita ut illa, quæ erat 4, non valeat plus quàm 1; & quæ erat 3, sit cyphra seu 0; & quæ erat 2, facta sit vera, sitque 1 (cum $-2 + 3$ faciat $+1$.) Adeò ut in hac Æquatione $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$, non plures quàm tres sint radices, inter quas duæ veræ existunt, utpote 1 & 8; & una falsa, quæ etiam est 1: Et in hac altera $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0$, una tantùm vera, quæ est 2, (quia $+5 - 3$ facit $+2$;) & tres falsæ, quæ sunt 5, 6, & 7.

Quâ ratione secundus terminus Æquationis tolli possit.

Iam verò beneficio modi hujus mutandi valorem radicum, ipsis non cognitis, duo fieri possunt, quæ in sequentibus usum aliquem habebunt. Vnum est, quòd semper secundus terminus Æquationis, quam examinamus, tolli possit: Nimirum, diminuendo veras radices,

dices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo $+$, & alter signo $-$; aut augendo illas eâdem quantitate, si uterque eodem signo fuerit adfectus.

Vt ad tollendum secundum terminum ultimæ Æquationis

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0,$$

divisis 16 per 4, propter 4^{or} dimensiones termini y^4, proveniet rursus 4: hinc facio $z - 4 \infty y$, & scribo,

$$\begin{array}{l} z^4 - 16z^3 + 96zz - 256z + 256 \\ \quad + 16z^3 - 192zz + 768z - 1024 \\ \qquad\qquad + 71zz - 568z + 1136 \\ \qquad\qquad\qquad - 4z + 16 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 420 \\ \hline z^4 * \quad - 25zz - 60z - 36 \infty 0. \end{array}$$

ubi vera radix, quæ erat 2, est 6, cum ipsa quaternario sit aucta; & falsæ, quæ erant 5, 6, & 7, tantummodo sunt 1, 2, & 3, cum illæ quaternario singulæ sint diminutæ.

Eodem modo si tollere velimus secundum terminum Æquationis

$$x^4 - 2ax^3 \pm \frac{2aa}{cc} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0:$$

quoniam divisis $2a$ per 4, quotiens fit $\frac{1}{2}a$, faciendum est $z + \frac{1}{2}a \infty x$, ac scribendum

$$\begin{array}{l} z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}aazz + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\ \quad - 2az^3 - 3aazz - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\ \qquad + 2aazz + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 \\ \qquad - cczz - accz - \frac{1}{4}aacc \\ \qquad\qquad - 2a^3z - a^4 \\ \qquad\qquad\qquad + a^4 \\ \hline z^4 * \quad + \frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5}{16}a^4 \infty 0: \\ \qquad - cc \quad - acc - \frac{1}{4}aacc \end{array}$$

ubi

ubi postquam innotuit valor ipsius z, addendo ipsi $\frac{1}{2}a$, habebitur valor radicis x.

Quo pacto fiat ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falsæ.

Alterum, quod hîc postea usum aliquem habebit, est, quòd, dum augetur valor verarum radicum, quantitate majore aliquâ ex falsis, radices omnes veræ semper fieri possint, ita ut non habeantur duo signa $+$, aut duo signa $-$, quæ se invicem sequantur; & insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semissis secundi major sit. Nam licèt id fiat, etiamsi falsæ radices incognitæ sint; tamen facile est de illarum magnitudine præterpropter judicare, atque quantitatem aliquam assumere, quæ ipsas in tantum vel plus superet, quantum ad effectum hunc requiritur.

H Vt si habeatur

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0:$$

faciendo $y - 6n \infty x$, invenietur

$$\begin{array}{lllll}
y^5 - 36n & & & & \\
\quad + n & y^5 + 540nn & & & \\
 & \quad - 30nn & y^4 - 4320n^3 & & \\
 & \quad - 6nn & \quad + 360n^3 & y^3 + 19440n^4 & \\
 & & \quad + 144n^3 & \quad - 2160n^4 & yy - 46656n^5 \\
 & & \quad + 36n^3 & \quad - 1296n^4 & \quad + 6480n^5 \\
 & & & \quad - 648n^4 & \quad + 5184n^5 \\
 & & & \quad - 216n^4 & \quad + 3888n^5 \\
 & & & & \quad + 2592n^5 \\
 & & & & \quad + 1296n^5 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
y - 46656n^6 \\
\quad + 7776n^6 \\
\quad + 7776n^6 \\
\quad + 7776n^6 \\
\quad + 7776n^6 \\
\quad + 7776n^6 \\
\quad + 7776n^6.
\end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nn\,y^4 - 3780n^3\,y^3 + 15120n^4\,yy - 27216n^5\,y * \infty 0.$$

Vbi manifestum est, quòd $504nn$ (quantitas cognita tertii termini) major sit quadrato à $\frac{35}{2}n$ (semisse quantitatis cognitæ secundi termini.) Neque ullus alius est casus, in quo quantitas, quâ veræ radices augentur, ad hoc efficiendum, ratione earum quæ datæ sunt, major requiritur.

Quoniam autem ultimus terminus hîc nullus reperitur, si id quidem non desideretur, augendus est adhuc aliquantillo valor radicum, quod sanè tam parum esse non potest, quin id ad effectum hunc sit satis.

Quomodo faciendum sit, ut loca omnia

Eodem modo si augere velimus dimensionum numerum alicujus Æquationis, & facere ut loca omnia termino-

Æquationis sint completæ.

minorum ejus sint repleta (ut si loco x^5 **** $- b \infty 0$, desideretur Æquatio, in quâ incognita quantitas sex dimensiones habeat, & in qua nullus terminus desit): oportet primùm pro x^5 **** $- b \infty 0$, scribere x^6 **** $- bx \infty 0$; deinde factâ $y - a \infty x$, habebitur

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - 6a^5y + a^6 - b + ab \infty 0.$$

Vbi liquet, quòd, quantula etiam supposita fuerit quantitas a, omnia tamen Æquationis loca non desinant esse repleta.

Quomodo multiplicari vel dividi possint Æquationis radices, ipsis incognitis.

Præterea possunt quoque radices alicujus Æquationis, etiamsi sint incognitæ, multiplicari aut dividi per quantitatem aliquam cognitam, quam libuerit.

Quod fit, supponendo, quantitatem incognitam, multiplicatam, aut divisam per quantitatem, quæ multiplicare aut dividere debet radices, esse æqualem alicui alteri. Deinde multiplicando aut dividendo quantitatem cognitam secundi termini per hanc ipsam, quæ multiplicare aut dividere debet radices; & per ipsius quadratum, quantitatem tertii; & per ipsius cubum, quantitatem quarti, atque ita porrò usque ad ultimum.

Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros.

Id quod inservire potest, ut ad integros & rationales numeros reducantur fracti, aut sæpe etiam surdi, qui in Æquationum terminis reperiuntur.

Vt si habeatur

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \tfrac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0,$$

& ipsius loco alia desideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur, oportet supponere $y \infty x\sqrt{3}$, & multiplicare per $\sqrt{3}$ quantitatem cognitam secundi termini, quæ quoque est $\sqrt{3}$; & per ipsius quadratum, quod est 3, quantitatem tertii, quæ est $\frac{26}{27}$; & per ipsius cubum, qui est $3\sqrt{3}$, quantitatem ultimi, videlicet $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, id quod facit $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0$.

Deinde ſi hujus loco adhuc alia requiratur, in qua quantitates omnes cognitæ ſolis integris numeris exprimantur; ſupponendo $z \infty 3y$, & multiplicando 3 per
I 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$ per 27, fiet Æquatio

$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0$, Vbi, cum radices ſint 2, 3, & 4, ſequitur alterius radices eſſe $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & prioris Æquationis $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ.

Quæ operatio ſervire quoque poteſt ad faciendam quantitatem cognitam alicujus termini in Æquatione æqualem alicui alteri datæ. Vt ſi habeatur
$x^3 * - bbx + c^3 \infty 0$, & ipſius loco alia ſit invenienda Æquatio, in qua quantitas cognita tertii termini, nimirum ea, quæ hîc eſt bb, ſit $3aa$, non autem bb: ſupponendum eſt $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, deinde verò ſcribendum,
K

$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$.

Quòd radices, tam veræ quam falſæ, poſſint eſſe reales, vel imaginariæ.

Cæterùm radices tam veræ quàm falſæ non ſemper ſunt reales, ſed aliquando tantùm imaginariæ: hoc eſt, ſemper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verùm nulla interdum eſt quantitas, quæ illis, quas imaginamur, reſpondet. Quemadmodum, tametſi tres imaginari poſſimus in hac, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$; tamen una tantùm eſt realis; nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, ſicut jam expoſui; tamen non niſi imaginariæ fieri poſſunt.

Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema eſt planum.

Iam verò, poſtquam ad inveniendam conſtructionem alicujus Problematis pervenimus ad Æquationem, in quâ incognita quantitas tres habet dimenſiones: Primùm ſi quantitates cognitæ, quæ in ea reperiuntur, numeros fractos continent, ipſi ad integros, beneficio multiplicationis, modò explicatæ, reducendi ſunt; At ſi ſurdos continent, tum quantùm fieri poteſt, ſimiliter ad

ad rationales ſunt reducendi, tam per eandem hanc multiplicationem, quàm per diverſos alios modos, inventu ſatis faciles. Deinde examinando ordine quantitates omnes, quæ abſque fractione ultimum terminum dividere poſſunt, videndum eſt, num aliqua ex ipſis, juncta cum quantitate incognita per ſignum + vel —, componere poſſit binomium, quod dividat totam ſummam; Id enim ſi contingat, Problema erit Planum, hoc eſt, conſtrui poterit regulâ atque circino. Etenim L
aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæſita; aut Æquatio, per ipſum diviſa, ad duas dimenſiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro ſunt oſtenſa, inveniri queat.

Exempli gratiâ, ſi habeatur
$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$; ultimus terminus, qui eſt 64, dividi poteſt abſque fractione per 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64. Quare ordine examinando hanc Æquationem, num dividi poſſit per aliquod ex binomiis $yy - 1$ aut $yy + 1$, $yy - 2$ aut $yy + 2$, $yy - 4$ aut $yy + 4$, &c. invenitur dividi poſſe per $yy - 16$, hoc modo:

$$
\begin{array}{l}
+ y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0 \\
-1y^6 - 8y^4 - \quad 4yy - 16 \\
\quad 0 \quad -16y^4 - 128yy \\
\qquad\qquad 16 \qquad 16 \\
\hline
\qquad + y^4 + 8yy + 4 \infty 0.
\end{array}
$$

Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem.

Incipio ab ultimo termino, & divido -64 per -16, quod facit $+4$, quæ repono in quotiente; deinde multiplico $+4$ per $+yy$, & fit $+4yy$, quare in ſumma dividenda repono $-4yy$. Quippe ſcribendum ſemper eſt ſignum + vel — planè contrarium illi, quod producitur per multiplicationem. Addendo autem $-124yy$ ad $-4yy$, invenio $-128yy$, quod rurſus divido per

 -16,

-16, & provenit $+8yy$, reponendum in quotiente. Multiplicando verò hoc ipsum per yy, exsurgit $-8y^4$, addendum termino dividendo, qui etiam est $-8y^4$, quæ quidem simul conficiunt $-16y^4$, quod per -16 divido, & fit $+1y^4$ pro quotiente, & $-1y^6$ addendum ipsi $+1y^6$, id quod facit o, monstratque divisionem esse ad finem perductam. Quòd si verò quantitas aliqua superfuisset, vel aliquis præcedentium terminorum absque fractione dividi non potuisset, manifestum fuisset, divisionem nullo modo fieri potuisse.

Similiter si habeatur $y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty 0.$ ultimus terminus absque fractione dividi potest per a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & similes. Sed duas sufficit ex illis considerare, nempe aa, & $aa+cc$; aliæ enim, cum in quotiente plures paucioresve dimensiones exhibeant, quàm quidem in quantitate cognita penultimi termini
M reperiuntur, impedirent, ut divisio fieri posset. Vbi notandum, me ipsius y^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota summa. Examinando igitur binomium $yy-aa-cc$, invenitur, divisionem per illud fieri posse, hoc modo:

$$+y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty 0,$$

$$\begin{array}{l} -y^5 \quad -2aa \quad -a^4 \\ \quad\quad +cc \quad\quad -aacc \\ \hline 0 \quad -aa-cc \quad -aa-cc \\ \hline +y^4 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}+a^4\\+aacc\end{smallmatrix} \infty 0. \end{array}$$

Id quod monstrat radicem quæsitam esse $aa+cc$. Quemadmodum facilè per multiplicationem probari potest.

At

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema quod ab ea dependet, esse Solidum. Nec minus vitium est, constructionem ejus postea per rectas lineas & circulos tentare, quàm ad constructionem illorum, in quibus non nisi circulis est opus, sectiones Conicas adhibere: siquidem quicquid ignorantiam aliquam testatur, peccatum dici meretur. N *Quænam Problemata sint Solida, Æquatione existente Cubicâ.*

Porrò si habeatur Æquatio, in quâ incognita quantitas quatuor habeat dimensiones: eodem modo, sublatis primùm surdis & fractis numeris; (si qui sunt) videndum est, num inveniri possit binomium, compositum ex incognita quantitate $+$ vel $-$ quantitate aliqua, quæ absque fractione ultimum terminum dividit, quod dividat totam summam. Hoc enim si inveniatur; vel quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; vel saltem post divisionem hanc relinquentur tantùm in Æquatione tres dimensiones, ita ut illa deinde rursus eodem modo sit examinanda. Quòd si verò tale binomium non inveniatur, oportebit augendo aut diminuendo valorem radicis, secundum summæ terminum tollere, modo paulò ante explicato: & deinde ipsam ad aliam reducere, quæ tres duntaxat dimensiones contineat. Id quod hoc modo fit: *Reductio Æquationum quatuor dimensionum, cùm Problema est Planum. Et quænam illa sint, quæ Solida sunt dicenda.*

loco $+x^4 \,{}^*.\, pxx \,.\, qx \,.\, r \infty 0$,
scribendum est.

$$+y^6 .\ 2py^4 \begin{smallmatrix}+pp\\-4r\end{smallmatrix} yy - qq \infty 0.$$

Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam.

Et quod ad signa $+$ & $-$ attinet, quæ omisi, si habeatur $+p$ in Æquatione præcedente, in hac ponendum est $+2p$; aut si habeatur $-p$, ponendum est $-2p$. & contra, si habeatur ibi $+r$, ponendum hîc est $-4r$; aut si habeatur ibi $-r$, ponendum hîc est $+4r$. & sive illic

illìc fuerit $+q$, ſive $-q$, ſemper tamen hîc ponendum eſt $-qq$, & $+pp$. ſaltem ſi x^4 & y^6 ſignis $+$ notatæ ſupponantur. quippe contrarium fieri deberet, ſi ſupponeretur ibi ſignum $-$.

Exempli causâ, ſi habeatur $+x^4 * -4xx-8x+35 \infty 0$, ſcribendum ejus loco eſt $y^6-8y^4-124yy-64 \infty 0$. Cum enim quantitas, quam nominavi p, ſit -4, ponendum eſt $-8y^4$ pro $2py^4$. & cum illa, quam vocavi r, ſit 35, ponendum eſt $\pm^{16}_{140}yy$, hoc eſt, $-124yy$, loco $\pm^{pp}_{4r}yy$. Et denique cum q ſit 8, ponendum eſt -64, pro $-qq$.

Eodem modo pro $+x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$, ſcribendum eſt $+y^6-34y^4+313yy-400 \infty 0$. Nam 34 eſt duplum ipſius 17, & 313 eſt hujus quadratum junctum quadruplo ipſius 6, & 400 eſt quadratum ipſius 20.

Similiter quoque loco

$$+z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0.$$

ſcribendum eſt

$$y^6 \begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^5 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix} \infty 0.$$

quippe p eſt $+\frac{1}{2}aa-cc$, & pp eſt $\frac{1}{4}a^4-aacc+c^4$, & $4r$ eſt $-\frac{5}{4}a^4+aacc$, ac tandem $-qq$ eſt $-a^6-2a^4cc-aac^4$.

Poſtquam igitur Æquatio ſic ad tres dimenſiones eſt reducta, quærendus eſt valor ipſius yy, methodo jam explicatâ. Quòd ſi verò ita inveniri nequeat, non opùs erit ulteriùs progredi. Infallibiliter enim indeſequitur, Problema eſſe Solidum. Sin autem inveniatur, poterit ejus beneficio Æquatio præcedens in duas alias dividi, in quarùm utrâque incognita quantitas duas tantùm dimenſiones habeat, quarumque radices ab illius

lius radicibus non differant. Nimirum loco Æquationis

$$+x^4 * . px x . qx . r \infty 0,$$

ſcribendæ ſunt hæ duæ aliæ

$$+xx-yx+\tfrac{1}{2}yy.\tfrac{1}{2}p.\tfrac{q}{2y} \infty 0, \text{ \&}$$

$$+xx+yx+\tfrac{1}{2}yy.\tfrac{1}{2}p.\tfrac{q}{2y} \infty 0.$$

Et quod attinet ad ſigna $+$ & $-$, quæ omiſi, ſi in Æquatione præcedente habeatur $+p$, ponendum erit in utraque harum duarum $+\frac{1}{2}p$; & $-\frac{1}{2}p$, ſi in priore habeatur $-p$. Ponendum verò eſt $+\frac{q}{2y}$ in una, ubi habetur $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$; prout habetur $+q$ in prima. Et contra, ſi habetur ibi $-q$, ponendum eſt $-\frac{q}{2y}$ in illa, ubi habetur $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$. Vnde conſequenter facile eſt omnes Æquationis propoſitæ radices cognoſcere, atque hinc Problema, cujus ſolutionem continet, conſtruere, adhibendo tantùm circulos, & lineas rectas.

Exempli gratiâ, quia pro $x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$ ponendo $y^6-34y^4+313yy-400 \infty 0$ invenitur yy eſſe 16: hinc loco Æquationis $+x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$ ſcribendæ ſunt hæ duæ $+xx-4x-3 \infty 0$ & $+xx+4x+2 \infty 0$. Nam y eſt 4, $\frac{1}{2}yy$ eſt 8, p eſt 17, & q eſt 20; ita ut $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}$ faciat -3, & $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}$ faciat $+2$. E quibus binis Æquationibus ſi extrahantur radices, invenientur eædem omnes, quæ eliciuntur ex ea, in qua habetur x^4. Nimirum una vera, quæ eſt $\sqrt{7}+2$, & tres falſæ, quæ ſunt $\sqrt{7}-2$, $2+\sqrt{2}$, & $2-\sqrt{2}$.

Similiter cùm habetur $x^4 * -4xx-8x+35 \infty 0$: quo-

quoniam radix ex $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ rursus est 16, hinc scribere oportet

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \& xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Hîc enim $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ facit 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ facit 7. Et quandoquidem nulla in utraque harum Æquationum invenitur radix, sive vera, sive falsa, liquidò constat, quatuor radices Æquationis, ex qua deductæ sunt, imaginarias esse, & Problema, cujus gratiâ Æquatio inventa est, naturâ suâ esse Planum; sed nullâ ratione construi posse, cum datæ quantitates conjungi nequeant.

Sic etiam cùm habetur

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0:$$

quia pro yy invenitur $aa + cc$, scribendum est

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0, \&$$
$$zz + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0.$$

Nam y est $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ est $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ est

O $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Vnde cognoscitur, valorem ipsius z esse

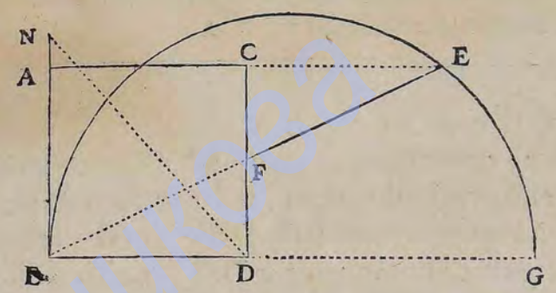
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \text{ vel}$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

P Et quandoquidem supra feceramus $z + \frac{1}{2}a \infty x$, innotescit, quantitatem x, ad quam cognoscendam omnes hasce operationes instituimus, esse

$$+\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}}.$$

Verùm enimverò ut utilitas hujus regulæ meliùs cognosci possit, operæ pretium est, ut illam Problemati alicui resolvendo applicemus.

Exemplum ostendens usum ha- Datis quadrato A D, & rectâ lineâ B N; oporteat producere latus A C usque ad E, ita ut E F, ducta ab E versùs



versùs B, sit æqualis ipsi N B. Docet Pappus, quòd, postquam primùm latus B D productum est usque in G, ita ut D G æquetur D N, circulusque descriptus est, cujus diameter B G, producendum deinde tantùm sit latus A C, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Quæ sanè constructio investigatu iis, quos lateret, difficilis satis foret: Etenim quærendo illam per methodum hîc propositam, nunquam certè cogitarent assumendam esse D G pro quantitate incognita, sed potiùs C F vel F D vel C E: cum hæ tales sint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant; sed ad Æquationem quæ non ita facilè absque regula, quam jam exposui, explicari posset. Quippe ponendo a pro B D vel C D, c pro E F, & x pro D F, fit C F $\infty a - x$; Et ut C F seu $a - x$ est ad F E seu c, sic F D seu x est ad B F, quæ proinde erit $\frac{cx}{a-x}$. Deinde propter triangulum rectangulum B D F, cujus unum latus est x, & alterum a, quadrata ipsorum, utpote $xx + aa$, æqualia sunt quadrato basis, quod est $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$. Vnde multiplicando totum per $xx - 2ax + aa$, invenietur Æquatio $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$, vel $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$.

rum reductionum.

 Vbi

V Vbi per præcedentes regulas cognoſcitur, radicem ejus, quæ eſt longitudo lineæ D F, eſſe

$$\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}cc}-\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-\tfrac{1}{2}aa+\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Quòd ſi verò B F vel B E poneretur pro quantitate incognita, perveniremus rurſus ad Æquationem, in qua quatuor dimenſiones eſſent, ſed quæ faciliùs reduci poſ-
R ſet; & ad quam etiam ſatis facilè perveniretur. Cum aliàs, ſi pro ea ſupponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, perveniremus. Quod quidem hîc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propoſitum non eſt Solidum, ſi quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compoſitam, tum communiter aliâ viâ ad ſimpliciorem Æquationem perveniri poſſit.

Poſſem præterea hîc diverſas regulas adjungere, reducendi Æquationes, quæ ad Cubum vel Quadrato-quadratum adſcendunt, verùm ſuperfluæ forent: quandoquidem conſtructionem eorum Problematum, quæ Plana ſunt, ſemper per haſce invenire licet.

Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt.

Poſſem quoque alias afferre pro Æquationibus, quæ ad Surdeſolidum, vel Quadrato-cubum, aut altiùs aſſurgunt; ſed malo omnes ſub una comprehendere, dicendo in genere: quòd, poſtquam aliquis illas ad eandem formam, quam habent illæ, quæ æquè multis dimenſionibus conſtant, & ex multiplicatione duarum aliarum, pauciorum dimenſionum, producuntur, reducere conatus fuerit, atque modos omnes, quibus hæc multiplicatio fieri poſſit, enumeraverit, nec juxta aliquem ex ipſis ſuccedere compererit, aſſeverandum ſit, illas ad ſimpliciores reduci non poſſe. Ita ut, ſi incognita quantitas 3 vel 4 dimenſiones habeat, Problema, in cujus gratiam Æquatio quæritur, Solidum exiſtat; & ſi 5 vel

vel 6 dimenſiones habeat, uno gradu magis ſit compoſitum. Et ſic de cæteris.

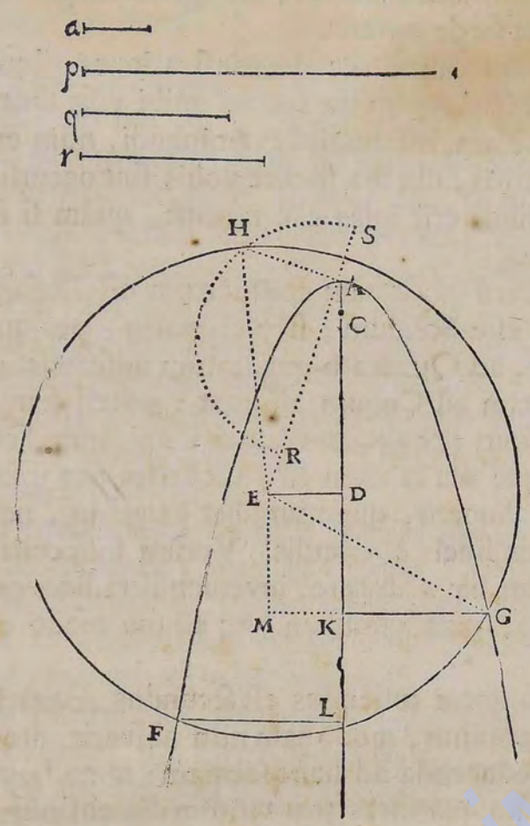
Cæterùm omiſi hîc demonſtrationes plurimorum, quæ dixi: quoniam ita faciles mihi viſæ ſunt, ut, ſi modò operam, methodicè examinandi, num erraverim, impenderitis, illæ ſuâ ſponte vobis ſint occurſuræ. quin etiam utiliùs erit ipſas hâc ratione, quàm ſi legantur, addiſcere.

Iam verò poſtquam compertum eſt Problema propoſitum eſſe Solidum; ſive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum adſcendat; ſive non altiùs quàm ad Cubum aſſurgat: poteſt ſemper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quæcunque illa tandem ſit; aut etiam per ipſarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo niſi rectis lineis & circulis. Verùm ſuffecerit regulam generalem hîc adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolæ, quandoquidem hæc aliquo modo eſt ſimpliciſſima. S

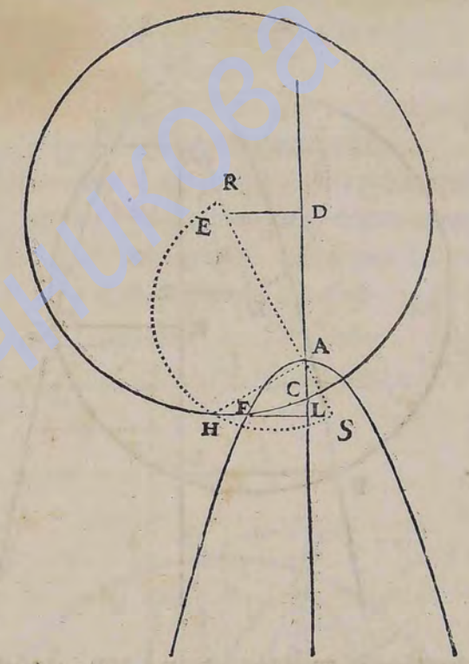
Modus generalis conſtruendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimenſionum.

Primò igitur tollendus eſt ſecundus Æquationis propoſitæ terminus, modò jam non abfuerit, atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam: $z^3 \infty {}^*apz.aaq$, T
ſi incognita quantitas tres tantùm dimenſiones habeat; aut ad hanc: $z^4 \infty {}^*.apzz.aaqz.a^3r$, ſi quatuor obtineat dimenſiones; Seu ſumendo a pro unitate, ad hanc: $z^3 \infty {}^*.pz.q$; aut ad hanc $z^4 \infty {}^*.pzz.qz.r$.

Deinde ſupponendo Parabolam F A G jam deſcriptam eſſe, & axem ejus eſſe A C D K L, latuſque rectum a ſeu 1, cujus A C ſit dimidium, & denique punctum C eſſe intra hanc Parabolam, cujus vertex ſit A: Oportet facere C D $\infty \tfrac{1}{2}p$, eamque ſumere in linea A C, continuata versùs C, ſi in Æquatione habeatur $+p$; ſed versùs alteram partem, ſi habeatur $-p$. Porrò è pun- V



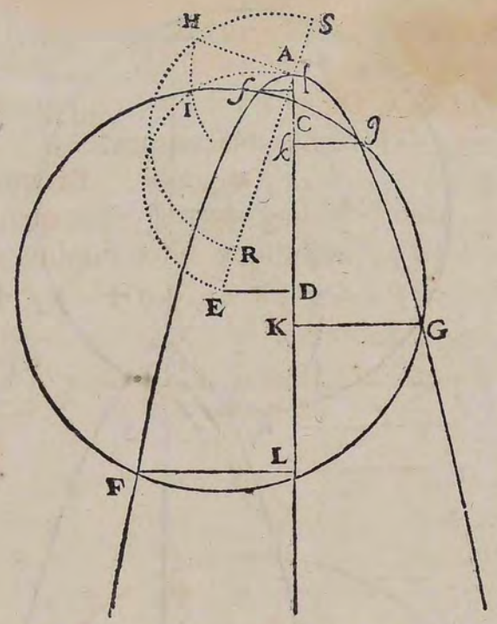
cto D, aut ex puncto C, si non habeatur quantitas p, erigendo ad axem perpendicularem D E æqualem $\frac{1}{2}q$, oportet ex centro E circulum describere F G, cujus semidiameter sit A E, si Æquatio tantùm Cubica fuerit, hoc est, si non habeatur quantitas r. Ast si habeatur r, & quidem signo + adfecta, oportet ulteriùs in hac linea A E, producta utrinque, ex una parte sumere A R ∞ r, & ex altera parte A S æqualem lateri recto Para-



Parabolæ, quod est 1, descriptoque circulo cujus diameter R S, erigere A H perpendicularem ad A E, quæ occurrat huic circulo R H S in puncto H, quod illud ipsum est, per quod alter circulus F H G transire debet. Quòd si verò habeatur — r, oportet insuper in alio circulo, cujus diameter est A E, inscribere A I, æqualem inventæ A H: inventumque erit punctum I, per quod primus circulus quæsitus F I G transire debet.

Vbi sciendum, quòd circulus hic F G secare vel tangere possit Parabolam in 1, 2, 3, aut 4 punctis, à quibus si ad axem demittantur perpendiculares, habebuntur omnes

Автор: Мечникова



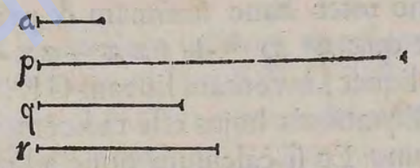
omnes Æquationis radices, tam veræ, quàm falſæ. Nimirum ſi quantitas q ſit adfecta ſigno $+$, veræ radices erunt illæ harum perpendicularium, quæ ex eadem Parabolæ parte, qua eſt E circuli centrum, reperientur, ut F L; & reliquæ, ut G K, erunt falſæ. Sed contra, ſi hæc quantitas q notata fuerit ſigno $-$, veræ erunt illæ, quæ ex altera ſunt parte; & falſæ, ſeu minores quàm nihil, quæ ex parte illa, ubi eſt centrum circuli E. Et denique ſi hic circulus non ſecat, nec tangit Parabolam in aliquo puncto, indicio eſt, Æquationem nullam admittere radicem ſive veram, ſive falſam, ſed tantùm
v v imaginarias. Adeò ut hæc regula omnium, quas quis exoptare queat, generaliſſima ſit & perfectiſſima.

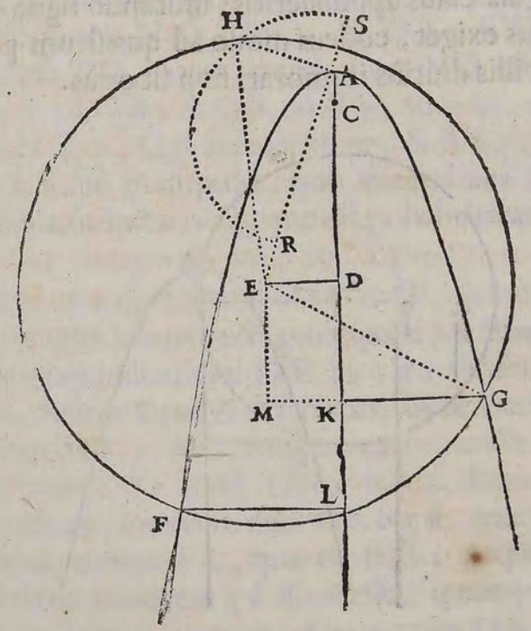
Quorum quidem demonſtratio admodum facilis eſt.

Etenim

Etenim ſi linea GK, per conſtructionem hanc inventa, vocetur z, AK erit zz, propter Parabolam, in qua GK debet eſſe media proportionalis inter AK & latus rectum, quod eſt 1. Deinde, ſi ab AK auferam AC, quæ eſt $\frac{1}{2}$, ut & CD, quæ eſt $\frac{1}{2}p$, relinquetur DK ſeu EM $zz-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}$, cujus quadratum eſt

$z^4-pzz-zz+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}$. Et quia DE ſeu KM eſt $\frac{1}{2}q$, tota GM fit $z+\frac{1}{2}q$, cujus quadratum eſt $zz+qz+\frac{1}{4}qq$, additiſque hiſce duobus quadratis, habebitur $z^4-pzz+qz+\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}$,

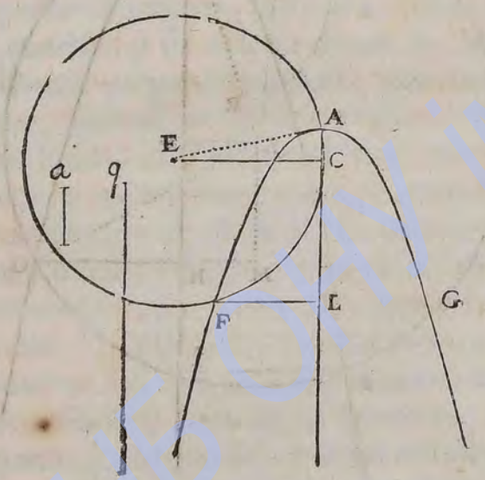




M pro

pro quadrato lineæ G E, quippe quæ basis est trianguli rectanguli E M G.

Sed quia hæc eadem linea G E est semidiameter circuli F G, poterit ipsa aliis adhuc terminis explicari. Nimirum si E D fuerit $\frac{1}{2}q$, & A D $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, E A erit $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$, propter angulum rectum A D E. Deinde cum A H sit media proportionalis inter A S, quæ est 1, & A R, quæ est r, erit ipsa $\sqrt{r}$. Ac denique, propter angulum rectum E A H, quadratum ex H E seu E G est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: adeò ut habeatur Æquatio inter hanc summam & præcedentem. Eadem quippe quæ $z^4 \infty * + pzz - qz + r$. Vnde consequenter liquet, inventam lineam G K, quæ nominata fuit z, Æquationis hujus esse radicem. Quod erat demonstrandum. Et si calculum hunc ad omnes alios hujus regulæ casus applicueritis, mutando signa + & —, prout opus exiget, eodem modo ad quæsitum perveniet is; ita ut illis diutiùs immorari non sit opùs.



Si

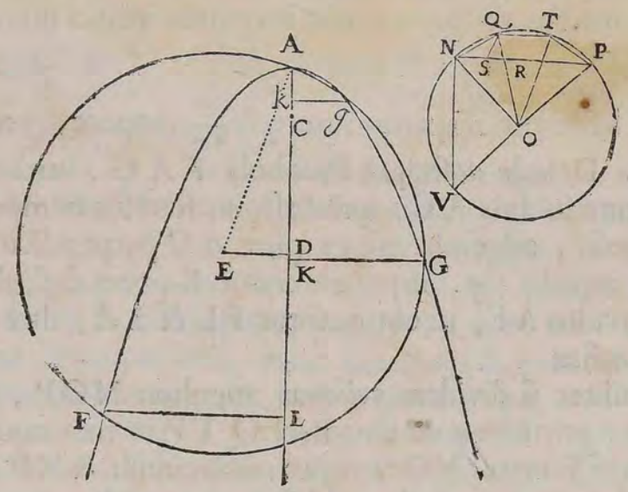
Si itaque juxta hanc regulam inter lineas a & q duas libeat medias proportionales invenire, nemo ignorat, ponendo z pro una, esse ut a ad z, sic z ad $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{z^3}{aa}$; ita ut habeatur Æquatio inter q & $\frac{z^3}{aa}$, utpote, $z^3 \infty ** aaq$. Deinde descriptâ Parabolâ F A G, unà cum segmento sui axis A C, quod est $\frac{1}{2}a$, semissis nempe lateris recti, erigenda est ex puncto C perpendicularis C E, æqualis $\frac{1}{2}q$, atque ex centro E per A describendus circulus A F, ut obtineantur F L & L A, duæ mediæ quæsitæ. *Inventio duarum mediarum proportionalium.*

Similiter si dividere velimus angulum N O P, sive arcum, portionemve circuli N Q T P in tres æquales partes; si sumatur N O ∞ 1 pro radio circuli, & N P ∞ q pro subtensa arcus dati, ac N Q ∞ z pro subtensa trientis hujus arcus, exsurget Æquatio $z^3 \infty * 3z - q$. Etenim ductis lineis N Q, O Q, & O T; si Q S parallela fiat ipsi T O, patet, quòd, sicut N O est ad N Q, sic N Q sit ad Q R, & Q R ad R S; adeò ut, cum N O sit 1, & N Q z, Q R futura sit zz, & R S z^3. Et quia tantùm R S seu z^3 impedit, quò minùs linea N P, quæ est q, tripla sit lineæ N Q, quæ est z, habebitur *Ratio dividendi angulum in tres partes æquales.*

$$q \infty 3z - z^3, \text{ vel } z^3 \infty * 3z - q$$

Deinde descriptâ Parabolâ F A G, in qua C A sit æqualis semissi lateris recti principalis, si sumatur C D ∞ $\frac{3}{2}$, & perpendicularis D E ∞ $\frac{1}{2}q$: secabit circulus F A g G, centro E per A descriptus, hanc Parabolam in tribus punctis F, g, & G, non numerato puncto A, quod est ejus vertex. Id quod indicat in hac Æquatione tres haberi radices, nimirum duas G K & $g k$, quæ veræ sunt, & tertiam, nempe F L, quæ est falsa; Atque ex hisce duabus veris minorem $g k$ illam esse, quam pro quæsita linea N Q sumere oportet. Altera enim G K, æqualis

 est



est ipsi N V, subtensæ trientis arcus N V P, qui cum reli-
x quo arcu N Q P totum circulum complet. Falsa autem F L æqualis est duabus hisce Q N & N V simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.

Quòd omnia Solida Problemata reduci possint ad hasce duas constructiones.

Superfluum foret si insisterem hîc aliis exemplis in medium afferendis, cum Problemata omnia, quæ non nisi Solida sunt, eò reduci possint, ut hâc regulâ ad constructionem ipsorum non aliter indigeamus, quàm quatenus inservit ad inveniendas duas medias proportionales, aut ad dividendum angulum in tres æquales partes. Quod cognoscetis, considerando, ipsorum difficultates semper Æquationibus, quæ ultra Quadrato-quadratum non adscendunt, comprehendi posse; Et omnes illas, quæ ad Quadrato-quadratum ascendunt, reduci posse ad Quadratum, ope quarundam aliarum, quæ tantùm ad Cubum adscendunt; Et tandem, harum secundum terminum tolli posse. Ita ut nulla earum sit, quam ad aliquam ex hisce tribus formis reducere non liceat.

$z^3 \infty$

$z^3 \infty * - pz + q.$
$z^3 \infty * + pz + q.$
$z^3 \infty * + pz - q.$

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, regula, cujus Y
inventionem Cardanus cuidam, Scipioni Ferreo, tribuit, nos docet, radicem esse

$$z \infty \sqrt{C. + \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

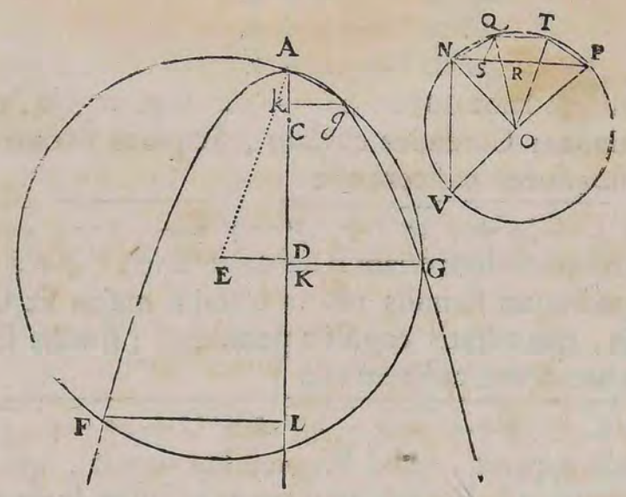
Quemadmodum etiam, si habeatur $z^3 \infty * + pz + q$, & Quadratum semissis ultimi termini majus sit Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi; similis fermè regula nos docet, radicem esse

$$z \infty \sqrt{C. + \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Vnde apparet, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad Æquationem unius ex hisce duabus formis reducuntur, construi semper possint, ut Conicas sectiones adhibere non sit opùs, nisi ad extrahendas radices Cubicas ex quibusdam quantitatibus datis, hoc est, ad inveniendas duas medias proportionales inter hasce quantitates & unitatem.

Deinde si habeatur $z^3 \infty * + pz + q$, & Quadratum semissis ultimi termini non sit majus Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi termini; supponendo Circulum N Q P V, cujus semidiameter N O sit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, hoc est, media proportionalis inter trientem quantitatis datæ p & unitatem; tum etiam supponendo lineam N P huic Circulo esse inscriptam, quæ sit $\frac{3q}{p}$, hoc est, quæ sit ad alteram quantitatem datam q, ut est unitas ad trientem ipsius p; dividendus tantùm est uterque arcus N Q P, N V P in tres æquales partes; eritque N Q, subtensa trientis unius arcus, unà cum N V, subtensâ trientis alterius, æqualis radici quæsitæ.

 Deni-



Denique ſi habeatur $z^3 \infty * + pz - q$, ſupponendo rurſus Circulum N Q P V, cujus radius N O ſit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in quo inſcripta N P ſit $\frac{3q}{p}$: erit N Q, ſubtendens trientem arcus N Q P, una ex radicibus quæſitis: & N V, ſubtendens trientem arcus N V P, radix altera. Saltem ſi Quadratum ſemiſſis ultimi termini non excedat Cubum è triente quantitatis cognitæ penultimi termini. Etenim ſi majus eſſet, non poſſet linea N P huic Circulo inſcribi, quippe quæ diametro ejus major foret. Id quod oſtenderet, duas veras radices hujus Æquationis non niſi imaginarias eſſe, nec ullam realem extare præter falſam, quæ juxta Cardani regulam foret

$$\sqrt{\text{C.}\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{\text{C.}\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Modus exprimendi valorem radicum omnium

Cæterùm notandum eſt, modum hunc exprimendi valorem radicum per relationem, quam habent ad latera certorum Cuborum, quorum tantùm contentum cognoſcitur, nequaquam magis intelligibilem, neque ſim-

ſimpliciorem eſſe, quàm ſi exprimantur per relationem, quam habent ad ſubtenſas certorum arcuum, ſeu Circuli portionum, quarum triplum eſt datum. Ita ut Cubicarum Æquationum radices illæ omnes, quæ per Cardani regulas exprimi nequeunt, æquè clarè aut etiam clariùs per modum hîc propoſitum exprimi poſſint.

Æquationum Cubicarum: ac per conſequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt.

Si enim, exempli cauſsâ, radicem cognoſcere arbitremur hujus Æquationis $z^3 \infty * + pz + q$: quia ipſam compoſitam eſſe ſcimus ex duabus lineis; quarum una eſt latus Cubi, cujus contentum eſt ſumma, quæ conflatur ex $\frac{1}{2}q$, & ex latere Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; & altera latus alterius Cubi, cujus contentum eſt differentia, quæ eſt inter $\frac{1}{2}q$, & latus Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, (quod illud omne eſt, quod ex Cardani regula addiſcimus); Dubitandum non eſt, quin æquè diſtinctè aut etiam diſtinctiùs radix hujus $z^3 \infty * + pz - q$ cognoſcatur, ſi ea conſideretur inſcripta Circulo, cujus ſemidiameter ſit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo pro ſubtenſa arcus intelligatur, cujus tripli ſubtenſa ſit $\frac{3q}{p}$. Quin etiam hi termini prioribus illis multò minùs ſunt intricati, & qui etiam multò breviores reddentur, ſi peculiari aliquâ notâ ad exprimendas haſce ſubtenſas, quemadmodum fit notâ $\sqrt{}$ C. ad exprimendum latus Cubicum, uti velimus.

Poſſunt quoque per regulas hîc ſupra explicatas deinceps exprimi radices Æquationum omnium, quæ ad Quadrato-quadratum aſcendunt; ita ut neſciam, quid in hac materia deſiderari ampliùs poſſit. Neque enim natura harum radicum permittit, ut terminis exprimantur ſimplicioribus, nec ut per conſtructionem aliquam, quæ unà & generalior & ſimplicior ſit, determinentur.

Verum

Cur Problemata Solida construi non possint absque sectionibus Conicis, nec quæ magis composita sunt sine aliis lineis, magis compositis.

Verum quidem est, me nondum dixisse, quibus rationibus nitar, quòd affirmare audeam, utrùm res aliqua fieri possit nec ne. At verò si consideretur, quomodo per methodum qua utor, id omne, quod sub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemque genus Problematum reducatur, quod est, ut quæratur valor radicum alicujus Æquationis, satis judicabitur, non difficile esse ita enumerare vias omnes, quibus inveniri possunt: ut hoc sufficiat ad ostendendum, generalissimam & simplicissimam fuisse selectam. Et speciatim, quod spectat ad Solida Problemata, quòd videlicet, ut dixi, citra lineam aliquam magis compositam quàm circularem construi non possint, vel inde evidens esse potest, quòd illa omnia ad duas constructiones reducantur; in quarum unâ duo simul puncta requiruntur, quæ inter duas datas lineas duas medias proportionales determinent; & in alterâ duo puncta, quæ datum arcum in tres æquales partes dividant. Etenim cum Circuli curvatura tantùm dependeat à simplici relatione omnium partium ad punctum unum, quod est ipsius centrum; inde fit, ut eo quoque non nisi ad unum solummodo punctum inter duas extremas determinandum uti possimus, utputa ad inveniendam unam mediam proportionalem inter duas datas, aut ad datum arcum in duas Æquales partes dividendum. At verò curvatura Conicarum Sectionum, quæ semper à duabus diversis rebus dependet, ad duo diversa puncta determinanda inservire potest.

Ob eandem rationem fieri nequit, ut aliquod eorum Problematum, quæ uno gradu magis quàm Solida sunt composita, & inventionem 4 mediarum proportionalium, aut anguli in 5 æquales partes divisionem, præsupponunt, ope alicujus Conicæ sectionis construi

strui possit. Quare nihil melius hîc à me fieri posse confido, quàm si regulam generalem tradam construendi illa ope lineæ curvæ, quæ describitur per intersectionem Parabolæ & lineæ rectæ, quemadmodum supra fuit explicatum. Affirmare enim audeo, nullam, quæ huic effectui inservire queat, simpliciorem in rerum natura inveniri. Atque etiam vidistis, quomodo hæc linea immediatè sectiones Conicas sequatur in quæstione tantopere à Veteribus quæsitâ, cujus solutio ordine omnes curvas lineas, in Geometriam recipiendas, exhibet.

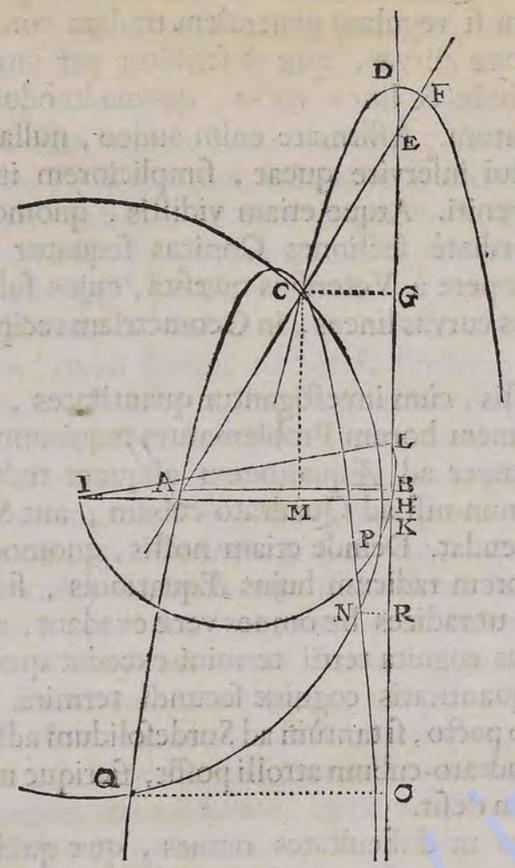
Modus generalis construendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, sex dimensiones non excedentem.

Iam nostis, cùm investigantur quantitates, quæ ad constructionem horum Problematum requiruntur, quâ ratione semper ad Æquationem aliquam reduci possint, quæ non nisi ad Quadrato-cubum, aut Surdesolidum adscendat. Deinde etiam nostis, quomodo, augendo valorem radicum hujus Æquationis, fieri semper possit, ut radices hæ omnes veræ evadant, ac simul ut quantitas cognita tertii termini excedat quadratum à semisse quantitatis cognitæ secundi termini. Et denique, quo pacto, si tantùm ad Surdesolidum adscendat, ipsa ad Quadrato-cubum attolli possit, fierique ut nullus terminorum desit.

Quocirca ut difficultates omnes, quæ quidem hîc occurrunt, per eandem regulam resolvi queant, desidero ut hæc omnia fiant, & hâc ratione reducantur semper ad Æquationem hujus formæ

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0.$$

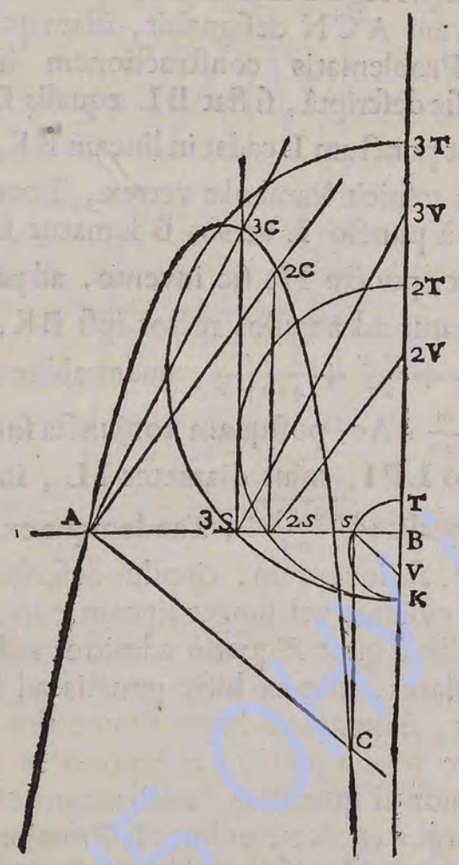
in qua quantitas vocata q, major sit quadrato à semisse ejus, quæ nominatur p.



Poſt hæc ductâ lineâ rectâ BK, utrinque indefinitâ, erectâque ad eandem ex puncto B perpendiculari AB, cujus longitudo ſit $\frac{1}{2}p$; deſcribenda eſt in plano aliquo ſeparato Parabola, ut CDF, cujus latus rectum principale ſit $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$. quod brevitatis causâ vocabo n. Tum ponendo planum, in quo Parabola exiſtit, ſupra planum in quo ſunt lineæ AB & BK, ita ut axis ejus DE omnino congruat cum linea recta BK; ſum-

ſumptoque ſegmento hujus axis, quod inter puncta E & D intercipitur, æquali $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, adplicanda eſt longa regula ad punctum E, ita ut, poſtquam ad punctum A plani inferioris quoque eſt adplicata, ſemper maneat adjuncta hiſce duobus punctis, interea dum Parabola ſecundùm lineam BK, ad quam ejus axis eſt adplicatus, vel elevatur vel deprimitur. quâ quidem ratione Parabolæ atque regulæ interſectio, quæ fit in puncto C, lineam curvam ACN deſignabit, illam quippe quâ ad propoſiti Problematis conſtructionem indigebimus. Etenim eâ ſic deſcriptâ, ſi fiat BL æqualis DE, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, ita ut punctum L cadat in lineam BK, versùs partem, quam reſpicit Parabolæ vertex, Tum verò in eadem linea à puncto L versùs B ſumatur LH æqualis $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, Et ex puncto H, ſic invento, ad partem curvæ ACN ducatur ad angulos rectos ipſi BK, linea HI, æqualis $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, quam abbreviandi causâ nominabo $\frac{m}{nn}$, Ac, poſtquam conjuncta ſunt puncta L & I, circulo LPI, cujus diameter IL, inſcribatur linea LP, æqualis $\sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}}$, Tandemque ex centro I per punctum P, ſic inventum, circulus deſcribatur PCN: ſecabit hic circulus vel tanget lineam curvam ACN, in tot punctis, quot Æquatio admittet radices. Ita ut perpendiculares, quæ ex hiſce punctis ad lineam BK deducentur, Æquationis hujus futuræ ſint radices, & nullam hæc regula patiatur exceptionem neque defectum. Etenim ſi quantitas s adeò magna eſſet reſpectu aliarum, $p, q, r, t, \& v$, ut linea LP major inveniretur diametro circuli IL, ſic ut eidem inſcribi non poſſet, nulla itidem foret radix in Æquatione propoſita, quæ non

non eſſet imaginaria; nec etiam ulla foret radix, ſi circulus I P adeò parvus eſſet, ut curvam A C N in nullo
z prorſus puncto ſecaret. Hanc autem curvam in 6 diverſis punctis ſecare poteſt, ita ut hîc ſex diverſæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus ſecat, hoc indicio eſt, quaſdam ex hiſce radicibus inter ſe æquales eſſe, aut ipſarum aliquas eſſe tantùm imaginarias.



Quòd ſi verò ratio hæc deſcribendi lineam A C N per

per motum Parabolæ vobis videatur incommoda, facile eſt plures alios modos in eundem finem excogitare. Vt, manentibus eiſdem quantitatibus pro A B & B L, nec non eâdem pro B K, quæ pro latere recto principali Parabolæ ſupponebatur; deſcribendus eſt tantùm ſemicirculus K S T, centro ejus ad libitum in linea B K aſſumpto, ita tamen ut lineam A B alicubi ſecet, ut in puncto S. Nam poſtquam à puncto T, ubi terminatur, versùs K aſſumpta fuerit linea T V, æqualis B L, jungaturque S V, atque à puncto A junctæ S V parallela ducatur A C, quæ rectæ S C, ductæ per punctum S, ipſi B K parallelæ, occurrat in puncto C: Erit punctum C, ubi hæ duæ parallelæ ſibi mutuò occurrunt, unum ex punctis per quod quæſita curva tranſire debet. Eodem modo inveniri poſſunt tot alia puncta, quot quis voluerit.

Quorum omnium demonſtratio fatis facilis eſt.

Si enim regula A E unà cum Parabola F D adplicetur ad punctum C, (eodem modo, quo conſtat eas ad punctum C in curva A C N mutuâ interſectione deſignandum eſſe adplicandas) & quidem C G vocetur y: erit G D $\frac{yy}{n}$, cum latus rectum, quod eſt n, ſit ad C G ſicut C G ad G D. Auferendo autem D E, quæ eſt $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$ à G D, relinquetur $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$, pro G E. Deinde quia A B eſt ad B E, ut C G ad G E: hinc cum A B ſit $\frac{1}{2}p$, B E erit $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Eâdem ratione ſi punctum curvæ C ſupponatur inventum eſſe per interſectionem linearum rectarum, S C, parallelæ ipſi B K, & A C, parallelæ ipſi S V; S B, quæ æquatur ipſi C G, eſt y: & cum B K æquetur lateri recto Parabolæ, quod nominavi n, B T erit $\frac{yy}{n}$. eſt enim ut K B ad B S, ita B S ad B T. Cumque T V eadem ſit

 quæ

quæ B L, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, B V erit $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Sicut autem S B eſt ad B V, ſic AB eſt ad B E, quæ ideo eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$. ut ante. Vnde apparet, unam eandemque lineam eſſe, quæ utroque hoc modo deſcribitur.

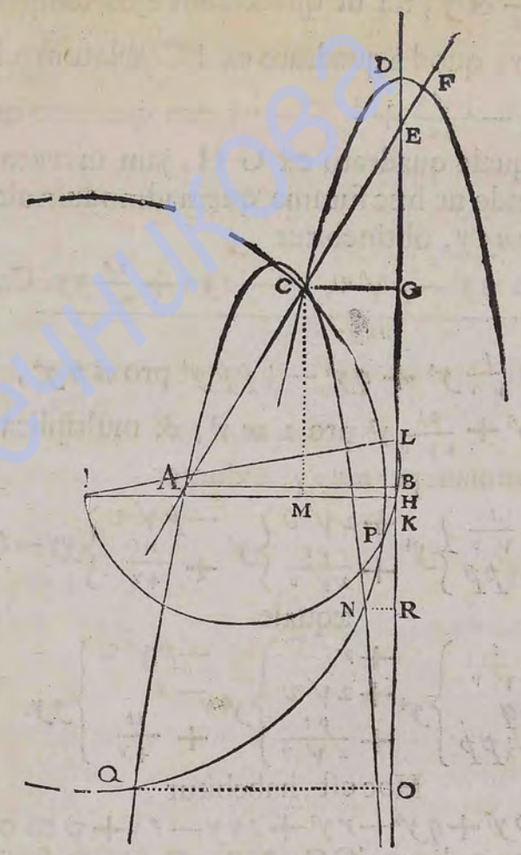
Porrò, quoniam B L & D E ſibi invicem æquales ſunt, æquales quoque inter ſe erunt D L & B E; ita ut, addendo L H, quæ eſt $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, ad D L, quæ eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, habeatur tota D H, nempe $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$, è qua auferendo G D, quæ eſt $\frac{yy}{n}$, relinquetur G H, videlicet $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Id quod ordine ſcribo, hoc pacto, G H ∞ $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$,

Et fit quadratum ex G H,

$$\frac{y^6 - py^5 - \frac{t}{\sqrt{v}} + \frac{1}{4}pp \Big\} y^4 \; \Big\{ +2\sqrt{v} + \frac{pt}{2\sqrt{v}} \Big\} y^3 \; \Big\{ -p\sqrt{v} + \frac{tt}{4v} \Big\} yy - ty + v}{nnyy.}$$

Quocunque autem alio loco hujus curvæ imaginari libeat punctum C, utputa versùs N, vel versùs Q, ſemper tamen invenietur, quadratum lineæ rectæ, quæ inter punctum H, & punctum ubi perpendicularis deducta ex puncto C cadit ſuper B H, intercipitur, iiſdem hiſce terminis iiſdemque ſignis + & — exprimi poſſe.

Poſtea



Poſtea cum I H ſit $\frac{m}{nn}$, & L H $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, I L erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$ (propter angulum rectum I H L); & cum L P ſit $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, I P vel I C erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, (propter angulum rectum I P L). Dein ductâ C M perpendiculari ad I H, erit I M differentia, quæ eſt inter I H & H M vel C G, hoc eſt

eſt, inter $\frac{m}{nn}$ & y; ita ut quadratum ejus ſemper ſit $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, quod à quadrato ex I C ablatum relinquit $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, pro quadrato ex C M, quod eſt æquale quadrato ex G H, jam invento. Aut etiam faciendo ut hæc ſumma quemadmodum altera diviſa ſit per $nnyy$, obtinebitur

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}, yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$

Cæterùm reſtituendo $\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pro nny^4, & $ry^3 + 2\sqrt{v}, y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$ pro $2my^3$, & multiplicando utramque ſummam per $nnyy$: exſurget

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v,$$

æquale

$$\left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy.$$

Hoc eſt, habebitur

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0.$$

Vnde apparet, lineas C G, N R, Q O, & ſimiles eſſe hujus Æquationis radices. Quod erat demonſtrandum.

Inventio quatuor mediarum proportionalium.

Hinc ſi invenire velimus 4^{or} medias proportionales inter lineas a & b; poſitâ x pro prima, prodibit Æquatio $x^5 * * * * - a^4b \infty 0$, vel $x^6 * * * * - a^4bx^* \infty 0$. Factâque $y - a \infty x$, invenietur

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ -a^4b \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +a^6 \\ +a^5b \end{matrix}\right. \infty 0$$

Vnde pro linea A B ſumendum eſt $3a$, & $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa+ab}}} + 6aa$ pro B K, vel latere recto Parabolæ,

læ, quod ſupra nominavi n, & $\frac{2a}{3n}\sqrt{aa+ab}$ pro D E, vel B L. Porrò deſcriptâ lineâ curvâ A C N ſecundùm menſuram harum trium linearum, facienda eſt L H $\infty \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & I H $\infty \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & L P $\infty \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$. Etenim circulus, qui centrum ſuum habet in puncto I, tranſiturus per punctum ſic inventum P, ſecabit curvam in duobus punctis C & N, à quibus ſi ad rectam B K demittantur perpendiculares N R & C G, & minor N R à majore C G auferatur; erit reliqua x, prima ex quatuor mediis proportionalibus quæſitis.

Eodem modo facile eſt datum angulum in quinque æquales partes dividere, & Circulo figuram inſcribere 11 aut 13 æqualium laterum, atque infinita alia hujus regulæ exempla reperire.

Verùm notandum eſt in plurimis horum exemplorum, quòd Circulus hic ita obliquè hanc Parabolam ſecundi generis ſecare poſſit, ut interſectionis punctum cognitu ſit difficile, atque adeò hæc conſtructio ad Praxin non ſit idonea. Cui quidem rei facilè remedium afferri poſſet, componendo alias regulas ad imitationem hujus.

Sed inſtitutum meum non eſt prolixum librum conſcribere, ſed potiùs multa paucis comprehendere: quod fortè judicabunt me feciſſe, qui conſideraturi ſunt, quòd, reductis ad eandem conſtructionem Problematis omnibus ejuſdem generis, modum ſimul, quo ad infinitas alias diverſas reduci, atque ita omnia infinitis modis reſolvi poſſint, oſtenderim. Præterea etiam, quòd conſtructis iis omnibus, quæ Plana ſunt, interſectione Circuli & lineæ rectæ, Et iis omnibus, quæ Solida ſunt,

interſectione Circuli & Parabolæ, Ac tandem iis omnibus, quæ uno gradu magis ſunt compoſita, interſectione ſimiliter Circuli & lineæ, uno gradu magis quàm Parabola compoſitæ, eandem tantùm viam in conſtruendis reliquis omnibus, quæ magis magiſque in infinitum ſunt compoſita, ſequi oporteat. Etenim cognitis, in materia Mathematicarum progreſſionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non eſt difficile. Adeò ut ſperem à poſteris mihi gratias habitum iri, non ſolùm pro iis, quæ hîc explicui; ſed etiam pro iis, quæ conſultò omiſi, quò ipſis voluptatem illa inveniendi relinquerem.

FINIS.

FLO-

FLORIMONDI DE BEAVNE

IN

GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

NOTÆ BREVES.

ALGEBRA ſpecioſa, hoc eſt, quæ exercetur per ſpecies rerum, quæ literis Alphabeti, aliiſve ſimilibus deſignantur, eſt Scientia, inveſtigandis, inveniendisque Theorematis & Problematis inſerviens, ac res homogeneas, quarum rationes vel proportiones conſiderantur, concernens. Dicimus autem rationem inter ſe habere duas res, cùm homogeneæ ſeu ejuſdem naturæ exiſtentes, aut æquales ſunt, aut inæquales, & minor per ſui ipſius continuam additionem, tandem major evadit, majoremque ſuperans. Adeò ut hæc Scientia non ſolùm Algebram numeroſam atque Veterum Analyſin Geometricam comprehendat; ſed etiam omne id, quod relationem quandam habet aut proportionem, ut refert D. des Cartes, in ſua de Methodo diſſertatione.

Optimum verò eſt, ad ſtabilienda hujus Scientiæ præcepta & ad cognitionem ejus aſſequendam, ut generaliter rationes haſce in lineis conſideremus: cum ſimpliciſſimæ ſint, & hoc ſibi vendicent, quòd rationes omnes, quæ inter quaſcunque alias res conſiderari poſſunt, exprimant. Id quod numeri non efficiunt, qui relationes, quæ inter incommenſurabiles quantitates reperiuntur, exprimere nequeunt. Accedit, quòd iis ad omnes alias res, rationem vel proportionem quandam inter ſe habentes, uti poſſimus. Etenim licèt linea nullam cum ſuperficie, aut cum alicujus motus velocitate rationem habeat (atque ita de aliis alterius naturæ rebus;) poſſumus tamen rationem, quæ inter duas ſuperficies, aut inter duas differentes velocitates, & id genus alia, quæ inter ſe relatio-

 nem

НБ ОНУ імені О. Пушкіна

nem aliquam habere ſtatuimus, reperitur, exprimere per duas lineas. Id tantùm cavendum eſt, ne permutata ratione utamur.

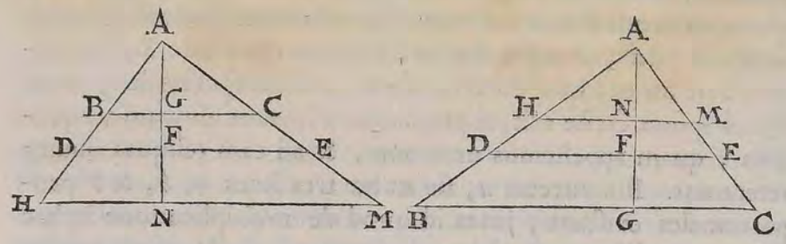
Operationes omnes, quæ in hac Scientia occurrunt, ad quinque reducuntur, quæ eædem ſunt, quæ Arithmeticæ vulgaris, nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio; hoc præterea commodi habentes, quòd illæ (ſicut notavimus) circa incommenſurabiles quantitates, non minùs quàm circa alias, verſentur. Vt, cùm proponuntur duæ lineæ incommenſurabiles, ſive longitudine, ſive longitudine & potentiâ, poſſunt ipſæ ſimul addi, una ab altera auferri, per ſe invicem multiplicari, una per alteram dividi, & ex utraque radix extrahi, perinde ac ſi longitudine eſſent commenſurabiles.

Neque verò docebimus, quo pacto hæ operationes per literas Alphabeticas, vel alias linearum aliarumve rerum ſpecies, quas deſignant, ſint faciendæ: cum hoc ab aliis jam ſit pertractatum. Tum etiam quoniam hæc Geometria, quâ ratione Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio, tam in numeris, quàm in lineis inſtituendæ ſint, breviter exponit. Verùm obſervari volumus, quòd per haſce ſpecies, quas nominamus b, b^2, b^3, b^4, bd, b^2d, b^3d; primam videlicet b, numerum aut lineam ſimplicem; ſecundam b^2, quadratum ipſius b, ſeu b quadratum; tertiam b^3 ſeu b cubum; quartam b^4 ſeu b quadrato-quadratum, &c. non ullæ aliæ res, quàm lineæ omnino ſimplices concipiantur; niſi quæſtio fuerit de veris Quadratis, Cubis, Planis, & Solidis, aut, per haſce ſpecies alias res ſignificemus, ſimilem inter ſe relationem, quam lineæ ipſis deſignatæ, habentes. Attamen conſentaneum eſt, nomina uſitata retinere, quandoquidem lineæ, ſpeciebus hiſce deſignatæ, eandem inter ſe rationem, quam veræ ſuperficies, & vera ſolida, quæ per ipſas denotantur, ſervant. Et hoc quidem ad imitationem Arithmeticæ communis, ubi alios numeros appellamus Quadratos, alios Cubos, alios Planos, alios Solidos &c. quippe qui talem inter ſe relationem obſervant, quatenus ſunt numeri ſimplices, qualem inter ſe obtinent Quadrati, Cubi, &c. quos repræſentant.

Oportet itaque oſtendere, ſpatia & corpora, ſpeciebus hiſce deſignata, eandem inter ſe rationem habere, quam lineæ ſimplices, quas per ipſas concipimus. Exempli gratiâ, b^2 eandem ratio-

rationem habere ad bd, & ad d^2, quatenus ſpatia ſignificant, quàm quatenus lineas referunt. Sic etiam relationem ipſius b^3 ad b^2d & ad d^3, aliasque ſimiles, eandem inter hæc Solida exiſtere, quam ea, quæ eſt inter lineas, per has ſpecies deſignatas. Quod ipſum facile erit, ſi pro arbitrio lineam aliquam accipiamus, quam appellemus unitatem, & ad eam reliquas omnes referamus. Illa vocetur a, ſic ut hæ tres lineæ a, b, & b^2 proportionales exiſtant, juxta id quod de multiplicatione in hac Geometria dictum eſt. Idem de lineis a, d, & d^2 eſt intelligendum. Sic etiam linea a eſt ad lineam b, ſicut linea d eſt ad lineam bd; aut, ut linea a eſt ad lineam d, ita linea b eſt ad eandem lineam bd. Quod cum ita ſit, linea b erit ad lineam b^2, ſicut linea d ad lineam bd; cum eadem utrobique ſit ratio, nimirum eadem, quæ lineæ a ad lineam b. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea b^2 ad lineam bd. Eodem modo linea b erit ad lineam bd, ut linea d ad lineam d^2; cum utraque ratio eadem ſit, quæ lineæ a ad lineam d. quemadmodum eſt oſtenſum. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea bd ad lineam d^2. Patet itaque, b eſſe ad d, ſicut b^2 ad bd; itemque b eſſe ad d, ſicut bd ad d^2, & conſequenter, rationem lineæ b^2 ad lineam d^2 eſſe duplicatam lineæ b ad lineam d; lineamque bd eſſe mediam proportionalem inter lineas b^2 & d^2. Id quod unuſquiſque novit ab Euclide eſſe oſtenſum, nimirum: rationem, quam habet b^2 ad d^2, quatenus deſignant ſuperficies ſeu quadrata, duplicatam eſſe rationis, quam habet latus b ad latus d: itemque bd rectangulum eſſe medium proportionale inter hæc ipſa quadrata. ac per conſequens, hæc ſpatia eandem inter ſe relationem habere, quam lineæ iiſdem ſpeciebus deſignatæ. Idem oſtendi poteſt de Cubis vel Solidis, ad imitationem præcedentis demonſtrationis. Vnde haud parvum emolumentum colligere licet, cum complures rationes, quas Euclides aliique Geometræ, inter duas ſuperficies, atque inter duo corpora, reperiri, demonſtrarunt, nos pro lineis, aliisve rebus, iiſdem ſpeciebus deſignatis, uſurpare poſſimus, prout eandem quam dicta ſpatia ſeu corpora inter ſe relationem habent.

Exhibeamus aliquod exemplum: Detur triangulum rectangulum A D E, cujus angulus D A E ſit rectus. Manifeſtum eſt ex elementis, quòd laterum quadrata ſimul ſumpta quadrato baſis



ſint æqualia: hoc eſt, ſi ponamus AD ∞ b, AE ∞ c, & DE ∞ d, quòd $b^2 + c^2$ æquetur d^2, quatenùs deſignant vera quadrata. Quod quoque verum eſt, quatenus deſignant lineas, modò eandem inter ſe relationem obtineant, quam hæc ipſa quadrata; ut demonſtratum eſt à nobis, atque etiamnum in hoc exemplo palàm facere conabimur.

Aſſumatur pro lubitu linea aliqua major vel minor (perinde enim eſt) quàm DE, quæ quidem ſit unitas, & ad quam reliquæ omnes referantur: ipſa autem eſto BC, parallela exiſtens ipſi DE, ducaturque perpendicularis AF, ipſam, ſi opùs eſt, producendo. Deinde fiat, ut BC ad DE, ita DE ad HM, fietque HM ∞ d^2.

Iam verò, ſicut hæ lineæ BC, DE, HM ſunt continuè proportionales, ita quoque lineæ BC, AE, NM, nec non lineæ BC, DA, HN. Compoſita enim eſt ratio BC ad AE, ex ratione BC ad AC, & ex ratione AC ad AE. Eſt autem ratio AE ad NM compoſita ex iiſdem rationibus, nimirum ex ratione AE ad FE, quæ eadem eſt rationi BC ad AC (propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum AEF & BCA,) & ex ratione FE ad NM, hoc eſt, AE ad AM, quæ eadem eſt rationi AC ad AE (per conſtructionem.) Id quod eodem modo patet de BC, AD, HN. Erit igitur NM ∞ c^2, & HN ∞ b^2, quæ quidem ſimul ſumptæ æquantur ipſi HM, hoc eſt, d^2. Quod erat demonſtrandum.

Cernitur præterea illa in hac Methodo facilitas, quòd etiam lineam aliquam hoc modo $\frac{b}{d}$, aliiſve ſimilibus, exprimere poſſimus; aut quòd eo item modo fractionem aliquam Arithmeticæ communis, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. denotare valeamus; hoc ſanè compendio, quòd literis fractio exprimi poſſit, cujus numerator ad denomi-

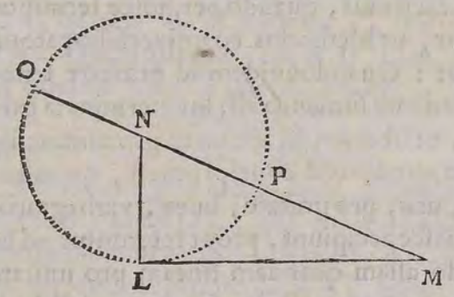
nominatorem non habeat rationem commenſurabilem; ſed quæ ſimilis ſit lineæ ad lineam, quarum una vicem gerat numeratoris, & altera vicem denominatoris ejuſdem fractionis. Id quod non exiguæ eſt utilitatis, quemadmodum poſtea videbitur.

Iam autem explicandum eſt, cur æque-multæ dimenſiones ſingulis Æquationis terminis ſint tribuendæ. Quod ſanè per ſe liquet, quando ſub hiſce terminis ſuperficies aut corpora intelliguntur: cum nulla ratio inter duas quantitates heterogeneas conſiſtat, ſpatiaque illa aut corpora eodem ſemper linearum atque dimenſionum numero deſignentur.

Verùm expedit ut idem faciamus, quando per hoſce terminos non niſi lineæ deſignantur, ut Methodus eò univerſalior atque etiam commodior reddatur: Quandoquidem id præſtare tenemur, cùm linea, quæ pro unitate ſumenda eſt, indeterminata exiſtit, ſeu, cùm requiritur, ut liberum ſit aſſumere pro unitate lineam qualem volumus. Id quod facilè concipi poteſt, quoniam ſumendo lineam aliquam, ut a, pro unitate, lineæ, verbi gratiâ, b^2 & d^2, denominationes haſce accipiunt, prout referuntur ad lineam a. At verò ſtatuendo aliam quandam lineam pro unitate quàm a, licèt b & d eædem maneant, nihilominus tamen b^2 & d^2 à præcedentibus erunt diverſæ. Ac proinde, ſi comparare velimus lineam b cum linea d^2: quoniam d^2 diverſa eſt, prout ad diverſas lineas refertur, quas pro unitate accipere poſſumus, ipsâ lineâ b eâdem ſemper manente; patet lineam b ad lineam d^2 non ſemper eandem rationem ſervare: ſed contra, diverſas ad illam ſortiri relationes, pro diverſis lineis, quæ pro unitate aſſumuntur. Et ſic de aliis. Aſt quæcunque tandem linea pro unitate ſumatur, linea tamen indeterminata, & quæ per b^2 concipitur, eandem ſemper habet rationem ad d^2, quam quadratum lineæ b ad quadratum lineæ d. Atque ita de aliis omnibus, ut ſupra eſt oſtenſum. Et quidem generalius eſt atque etiam commodius, relinquere ita unitatem indeterminatam & ad cujuſque arbitrium, ut deinde pro ipſa talis linea aſſumi poſſit, qualis videbitur, quàm eandem ab initio operationis determinare, ſumendo pro ipſa certam aliquam lineam. Præterquam quod id plurimùm conducat ad confuſionem evitandam; ad dirigendum calculum; atque ad præcavenda vitia, quæ ibidem committi poſſent. Verùm cùm unitas determinata exiſtit, tum quidem non ampliùs ſingulis Æqua-

Æquationis terminis æquè multas literas tribuere tenemur: cum unitas illas ubique ſupplere poſſit, ubi numero pauciores habentur, & ipſa has ſpecies multiplicans aut dividens eaſdem non mutet. Si verò ibidem non ſit expreſſa, poterit tum quidem ſubintelligi. Qua de re plura exempla in hac Geometria reperiuntur.

AD PAGINAS 6 & 7, DE RADICVM EXTRACTIONE.



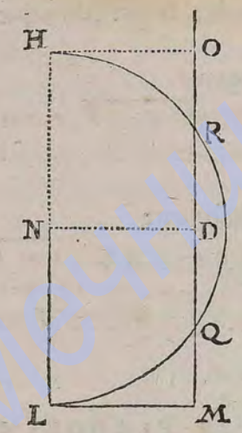
QVandoquidem linea L M primæ figuræ tangit circulum L O P, rectangulum O M P æquatur quadrato ex L M. Sunt autem bina rectangula M O P & O M P æqualia quadrato ex O M. Æquale igitur erit rectangulum M O P, unà cum quadrato ex L M, quadrato ex O M; hoc eſt, erit $z^2 \infty az + b^2$, ac per conſequens $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: cum O N æquetur $\frac{1}{2}a$, & quadratum ex N M tantundem valeat atque duo quadrata ex N L & L M, hoc eſt, $\frac{1}{4}a^2$ & b^2. Id quod primò erat demonſtrandum.

Deinde rectangulum O P M & quadratum ex P M æqualia ſimul ſunt rectangulo O M P. Eſt autem rectangulum O M P æquale quadrato ex L M. Quadratum itaque ex P M æquale eſt quadrato ex L M, minus rectangulo O P M: hoc eſt, erit $y^2 \infty -ay + bb$, ac proinde $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. quia, cùm N M æquatur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ut ſupra, ac ex ipſa aufertur N P ſeu $\frac{1}{2}a$, relinquitur M P ſeu y.

IN SECVNDAM FIGVRAM DE RADICVM EXTRACTIONE. PAG. 7.

REducemus hanc figuram ad ſequentem, in qua N D & H O ſunt parallelæ & æquales ipſi L M. Quibus poſitis, quoniam L M

L M tangit circulum H R Q L in puncto L, erit quadratum ex L M æquale rectangulo R M Q. Deinde, quia M D æqualis eſt D O, & Q D ipſi D R, erit & M Q æqualis R O. Vnde additâ communi Q R, fiet quoque M R æqualis Q O. Ac proinde ſi à rectangulo O M R auferatur rectangulum R M Q, hoc eſt, quadratum ex L M, erit reliquum æquale quadrato ex Q O ſeu M R. Hinc cum R M ſit ∞z, H L ſeu M O ∞a, & L M ∞b: erit $z^2 \infty az - bb$.



Similiter ſi à rectangulo O M Q auferatur rectangulum R M Q, hoc eſt, quadratum ex L M, erit reliquum æquale quadrato ex R O ſeu M Q. Ac proinde ſi Q M ſumatur pro z, habebitur $z^2 \infty az - bb$.

Jam autem cum linea R Q diviſa ſit bifariam in D, ac ipſi in directum adjecta Q M, erit rectangulum R M Q, hoc eſt, quadratum ex L M, unà cum quadrato ex D Q ſeu R D, æquale quadrato ex D M, hoc eſt, ex ſemiſſe ipſius a; ac proinde quadratum ex D Q ſeu D R æquale quadrato ex D M, minus quadrato ex L M, hoc eſt, æquale $\frac{1}{4}aa - bb$. Vnde ſi addamus $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, hoc eſt, D Q ſeu D R ad D M vel $\frac{1}{2}a$, habebimus M R pro z; ſi verò illam ex eadem D M auferamus, obtinebimus quoque Q M pro z. E quibus patet, primo caſu fieri M R, hoc eſt, $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ſecundo autem M Q, hoc eſt, $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ita ut hæc æquatio $z^2 \infty az - bb$ duas habeat radices, nimirum, M R & M Q, quæ, ſic ut jam diximus, exprimuntur. Id quod ſecundò erat demonſtrandum.

Poſſunt quoque hæc omnia, quæ de radicibus dicta ſunt, per Algebram demonſtrari. Si enim in primo exemplo, ſicut fecimus, ponatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: auferendo utrinque $\frac{1}{2}a$, habebitur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \infty z - \frac{1}{2}a$. Ac proinde, ſi ſumantur horum quadrata, erit & $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Et ablato utrin-

utrinque $\frac{1}{4}a^2$, atque transferendo $-az$ in alteram æquationis partem: $z^2 \infty az + b^2$.

In ſecundo exemplo, cùm y æquatur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ac proinde $y + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$, & per conſequens $y^2 \infty -ay + bb$.

In tertio exemplo, cum primo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ideoque $z - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$, unde & $z^2 \infty az - bb$.

In ultimo exemplo, cum ſecundo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac idcirco $\frac{1}{2}a - z \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $\frac{1}{4}aa - az + z^2$, $\infty \frac{1}{4}aa - bb$, & propterea $z^2 \infty az - bb$. Quæ quidem demonſtrare oportebat.

IN COMPOSITIONEM LOCORVM PLANORVM ET SOLIDORVM PAG. 26, & ſequent.

QVicquid in primo libro reſtat, nec non in ſecundo uſque ad Locorum Planorum & Solidorum compoſitionem reperitur, intellectu ſatis facile eſt; quare ad paginam 26 & ſequentes progrediemur. Vbi primò notandum, quòd, habentes in æquatione duas quantitates indeterminatas, quarum una licèt pro arbitrio ſumatur, altera tamen per eandem æquationem inveniri poſſit, ita ipſam ordinare oporteat: ut, ſi una, puta x, ad libitum ſumatur, altera, quæ eſt y, denominationi terminorum ejus inſerviat, ſic, ut y^2 unam conſtituat æquationis partem, & altera ejus pars ordiatur à termino, in quo y ſola ſine x reperitur, quem ſequatur y cum x, & poſtea x ſine y, & tandem terminus, in quo neque x neque y reperiatur. Atque impoſſibile quidem eſt alios caſus invenire, quando quantitates indeterminatæ y & x duas tantùm dimenſiones habent: quanquam ſæpiſſimè contingat ex his terminis aliquos reperiri nihilo æquales.

Deinde obſervandum quoque eſt, ſi termini illi plures literas vel dimenſiones contineant, modò quantitates indeterminatæ y & x duas dimenſiones non excedant, facile eſſe, dividendo totam æqua-

æquationem per literas ipſi yy adhærentes, efficere, ut yy ſola unam partem æquationis conſtituat & reliquæ alteram partem, ad inſtar fractionis, pro denominatore habentem literas, quæ antea cum yy jungebantur. Vbi nemo exiſtimare debet, fractionem pluribus dimenſionibus conſtare, quàm numero relinquuntur literæ in numeratore, poſtquam ex ipſo numerus literarum denominatoris eſt ſubductus, quemadmodum in exemplo, eâdem hujus Geometriæ paginâ propoſito, apparet.

Quod verò de dimenſionibus jam diximus, eodem ſenſu intelligendum eſt, quo antea advertimus, utile eſſe, ut ſingulis æquationis terminis æquè multæ tribuantur literæ. Nam ſicut b^2 ſignificare poteſt lineam aliquam, ſic etiam $\frac{b}{d}$, & $\frac{b}{d^2}$; quæ tamen ſic uſurpari non debent, niſi cùm linea quædam pro unitate eſt determinata: ob rationem ſupra allatam, ubi utilitatem atque commoditatem oſtendimus, quæ ſequitur, cùm ſingulis æquationis terminis æquè multæ literæ vel dimenſiones tribuuntur, etiamſi illis nil niſi lineæ aliævè res ſimiles deſignentur.

Porrò notandum eſt, quòd in hac Geometria generaliter pro uno eodemve loco vel termino habeantur illi omnes, qui eandem quantitatis, quam invenire volumus, & radicem æquationis appellamus, denominationem ſortiuntur. Nimirum, quòd omnes illi pro uno termino habeantur, in quibus reperitur y^2; & pro alio, in quibus reperitur y; & rurſus pro alio omnes, in quibus y non reperitur. Atque ita ulteriùs, ſi radix plures dimenſiones habuerit. Eſt autem hoc (ut diximus) generale; ſpeciatim verò hæc methodus requirit, ut ex termino, in quo y reperitur, duos caſus faciamus; in quorum uno y reperiatur ſine x; & in altero, ubi cum x ſit conjuncta: cum y & x duæ indeterminatæ quantitates ſint & utravis æquationis radix eſſe poſſit. Neque difficile eſt ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis exiſtentibus, facile eſt, tales aſſumere, quæ ſupponantur æquales iis omnibus, quæ eandem habent radicis denominationem; vel etiam ei, quod deſignatur per fractionem, quam termini efficere ponantur. Atque hinc fit, quòd loco terminorum, ubi y reperitur ſine x, ſolummodo ponatur $2my$, quippe quod ſupponitur æquale omnibus ſimul terminis ejuſdem denominationis. Loco autem eorum omnium,

omnium, ubi y & x ſimul reperiuntur, (ſiquidem hæc Geometriæ Methodus poſtulat, ut x retineatur, ac nihilominùs terminus quilibet plures quàm duas dimenſiones habere non debeat,) ponitur tantùm $\frac{2n}{z} xy$, ut ſic deſignentur fractiones omnes, quæ ſimilem habent radicis denominationem. Quòd verò loco my & $\frac{n}{z} xy$ ſumatur $2my$ & $\frac{2n}{z} xy$, id tantùm in eum finem fit, ut faciliùs ad æquationis radicem perveniatur: ad quam obtinendam requiritur, ut literarum m & n ſemiſſes accipiantur. Sicut ſuperiùs vidimus pag. 6 & 7, ubi de radicum extractione, quando æquatio duas ſolùm dimenſiones habet, ſumus loquuti.

Poſtquam igitur termini, in quibus y abſque x, atque etiam in quibus y & x ſimul reperiuntur, hoc modo ad ſimpliciores reducti ſunt, extrahitur radix ex Æquatione eaque exprimitur juxta id, quod pag. 6 & 7 fuit dictum. Quemadmodum videre licet in exemplo pag. 27, ubi radix eſt

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + \frac{2mn}{z} x + \frac{n^2 x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}},$$

Deinde ſumenda eſt m^2 pro omnibus terminis in vinculo, in quibus x non reperitur, cujus quantitas m eadem eſt in æquatione propoſita cum ea, quæ eſt extra vinculum; ſed aliàs poteſt eſſe diverſa, quo caſu loco m extra vinculum præſtat quodammodo aliam literam aſſumere. Poſt quæ præter terminos, in quibus x abſque y reperitur, nihil reducendum reſtat. Poſſunt autem hi duobus modis ſe habere: prout nimirum habebitur vel x^2, vel x ſimpliciter. Vnde fit, ut etiam, loco terminorum omnium, in quibus x ſimpliciter reperitur, ſcribendum ſit $o\,x$. Quo loco notandum quoque venit, literam o quantitatem aliquam hîc deſignare, non autem cyphram: quandoquidem æqualis eſt ac loco illorum omnium ſcribitur, quæ cum x junguntur; aliàs enim D. des Cartes eâ ordinariè ad cyphram ſeu nihil denotandum utitur: ita ut quodammodo hîc, ad confuſionem evitandam, præſtare videatur, pro o aliam quandam literam ſubſtituere. Sed hæc monuiſſe ſufficiat. Denique reducendæ ſunt etiam literæ, quæ cum x^2 junguntur, quæque nil præter fractionem deſignare poſſunt: cum x^2 duas habeat dimenſiones, hoc videlicet modo: $\frac{p}{m} x^2$. Vbi conſiderare oportet, quòd litera m fractionis $\frac{p}{m}$ eadem quan-

quantitas exiſtat, quæ in m^2 in vinculo. Quâ quidem methodo nulla habebitur æquatio, cujus radix ad duas tantùm dimenſiones aſcendit, quæ, prout ex illa educta eſt, non reducatur ad hanc formulam: $y \infty m - \frac{n}{z} x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m} x^2}$. Ita ut hæc ipſa quibuſlibet Locis Planis & Solidis conſtruendis inſervire queat: cum omnes locos ſive terminos, qui in eorum æquationibus reperiri poſſunt, comprehendat; adeoque non niſi ſignorum + & — variationem, atque loca & terminos, qui in propoſitis æquationibus deprehendi nequeunt, conſiderare oporteat. Quæ quidem omnia à D. des Cartes ſunt animadverſa. Nos verò ea duntaxat, quæ difficultatem aliquam afferre poſſent, illuſtrare conabimur.

OBSERVATIO PRIMA.

POſtquam æquatio ad ſupradictam formulam eſt reducta, & illa, ſive æquè multos, ſive pauciores terminos habens, etiam fractionibus numericis eſt affecta: ut exempli gratiâ, ſi loco $\frac{n}{z} x$ habeatur $\frac{3}{4} x$, poteſt operatio inſtitui per haſce fractiones, ſupponendo, numeratorem 3 eſſe æqualem numeratori n, & denominatorem 4 æqualem denominatori z. Idem intellige de aliis fractionibus numericis, quæ æquales ſunt, & ad literas ſuperioris formulæ referuntur. Vnde cùm habetur fractio denotata hoc pacto $x \sqrt{\frac{3}{4}}$ loco $\frac{n}{z} x$; erit litera n æqualis $\sqrt{3}$, & z æqualis $\sqrt{4}$, atque ita de aliis. Eſt autem bene obſervandum, quod diximus: nimirum, ſi in æquatione reperiatur m^2, denominatorem m fractionis $\frac{p}{m} x^2$ tum eſſe æqualem ipſi m quantitatis m^2. id quod facile eſt, etiamſi alia fractio haberetur, modò ſupponamus, m eſſe ad p, ſicut denominator hujus fractionis ad ſuum numeratorem: quandoquidem hoc modo fractiones fiunt æquales. Quòd ſi autem id per numeros fieri non poſſit, operandum erit per literas, quod ſæpe eſt commodiſſimum. Porrò obſervandum eſt, quòd ex terminis, qui inveniendis, centro, lateri recto, & tranſverſo inſerviunt, non aliæ literæ uſurpandæ ſint, quàm quæ in æquatione reperiuntur; & quòd reliquæ literæ eorundem ter-

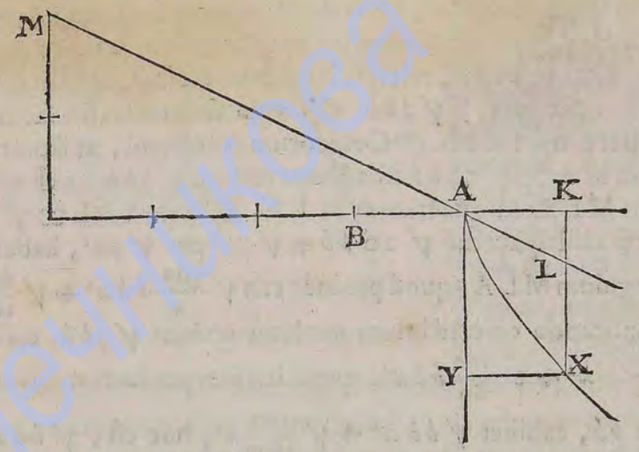
terminorum non magis ſint conſiderandæ, quàm ſi non haberentur. Cujus ratio eſt, quòd D. des Cartes, ut univerſaliter hæc tractaret, terminos hoſce ejuſmodi conſtitutionis effecerit, in qua loca omnia forent repleta. Adeoque literæ locorum, quæ in propoſita æquatione non reperiuntur, non annumerandæ ſunt terminis, qui centris, lateribus rectis, & tranſverſis exprimendis inſerviunt.

OBSERVATIO SECVNDA.

PAg. 27. caſus, cùm in æquatione non habetur m, difficultatem afferre poſſet, quare ad illum intelligendum cogitandum eſt, quòd, quando in æquatione non habetur m, ducenda itidem non ſit linea I K in figura ejuſdem paginæ. Ac proinde, ut inveniatur L I, poſtquam habetur $\frac{n}{z}x$, non referenda eſt illa ad I K ſed ad A B, eodem modo, quo D. des Cartes ipſam comparat ipſi I K. Quandoquidem facere oportet, ut A B ſit ad B L, ſicut z ad n, hoc eſt, ut A B exiſtente x, B L ſit $\frac{n}{z}x$, atque ut punctum L cadat ex parte puncti C, ſi habeatur $-\frac{n}{z}x$; at ex altera parte versùs R, ſi reperiatur $+\frac{n}{z}x$. Quo facto, ducenda eſt linea A L, per puncta A & L, quæ eadem erit quæ L I, hoc eſt, eodem munere fungetur, quo L I in exemplo D^ni des Cartes. Et quidem cognita erit linea A L, cum lineæ A B, B L, anguluſque A B L cognoſcantur. Atque ita pro A L accipere poſſumus $\frac{a}{z}x$; eritque a nota.

Sed rem fortaſſis planiùs per exemplum aliquod explicabimus. Sit, in expoſita figura, recta linea A Y, curva autem A X, cujus vertex punctum A, cujuſque hæc ſit proprietas: ut, aſſumpto in ea quolibet puncto, ut X, à quo ad rectam A Y normaliter ducatur X Y, ſumptâque utcunque rectâ A B, hæc ipſa unà cum linea A Y ſit ad lineam A Y, ſicut linea A Y ad lineam X Y.

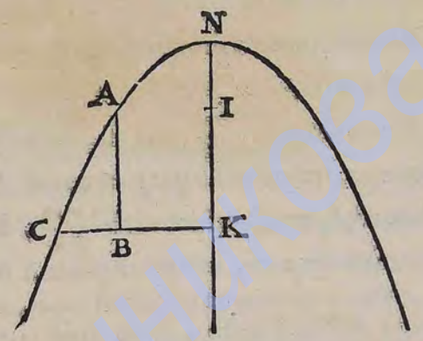
Eſto A B ∞ b, A Y ∞ y, & A K æqualis ac parallela ipſi X Y ∞ x. Hinc cum $b+y$ ſit ad y, ſicut y ad x, erit $yy \infty xy + xb$, & $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + xb}$. Vnde ex iis, quæ habentur pag. 29. conſtat, lineam hanc eſſe Hyperbolam, eò quòd habetur $+\frac{1}{4}x^2$. Ad quam conſtruendam, cum A K ſit x, linea K L erit $\frac{1}{2}x$, quan-



quandoquidem hæc fractio æqualis eſt ac ipſi $\frac{n}{z}x$ reſpondet. Porrò, quoniam rectus eſt angulus A K L, erit quadratum ex A L æquale quadratis ex A K & K L ſimul ſumptis. Hinc cum quadratum ex A K ſit x^2, & quadratum ex K L $\frac{1}{4}x^2$, A L erit $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ ſeu $x\sqrt{\frac{5}{4}}$; id quod æquale ſupponimus ipſi $\frac{a}{z}x$, at $\frac{1}{4}x^2$ ipſi $\frac{p}{m}x^2$: ita ut $\sqrt{5}$ ſit a, & $\sqrt{4}$ ſit z, & 1 ſit p, & 4 ſit m. Quibus poſitis, terminus $\frac{aom}{2pz}$, qui inveniendo centro inſervit, erit $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, cum am hoc eſt, $4\sqrt{5}$, valeat $\sqrt{80}$; & $2pz$, hoc eſt, $2\sqrt{4p}$, valeat $\sqrt{16}$; & o ſit æqualis ipſi b; & $b\sqrt{\frac{80}{16}}$ valeat $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, hoc eſt, $\sqrt{5bb}$. Quod quidem centrum ſumendum eſt à puncto A versùs M, quandoquidem Hyperbola eſt, & habetur $+bx$, hoc eſt, $+ox$, juxta pag. 30. Latus rectum hîc eſt $\frac{oz}{a}$, hoc eſt, $b\sqrt{\frac{4}{5}}$ ſeu $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Vnde latus tranſverſum fit $\frac{aom}{pz}$: quoniam oportet, ut pz^2 ſit ad a^2m, ſicut $\frac{oz}{a}$ ad latus tranſverſum, quod idcirco, (ut diximus,) erit $\frac{aom}{pz}$. id quod facit $b\sqrt{\frac{80}{4}}$, hoc eſt, $\sqrt{20bb}$. Ac proinde

proinde cum distantia puncti A à centro sit $\sqrt{5bb}$, quæ semissis est lateris transversi (quoniam, cùm duorum quadratorum unum alterius est quadruplum, latus tantùm lateris fit duplum); manifestum est, punctum A verticem fore diametri AL. Ideoque si fiat MA $\infty \sqrt{20bb}$, erit ipsa latus transversum, & latus rectum erit, (ut diximus,) $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Quorum demonstratio facilis est. Nam per prop. 21. lib. 1mi Conicorum Apollonii, ut latus transversum MA $\infty \sqrt{20bb}$ est ad latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, ita est rectangulum MLA ad quadratum ex LX. Est autem AL $\infty \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$. Hinc si multiplicetur $\sqrt{20bb} + \sqrt{\frac{4}{5}x^2}$ per $\sqrt{\frac{4}{5}x^2}$, habebitur rectangulum MLA, quod proinde erit $\sqrt{\frac{100}{4}bbx^2} + \sqrt{\frac{25}{16}x^4}$. Multiplicando verò id ipsum per latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, exsurgit $\sqrt{\frac{400}{20}b^4x^2} + \sqrt{\frac{100}{80}bbx^4}$, quod divisum per latus transversum $\sqrt{20bb}$, exhibet $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{100}{1600}x^4}$, hoc est, $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{1}{16}x^4}$, seu $bx + \frac{1}{4}x^2$, pro quadrato ex LX, unde ipsa LX fit $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$. Jam si ad lineam LX addatur linea LK $\infty \frac{1}{2}x$, obtinebitur linea XK, hoc est, $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$, ac per consequens $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2} \infty y - \frac{1}{2}x$. Vnde ductâ utrâque æqualitatis parte in se, fiet $bx + \frac{1}{4}x^2 \infty yy - xy + \frac{1}{4}x^2$, seu $yy \infty bx + xy$. Hinc ut $b + y$ se habet ad y, ita y se habebit ad x. Quod erat demonstrandum.

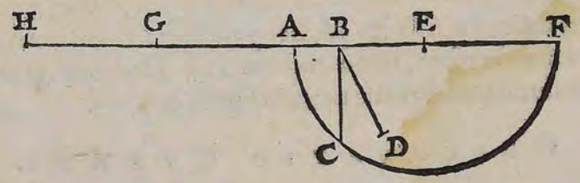
Proponatur adhuc aliud exemplum, referens eum casum in quo non reperiatur $\frac{n}{z}x$ in æquatione. Habeamus itaque æquationem hanc $yy \infty -2dy + bx$, cujus radix est $y \infty -d + \sqrt{d^2 + bx}$, quam construere oporteat. Supponatur in figura sequente AB ∞x, & angulus ABC ad libitum, BC autem, indefinitè continuata versùs B, ∞y; fiatque BK ∞d, quæ hîc idem præstat quod m in superiori formula, quoniam habetur $-d$. Ductâ autem NK indefinitè parallelâ ipsi AB, sumatur KI æqualis AB, prout ostensum fuit pag. 27 & 28. Quo facto, relinquetur tantùm $\sqrt{d^2 + bx}$, & pagina sequens docet lineam quæsitam esse Parabolam, quoniam non habetur x^2. Præterea puncto N existente vertice, linea IN esse debet $\frac{am^2}{oz}$ hoc est, $\frac{d^2}{b}$, in hoc exemplo. Terminus denique, qui explicat latus rectum, erit $\frac{oz}{a}$, idem



idem hîc existens quod b, & fit KC ordinatim adplicata ad diametrum. Quorum demonstratio nec difficilis. Nam, secundùm 11 prop. 1mi Libri Conicorum Apollonii, rectangulum comprehensum sub latere recto b & linea NK $\infty \frac{d^2}{b} + x$, utpote, $dd + bx$, est æquale quadrato lineæ KC. Est verò linea KC æqualis ipsis BC ∞y, & BK ∞d, simul sumptis. Erit itaque linea KC $\infty y + d$, & quadratum ejus $\infty yy + 2dy + dd$. Ac proinde $yy + 2dy + dd \infty dd + bx$, & per consequens $yy \infty -2dy + bx$. Quod demonstrare oportebat.

OBSERVATIO TERTIA.

PAginâ 29, circa medium, dictum est, lineam quæsitam esse Circulum, cùm $aam \infty pz^2$, & cùm angulus est rectus. Verùm hoc intelligendum etiam est, cùm angulus est rectus, nec omnino habetur aam, nec pz^2: aut cùm in æquatione literæ unius termini æquales sunt literis termini alterius. Ad pleniorem autem horum intellectum sequentia construamus exempla.



Habeatur æquatio $yy \infty bx - x^2$, cujus radix est $y \infty \sqrt{bx - x^2}$, & supponatur in apposita figura linea HA ∞b, linea AB ∞x, & linea

linea B C vel B D ∞ y. Manifestum autem est, lineam construendam esse Ellipsin aut Circulum, quoniam habetur $-x^2$. Non reperitur autem m, aut $\frac{n}{z}x$. Et sufficit pro x sumere A B, atque centrum ab A versùs B, cùm habeatur $+ox$, hoc est, in hoc exemplo, $+bx$. Ita ut pro illo sumendum sit $\frac{aom}{2pz}$, hoc est, b divisum per 2, seu $\frac{1}{2}b$, cum non habeatur a, neque m, neque p, neque z. Latus autem rectum fit $\frac{oz}{a}$, hoc est, b; transversum verò $\frac{aom}{pz}$, hoc est, b; & tum considerare tantùm oportet, utrum angulus A B C an verò A B D sit rectus. Nam cum hîc non habeatur aam, nec pz^2, existente angulo (puta A B C) recto, linea quæsita erit Circulus; at verò obliquo existente (ut A B D) erit linea quæsita Ellipsis. Quapropter si utroque casu faciamus A E ∞ $\frac{1}{2}b$, erit punctum E centrum, & A F ∞ b latus transversum; latus autem rectum ∞ b, atque B C vel B D ∞ y ordinatim adplicata ad diametrum A F. Quorum demonstratio facilis est. Etenim quoniam utroque casu juxta 21mam propnem 1mi libri Conicorum Apollonii latus transversum b est ad latus rectum b, sicut rectangulum F B A ad quadratum ex B C vel B D: erit rectangulum F B A æquale quadrato ex B C vel B D. Hinc cum F B sit ∞ $b-x$, & A B ∞ x, erit dictum rectangulum, hoc est, $bx-x^2$, æquale quadrato ex B C vel B D, hoc est, erit $yy \infty bx-x^2$. Quod erat demonstrandum.

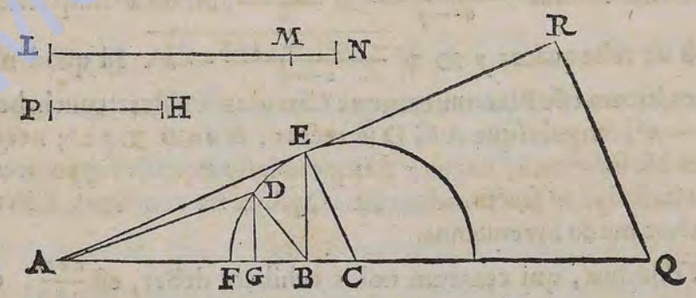
Quòd si æquatio haberetur $yy \infty bb+x^2$, quæsita linea esset Hyperbole: & si vel B C, vel B D sumatur pro y, hoc est, sive angulus sit rectus, sive obliquus; erit constructio præcedenti omnino similis; nisi quòd centrum & latus transversum sit sumendum à puncto A versùs alteram partem, nempe versùs H. Atque ita faciendo A G ∞ $\frac{1}{2}b$, fiet punctum G centrum, eritque tam latus transversum, quàm rectum ∞ b. Demonstratio præcedenti erit similis, observatis tantùm signis + & —.

OBSERVATIO QVARTA.

ANimadvertendum præterea est, si in æquatione non habeatur fractio ipsi x^2 adhærens, & nihilominus tamen adsit m^2, hoc est, habeatur, verbi gratiâ, $\sqrt{m^2+ox-x^2}$ loco $\frac{p}{m}x^2$: quòd

quòd tum quidem fractio, (ut supra notavimus) si alia quàm $\frac{p}{m}$ fuerit, transmutanda sit in fractionem ubi habeatur $\frac{p}{m}$. supponendo scilicet m esse ad p, sicut denominator alterius fractionis ad ejusdem numeratorem: quoniam in hac Methodo requiritur, ut m ipsius m^2 sit denominator fractionis ipsi x^2 adhærentis. Vbi quidem, in casu, quo haberi ponimus m^2, non autem fractionem, quæ ipsi x^2 adhæreat, supponere oportet $p \infty m$, ita ut habeamus $\frac{p}{m}x^2$ non aliûs valoris quàm x^2. Quod cognoscendis centris, lateribusque rectis atque transversis inservire poterit.

Ad pleniorem verò intellectum, detur in sequente figurâ linea A B, & puncta in ea A & B; oporteatque invenire punctum,



ut D, à quo si ducantur lineæ A D, D B, ut ipsæ datam inter se obtineant rationem, hoc est, ut A D sit ad D B, sicut linea P H ad lineam M N; quarum quidem P H sit major quàm M N.

Demittatur à puncto D super A B perpendicularis D G, & supponatur A B ∞ b, A G ∞ x, G D ∞ y, M N ∞ f. Quoniam igitur rectus est angulus A G D, erit quadratum ex A D æquale quadratis ex A G, G D, simul sumptis, hoc est, ∞ x^2+yy. Eodem modo, cum G B sit $b-x$, erit quadratum ex D B æquale quadratis ex B G, G D, hoc est, ∞ $yy+bb-2bx+x^2$. Jam verò, cum A D sit ad D B, sicut P H ad M N, erit quoque quadratum ex A D ad quadratum ex D B, sicut quadratum ex P H ad quadratum ex M N. Porrò fiat, ut P H ad M N, sic L N ad P H,

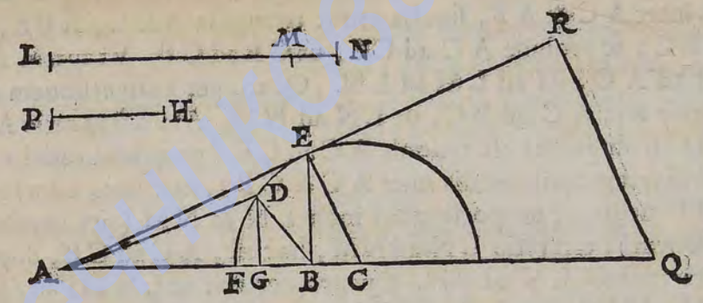
 erit-

eritque L N ad M N, ut quadratum à P H ad quadratum ab M N. Hinc si L N vocetur c; erit c ad f, sicut quadratum à P H ad quadratum ab M N, hoc est, ut quadratum ex A D ∞ $xx + yy$ ad quadratum ex D B ∞ $yy + bb - 2bx + xx$. Ac proinde productum extremorum erit æquale producto mediorum, hoc est, $fxx + fyy \infty cyy + cbb - 2cbx + cxx$, & per consequens, $cyy - fyy \infty - cbb + 2cbx - cxx + fxx$, ac denuo $yy \infty \frac{-cbb + 2cbx - cxx + fxx}{c-f}$, & tandem $y \infty \sqrt{\frac{-cbb + 2cbx - cxx + fxx}{c-f}}$.

Ad abbreviandum autem hunc terminum $\frac{-cxx + fxx}{c-f}$; licèt consideremus, quòd $f - c$ & $c - f$ exprimant semper unam eandemque differentiam, quippe quæ est inter c & f, etiamsi c major sit quàm f (dum in operatione supponimus $h \infty c - f$); semper tamen habebimus $\frac{-cxx + fxx}{c-f} \infty \frac{-hxx}{h}$, hoc est xx simpliciter; adeò ut relinquatur $y \infty \sqrt{\frac{-cbb + 2cbx}{c-f} - xx}$. Id quod nos docet, locum esse Planum, eumque Circulum existere: cum habeatur $-xx$, angulusque A G D sit rectus, & $aam \infty pzz$; neque enim hîc habetur a, neque z; atque m ipsi p æqualis supponitur; cum nulla ipsi xx fractio adhæreat. Quibus ita constitutis Circulum hoc modo inveniemus.

Terminus, qui centrum nobis exhibere debet, est $\frac{aom}{2pz}$, ex quo nobis præter $\frac{o}{2}$ nihil inservit: cum m ipsi p sit æqualis; hoc est, pro eo tantùm habebimus $\frac{cb}{c-f}$. Ac idcirco, postquam linea L M æquatur $c - f$, si fiat ut linea L M ∞ $c - f$ ad lineam L N ∞ c, ita linea A B ∞ b ad lineam A C, erit linea A C ∞ $\frac{cb}{c-f}$, & punctum C centrum Circuli. Sumendum autem id erit ab A versùs B, quoniam habetur $+\frac{2cbx}{c-f}$, respondens ipsi ox. Præterea, quoniam in Circulo latus rectum & transversum sibi invicem sunt æqualia, alterutro tantùm erit opùs. Formula autem lateris recti hîc est $\sqrt{\frac{ooz^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$. Vnde quidem illud, quod nobis in hoc exemplo inservit, non aliud erit quàm $\sqrt{oo - 4mm}$, hoc est, quòd,

quòd, auferendo quadratum $\frac{4cbb}{c-f}$ à quadrato ex $\frac{2cb}{c-f}$, relinquatur quadratum lateris recti. Est autem paulò ante inventa linea



A C ∞ $\frac{cb}{c-f}$; ideoque ejus dupla A Q ∞ $\frac{2cb}{c-f}$. Hinc invenire adhuc oportet $\frac{4cbb}{c-f}$, quod repræsentatur per $4mm$. Invenitur autem; ponendo esse, ut $c - f$ ad c, ita bb ad $\frac{cbb}{c-f}$. at ut $c - f$ est ad c, sic A B ∞ b est ad A C. Quapropter erit ut b ad lineam A C, sic bb ad $\frac{cbb}{c-f}$. Quoniam autem ratio duorum quadratorum ad invicem duplicata est rationis, quam inter se habent ipsorum latera: hinc, si ponamus lineam A E mediam proportionalem inter b & lineam A C; erit b ad lineam A E, sicut b ad $\sqrt{\frac{cbb}{c-f}}$. & per consequens linea A E ∞ $\sqrt{\frac{cbb}{c-f}}$. Vnde si A R fiat dupla ipsius A E, erit ea æqualis $\sqrt{\frac{4cbb}{c-f}}$. Adeoque si constituamus triangulum A R Q, cujus latus A Q sit æquale $\frac{2cb}{c-f}$ (ut dictum est), cujusque angulus A R Q sit rectus; erit latus R Q ∞ $\sqrt{oo - 4mm}$ quandoquidem quadratum ejus æquatur quadrato lineæ $\frac{2cb}{c-f}$, minus quadrato $\frac{4cbb}{c-f}$. Atque ita R Q sit & latus rectum & diameter Circuli. Et si ex centro C ducatur linea C E parallela ipsi

RQ, erit ipsa æqualis radio Circuli, utpote æqualis semissi lineæ RQ.

Et hæc quidem quantum ad constructionem juxta hanc Methodum, quæ, postquam jam est inventa, brevior reddi potest. Nam cum angulus AEC sit rectus, & AE media proportionalis inter AC & AB, similia erunt triangula AEC, ABE, & EBC; ac proinde AC ad CE, ut CE ad CB. Vt autem AB est ad AC, ita est LM ad LN. Quare per conversionem rationis erit AC ad BC, ut LN ad NM. At verò ut ratio AC ad CB duplicata est rationis AC ad CE (propterea quòd CE media est proportionalis inter AC & CB), ita etiam, cum linea PH media sit proportionalis inter LN & NM (per constructionem): erit ratio LN ad NM, hoc est, AC ad CB, duplicata rationis LN ad PH. Quapropter erit ut LN ad PH, seu PH ad MN, ita AC ad CE; quæ quidem Circuli radius est. Demonstratio hujus constructionis ad imitationem præcedentium inveniri potest, quam hîc omittimus: cum illa ab Eutocio initio commentariorum ejus in Apollonii Conica sit ostensa.

OBSERVATIO QVINTA.

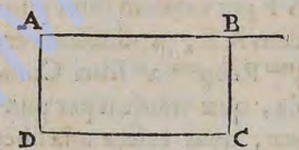
PAg. 21 hujus Geometriæ dictum est: quòd, postquam hæc æquatio non ascendit ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut etiam ultra quadratum unius ex illis, linea curva semper sit primi & simplicissimi generis, sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ. Quod ita intelligendum est, duas quantitates indeterminatas x & y, cùm separatim in Æquationis terminis reperiuntur, non ultra sua quadrata ascendere debere; sed in terminis, ubi simul reperiuntur, singulas non nisi unam dimensionem habere debere, ita ut simul tantùm rectangulum aliquod duasve dimensiones efficiant.

Similiter, si in Æquatione reperiretur terminus aliquis, in quo haberetur y^3, vel x^3; aut y^4, vel x^4; aut denique xy^2, vel x^2y, vel x^2yy: linea curva esset secundi generis. Et sic de cæteris. In quibus omnibus solùm indeterminatarum quantitatum ratio habenda est, non autem quantitatum cognitarum, quibuscum junguntur.

Quòd

Quòd si quantitates indeterminatæ singulæ separatim ad duas dimensiones non ascendant, neque etiam simul, hoc est, si nullus terminorum ad yy, aut ad xy assurgat; linea itidem erit primi generis, & quidem recta, non curva: adeoque locus talem æquationem præbens Planus erit, & ad lineam rectam.

Et quidem, cùm locus est ad rectam lineam, Geometria hæc non minùs ipsum componere docet, quàm cùm locus est ad curvam lineam, quæ sit primi generis, & cùm in æquatione habetur yy: sicut ubique in æquatione hujus Geometriæ pro Pappi quæstione, ex qua superior formula deducta fuit, cernere licet. Quòd si verò habeatur x^2 in æquatione, non autem yy, immutandæ tantùm erunt nomina quantitatum indeterminatarum, ita ut appelletur y, quæ dicta fuit x, & x, quæ dicta fuit y: in hunc modum. Esto in sequenti figura AB ∞ x, & BC ∞ y, atque æquatio inventa $x^2 \infty by$, quam ad dictam formulam reducere oportet.

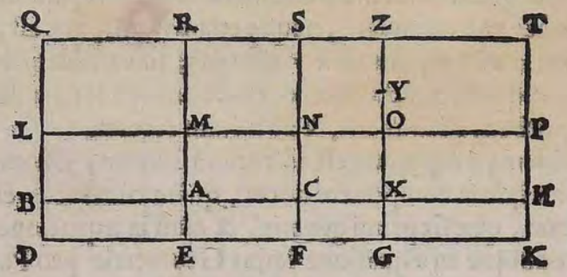


Ducta igitur AD parallelâ ipsi BC, & DC parallelâ ipsi AB, mutatisque nominibus quantitatum indeterminatarum, nimirum appellando AD, cui æqualis est BC, x, & DC, quæ æqualis est AB, y; quæsita æquatio erit $yy \infty bx$. cujus radix est $y \infty \sqrt{bx}$. Atque ita reducta erit ad formulam, quæ nos docet punctum C fore in Parabola.

At verò si in æquatione non habeatur x^2, nec yy, sed xy; qui quidem casus, quoniam nec in æquatione quæstionis Pappi reperitur, neque ad formulam ex ea deductam refertur; difficultatem aliquam afferre posset, quam propterea enodabimus.

Æquatio autem hæc ad summum plures quàm quatuor terminos non comprehendit: unum nimirum, ubi x reperitur sine y; alterum, ubi y reperitur sine x; tertium, ubi reperitur xy; ac quartum denique, ubi neque x neque y reperitur. Adeò ut varietas omnis reducatur ad 17 formulas æquationum ac constructionum, quæ sequenti pag. 129 exhibentur. Quarum quidem ope videre licet, quonam pacto locus semper ad Hyperbolam existat, lineæque indeterminatæ sint Asymptoti, aut ipsis parallelæ.

Detur enim positione linea BH, punctum autem in ea datum sit A: deinde assumptâ lineâ AX pro x, ductâque lineâ XY, quam pro y sumemus, facientem cum AX talem angulum, qualem



lem libuerit, eâque indefinitè productâ : ducantur lineæ DK, LP, QT parallelæ ipsi BH; ita ut DK cadat infra BH; LP autem supra BH, inter puncta X & Y; QT verò ultra punctum Y. Eodem modo ducantur lineæ QD, RAE, SF, TK parallelæ ipsi XY seu ZG; ita ut linea QD transeat per lineam XA, productam versùs A; & SF per eandem inter puncta A & X; nec non linea TK per eandem AX, productam versùs X. Quibus ita constitutis, si per 4tam Propnem 2di libri Conicorum Apollonii describatur Hyperbola, quæ transeat per punctum Y, cujusque Asymptoti sint lineæ, quas refert quælibet constructio; manifestum est, per 12 Propnem ejusdem libri rectangula omnia, quæ ad easdem lineas similiter sumuntur, sibi invicem esse æqualia. Ideoque demonstrandum solùm restat, Asymptotos, atque rectangulum uniuscujusque æquationis, ritè esse constructa.

Esto igitur secundùm ultimam æquationem Hyperbola constructa, transiens per punctum Y, cujusque Asymptoti sint DQ, & DG; & rectangulum, contentum sub lineis DG, GY, sit æquale rectangulo dato $df+bc$. Hinc si juxta constructionem fecerimus lineas AX ∞x, XY ∞y, AB ∞c, BD vel XG ∞b: manifestum est, BX vel DG fore $x+c$; GY autem $y+b$; atque multiplicando unam per alteram proditurum $bc+bx+cy+xy$, pro rectangulo linearum DG, GY. quod aliunde quoque æquatur $df+bc$. Ac proinde, si utrinque commune auferatur rectangulum bc, relinquetur $xy+cy+bx \infty df$. quæ est æquatio proposita. Eodem modo reliquarum omnium æquationum & constructionum demonstratio ostendetur.

Æqua-

Æquatio 1ma.
$xy \infty df$.
Constructio.
Rectangulum AXY ∞df.
Asymptoti XA, AR.

Æquatio 2.
$xy+cy \infty bx$.
Constr.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY ∞bc.

Æquat. 3.
$xy+bx \infty cy$.
Constr.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY ∞bc.

Æquat. 4.
$xy-cy \infty bx$.
Constr.
AC ∞c, CN ∞b.
Asympt. SN, NO.
Rectang. NOY ∞bc.

Æquat. 5.
$xy+cy \infty df$.
Constr.
AB ∞c.
Asympt. QB, BX.
Rectang. BXY ∞df.

Æquat. 6.
$xy+bx \infty df$.
Constr.
AE ∞b.
Asympt. RE, EG.
Rectang. EGY ∞df.

Æquat. 7.
$xy-cy \infty df$.
Constr.
AC ∞c.
Asympt. SC, CX.
Rectang. CXY ∞df.

Æquat. 8.
$xy-bx \infty df$.
Constr.
AM ∞b.
Asympt. RM, MO.
Rectang. MOY ∞df.

Æquat. 9.
$xy+df \infty cy$.
Constr.
AH ∞c.
Asympt. AH, HT.
Rectang. HXY ∞df.

Æquat. 10.
$xy+df \infty bx$.
Constr.
AR ∞b.
Asympt. AR, RZ.
Rectang. RZY ∞df.

Æquat. 11.
$xy+cy-bx-df \infty 0$.
Constr. quando df excedit bc.
AB ∞c, BL ∞b.
Asympt. QL, LO.
Rectang. LOY $\infty df-bc$.
Constr. cùm bc excedit df.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY $\infty bc-df$.

Æquat. 12.
$xy+bx-cy-df \infty 0$.
Constr. quando rectang. df majus est rectangulo bc.
AC ∞c, CF ∞b.
Asympt. SF, FG.
Rectang. FGY $\infty df-bc$.
Constr. quando bc rectang. excedit rectang. df.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY $\infty bc-df$.

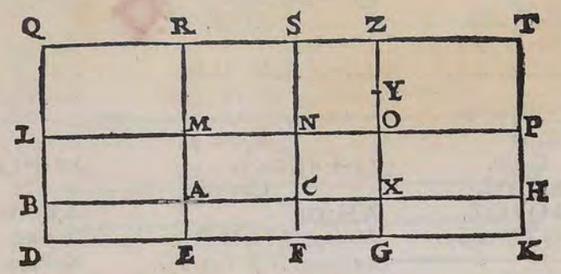
Æquat. 13.
$xy-cy-bx-df \infty 0$.
Constr.
AC ∞c, CN ∞b.
Asympt. SN. NO.
Rectang. NOY $\infty df+bc$.

Æquat. 14.
$xy+cy-bx+df \infty 0$.
Constr.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY $\infty df+bc$.

Æquat. 15.
$xy+bx-cy+df \infty 0$.
Constr.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY $\infty df+bc$.

Æquat. 16.
$xy-cy-bx+df \infty 0$.
Constr. quando df superat bc.
AH ∞c, HP ∞b.
Asympt. MP, PT.
Rectang. POY $\infty df-bc$.
Constr. cùm bc superat df.
AH ∞c, HT ∞b.
Asympt. HT, TQ.
Rectang. TZY $\infty bc-df$.

Æquat. 17ma & ultima.
$xy+cy+bx-df \infty 0$.
Constr.
AB ∞c, BD ∞b.
Asympt. QD, DG.
Rectang. DGY $\infty df+bc$.



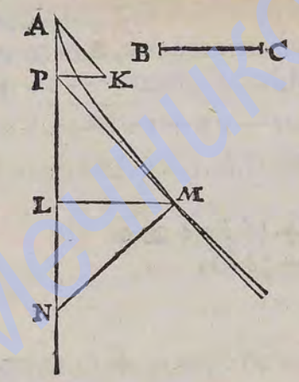
Præterea evidens eſt, in 11ma, 12ma, & 16ta æquatione exiſtente rectangulo df æquali bc, ſi hoc ipſum in locum df ſubſtituatur, undecimam quidem tunc fore diviſibilem per $x+c$, duodecimam per $y+b$, & decimam ſextam per $c-x$; Vtramque autem 11mam & 16tam poſſe reduci ad $y \infty b$; aſt 12mam ad $x \infty c$. Adeò ut tunc tantùm locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur $y \infty b$, & X Y ipſi b ſit æqualis, atque per punctum Y recta linea ducitur ipſi A X parallela, ut habeatur quæſita; Aut quando habetur $x \infty c$, & X A ipſi c ſit æqualis, erit parallela A R linea recta quæſita.

Cæterùm potuimus quidem æquationum harum varietatem ad minorem numerum reducere, tranſmutando nempe unam indeterminatarum quantitatum in alteram (ſicut in eum finem illas, quæ mutationem hanc recipere poſſunt, ordine diſpoſuimus); tum etiam conſtructiones illarum, in quibus quatuor termini non reperiuntur, comprehendere ſub iis, quæ omnes habent completos: ſed quoniam multò prolixiori indiguiſſemus ſermone, & res ipſa minùs fuiſſet dilucida, ratione oſtensâ uti maluimus.

AD PAGINAM 40 ET SEQVENTES, DE MODO INVENIENDI CONTINGENTES LINEARVM CVRVARVM.

NOtandum hîc eſt, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expoſitum, conſiſtere in invenienda æquatione, in quâ linea y vocata ſumi poteſt pro duabus quantitatibus diverſis, cùm linea quæ vocatur v ad tangentem non refertur,

refertur, at verò cùm ad ipſam refertur, quòd tunc duæ illæ quantitates diverſæ intelligantur æquales ſeu in unam cöaleſcere. Quod fit comparando æquationem inventam cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$ aliave ex hac compoſitâ. Ejus rei proponamus ſequens exemplum.



Eſto linea recta A N, curva autem A M, cujuſque hæc ſit proprietas: ut, aſſumpto in ea quolibet puncto, ut M, à quo ad rectam A N ducatur perpendicularis M L, recta B C, ad arbitrium ſumpta, unà cum A L, ſit ad A L, ſicut linea A L ad L M. Oportet rectam lineam invenire P M, tangentem hanc curvam A M in puncto M. Supponatur linea N M perpendicularis ad tangentem P M in puncto M, & B C ∞b, A L ∞y, & L M ∞x. Hinc cum $b+y$ ſit ad y ut y ad x, fiet æquatio talis: $bx + yx \infty yy$, ac proinde $x \infty \frac{y^2}{b+y}$. Iam verò pro eo, quòd in hoc exemplo imaginamur curvam A M tangi à circulo cujus radius M N, ſatiùs eſt imaginari, quòd ipſa tangatur à recta linea M P: quandoquidem hoc modo ſuperfluam multiplicationem evitamus. Quocirca ſtatuendo A P ∞v, & P K ∞s eſſe parallelam ipſi L M, atque ab A K, quæ parallela eſt ipſi P M, ſecari in K; erit ut v ad s, ſic $y-v$ ad L M ſeu $\frac{ys-vs}{v}$. Quæ quidem cum ſupra inventa ſit $\infty \frac{y^2}{b+y}$, habebitur $\frac{yy}{b+y} \infty \frac{ys-vs}{v}$, vel $yy \infty \frac{\overline{bs-vs}}{v-s}$ in $y - \frac{bvs}{v-s}$, comparandum cum $yy \infty 2ey - e^2$. Vnde primò invenimus $\frac{bs-vs}{v-s} \infty 2e$, vel $s \infty \frac{2ev}{b-v+2e}$. Deinde $\frac{bvs}{v-s} \infty e^2$, vel $s \infty \frac{e^2 v}{bv+e^2}$, ac per conſequens $\frac{2ev}{b-v+2e} \infty \frac{e^2 v}{bv+e^2}$. Hoc eſt, A P $\infty v \infty \frac{be}{2b+e}$ ſeu $\frac{by}{2b+y}$, & P L $\infty y - v \infty \frac{by+y^2}{2b+y}$. Cæterùm quoniam L M media

 eſt

eſt proportionalis interP L & L N, erit L N $\infty \frac{2by^3+y^4}{b^3+3b^2y+3by^2+y^3}$. Quod erat faciendum. Vel etiam ſic, imaginando curvam A M tangi à circulo, cujus radius eſt M N. Omnino ut in hujus Geometriæ Methodo ſupponitur factum.

Igitur quoniam habemus $\frac{y^2}{y+b} \infty x$, ac proinde $x^2 \infty \frac{y^4}{y^2+2by+b^2}$, ſupponamus, quemadmodum hæc Geometria requirit, A N ∞v, & M N ∞s, & erit quadratum ex L M, hoc eſt, x^2, $\infty ss - vv + 2vy - yy$, ac idcirco $\frac{y^4}{y^2+2by+b^2} \infty ss - vv + 2vy - yy$. Vnde æquatione ope multiplicationis ordinatâ, divisâque totâ ſummâ per 2, exurget æquatio talis:

$$\begin{array}{llllll} y^4 & +by^3 & +\frac{1}{2}vvyy & +bvvy & +\frac{1}{2}bbvv & \infty 0. \\ & -v & +\frac{1}{2}bb & -bbv & -\frac{1}{2}bbss & \\ & & -2bv & -bss & & \\ & & -\frac{1}{2}ss & & & \end{array}$$

Iam verò multiplicando $yy - 2ey + ee \infty 0$ per $yy + fy + gg$, ut alteri reddatur ſimilis, proveniet hæc æquatio:

$$\begin{array}{lllll} y^4 & +fy^3 & +ggyy & -2eggy & +eegg \infty 0. \\ & -2e & -2ef & +eef & \\ & & +ee & & \end{array}$$

Quæ ſi comparetur cum præcedente, quantitates ſecundi termini præbebunt $f \infty b + 2e - v$; ultimi $gg \infty \frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2}$; & tertii $\frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2} - 2be - 3ee + 2ev \infty \frac{1}{2}vv + \frac{1}{2}bb - 2bv - \frac{1}{2}ss$. Ac proinde ſi multiplicemus totum per $2ee$, producetur $+bbvv - bbss - 4be^3 - 6e^4 + 4ve^3 \infty vvee + bbee - 4bvee - ssee$, ſive $bbvv - 4be^3 - 6e^4 + 4ve^3 - vvee - bbee + 4bvee \infty bbss - eess$, & per conſequens

$$\begin{array}{lllll} -6e^4 & +4ve^3 & -vvee & +bbvv & \infty ss. \\ & -4b & +4bv & & \\ & & -bb & & \\ \hline & & bb-ee & & \end{array}$$

Quartus terminus dabit

$$\frac{-b^2v^2+b^2s^2}{e} + bee - vee + 2e^3 \infty + bvv - bbv - bss.$$

Vnde multiplicando totum per e, fiet

$$-bbvv + bbss + be^3 - ve^3 + 2e^4 \infty + bvve - bbve - bess,$$

ac

ac per conſequens

$$\begin{array}{lllll} -2e^4 & +ve^3 & +bvve & +bbvv & \infty ss. \\ & -b & -bbv & & \\ \hline & & bb+be & & \end{array}$$

Quocirca habebimus

$$\begin{array}{lll} 6e^4 & +4ve^3 & -vvee + bbvv \infty \\ & -4b & +4bv \\ & & -bb \\ \hline & bb & -ee \end{array} \quad \begin{array}{lllll} -2e^4 & +ve^3 & +bvve & +bbvv. \\ & -b & -bbv & \\ \hline & & bb+be & \end{array}$$

Hinc multiplicando per crucem, ut in fractionibus, & auferendo utrinque producta æqualia, habebitur

$$\begin{array}{lllllll} 2e^6 & +7be^5 & +8bbe^4 & +4b^3e^3 & -4b^3vee & -b^4ve & \infty 0. \\ & -v & -4bv & -6bb & +b^4 & & \end{array}$$

Quam æquationem ſi dividamus per $ee + be$, orietur

$$\begin{array}{lllll} 2e^4 & +5be^3 & +3bbee & -3bbve & -b^3v \infty 0: \\ & -v & -3bv & +b^3 & \end{array}$$

ac per conſequens

$$2e^4 + 5be^3 + 3bbee + b^3e \infty b^3v + 3bbev + 3beev + e^3v.$$

ac demum $\frac{2e^4+5be^3+3b^2e^2+b^3e}{b^3+3b^2e+3bee+e^3} \infty v$.

Vbi ſi in locum e ſubſtituatur y, atque ex hac ſumma deinde auferatur linea A L ∞y, relinquetur L N $\infty \frac{2by^3+y^4}{b^3+3bby+3byy+y^3}$. ut ſupra. Vbi notandum, lineam hanc curvam non aliam eſſe quàm Hyperbolam, ſupra à nobis conſtructam.

AD PAGINAM 75 & 76.

DEmonſtranda hîc eſt operatio, quam hæc Geometria nos docet, cùm radicem incognitam alicujus æquationis multiplicare volumus per certam aliquam quantitatem aut numerum cognitum. Proponatur æquatio $x^3 - cx^2 + ddx - b^3 \infty 0$, cujus radicem incognitam x per lineam h multiplicare oporteat. Supponatur $y \infty xh$, & fiet $\frac{y}{h} \infty x$, ideoque $\frac{y^2}{h^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{h^3} \infty x^3$. Proinde ſi ſubſtituamus in æquatione præcedente $\frac{y}{h}$ loco x, & $\frac{y^2}{h^2}$ loco x^2, itemque $\frac{y^3}{h^3}$ loco x^3, erit ſequens æquatio $\frac{y^3}{h^3} - \frac{cy^2}{h^2}$

$\frac{cy^2}{h^2} + \frac{d^2 y}{h} - b^3 \infty 0$, æqualis præcedenti. Vnde multiplicando totum per h^3, producetur $y^3 - chyy + ddhhy - b^3h^3 \infty 0$. Evidens autem eſt, idem productum inveniri, ſi in æquatione propoſita ponamus y, & quadratum ejus yy, cubumque y^3, loco x, x^2, x^3: atque deinde ſecundum terminum multiplicemus per h, tertium per h^2, & quartum per h^3. omnino ut hæc Geometria docet. Vbi, poſtquam ſubſtituimus $\frac{y}{h}$, $\frac{y^2}{h^2}$, & $\frac{y^3}{h^3}$ loco x, x^2, & x^3, ad multiplicandum totum per h^3, ſufficit auferre denominatorem, qui ab h denominatur, atque tantùm reliquum ſecundi termini multiplicare per h, reliquum tertii per hh, & reliquum quarti per h^3: quandoquidem à terminis, ſecundo & tertio, auferendo denominatores hh & h, ipſi eatenus ſunt multiplicati. Adeò ut ſufficiat multiplicare reliquum ſecundi termini per h, & reliquum tertii per hh, at ipſum quartum per h^3, cum hic denominatorem ab h denominatum, per quem ſic auferendo fuiſſet multiplicatus, non admittat. non aliter quàm hæc Geometria docet. Quæ demonſtratio & methodus in altioribus quoque æquationibus locum obtinent, in quibus radix x plures dimenſiones, quàm in æquatione propoſita, admittit.

Notandum autem eſt, cùm termini æquationis hujus ſic productæ non ſinguli æquè multas literas ſeu dimenſiones habent, lineam, quam pro unitate ad libitum ſumpſimus, & cujus ratione ſuppoſuimus $\frac{y}{h} \infty x$, toties in terminis, qui pauciores dimenſiones ſeu literas habent, ſubintelligendam eſſe, quoties fuerit opùs. Adeò ut ejuſdem lineæ beneficio termini abbreviari poſſint, ſic ut ſinguli non niſi tres literas ſeu dimenſiones admittant, ac præterea ut illius ope, poſtquam radix una y fuerit cognita, mediante æquatione $\frac{y}{h} \infty x$, cognoſcatur quoque radix altera x.

Ad hæc ſupponere quoque poſſumus $yy \infty xh$, ita ut habeamus $\frac{y^2}{h} \infty x$, & $\frac{y^4}{h^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^6}{h^3} \infty x^3$; quibus, ut ſupra, ſubrogatis, habebimus $\frac{y^6}{h^3} - \frac{cy^4}{h^2} + \frac{d^2y^2}{h} - b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicando totum per h^3, fiet $y^6 - chy^4 + ddhhyy - h^3b^3 \infty 0$. Vnde perſpicuum fit, quòd ſubſtituendo, juxta præſcriptum hujus Geometriæ, yy pro x, quadratum ejus y^4 pro x^2, & ipſius cubum y^6 pro x^3, atque multiplicando ſecundum terminum per h, tertium per hh, & quartum per h^3, eandem conſecuturi ſimus æquationem. ut ex demonſtratione ſuperiori facile eſt colligere; & omnes quidem termini æquè multas habebunt literas ſeu dimenſiones. Et tantum de operatione per literas.

Quod autem ſpectat ad operationem, quæ fit, cùm radix incognita per numerum aliquem eſt multiplicanda; ipſa eidem demonſtrationi innititur.

Eſto eadem, quæ ſupra, æquatio: $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty 0$; & oporteat radicem incognitam x multiplicare per 3. Supponatur $y \infty 3x$, eritque $\frac{y}{3} \infty x$, & $\frac{y^2}{9} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{27} \infty x^3$. Quibus, ut ſupra, ſubſtitutis, fiet $\frac{y^3}{27} - \frac{cy^2}{9} + \frac{d^2y}{3} - b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicato toto per 27, exſurget $y^3 - 3cyy + 9ddy - 27b^3 \infty 0$. Quæ æquatio etiam invenitur, ſi in æquatione propoſita ſubſtituamus y, quadratum ejus yy, & ipſius cubum y^3, loco x, quadrati x^2, & x^3 cubi; atque deinde ſecundum terminum per 3 multiplicemus, tertium per 9, & quartum per 27, ex præſcripto hujus Geometriæ. Quâ quidem operatione termini omnes, ob rationes ſupra allatas, æquè multas dimenſiones acquirent.

Idem intelligendum eſt de exemplo in hac Geometria propoſito, $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27}\sqrt{3} \infty 0$. Etenim ſuppoſito $y \infty x\sqrt{3}$, erit $\frac{y}{\sqrt{3}} \infty x$, & $\frac{y^2}{3} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} \infty x^3$. Vnde ſi in æquatione propoſita ſubſtituamus $\frac{y}{\sqrt{3}}$, quadratum ejus $\frac{y^2}{3}$, & ipſius cubum $\frac{y^3}{3\sqrt{3}}$, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3; invenietur $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} - \frac{y\sqrt{3}}{3} + \frac{26y}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0$. Atque adeò ſi totum multiplicemus per $3\sqrt{3}$, habebitur $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0$. Eadem nempe æquatio, quæ obtinetur operando juxta hujus Geometriæ methodum, quemadmodum ſupra fuit oſtenſum.

Non ſecus fiet demonſtratio, ſi de radice incognita per quantitatem aliquam cognitam dividenda agatur. Proponatur namque æquatio $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty 0$, ſitque x dividenda per h.

Sup-

Supponatur $y \infty \frac{x}{h}$, eritque $y\,h \infty x$, & $y^2 h^2 \infty x^2$, nec non $y^3 h^3 \infty x^3$. Quæ si in æquatione proposita substituantur, fiet $y^3 h^3 - c h^2 y^2 + d^2 h y - b^3 \infty 0$. Ac proinde si totum dividatur per h^3, orietur $y^3 - \frac{cy^2}{h} + \frac{d^2}{h^2} y - \frac{b^3}{h^3} \infty 0$.

Manifestum autem est, idem nos obtenturos, si in æquatione proposita subrogemus y, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3, atque sic deinde secundum terminum dividamus per h, tertium per hh, & quartum per h^3: quoniam in superiori operatione, ubi hh in secundo termino, & h in tertio reperitur, perspicuum est, quòd, ad dividendum omnes terminos per h^3, auferendo toties h, quoties in ipsis reperitur, opùs tantùm sit dividere reliquum secundi termini per h, reliquum tertii per hh, ipsum autem quartum terminum per h^3, quippe qui quantitatem h non comprehendit. Omnino ut hæc Geometria requirit.

Quia verò æquationis hujus sic productæ termini singuli non æquè multas habent literas seu dimensiones; igitur ut æquales numero reddantur, oportebit in illis, qui pauciores dimensiones habent quàm requiritur, toties literam aliquam subintelligere, quoties erit opùs, quæ lineam pro unitate ad libitum sumptam designet, & cujus ratione supposuimus $y \infty \frac{x}{h}$. vel potiùs beneficio hujus lineæ, quam pro unitate assumpsimus, & linearum cognitarum, efficere, ut singuli æquationis termini tres literas seu dimensiones habeant. Id quod facile est. Etenim cognitâ, v.g. lineâ $\frac{c}{h}$, pro unitate acceptâ, possumus ad eandem denotandam loco $\frac{c}{h}$ sumere p. atque ita de cæteris. Adeò ut, cognita radice y, ejusdem unitatis ope cognoscatur quoque x, per æquationem hanc $y \infty \frac{x}{h}$ vel $y\,h \infty x$.

Nec aliter in numeris veritatem hujus Geometriæ Methodi ostendemus. Proponatur enim eadem æquatio, quæ supra, $x^3 - c x^2 + d d x - b^3 \infty 0$, & oporteat radicem incognitam x dividere per 3. Suppositâ igitur $y \infty \frac{x}{3}$, fiet $3\,y \infty x$, & $9\,yy \infty x^2$, nec non $27\,y^3 \infty x^3$. Quæ si substituantur in æquatione proposita, habebitur $27 y^3 - 9\,c\,yy + 3\,d\,d\,y - b^3 \infty 0$. Ac proinde dividendo totum

totum per 27, orietur $y^3 - \frac{1}{3} c\,yy + \frac{1}{9} d\,d\,y - \frac{1}{27} b^3 \infty 0$. Quæ æquatio quoque invenietur, si procedamus juxta hujus Geometriæ Methodum: subrogando nimirum y in æquatione proposita, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3: & dividendo deinde secundum terminum per 3, tertium per hujus quadratum 9, & quartum per ipsius cubum 27. Eadem demonstratio locum obtinet, si in æquatione radix incognita plures dimensiones habuerit.

AD PAGINAM 79, & sequentes.

PRoponatur $x^4 * + p x^2 + q x - r \infty 0$, & supponatur juxta præscriptum hujus Geometriæ $x^2 + y x + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} \infty 0$, eritque $x^2 + \frac{1}{2} yy + \frac{1}{2} p \infty \frac{q}{2y} - y x$, ac proinde quadratum unius partis æquale quadrato partis alterius, hoc est, $x^4 + yy\,x x + \frac{1}{4} y^4 + p x^2 + \frac{1}{2} p yy + \frac{1}{4} pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - q x + yy x^2$, & consequenter $x^4 + \frac{1}{4} y^4 + p x^2 + \frac{1}{2} p y y + \frac{1}{4} p p + q x - \frac{q}{4y^2} \infty 0$. Ex qua æquatione si tollatur prima $x^4 * + p x x + q x - r \infty 0$, relinquetur $\frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} p y^2 + \frac{1}{4} pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Vnde multiplicando totum per $4yy$, exsurget $y^6 + 2 p y^4 + \begin{matrix} p^2 \\ + 4r \end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Eâdem ratione demonstratio fiet secundùm omnes variationes signorum + & —, atque observationes in hac Geometria expositas. In cujus rei exemplum duorum adhuc sequentium casuum demonstrationem subjiciemus.

Sit æquatio proposita $x^4 * - p x^2 + q x - r \infty 0$. Si ergo juxta hanc Geometriam supposuerimus $x^2 + y x + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} \infty 0$, habebimus $x^2 + \frac{1}{2} yy - \frac{1}{2} p \infty \frac{q}{2y} - y x$. Vnde & quadratum unius partis æquale erit quadrato alterius partis, hoc est, $x^4 + yy x^2 + \frac{1}{4} y^4 - p x^2 - \frac{1}{2} p yy + \frac{1}{4} pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - q x + yy x x$. Et per consequens $x^4 + \frac{1}{4} y^4 - p x x - \frac{1}{2} p yy + \frac{1}{4} pp + q x - \frac{q}{4y^2} \infty 0$. E qua si auferatur prima $x^4 * - p x x + q x - r \infty 0$.

relinquetur $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + r - \frac{qq}{4yy} \infty 0$. Quare si totum multiplicemus per $4yy$, inveniemus $y^6 - 2py^4 \overset{+p^2}{+4r} yy - qq \infty 0$. Quod demonstrare oportebat.

Iam verò si ponamus $x^4 * + px^2 - qx + r \infty 0$, supponendo secundùm hanc Geometriam $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$; erit $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} + yx$. Vnde quadratum prioris partis æquale erit quadrato posterioris, hoc est, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty yyx^2 + qx + \frac{qq}{4yy}$. Ac per consequens, $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - qx - \frac{qq}{4y^2} \infty 0$. E qua si tollatur prima $x^4 * + px^2 - qx + r \infty 0$, remanebit $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - r - \frac{qq}{4yy} \infty 0$. Atque ideo si totum multiplicetur per $4yy$, invenietur $y^6 + 2py^4 \overset{+p^2}{-4r} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Non secus demonstrabuntur omnes reliqui casus secundùm utramlibet harum suppositionum: nimirum, $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0$, aut $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0$, observando tantùm signa + & —, quemadmodum hæc Geometria docet. Cujus operationis ope in genere æquationes omnes, in quibus radix incognita 4^or^ habet dimensiones, ad formam, in hac Geometria propositam, reduci possunt: nimirum, $+y^6 \cdot 2py^4 \overset{+p^2}{\cdot 4r} yy - qq \infty 0$. signa + & — quæ præcipit, observando, sicut demonstravimus. Quo fit, ut, si divisionis beneficio æquationem propositam ad eam formam reducere possimus, ita ut post divisionem radix ejus y plures quàm duas dimensiones non admittat, ipsa per Geometriam communem, juxta præscripta paginæ 6 & 7 hujus Geometriæ inveniri possit. Quâ inventâ, mediantibus æquationibus $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0$, & $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0$, (observando signa + & —, ponenda locis, ubi sunt omissa) invenietur quoque radix x, cujus loco in altera æquatione pro radice supposueramus y. At verò si æquatio supra

supra inventa, denominata à radice y, sic dividi nequeat, tunc considerare illam poterimus, velut tres duntaxat dimensiones habentem, supponendo scilicet $z \infty yy$, ipsamque substituendo in æquatione; adeò ut habeamus $z^3 - 2pz^2 \overset{+pp}{\cdot 4r} z - qq \infty 0$. Quæ, observatis iisdem signis + & —, quæ in altera æquatione reperiuntur, & sublato secundo termino, per id, quod pag. 73 dictum est, reducetur ad formam aliquam illarum trium, quæ habentur paginâ 93, ad inveniendam deinde radicem ejus z per Geometriam Solidorum, juxta pag. 85, & sequentes. Quæ certe eadem futura est quæ yy, quâ cognitâ innotescet & y. Cujus ope atque duarum superiorum æquationem tandem invenietur x.

Verùm enimverò observandum est, in omnibus præcedentibus operationibus utendum esse eâdem lineâ, quæ pro unitate est accepta, si illam determinamus, & usurpamus ad æquationem propositam reducendam ad superioris formam, nempe: $x^4 * px^2 . qx . r \infty 0$. observando signa + & —.

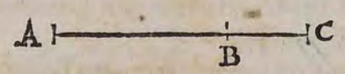
Verum equidem est, quòd, postquam æquationem hanc ad præcedentis formam reduximus, quæ à radice y sit denominata, nimirum ad æquationem $y^6 . 2py^4 \overset{+p^2}{\cdot 4r} yy - qq \infty 0$, quæque dividi seu reduci non possit, ita ut radix ejus y plures quàm duas dimensiones habeat, non teneamur ulteriùs progredi: (siquidem illo casu Problema non Planum, sed Solidum existit, juxta pag. 80) atque tunc contenti esse possimus æquatione primâ $x^4 * px^2 . qx . r \infty 0$ (cum per illam invenire possimus radicem x mediante Geometriâ Solidorum, secundùm paginam 85 & sequentes): Attamen nihilominus operatione præcedente, quam explicavimus, uti possumus, saltem ut ostendatur veritas ejus, quod habetur pag. 93 & 94, ubi dicitur, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad æquationem, quæ ultra quadrato-quadratum non ascendit, reducuntur, semper ad formam aliquam earum, quæ paginâ 93 proponuntur, reduci queant.

AD PAGINAM 93.

QVandoquidem ex eo, quod in hac Geometria ostensum atque supra adnotatum est, liquet, æquationes omnes, quarum difficultates ultra Quadrato-quadratum aut Cubum non ascen-

ascendunt, reduci posse ad aliquam formam earum, quæ hâc paginâ proponuntur: exhibenda tantùm restat demonstratio radicum, quæ ex ipsis, secundùm Cardani regulas, quas super hac re in medium affert Capite secundo libri ejus, quem de Arte Magna seu Regulis Algebraïcis inscripsit, educuntur. Cum hoc ipsum difficultatem fortè non exiguam parere posset iis, qui in eundem locum aliquando inciderent, quippe qui à Speciosæ Algebræ, & mutuæ inter Arithmeticam & Geometriam relationis atque convenientiæ ignaris, non facilè percipiatur. Quocirca ut veritas extractionis harum radicum expendatur, demonstrabimus primùm sequens

LEMMA.



SEctâ utcunque lineâ A C in B, ostendendum est: Cubum lineæ A B, unà cum cubo lineæ B C, & triplo producto linearum A C, B C, A B, simul æquari cubo lineæ A C.

Sit A B ∞a, B C ∞b, eritque A C $\infty a+b$. Productum linearum A C, B C, A B, erit $baa+bba$, cujus triplum $3baa+3bba$. Huic si addantur cubi linearum A B, B C, fiet $a^3+3baa+3bba+b^3$. Et manifestum est, summam hanc æqualem esse cubo lineæ A C.

Demonstrato itaque hoc Lemmate, habebitur primo loco $z \infty \sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$. Hinc in figura adjecta supponendo binomium $\sqrt{C.+\frac{3}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ A C, & residuum $\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ B C, erit eorum differentia $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, $-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æqualis lineæ A B. Iam vero statuendo A B ∞z, erit differentia Cuborum ex his radicibus (nimirum differentia inter cubum $+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, & cubum $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, (auferendo hunc ab illo) æqualis q. Quæ propterea æqualis erit differentiæ inter cubum lineæ

neæ B C. Atqui cubus lineæ A B, & triplum productum linearum A C, B C, A B simul, æquantur eidem differentiæ q, (siquidem cum cubo lineæ B C componunt cubum lineæ A C). Erit itaque z^3, cubus videlicet lineæ A B, unà cum triplo producto linearum A C, B C, A B, æqualis q.

Vt autem habeatur hoc productum, multiplicandum est binomium $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquatur lineæ A C, per residuum $\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquale est lineæ B C. Hinc cum $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ in se multiplicatum faciat $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, ac $+\frac{1}{2}q$ in $-\frac{1}{2}q$ faciat $-\frac{1}{4}qq$; quæ producta simul addita faciunt $\frac{1}{27}p^3$ (siquidem $+\frac{1}{4}qq$ & $-\frac{1}{4}qq$ addendo evanescunt): & porrò producta, quæ fiunt ex $+\frac{1}{2}q$ & $-\frac{1}{2}q$ in $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, se mutuò destruant: Erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$ seu $\frac{1}{3}p$, radix scilicet cubica ex $\frac{1}{27}p^3$. quandoquidem quæstio erat de multiplicandis radicibus cubicis. Vnde triplum productum erit p, quod si multiplicetur per A B, hoc est, per z, fiet pz, æquale triplo producto linearum A C, B C, A B. Et per consequens $z^3+pz \infty q$, vel $z^3 \infty -pz+q$. Quod erat demonstrandum.

Sit jam secundo loco

$$z \infty \sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

& supponatur prima radix cubica (quæ binomium est) in figura præcedente æqualis lineæ A B; secunda autem (quæ residuum est) æqualis lineæ B C; eritque summa cuborum utriusque lineæ æqualis q. Porrò supponendo lineam A C ∞z, auferendoque ex ejusdem cubo z^3, triplum productum linearum A B, B C, & z, relinquentur cubi linearum A B & B C, qui quidem simul sumpti ipsi q sunt æquales. Est autem productum ex A B, B C, hoc est, quod fit ex binomio in residuum, $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$, seu $\frac{1}{3}p$. Nam cum multiplicando $+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ per $-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ (unâ radice existente signo $+$ adfectâ, alterâ verò signo $-$) producatur utriusvis quadratum affectum signo $-$, nimirum $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, & utramque radicem per $+\frac{1}{2}q$ multiplicando, producta evanescant; restat tantum $+\frac{1}{2}q$ in se multiplicandum. Quare cum productum illud sit $+\frac{1}{4}qq$, & alterum productum inventum sit $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$; erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$ seu

seu $\frac{1}{3}p$, sicut diximus, ac proinde ejus triplum p. Quod si rursus multiplicetur per z, producetur pz, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C: & per consequens $z^3 - pz \infty q$, hoc est, $z^3 \infty * + pz + q$. Quod erat demonstrandum.

Adduxi autem demonstrationem extractionis harum radicum, quòd contemplatio earum atque inventio pulcherrimæ mihi sint visæ. Verùm quantùm ad praxin, cùm Geometricè æquationum hoc loco propositarum radices sunt extrahendæ; ejus sanè methodus, quæ generalis atque facilis est, quàm optimè in hac Geometria demonstrata cernitur. Si verò Arithmeticè illas extrahere lubuerit, multò id faciliùs fiet juxta methodum à Vieta in tractatu de Numerosa Potestatum Resolutione traditam, quàm per hasce regulas Cardani.

FINIS.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

IN

GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

COMMENTARII.

НБ ОНУ імені І.І. Мечникова

ARGVMENTVM PRIMI LIBRI.

PRimo libro Autor viam quodammodo aperit ad ſuam Methodum, quâ in reſolvendis & conſtruendis Geometriæ Problematis utitur, quamque tribus hiſce libris eſt complexus. Quæ eſt, ut certarum notarum ſive characterum beneficio, quibus tum datæ tum quæſitæ lineæ deſignantur, difficultates omnes, quæ in iiſdem Problematis enodandæ veniunt, ad ejuſmodi terminos reducantur, ut deinde ad illorum conſtructionem non niſi rectarum quarundam linearum longitudinem quærere ſit opùs. Ad quas inveniendas, docet, operationes omnes, quæ circa lineas haſce, ut cognitæ fiant, ſunt inſtituendæ, ad 4 vel 5 diverſas, quemadmodum in Arithmetica, revocari poſſe: quæ ſunt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum Extractio. Quæ quâ ratione Geometricè fiant, deinceps explicat. Vbi porrò obſervandum venit, quòd, poſtquam hi Arithmetices termini in Geometriam ſunt introducti, ad operationes haſce in lineis æquè inſtituendas atque in numeris, conſentaneum ſit rectam lineam, quæ unitatis vicem gerat, aſſumere, & ad eandem reliquas referre. Id quod communiter liberum eſt, cum quamlibet lineam pro ea accipere liceat.

Quibus explicatis, oſtendit, quo pacto notis atque literis in Geometria ſit utendum ad prædictas lineas breviter deſignandas, earumque operationes facilè indicandas: ut hâc ratione diverſæ earum relationes conſpicuæ ſint, atque difficultas omnis, verborum involucris exuta, quàm ſimpliciſſimè ob oculos poni poſſit. Et quia hæc Methodus in reſolvendis Geometriæ Problematis requirit, ut difficultates omnes, quæ in illis evolvendæ occurrunt, ad unum genus Problematum reducantur, nempe, ut quæratur tantummodo valor quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis ſint radices: idcirco docet, quo pacto Problema aliquod propoſitum perducatur ad æquationem, ſupponendo illud ipſum ut jam factum. Ac deinde, cum Æquatio certum ſit medium quo Problema ſolvitur, refert totidem æquationes inveniendas eſſe, quot in eo ſuppoſitæ fuerint incognitæ lineæ. Cum autem hæc Methodus nullis Problematum finibus coërceatur, ipſaque non tantùm ad Problemata, in quibus de inveniendis quibuſdam rectis lineis, aut etiam planis, ſolidiſve quæſtio eſt (quæ quidem facilè ad tales terminos reduci queunt, ut non niſi rectæ

quædam lineæ inveniendæ sint) adplicari possit ; sed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter sese comparatio facienda est ; atque ad Problemata in quibus quædam puncta aut lineæ datæ sunt, & alia puncta inveniri debent, se extendat (siquidem in his à quæsitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad positione datas rectæ lineæ duci possunt, quæ quæsitorum punctorum loca determinant ; in illis autem quæ dictorum angulorum vices gerant, sicut post exemplis planum fiet) : facilè constat, illam non modò Veterum Analysin atque Recentiorum Algebram comprehendere ; sed etiam ad id omne, ubi de quantitatum æqualitate vel proportione inquiritur, adhiberi posse, atque adeò tam generalem esse, ut nullum non suæ artis per universam Mathesin specimen edat.

Iam verò postquam Problema aliquod ad æquationem est perductum, ipsaque æquatio ad simplicissimos terminos reducta, si quidem id ipsum per Geometriam communem construi potest, hoc est, ut ad constructionem ejus non nisi rectis lineis atque circulis utamur, prout in superficie aliqua plana describuntur, docet, qualis tunc debeat esse æquatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quàm exprimi possit. Atque ita breviter, quidquid ad planorum Problematum constructionem spectat, absolvit.

Vt autem tum præceptionum harum usui locus sit, tum verò ejusdem Methodi facilitas in resolvendo ac construendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam sibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas : ad quam, velut scientiæ culmen, Veteres ut pervenirent, summâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum afferre visum fuit. Cæterùm loca difficiliora, quæ in eo illustranda esse duximus, fere sunt sequentia.

COM-

COMMENTARII

IN

LIBRVM PRIMVM.

A *Et radicum extractio, quæ pro Divisionis quadam specie haberi potest.*] Quandoquidem eadem fermè proportio utrique operationi convenit. Est enim in Divisione, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. In extractione verò radicis quadratæ, ut radix, ceu quotiens, ad unitatem ; ita datus numerus, ceu dividendus, ad radicem, ceu divisorem. Adeò ut radicis extractio divisionis species sit censenda, in qua divisor quotienti est æqualis ; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem est media proportionalis.

B *Vel etiam si una sit, quæ vocetur unitas.*] Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum aliquem numerum.

C *Vt eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet.*] Sit enim, exempli gratiâ, datum aliquod rectangulum transmutandum in quadratum : si pro unitate sumatur latus unum, quod libuerit, & inter ipsum & reliquum inveniatur media proportionalis ; erit ea latus quadrati, dato æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus numeri, è quo radix quadrata est extrahenda. Adeò ut manifestum sit, Problema propositum, nec non mediæ proportionalis inter duas datas lineas inventionem, nihil aliud esse, quàm si unâ lineâ assumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extrahatur radix quadrata.

D *Vt ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut est altera ad unitatem, quod idem est atque multiplicatio.*] In multiplicatione enim est : ut productum ad multipli-

candum, ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, sic multiplicandus ad unitatem.

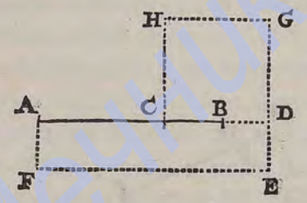
E *Vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione.*] Est namque in Divisione, ut supra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad divendum, sic unitas ad divisorem.

F *Vt si radix cubica sit extrahenda ex a a b b — b, cogitandum est, quantitatem a a b b semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b his per eandem esse multiplicatam.*] Puta unitatem, quæ hîc subintelligitur, esse c. Vnde si quantitas $aabb$, quæ unâ abundat dimensione, semel dividatur per c, fiet $\frac{aabb}{c}$; at verò altera quantitas b, quæ duabus deficit dimensionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per c, hoc est, per cc, fiet bcc: adeò ut tota quantitas sit $\frac{aabb}{c} - bcc$.

G *Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessariæ videbuntur, tam iis quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde, nullo inter lineas hasce cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur: æquales enim sunt termini modi unius, terminis modi alterius. Iam verò tot hujusmodi Æquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ.*] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.

PROBLEMA 1mum.

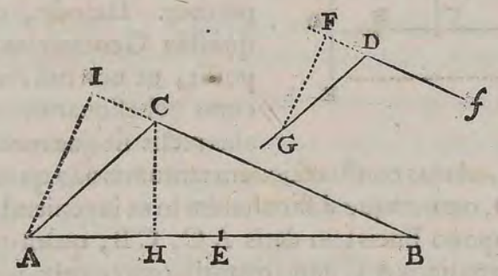
DAtam rectam lineam A B, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub A D, D B comprehensum, æquetur quadrato rectæ C D.



Considero rem velut jam factam, hoc est, suppono rectangulum A D E F æquari quadrato C D G H, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quæstio Geometrica eò reduci possit, ut non nisi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis sit quærenda, & nemo non videat, ad ejus constructionem tantummodo quærendam esse lineam B D, omnemque difficultatem in ea invenienda esse sitam; nomina impono lineis tam datis A C, C B, quàm quæsitæ B D. Proinde, pro linea A C pono quantitatem cognitam a; pro C B, b; at pro B D quantitatem incognitam x, fietque A D $a+b+x$, C D autem $b+x$. Quibus peractis, ut ad Æquationem perveniatur, & habeam rectangulum A D E F, duco A D, hoc est, $a+b+x$ in D E seu D B, hoc est, x, quod proinde erit $ax+bx+xx$. Similiter ut inveniatur quadratum C D G H, multiplico C D, hoc est, $b+x$ in se, fietque $bb+2bx+xx$. Ita ut habeatur æquatio $ax+bx+xx \infty bb+2bx+xx$. Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx, sic ut ex una parte remaneat ax, & ex altera $bb+bx$; tum translato bx ad alteram partem sub contrario signo, erit æquatio $ax - bx \infty bb$. Cujus utrâque parte divisâ per $a-b$, provenit $x \infty \frac{bb}{a-b}$. E quibus patet, lineam quæsitam B D inveniri per divisionem quadrati lineæ C B per excessum, quo linea A C superat ipsam C B, vel etiam per hunc excessum, tanquam primam, & lineam C B, tanquam secundam, inveniendo tertiam proportionalem B D.

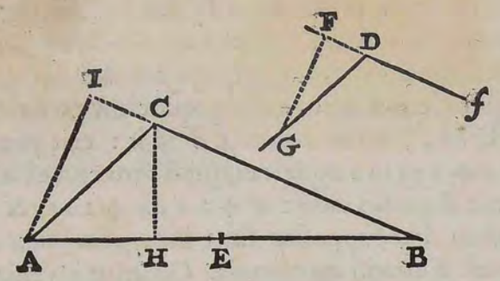
PROBLEMA 2$^{dum.}$

DAtâ rectâ lineâ terminatâ A B, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere A C, C B, continentes angulum A C B, æqualem dato D, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, habeant ad triangulum A C B rationem datam, ut 4 *d* ad *a*.



Factum sit quod quæritur, & ex puncto C demittatur super rectam A B perpendicularis C H. Quoniam igitur data sunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum situm determinandum nihil simpliciùs haberi potest, quàm si noscantur tres lineæ A H, H C, & H B: facilè constat, quæstionem propositam eò reduci, ut inveniendæ tantùm sint duæ lineæ A H, H C, seu B H, H C; atque adeò duas supponendas esse lineas incognitas. Quia verò, sectâ lineâ A B bifariam in E, datum est punctum E, atque ideo ipsa A E vel E B, quam voco *a*, atque operatio aliquantò brevior evadit, si loco dictarum A H, H C, seu B H, H C, quæramus duas lineas H E, H C: Idcirco pro H E pono quantitatem incognitam *x*, & pro H C quantitatem incognitam *y*. Unde pro A H invenitur $a - x$, & pro H B $a + x$. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto discrimine, directè percurrenda est Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis sit deducenda, donec tandem ad Æquationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex A C erit $aa - 2ax + xx + yy$: quo-

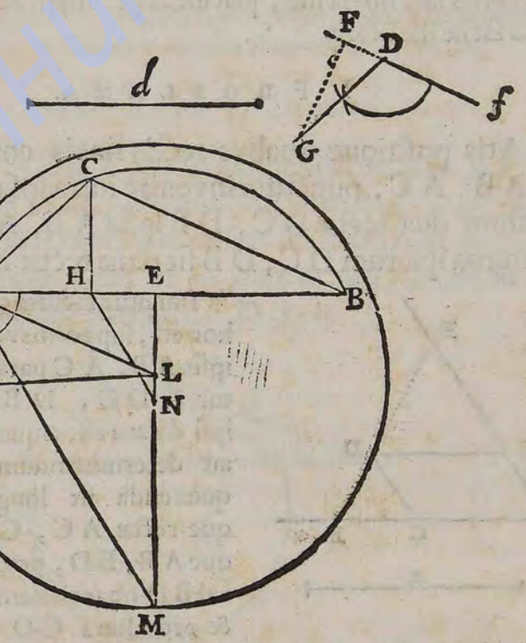
quoniam componitur ex duobus quadratis linearum A H & H C. Eodem modo quadratum lineæ C B erit $aa + 2ax + xx + yy$: quia æquale est binis quadratis ex B H & H C. Atque adeò summa quadratorum ex A C, C B erit $2aa + 2xx + 2yy$. Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum A B C, quod est ay, (utpote æquale semissi ejus, quod producitur ex basi A B & perpendiculo C H,) quam habet 4 *d* ad *a*: erit productum ex $2aa + 2xx + 2yy$ in *a* æquale ei, quod provenit ex ay in 4 *d*, hoc est, habebitur Æquatio inter $2a^3 + 2axx + 2ayy$ & $4ady$. Sed quandoquidem duæ suppositæ sunt incognitæ lineæ *x* & *y*, alia adhuc superest Æquatio invenienda. Quam ut inveniamus, considerandus insuper est angulus D, cui æqualis supponitur angulus A C B; qui si obtusus fuerit, produco lineam B C, donec ex puncto A in ipsam cadat perpendicularis A I, omnino ut factum est circa angulum D. Tum, quoniam datus est angulus D, dantur quoque rectæ D F & F G. Ac proinde si pro D F ponatur *b*, & pro F G *c*, gerent ipsæ vicem dati anguli D, fientque triangula A C I & G D F similia. Eâdem ratione similia erunt triangula H C B & A B I. Unde erit ut C B ad A B, sic C H ad A I, & B H ad B I. Quare si pro quadrato ex C B $\infty aa + 2ax + xx + yy$ brevitatis causâ scribatur *ee*, h. e., pro C B $\infty \sqrt{aa + 2ax + xx + yy}$ ponatur *e*; fiatque ut *e* ad 2 *a*, sic C H seu *y* ad A I: erit A I $\infty \frac{2ay}{e}$. Similiter ut *e* ad 2 *a*, sic B H, seu $a + x$, ad B I: erit B I $\infty \frac{2aa + 2ax}{e}$. Tum subductâ B C seu *e* ex B I seu $\frac{2aa + 2ax}{e}$, relinquitur C I $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$. Jam cum C I sit ad A I, hoc est, $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$ ad $\frac{2ay}{e}$, seu $2aa + 2ax - ee$ ad $2ay$, sicut D F ad F G, hoc est, *b* ad *c*: erit $2aac + 2acx - cee$, productum sub extremis, æquale $2aby$, ei, quod fit sub mediis. Quæ altera est Æquatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis sint omissæ. Et quicunque omnia penitiùs inspexerit, se suo marte propositæ quæstionis solutionem ex illis huc usque perducere potuisse judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros seu terminos Analyticos est traducta, ita ut, quæ supersunt, cuilibet obvia esse possint, etiamsi de lineis, punctis, angulisque ampliùs non



non cogitet. Inventis ergo tot Æquationibus, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis reductio fieri debet, ut ex una parte tantùm habeatur xx, ut ſequitur. Quocirca cum primùm $2a^3 + 2axx + 2ayy$ æquetur $4ady$, dividatur utraque pars per $2a$, & fit æquatio inter $aa + xx + yy$ & $2dy$; & aa, yy in alteram partem tranſlatis, inter xx & $2dy - yy - aa$. Deinde cum $2aac + 2acx - cee$ æquetur $2aby$, reſtituto valore quantitatis aſſumptæ ee, ipſoque ducto in $-c$, prodibit æquatio $aac - cxx - cyy \infty 2aby$. In qua ſi fiat porrò terminorum tranſpoſitio, ut cxx unam teneat Æquationis partem ſub ſigno $+$ & reliqui partem alteram, atque utraque pars per c dividatur, proveniet Æquatio $xx \infty aa - yy - \frac{2ab}{c}y$, ſeu $xx \infty aa - yy - 2fy$, (ſcribendo nempe $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$: quandoquidem liberum eſt quolibet nomine datas quantitates inſignire).

Reductâ ergo utrâque Æquatione inventâ ad eandem quantitatem xx, adæquandæ ſunt reliquæ quantitates inter ſe, ut inveniatur inde quantitas incognita y. Quare cum $2dy - yy - aa$ æquetur $aa - yy - 2fy$, additis utrinque yy & aa, erit $2dy \infty 2aa - 2fy$, ſeu, $dy \infty aa - fy$: & tranſlato $2fy$ ad alteram partem, factâque utrobique diviſione per $d + f$, fiet $y \infty \frac{aa}{d+f}$. Inventâ autem quantitate y, non eſt difficile alteram quantitatem incognitam x invenire. Si enim in præcedenti æquatione $xx \infty 2dy - yy - aa$, pro

pro y ſubſtituatur ſumma jam inventa $\frac{a^2}{d+f}$, & pro yy ejuſdem ſummæ quadratum, nempe $\frac{a^4}{d^2 + 2df + f^2}$, invenietur $xx \infty \frac{a^2d^2 - a^2f^2 - a^4}{d^2 + 2df + f^2}$ & $x \infty \sqrt{\frac{a^2d^2 - a^2f^2 - a^4}{d^2 + 2df + f^2}}$. Vbi liquet, dd non debere eſſe minorem quàm $ff + aa$, cum aliàs Problema futurum eſſet impoſſibile. Cujus quidem conſtructio talis eſt.



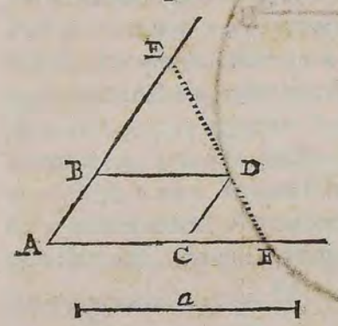
Facto angulo K A B æquali dato D, erigatur ex A ipſi K A perpendicularis A L, occurrens perpendiculari E L in L, centroque L intervallo rectæ d circulus deſcribatur, ſecans K A, E L in K & M. Deinde aſſumptâ E N æquali K A, jungatur M A, & ex N agatur huic parallela N H, quæ ipſi A B occurrat in H. Poſtea deſcripto ex L intervallo L A circuli ſegmento A C B, ducatur ex H ipſi A B perpendicularis H C, occurrens circum-

cumferentiæ in C, ac jungantur A C, C B. Factumque erit, quod requirebatur.

GG *Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.*] Quò cuivis hæc obvia sint, placuit ea per unum aut alterum Problema facile illustrare.

I PROBLEMA.

DAtis positione duabus rectis lineis concurrentibus A B, A C, punctum invenire intra ipsas D, à quo si ducantur duæ rectæ D C, D B ipsis A B, A C parallelæ; ut summa ipsarum D C, D B sit datæ rectæ *a* æqualis.



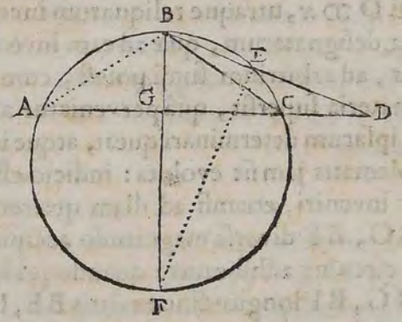
Ponatur factum quod quæritur, hoc est, suppositis rectis D C, D B ipsis A B, A C parallelis, statuantur & D C, D B simul sumptæ ipsi datæ *a* esse æquales. Hinc cum ad determinandum punctum D quærenda sit longitudo utriusque rectæ A C, C D seu utriusque A B, B D, pono pro una A C vel B D quantitatem incognitam x, & pro altera C D vel A B quantitatem incognitam y. Quibus ita positis, ut habeatur Æquatio, addendæ erunt tantum duæ rectæ B D, D C, hoc est, x & y: eritque summa $x + y$ æqualis a, hoc est, erit $y \infty a - x$. Quoniam autem ad alteram Æquationem pro x inveniendam nulla superest materia, cum conditiones in quæstione præstandæ jam omnes sint impletæ: argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Quocirca cum in ipsâ una desit conditio, ut prorsus determinata existat, poterimus ad arbitrium pro quantitate incognita x, cui nulla respondet Æquatio, assumere lineam aliquam cognitam ipsâ *a* minorem, atque tot inde invenire puncta D, quot ipsi x diver-

diversos tribuerimus valores. Vbi notandum, quòd, postquam assumptæ fuerint rectæ A E, A F ipsi datæ *a* æquales, ac jungatur E F, puncta hæc omnia in rectam cadant lineam E F, adeoque punctum quodlibet in ea pro libitu sumptum quæsito satisfacere: cum, propter similia triangula A E F, & C D F, rectæ C D, C F (puncto D ubicunque in E F assumpto) haud aliter atque A E, A F semper sint æquales, ac proinde B D, D C simul eædem quæ A C, C F simul, hoc est, eadem quæ A F vel *a*.

Haud dissimilis erit quæstio, si punctum D inveniendum sit, ita ut ipsarum D C, D B differentia sit datæ rectæ *a* æqualis.

II PROBLEMA.

IN circulo A B C F erectâ super diametrum B F perpendiculari G D, circumferentiam hinc inde secante in C & A, & à B ad eam ductis B C, B D, quarum hæc circumferentiam secet in E, dantur B E ∞ *a*, & B C ∞ *b*: oporteatque invenire E D ∞ x.



Quoniam ad quæstionem hanc solvendam, supponendo eam, ut jam factam, necessariæ videntur lineæ B G ac diameter B F: hinc pro B G pono y, & pro B F pono z: eritque G F ∞ $z - y$. Deinde ut perveniatur ad Æquationem, considero lineam G D ipsi B F esse perpendicularem, hoc est, triangulum B G C esse rectangulum. Unde fit, ut, si quadratum ex B G ∞ yy auferam è quadrato ex B C ∞ bb, reliquum $bb - yy$ sit æquale quadrato ex G C. Quod idem & alio modo inveniri potest, considerando per-

perpendicularem G D secare hinc inde circumferentiam in C & A. Quia enim hinc per 35 Tertii Elementorum rectangulum sub B G, G F est æquale rectangulo sub A G, G C, hoc est, quadrato ex G C: fit ut si multiplicavero G F ∞ $z - y$ per B G ∞ y productum $zy - yy$ sit denuo quadrato ex G C æquale. Habetur ergo Æquatio inter $bb - yy$ & $zy - yy$, hoc est, addendo utrobique yy, inter bb & zy. Porrò cum in hac quæstione tres suppositæ sint incognitæ lineæ x, y, & z, superest ut duas adhuc alias Æquationes inveniamus. Hinc, ductâ F E, quoniam, considerando lineam B D secare circumferentiam in E, similia sunt triangula B G D & B E F, erit ut B G ad B D, hoc est, y ad $a + x$; ita B E ad B F, hoc est, a ad z. Ac proinde, cum productum sub extremis sit æquale producto sub mediis, erit $zy \infty aa + ax$. Quæ altera est Æquatio. In qua si in locum zy subrogetur ejus valor ante inventus bb, habebitur $bb \infty aa + ax$, hoc est, transferendo aa in alteram partem, atque deinde utrobique dividendo per a, erit $x \infty \frac{bb - aa}{a}$. Quæ quantitas est lineæ E D, quam investigare intendebamus. Cæterùm, quia inventâ hâc lineâ E D ∞ x, utraque reliquarum incognitarum B G & B F, per y & z designatarum, quæ ad eam inveniendam necessariæ videbantur, ad arbitrium sumi potest, cum in Problemate nulla ampliùs materia supersit, quâ perveniatur ad Æquationes, quibus utraque ipsarum determinari queat, atque idcirco difficultas omnis Problematis jam sit evoluta: indicio est, rectam E D eandem semper inveniri, etiamsi ad illam quærendam pro utraque linearum B G, B F diversa magnitudo accipiatur, hoc est, alius atque alius circulus adhibeatur: quandoquidem Problema, si de linearum B G, B F longitudine ex datis B E, B C investigandâ quæritur, haud determinatum existit, sed tantùm ipsius E D.

Qui plura in loci hujus illustrationem exempla desideret, videat quæ ad literam G secundi libri à nobis sunt allata.

GGG *Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis.*] Sic, quoniam, reducto Problemate aliquo, in quo ad ipsum construendum tres supponendæ

dæ sunt incognitæ lineæ x, y, & z, ad duas Æquationes $xx \infty + 2cx + bb$, & $yy \infty aa + 2zx - xx$, pro incognita linea z,

$$\begin{array}{l} +2z \quad -cc \\ \quad\quad -yy \\ \quad\quad -2cz \end{array}$$

cui nulla respondet Æquatio, ad arbitrium sumi potest linea cognita d: potero in locum duarum præcedentium Æquationum scribere $xx \infty + 2cx + bb$, & $yy \infty aa + 2dx - xx$. Hinc cum

$$\begin{array}{l} +2d \quad -cc \\ \quad\quad -yy \\ \quad\quad -2cd \end{array}$$

duæ supersint lineæ inveniendæ x & y, ordine quoque utenda erit unaquâque Æquationum reliquarum $xx \infty + 2cx + bb$, &

$$\begin{array}{l} +2d \quad -cc \\ \quad\quad -yy \\ \quad\quad -2cd \end{array}$$

$yy \infty aa + 2dx - xx$, sive eas considerando separatim, sive unam cum altera comparando, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis. Quocirca considerando separatim Æquationem $yy \infty aa + 2dx - xx$, cum, quantitatibus $+aa$ & $-xx$ ad alteram partem sub contrario signo translatis, fiat $2dx \infty yy + xx - aa$: hinc si in altera Æquatione $xx \infty + 2cx + bb$ pro $2dx$

$$\begin{array}{l} +2d \quad -cc \\ \quad\quad -yy \\ \quad\quad -2cd \end{array}$$

substituatur $yy + xx - aa$, habebo Æquationem $xx \infty + 2cx, + yy + xx - aa, + bb - cc - yy - 2cd$. Hoc est, demptis æqualibus, ordinatâque æqualitate, habebitur $2cx \infty aa + cc - bb + 2cd$. Et fit, divisâ utrâque æqualitatis parte per $2c$, $x \infty \frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$. Ostendens quâ ratione linea incognita x ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium sumendâ d sit invenienda. Inventâ autem lineâ x, ut habeatur y, oportet tantùm in Æquatione superiori $yy \infty aa + 2dx - xx$ in locum x subrogare valorem inventum $\frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$, & in locum xx hujus valorem, & fit $yy \infty \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}$. Unde,

de, extractâ radice, invenitur

$y \infty \sqrt{\frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}}$. Exhibens quo pacto linea incognita y ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium sumenda d, obtineri possit.

Cæterùm quoniam in Problemate, ad præcedentes Æquationes reducto, propter lineam d, quæ hîc modò major modò minor ad arbitrium sumi potest, lineæ quoque x & y inde majores ac minores evadunt, atque ob id Problema non determinatum existit, sed infinitas recipit solutiones: lubet & alterum Problema, quod omnino determinatum est, atque in cujus solutione, ad unumquemque ex quæsitis numeris investigandum, unam Æquationem cum aliâ comparavimus, in medium afferre.

PROBLEMA.

INvenire duos numeros, quorum summa multiplicata per summam suorum quadratorum faciat 715; & differentia per differentiam eorundem quadratorum faciat 99.

Supposito Problemate tanquam jam facto, pono pro majori numero quæsito $x + y$, & pro minori $x - y$: eritque summa quæsitorum numerorum $\infty\ 2x$, & eorundem differentia $\infty\ 2y$.

Jam quia $x + y$ & $x - y$ in se ducti faciunt $xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$, quorum summa est $2xx + 2yy$ & differentia $4xy$: restat ut $2xx + 2yy$ multiplicata per $2x$, & $4xy$ per $2y$, producta $4x^3 + 4xyy$ & $8xyy$ sint datis numeris 715 & 99 æqualia.

Quocirca inventis duabus Æquationibus $4x^3 + 4xyy \infty 715$ & $8xyy \infty 99$, ut ex iis obtineatur uterque numerus incognitus x & y, comparo unam Æquationem cum altera: multiplicando primùm utramque partem prioris per 2, & fit $8x^3 + 8xyy \infty 1430$, ac deinde ex ea subtrahendo posteriorem $8xyy \infty 99$, & relinquitur $8x^3 \infty 1331$. In quâ, si utrobique extrahatur radix Cubica, habebitur $2x \infty 11$, & fit $x \infty 5\frac{1}{2}$.

Postea ad inveniendum y dividatur Æquatio posterior $8xyy \infty 99$ per jam inventam $2x \infty 11$, & orietur Æquatio $4yy \infty 9$. In

In qua si utrinque extrahatur radix quadrata, habebitur $2y \infty 3$, & fit $y \infty 1\frac{1}{2}$.

Cæterùm invento utroque numero incognito x & y, quoniam pro majori quæsitorum posueramus $x + y$ & pro minori $x - y$: erit major $\infty\ 7$, & minor $\infty\ 4$. Et solutum erit Problema. H

Atque ita reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive surdesolidum, sive quadrato-cubus &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo

$z \infty b$, *aut*
$zz \infty -az + bb$, *aut*
$z^3 \infty +azz + bbz - c^3$, *aut*
$z^4 \infty +az^3 + bbzz - c^3z + d^4$, *&c.*]

Hoc est, z, quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis quantitati cognitæ b. Aut quadratum lineæ z est æquale ei, quod provenit subtrahendo az ex bb: quarum quidem bb cognita est; sed az composita ex z media proportionali inter unitatem & quadratum zz, ut supra explicavimus, & ex quantitate cognita a. Aut cubus lineæ z æqualis est ei, quod provenit ex additione & subtractione trium quantitatum azz, bbz, & c^3; quarum quidem c^3 cognita est; at bbz composita ex z, prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & cubum z^3, & ex quantitate cognita bb; ac denique azz, composita ex zz, secunda dictarum mediarum, & ex quantitate cognita a. Atque sic de cæteris.

Vbi notandum est, per quantitates cognitas, intelligendas esse eas, quæ in quæstione vel datæ sunt, vel per certas operationes datarum quantitatum, jam traditas & notas, sic præparatæ sunt, ut pro cognitis sive datis sint habendæ, atque quæsitis sive incognitis æquiparandæ.

Sic cùm ponitur $z \infty b$, indicatur lineam incognitam, quæ per

per z designatur, æqualem esse alicui ex cognitis, quæ designatur per b. Quod quidem rarò contingit, cum incognitæ lineæ plerunque aliqua operatione seu præparatione cognitarum linearum indigeant, antequam cognitis evadant æquales.

Vt, si fuerit $z \infty \frac{cd}{e}$. Assumptâ pro unitate alterutrâ quantitatum c, d, quæ in se invicem ductæ numeratorem constituunt, dividenda est reliqua per denominatorem, sive quantitatem e (quemadmodum superiùs est ostensum); eritque quotiens divisionis æqualis quantitati incognitæ z.

Eodem modo si habeatur $z \infty \frac{cc+cd}{e-f}$, erit ut $e-f$ ad $c+d$, ita c ad z; sive ut $e-f$ ad c, ita $c+d$ ad z.

Et si sit $z \infty \frac{cc-dd}{e+f}$, erit $e+f$ ad $c+d$, sicut $c-d$ ad z; vel $e+f$ ad $c-d$, sicut $c+d$ ad z.

Nec non si habeatur $z \infty \frac{cd+ef}{g}$, & fiat, ut c ad e, sic f ad quartam, quæ vocetur h: poterit pro ef scribi ch, atque adeò loco $\frac{cd+ef}{g}$ substitui $\frac{cd+ch}{g}$. Vbi deinde si fiat ut g ad c, sic $d+h$ ad quartam: sive permutando (quod eodem recidit) ut g ad $d+h$, sic c ad quartam, quam vocare lubet b: erit $z \infty b$. Id quod & aliis modis præstari potest.

Non secus si sit $z \infty \frac{cdef}{ade-agh}$, & statuatur esse ut a ad c, sic e ad quartam, quæ sit i; erit $ai \infty ce$, ita ut pro $\frac{cdef}{ade-agh}$ scribi possit $\frac{adif}{ade-agh}$ seu $\frac{dif}{de-gh}$. Rursus si ponamus esse ut d ad g, sic h ad quartam, quæ sit k: erit $dk \infty gh$, ita ut in locum $\frac{dif}{de-gh}$ subrogari possit $\frac{dif}{de-dk}$ seu $\frac{if}{e-k}$. Vbi denuo si fiat, ut $e-k$ ad i, ita f ad quartam, quam vocabo b; fiet ut supra $z \infty b$. Quod idem variis modis fieri potest.

Denique sit $z \infty \frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$. Supponendo esse ut a ad d, ita d ad quartam, quæ nominetur e: erit $ae \infty dd$: poteritque pro $\frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$ substitui $\frac{aace-aacc}{aed+acd}$ seu $\frac{ace-acc}{ed+cd}$. Rursus statuendo esse ut $e+c$ ad $e-c$, sic c ad quartam quæ appelletur f, fiet

fiet $\frac{ce-cc}{e+c} \infty f$: licebitque pro $\frac{ace-acc}{ed+cd}$ reponere $\frac{af}{d}$. Vbi demum si fiat ut d ad f, ita a ad quartam, quæ vocetur b, fiet rursus, ut supra, $z \infty b$. Quod similiter pluribus modis expedire licet. Atque ita de cæteris.

E quibus constat, quantitatem incognitam z, post hujusmodi operationes atque cognitarum linearum requisitas præparationes, eò reduci posse, ut sub una semper specie efferatur, & alteri cognitæ dicatur æqualis.

Notandum autem, huc quoque referendas esse æquationes in quibus quantitatis incognitæ quadratum, aut cubus, aut quadrato-quadratum, &c. æquatur quantitati alicui cognitæ, absque additione vel subductione aliarum quantitatum, quæ componuntur ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, aut cubum, aut quadrato-quadratum &c. multiplicatis per alias cognitas. Ubi incognita quantitas, extrahendo tantùm aliquam radicem, inveniri potest. Vt cùm zz æquatur aq. Suppositâ lineâ a pro unitate, erit radix quadrata extracta ex linea q, ut superiùs est ostensum, (nimirum inveniendo inter lineas a & q mediam proportionalem,) æqualis quæsitæ lineæ z, quæ hoc modo denotatur: $z \infty \sqrt{aq}$. Vbi apparet, quæstionem per hanc extractionem, dum planum aq transmutatur in quadratum bb, cujus latus est b, eò esse reductam, ut incognita quantitas alteri cognitæ dicatur æqualis.

Eodem modo si z^3 æquetur aaq, & quæratur z. Assumptâ rursus a pro unitate, erit extracta ex q radix cubica, hoc est, inventarum inter a primam & q quartam duarum mediarum proportionalium (ut tertio libro ostenditur) prior, radici quæsitæ z æqualis. Designabitur autem hoc pacto: $z \infty \sqrt{C.\ aaq}$. Vbi similiter constat, quòd, dum hâc operatione solidum aliquod, utpote aaq, resolvitur in cubum b^3, & utrobique deinde extrahitur radix cubica, z rursus fiat ipsi b æqualis.

Nec aliter evenit cum $z^4 \infty aaqq$. Etenim dum extrahitur utrinque radix quadrato-quadrata seu bi-quadrata, hoc est, postquam radix semel extracta, dat $zz \infty aq$, eadem adhuc semel repetita radicis extractio, dabit $z \infty \sqrt{aq}$, sive, supponendo aq in quadratum bb esse conversum, $z \infty b$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

Porrò advertendum eſt, ſi quantitates cognitæ, ex quibus radix aliqua extrahi debet, ſub alia ſpecie, quàm hîc expoſitum fuit, oblatæ fuerint (ut ſi ex $aa + bb$, aut ex $\frac{aadd - aaff - a^4}{dd + 2df + ff}$ &c. extrahenda ſit radix quadrata): quòd tunc facile ſit, non ſolùm per ea, quæ jam tradita ſunt, ſed & aliis modis quantitates datas in alias tranſmutare: ita ut non aliter ex illis radices extrahendæ ſint, ac ſi ex quantitate aq extrahendæ forent. Quod & de radice cubica, quadrato-quadrata, aliisque in infinitum, eſt intelligendum.

I *Atque ideo ſufficiet vos monere, ſi quis in reducendis hiſce æquationibus non omiſerit uti diviſionibus omnibus, quæ fieri poſſunt, &c.*] Vbi notandum, inter quatuor operationum ſpecies, Additionem & Subtractionem non reddere terminos alicujus quæſtionis difficiliores, quippe quos tantùm ſignis + vel — conjungunt aut disjungunt; quæ quidem ſigna diverſa genera non conſtituunt. Multiplicationem verò quod attinet, ea eſt, quâ termini involvuntur vel intricantur, & dimenſiones augentur; quæ contra Diviſione extricantur & minuuntur. Idem de radicum extractione intellige, quæ, ut ſupra dictum fuit, diviſionis tantùm ſpecies eſt habenda. Adeò ut ad inveniendos terminos ſimpliciſſimos ad quos quæſtio aliqua reduci queat, maximopere obſervandum ſit, ut in reducendis Æquationibus, omnes diviſiones atque extractiones, quæ fieri poſſunt, tentemus. Cujus rei exemplum non inelegans ſuggerere poteſt demonſtratio proprietatis Parabolæ tertio libro adducta.

K *Erit tota O M æqualis z, lineæ quæſitæ. Quæ quidem ſic exprimitur: $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.*] Sciendum hîc eſt, æquationem propoſitam $zz \infty az + bb$, juxta ea, quæ habentur lib. III. pag. 69, aliam adhuc habere radicem, minorem quàm nihil, quæ à D. des Cartes falſa appellatur, quæque hîc per lineam P M deſignatur, atque hoc modo exprimitur $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quemadmodum facilè demonſtrari poteſt. Si enim, poſitâ $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ auferatur utrinque $\frac{1}{2}a$, & inde utraque pars $z - \frac{1}{2}a$, & $- \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ in ſe ducatur quadratè, fiet $zz - az + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Vbi ſi demum utrinque dematur $\frac{1}{4}aa$, & $-az$ in alteram partem transferatur, fiet $zz \infty az + bb$.

Erit-

L *Eritque reliqua P M æqualis y, radici quæſitæ: Ita ut ſit $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.*] Verùm æquatio $yy \infty - ay + bb$ admittit adhuc aliam radicem, minorem quàm nihil, quæ per lineam O M deſignata ita exprimitur, $y \infty - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Cujus demonſtratio ad exemplar præcedentis fieri poteſt.

M *Nec aliter fit, ſi proponatur $x^4 \infty - axx + bb$, P M enim eſſet xx, & haberetur $x \infty \sqrt{- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.*] Quoniam enim $x^4 \infty - axx + bb$, transferendo $- axx$ in alteram æquationis partem, erit $x^4 + axx \infty bb$. & additâ utrique parti $+ \frac{1}{4}aa$, proveniet $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Iam verò extractâ utrobique radice, invenietur $xx + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ac proinde tranſponendo $+ \frac{1}{2}a$, ut xx unam conſtituat æquationis partem, erit $xx \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Vnde extractâ rurſus utrinque radice, fiet $x \infty \sqrt{- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

Eodem modo ſi habeatur $z^4 \infty az^2 + bb$, erit $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Nam cum $z^4 \infty az^2 + bb$, erit per tranſpoſitionem $z^4 - az^2 \infty bb$. Addatur jam utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Vnde, extractâ utrobique radice, prodibit $z^2 - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. hoc eſt, $z^2 \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & per conſequens $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

Similiter ſi ſit $z^4 \infty az^2 - bb$, erit $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$, nec non $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Cum enim z^4 æquetur $az^2 - bb$, & per tranſpoſitionem $z^4 - az^2 \infty - bb$; addatur utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bb$. Quare extractâ utrobique radice, emerget $z^2 - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc eſt, $z^2 \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per conſequens $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}}$. Porrò, quoniam radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa$ eſt quoque $\frac{1}{2}a - z^2$, hinc & $\frac{1}{2}a - z^2 \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc eſt, $z^2 \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per conſequens $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$.

Cæterùm ut Geometricè inveniantur harum æquationum radices, ſciendum eſt, quòd, dum omnes termini non æquè multas habent dimenſiones, toties illic, ubi numero pauciores habentur, ſubintelligenda ſit unitas, quoties requiritur; ut in æquatione $x^4 \infty - axx + bb$. Quia in termino axx tres duntaxat dimenſiones reperiuntur, & in termino bb tantùm duæ, cogitandum eſt, terminum axx, ut dimenſiones fiant æquales, ſemel per unitatem eſſe multiplicatum, terminum autem bb bis. Adeò ut, ſi pro unitate accipiamus c, æquatio ſit $x^4 \infty - caxx + ccbb$. Verùm expedit unitatem illam tantiſper diſſimulare, & æquationem hanc $xx \infty - ax + bb$ uſurpare, donec radicem ejus Geometricè, ut traditum eſt, invenerimus, nimirum lineam P M, quæ exprimitur hoc pacto: $x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Ita ut deinde tantùm opùs ſit ex $- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ extrahere radicem quadratam ſeu inter inventam lineam P M & unitatem c invenire mediam proportionalem, ut Geometricè obtineatur radix $x \infty \sqrt{- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Atque ita in aliis.

Vnde liquidò conſtat, ad inveniendas harum æquationum radices, nihil aliud requiri, quàm quod circa priores tres Æquationum formulas, & radicis quadratæ extractionem Auctor præcepit. Adeò ut hinc ſimul manifeſtum ſit, quo pacto, poſtquam ſic linea aliqua pro unitate aſſumpta vel concepta fuerit, (quemadmodum hujus Geometriæ methodus requirit) Problemata omnia Geometriæ communis, hoc eſt, quæ rectarum linearum & circulorum beneficio conſtrui poſſunt, per ea tantùm, quæ ab Authore per 4 figuras 1mi libri expoſita ſunt, expediri queant, quemadmodum pag. 7 monuit.

N *Quod ſi circulus, centrum ſuum habens in puncto N, tranſienſque per punctum L, non ſecet nec tangat lineam rectam M Q R, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde aſſerere liceat, conſtructionem Problematis propoſiti eſſe impoſſibilem.*] Quod itidem ex Æquatione cognoſci poteſt. Nam cum Æquatio ſit certum medium, quo Problema aliquod reſolvitur, ſanè, ſi reſolvendo incidimus in æquationem impoſſibilem, argumentum eſt, Problema quoque eſſe impoſſibile. Arguitur autem impoſſibilitas illa ex contradictione, quam

quam involvit, cùm nempe in ea ſtatuitur minor quantitas æquari alicui majori, vel cùm jubemur ad eam reſolvendam aliquid præſtare, quod fieri nullo modo poteſt, ut, quantitatem aliquam majorem à minore ſubducere. Quemadmodum in æquatione $zz \infty az - bb$. quoniam ad inveniendam radicem z, bb ex $\frac{1}{4}aa$ ſubtrahi debet; oportet ut bb non ſit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, ſive ut b non ſit majus quàm $\frac{1}{2}a$. Aliàs enim radix ejus ſic explicari non poſſet, & æquatio impoſſibilis foret. Quod & ex ejuſdem conſtitutione licet agnoſcere, ſi in ea duæ ſint radices veræ. Si enim ponamus $z \infty c$, ſeu $z - c \infty 0$, itemque $z \infty d$, ſeu $z - d \infty 0$, atque deinde multiplicemus $z - c \infty 0$ per $z - d \infty 0$, exſurget æquatio $z^2 \begin{smallmatrix} - c \\ - d \end{smallmatrix} z + cd \infty 0$, ſeu $zz \infty \begin{smallmatrix} + c \\ + d \end{smallmatrix} z - cd$. In qua ſi $+c + d$ interpretemur per $+a$, & $-cd$ per $-bb$, habebimus æquationem propoſitam $zz \infty az - bb$. Adeò ut conſtet æquationem hanc duas veras radices admittere, ſeu quæ majores ſunt quàm 0, quarum quidem ſumma eſt a, & productum ex earum multiplicatione bb.

Sed ut duas ſemper veras radices recipiat, requiritur, ut bb non ſit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, ſeu, b non majus quàm $\frac{1}{2}a$: quoniam maximum productum quod fit ex partibus ipſius a, eſt, cùm a in duas partes æquales dividitur. Vbi notandum, quòd ubi $bb \infty \frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a$ eſſe z, quæ quæritur, atque æquationem eo caſu unam tantùm ſortiri radicem, aut duas quidem, ſed æquales. At verò bb exiſtente majore quàm $\frac{1}{4}aa$, æquationem eſſe impoſſibilem, nec ullam admittere radicem. Id quod ſimiliter de æquatione $zz \infty - az - bb$ eſt intelligendum, quæ de duabus falſis radicibus eſt explicabilis. Vt patet ex ejus conſtitutione. Etenim ponendo $z \infty - c$ ſeu $z + c \infty 0$, nec non $z \infty - d$ ſeu $z + d \infty 0$, & multiplicando $z + c \infty 0$ per $z + d \infty 0$: proveniet Æquatio

$$zz \begin{smallmatrix} + c \\ + d \end{smallmatrix} z + cd \infty 0, \text{ ſeu } zz \infty \begin{smallmatrix} - c \\ - d \end{smallmatrix} z - cd.$$

In qua ſi interpretemur $-c - d$ per $-a$, & $-cd$ per $-bb$, emerget æquatio propoſita $zz \infty - az - bb$. Cujus porrò radices Geometricè inveniuntur perinde atque Æquationis præcedentis quæ denique ſic exprimuntur $z \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \infty - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Cæterùm quod ad duas reliquas æquationes attinet, primam

videlicet $zz \infty az + bb$, & ſecundam $yy \infty - ay + bb$, ex nulli determinationi ſunt obnoxiæ, & ſemper per duas radices explicari poſſunt, unam veram & alteram falſam. Vt ſi ponatur $z \infty c$, ſeu $z - c \infty 0$, & $z \infty - d$, ſeu $z + d \infty 0$, & multiplicetur $z - c \infty 0$ per $z + d \infty 0$; fiet $z^2 \overset{-c}{+d} z - cd \infty 0$, ſeu $z^2 \infty \overset{+c}{-d} z + cd$. In qua æquatione ſi ſtatuamus c majorem eſſe quàm d, ita ut exceſſus ſit penes c cum ſigno $+$, atque $+c - d$ interpretemur per $+a$, & $+cd$ per $+bb$, habebimus eandem æquationem, quam priùs, nimirum $z^2 \infty az + bb$. Adeò ut perſpicuum ſit ipſam de duabus inæqualibus radicibus eſſe explicabilem, majore vera & minore falſa. At verò ſi ponamus c minorem quàm d, ita ut exceſſus ſit penes d cum ſigno $-$, atque $+c - d$ interpretemur per $-a$, & $+cd$ per $+bb$; prodibit æquatio ſecundæ formæ: nimirum, $z^2 \infty - az + bb$, quippe quæ à duabus inæqualibus radicibus explicatur, quarum minor eſt vera, major autem falſa. Denique ſi d conſtituatur ipſi c æqualis, deſtruent ſe invicem $+c$ & $-d$, & evaneſcet ſecundus terminus az, & erit Æquatio $z^2 \infty * + bb$, cujus duæ radices, vera $+b$ & falſa $-b$, ſunt æquales.

E quibus omnibus apparet, ad æquationes allatas Geometricè reſolvendas, earumque radices juxta regulas hîc traditas commodè explicandas, requiri, ut ultimus terminus deſignetur per bb, aut ad eam formam, ſicut ſuperiùs eſt oſtenſum, reducatur.

AR-

ARGVMENTVM
SECVNDI LIBRI.

SEcundus liber agit de lineis curvis, earumque naturam explicat, docendo, quænam illæ ſint, quas in Geometriam recipere oportet, quæque Geometricæ appellandæ ſunt, itemque quo pacto poſſint cognoſci. Modus autem eas cognoſcendi in eo conſiſtit, quòd deſcribi poſſint per motum aliquem continuum, vel per plures ejuſmodi motus, quorum poſteriores regantur à prioribus. Verùm enimverò licèt all..to modo deſcriptæ curvæ omnes in Geometriam ſint recipiendæ, atque pro Geometricis agnoſcendæ; tamen ad comprehendendas omnes, quæ ſunt in natura, & ipſas ordine diſtinguendas in certa genera, prout gradatim magis magiſque in infinitum ſunt compoſitæ, aptiùs quidquam afferri nequit, quam ut in genere dicatur: illas omnes Geometricas eſſe appellandas, quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta certam habent relationem, quæ exprimi poteſt per aliquam æquationem, ſe indifferenter ad omnia utriuſque lineæ puncta extendentem. Et quidem, quòd, cùm æquatio illa ultra rectangulum ſub duabus quantitatibus indeterminatis, (quæ ad dictam relationem explicandam requiruntur) aut ultra quadratum unius ex ipſis non aſcendit, linea curva tunc primi & ſimpliciſſimi ſit generis (in quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipſis ſunt comprehenſæ.) At verò cùm ipſa ad tres quatuorve dimenſiones aſcendit, quòd illa tunc ſit ſecundi generis. Cùm verò ad 5 aut 6 dimenſiones adſcendit, quòd illa tunc ſit tertii generis. Atque ita porrò in infinitum.

Vbi porrò facile eſt intelligere, quænam ſint, quæ ex Geometria ſint rejiciendæ, & inter Mechanicas ponendæ: Quandoquidem curvæ illæ omnes, quæ inter prædictas non comprehenduntur, ab hac Geometria rejiciuntur. Cujuſmodi ſunt illæ omnes, quæ per motus continuos deſcribi nequeunt, & ubi poſteriores à prioribus non dependent, ſed per duos motus deſcribi concipiuntur, qui ſunt à ſe invicem diſtincti, nullamque relationem habentes, quæ poſſit exactè menſurari, ſive quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta relationem non habent, quæ per aliquam æquationem omnibus communem exprimi poſſit.

Poſtquam autem oſtendimus, quo pacto lineæ curvæ ab Auctore diſtinguantur, tam in illas, quas in Geometriam cenſet introducendas, quam in illas, quas pari jure ab ea cenſet arcendas: ac denique quâ ratio-

ne

ne illæ in certa genera sint distinguendæ; operæ pretium videtur ut deinceps ea, quæ Antiqui circa ipsas contemplati fuêre, expendamus. Quæ quidem ex iis, quæ afferuntur à Pappo ad propositionem 4tam libri tertii, ut & ad propnem 30 libri quarti Collectionum Mathematicarum, haud difficulter colligi possunt. Vbi, postquam explicavit, Problematum Geometricorum tria ab Antiquis genera fuisse constituta, quorum alia dicuntur Plana, alia Solida, alia denique Linearia; nimirum prout quædam ex ipsis solvi possunt, describendo tantùm rectas lineas & circulorum circumferentias; & alia, quæ construi nequeunt, quin ad minimum adhibeatur aliqua Conica sectio; & reliqua denique quin in constructionem assumatur alia demum curva linea: Tandem de duarum mediarum inventione loquitur, quas inquit Geometricæ rationi innixos invenire non potuisse. Quorum quidam, asserentes, Problema solidum esse, resolutionem per Conicas sectiones, sive solidos locos, fecerunt; alii autem per alias curvas, sive locos lineares; ac alii denique constructionem eius instrumentis tantùm perfecerunt. Nullum autem eorum fuisse, qui resolutionem per locos planos, sive rectas lineas & circulares, absolverit.

Vbi apparet, quòd tantummodo constructiones illas Geometricas appellaverint, quæ per rectas lineas & circulorum circumferentias perficiebantur; quodque constructiones in genere non aliter respexerint, quàm quatenus ipsarum perfectio à manuum dexteritate & instrumentorum perfectione proficisceretur. Vnde cum ad planorum Problematum constructiones non nisi rectas lineas & circulorum circumferentias adhibendas esse viderent, quæ omnium facillimè atque expeditissimè regulæ & circini beneficio (utpote per instrumenta omnino simplicia) in plano describuntur, & sectiones Conicas reliquasque curvas lineas, varium & difficilem ortum habentes, in plano designare difficile existimarent, ideoque descriptionem earum minus certam statuerent; factum inde quoque, ut solam Planorum constructionem, Geometricam pronuntiarent: adeoque non nisi rectas lineas & circulares, reliquas verò non item, pro Geometricis agnoscerent. Quod quare ita distinxerint, non video. Quandoquidem rectas lineas & Circulos perinde atque Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses ex Cono secari posse ab Apollonio scio ostensum. Qui porrò postquam plurimas proprietates tribus hisce sectionibus pariter atque Circulo convenire ostendit, & quidem propter mirificas Conicorum Theorematum demonstrationes, cum non solum illâ tempestate, verùm etiam sequentibus sæculis, magnus Geometra sit appellatus, non apparet quam ob causam prædictæ lineæ non æquè ac rectæ & circulares pro Geo-

Geometricis fuerint habitæ. Adeò ut non solùm Veteribus illis, sed etiam Vietæ ejusque asseclis assentiri nequeam, dum Geometriæ defectum hîc suspicantes, neque Hyperbolas, neque Parabolas κατ' ἀπισημονικὸν λόγον in Geometricis describi asseverant, ac proinde Menæchmi inventionem duarum mediarum per Parabolæ & Hyperbolæ, sive etiam per binarum Parabolarum intersectionem, veluti non Geometricam respuunt. Quam sanè (meo judicio) non minùs Geometricam censere oportet, quàm illam, quæ ab Euclide affertur in Problema 1mum Libri 1mi Elementorum: siquidem punctum, in quo hæ sectiones sibi mutuò occurrunt, non minùs scientificè invenitur, quàm illud, in quo bini circuli se invicem intersecant, ad describendum triangulum æquilaterum.

Cæterùm si afferatur, ideo hasce lineas Geometricas non fuisse dictas, eò quòd instrumentis describi viderent; Annon ob eandem rationem linea recta & circularis non Geometricæ fuissent dicendæ, cum ad illas in plano describendas regulâ atque circino sit opus? Adeò ut si τεχνικῶς καὶ ἀπισημονικῶς χειρεργίαν Vieta vocaverit constructionem illam quatenus ipsa regulæ & circini beneficio perficitur; Annon pari jure artificiosam atque scientificam appellare licebit constructionem illam, quæ non nisi instrumentis perfici potest, quæ majorem industriam atque artificium in sui compositionem requirunt, cujusque demonstratio simul ex penitiori Geometriæ penu est depromenda? Quocirca cum recta & circularis non Geometricæ non dicantur, neque etiam constructiones per ipsas factæ; ratum igitur esto, quòd neque Sectiones Conicæ, quæ cum circulari unum genus curvarum linearum, illudque primum (ut supra dictum fuit) apud Auctorem nostrum constituunt; neque etiam omnes superiorum generum curvæ, constructionesque quæ per ipsas fiunt, aliæ quàm Geometricæ sint habendæ, prout demonstratio illas tales esse comprobabit. Hæc autem de curvis lineis dicta sufficiant. Restat ut porrò ea, quæ hoc libro ab Autore pertractantur, paucis exponamus.

Explicatâ linearum curvarum naturâ resumit quæstionem Pappi ab Antiquis quæsitam, quam primo libro explicuit, atque resolvere incepit; talem deinde ipsam declarans, ut postquam in aliis atque aliis lineis proposita est, illa quoque alias atque alias curvas lineas, solutionem præbentes, quæque diversi generis sint, prout debita ratio numeri linearum habeatur, admittat. Adeò ut nulla curva linea sit sub calculum cadens, quæque in Geometriam juxta ejus definitionem recipi possit

quod ſanè obſervatione dignum,) quæ non etiam ſimul pro certo aliquo linearum numero utilis exiſtat.

Vbi præterea notandum eſt, quòd eam ſic reſolvere doceat, ut ſimul omne illud, quod ad locorum planorum atque ſolidorum compoſitionem ſpectat, exponat, ſicque paucis complectatur, non ſolùm quæſtionis propoſitæ ſolutionem in tribus quatuorve lineis, ſed etiam ſolidorum locorum compoſitionem, tantopere à Veteribus quæſitam. Nullos enim ex iſtis locis omiſit, præter omnium ſimpliciſſimos, quos facilitatis causâ neglexit.

Poſt hæc autem, quæſtione in 5 lineis propoſitâ, docet quænam prima & ſimpliciſſima ſit linearum omnium, quæ ibidem inſervire poſſint. Atque ita tandem illi finem imponit. Quibus peractis declarat, quòd, ad inveniendas omnes proprietates curvarum linearum, ſufficiat ſcire relationem, quam illarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, ſicut etiam quo pacto inveniri poſſint lineæ rectæ, quæ ipſas ſecent in datis punctis ad angulos rectos. Quod quidem ſubtiliſſimâ ac mirabili proſequitur methodo, meoque judicio digna, ut inter ingenioſiſſima hominum inventa celebretur. Poſtea verò ne quid deſit, quod ad uſum curvarum linearum ibidem propoſitarum ſpectare videretur, oſtendit ipſas diverſas habere proprietates, quæ nequaquam ſectionum Conicarum proprietatibus cedunt, deſcribitque quædam Ovalium genera, ad radiorum reflexionem atque refractionem per ſpecula & vitra, apprimè conducibilia: adeoque in Catoptrica atque Dioptrica uſum inſignem habentia. Denique oſtendit, quo pacto, quæ de lineis curvis explicuit, adplicari etiam poſſint ad lineas curvas, quæ per motum aliquem ordinatum quorundam punctorum alicujus corporis in ſpatio trium dimenſionum deſcribi poſſunt. Atque ita, quæcunque ad curvarum linearum cognitionem neceſſaria ſunt, breviter abſolvit. Quantùm autem ad Geometriam promovendam, ejuſque arcana detegenda, nec non varias illius functiones cognoſcendas hic liber faciat, vel ea ipſa quæ in illo pertractantur, ac modò recenſuimus, teſtari poſſunt; tum etiam, quia in eo via ad ſurdeſolida, altioraque loca, hactenus incognita, inveſtiganda ſternitur, atque in eo infinitæ ſpeculationis campus aperitur.

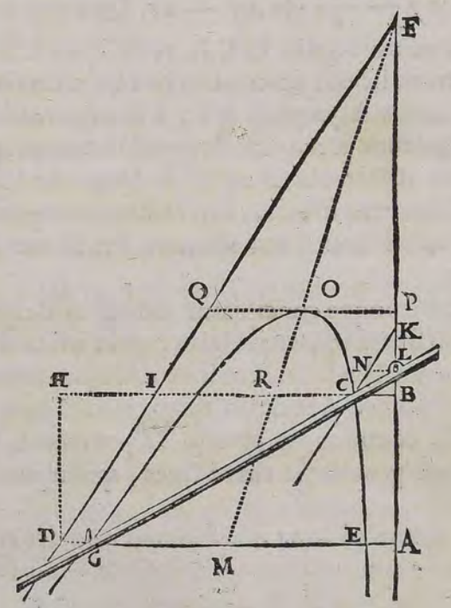
COM-

COMMENTARII

IN

LIBRVM SECVNDVM.

QVEMADMODVM *illa re ipsâ nulla alia eſt quàm Hyperbola.*] Si enim producatur A G ad D, ut D G æqualis ſit E A ſeu N L, & per D agatur recta D F ipſi C K parallela, occurrens rectæ A B in F: erit D F una ex Aſymptotis, & A F altera. Quod facilè demonſtrari poteſt. Supponamus namque lineam G O C E Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti D F, F A, & utraque D G, E A æqualis ſit ipſi N L; nec non D F ipſi C K parallela, ut dixi-



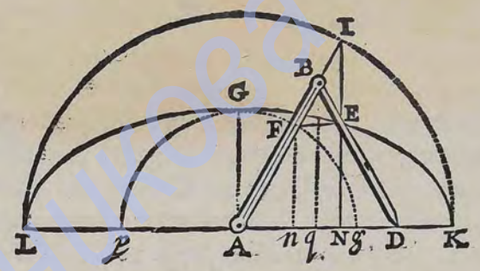
 mus;

mus; hoc eſt, angulus D F A æqualis ſit angulo C K B. Producatur autem B C, ut ſecet D F in I; & per D agatur recta D H parallela ipſi A F, occurrens cum B C in H. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula D H I & K L N triangulo F A D, erunt & ipſa inter ſe ſimilia. Vnde erit ut K L ad L N, hoc eſt, ut b ad c, ita D H ſeu A B, hoc eſt, x, ad H I, quæ ideo erit $\frac{cx}{b}$. Deinde ſubductâ H I ex H B ſeu D A, hoc eſt, $\frac{cx}{b}$ ex $a+c$, relinquetur I B, $a+c-\frac{cx}{b}$. E qua ſi auferatur B C ſeu y, remanebit I C, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Quia verò in Hyperbola rectangulum I C B æquatur rectangulo D E A, per 10 prop. 2di libri Conicorum Apollonii; ideo ſi multiplicetur I C per C B, hoc eſt, $a+c-\frac{cx}{b}-y$ per y, fiet rectangulum I C B, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$, æquale rectangulo D E A ſeu ac, hoc eſt, ei quod fit ex ductu ipſius D E ſeu G A in E A. Quare ordinatâ æquatione, factaque tranſpoſitione, ut yy unam obtineat æquationis partem, invenietur $yy \infty cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$. Quæ æquatio eadem eſt, quæ ſupra ex motu regulæ G L & rectæ lineæ C K fuit inventa. Adeò ut affirmare liceat, deſcriptam lineam curvam C E Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti A F, F D; quemadmodum ſuppoſuimus. Quorum pleniorem demonſtrationem qui deſiderat, conſulat caput 6tum tractatus noſtri de Organica Conicarum Sectionum in plano deſcriptione, ubi caſus omnes proſecuti ſumus.

Sed utile fuerit unum aut alterum Problema ſimile adjungere.

In plano quocunque concipiatur moveri A B regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula B D, in puncto B, ut ſimiliter circa punctum B in eodem plano moveri poſſit. Aſſumpto autem in B D inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam A D; Quæritur cujus generis ſit curva linea, quam punctum E motu illo deſcribit?

Quoniam igitur ad hanc quæſtionem oportet cognoſcere relationem, quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ A D, in qua punctum A eſt datum: ſuppono ex puncto E, ad quod



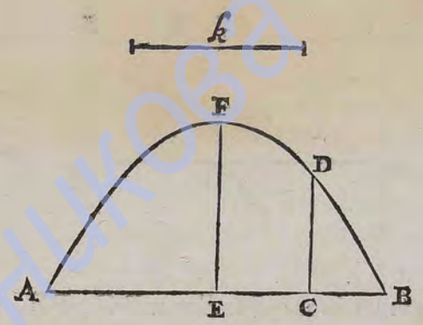
quod inſtrumentum huic curvæ deſcribendæ inſerviens eſt adplicatum, demiſſam eſſe ſuper A D perpendicularem E N. Et quidem cum E N, N A duæ ſint quantitates indeterminatæ ac incognitæ; voco unam x, & alteram y. Deinde, ut relationem unius ad alteram inveſtigem, conſidero etiam quantitates cognitas A B vel B D, & D E, quæ hujus curvæ deſcriptionem determinant; illamque appello a; hanc verò b. Tum quia triangulum N E D eſt rectangulum, à quadrato ex D E, hoc eſt bb, aufero quadratum ex N E, hoc eſt, xx, & relinquitur quadratum ex N D, ſeu $bb-xx$, cujus radix $\sqrt{bb-xx}$ eſt ipſa linea N D. Porrò demiſsâ ex B ſuper A D perpendiculari B q, ſecabitur recta A D ab ipſa bifariam in q, propter æqualitatem regularum A B & B D, fientque triangula B q D & E N D ſimilia. Vnde erit ut D E ad D N, hoc eſt, b ad $\sqrt{bb-xx}$; ita D B, hoc eſt, a, ad D q, ſeu $\frac{a}{b}\sqrt{bb-xx}$. & fit A D $\infty \frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$. Cæterùm cum A N ſit ∞y, & N D $\infty \sqrt{bb-xx}$, erit tota A D $\infty y+\sqrt{bb-xx}$. Adeò ut habeatur æquatio inter A D bis inventam, hoc eſt, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $y+\sqrt{bb-xx}$, vel, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}-\sqrt{bb-xx}$ ſeu $\frac{2a-b}{b}\sqrt{bb-xx}$ & y. Et multiplicatâ utrâque æqualitatis parte in ſe, ut ſigna radicalia evaneſcant, & æquatio ab aſymmetria liberetur, fit $4aa-4ab+bb-\frac{4aaxx}{bb}+\frac{4axx}{b}-xx \infty yy$. Quæ æquatio ſi per tranſpoſitionem ac diviſionem ordi-

ordinetur, ita ut xx unam teneat æquationis partem (si sit x quam invenire volumus, relinquendo y indeterminatam), invenietur $xx \infty \frac{4aabb - 4ab^3 + b^4 - bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, vel $xx \infty bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$. Vnde cum æquatio non ascendat ultra quadratum unius ex quantitatibus indeterminatis, quemadmodum & superiùs in Hyperbola evenit: constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quippe quæ alia non est quàm Ellipsis, juxta ea quæ secundo capite tractatus nostri de Organica Conicarum sectionum descriptione demonstravimus. Vbi advertere licet praxin (quam & Clavius lib. 1. suæ Gnom. affert prop. 26tâ) describendi Ellipsin per puncta, quæ ex inventa æquatione colligi potest, quæque lignariis & cæmentariis in extruendis fornicibus familiaris est, atque in orthographicis Sphæræ delineationibus usum habet insignem. Nam si productâ A B ad I, ut B I sit æqualis B E, centro A intervallo A I circulus describatur, secans A D, hinc inde productam, in L & K: erit L K axis transversus Ellipsis. Rectus autem invenitur, si ex eodem centro, intervallo D E, circulus describatur p G F g, secans A I in F. Erit enim A G semissis axis recti. Et si à puncto F ipsi A D ducatur F E parallela, secans I N in E: erit punctum E unum ex punctis, per quod Ellipsis transire debet. Quo quidem modo infinita alia puncta inveniuntur. Quod & ex calculo fit manifestum: Est enim A I $2a - b$, & A N y; estque ut A I seu $2a - b$ ad A N seu y, ita A F seu b ad A n, quæ ideo est $\frac{by}{2a - b}$. Cujus quadratum $\frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$ si auferatur à quadrato ex A F seu bb, remanebit quadratum ex n F $\infty bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, utpote æquale xx quadrato lineæ N E. Quemadmodum fuit inventum.

Eodem modo operaberis in quæstione sequenti, quæ ultima est propositio lib. 4ti collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini.

Quæritur cujus generis sit curva linea A F D B, cujus hæc est proprietas: ut, deductâ, à quolibet ejus puncto, ut D, perpendiculari D C, in rectam A B, positione & magnitudine datam, id quod sub perpendiculari D C & alia quadam data linea k continetur, æquale sit rectangulo, quod sub segmentis A C, C B comprehenditur.

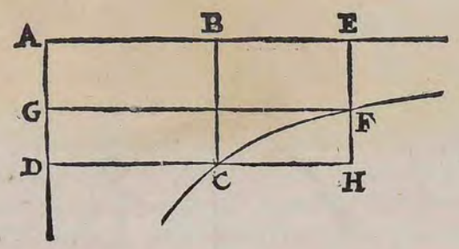
Sectâ



Sectâ A B bifariam in E, pono A E vel E B ∞a, E C ∞y, C D ∞x: eritque A C $\infty a + y$, & C B $\infty a - y$. Cum igitur ejusmodi sit relatio punctorum curvæ A D B ad puncta rectæ A B, ut rectangulum sub C D & k æquetur rectangulo sub A C, C B: erit $aa - yy \infty kx$. Quæ æquatio ad omnia utriusque lineæ puncta referri potest, quandoquidem y & x duæ quantitates indeterminatæ existunt, quæ ad omnes lineas E C, C D applicari possunt. Exceptis punctis F & E, quo casu quantitas y nulla est, & E F æquatur $\frac{aa}{k}$. quod & de duobus præcedentibus Problematis est intelligendum. Cæterùm cum in æquatione inventa $aa - yy \infty kx$ una quantitatum incognitarum y adscendat ad quadratum, indicio est, lineam curvam esse primi generis. Quam aliam non esse, quàm Parabolam, demonstravit Pappus loco citato.

Non aliter concludes, æquatione existente $xy \infty ab$, vel $xy \infty by - ax$, lineam curvam, quæ hanc æquationem produxit, esse primi generis: cum tantùm ascendat ad rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum x & y. Est autem curva illa linea Hyperbola. Quod facilè intelligetur, si in prima æquatione, ubi $xy \infty ab$, concipiamus ab constituere rectangulum aliquod parallelogrammum A B C D, cujus unum latus A B sit a, & alterum B C sit b; atque per punctum C circa Asymptotos D A, A B Hyperbolen describamus C F; ac denique à quovis in

ea

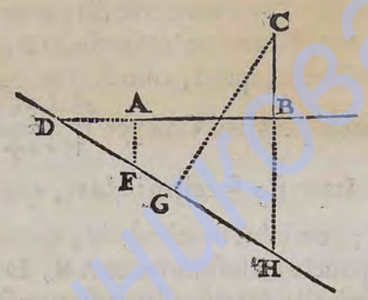


ea puncto F agamus duas rectas lineas F G, F E, ipsis A B, B C parallelas: Erit enim parallelogrammum A E F G parallelogrammo A B C D æquale, per 12 prop. 2di libri Conicorum Apollonii. Adeò ut A E & E F sumi possint pro duabus quantitatibus indeterminatis y & x, quæ in se invicem ductæ efficiant $xy \infty ab$. quod exigebat proposita æquatio.

Eodem modo, si æquatio fuerit $xy \infty by - ax$, & producantur rectæ D C, E F, donec concurrant in punctum H: erit itidem parallelogrammum D H F G parallelogrammo C H E B æquale. Ac proinde si D C ponatur ∞a, & C B ∞b, (ut ante) & binæ quantitates indeterminatæ y & x ad binas lineas C H & H F referantur, atque D H seu $a + y$ ducatur in H F seu x: erit rectangulum D F seu $xy + ax$ æquale rectangulo C E seu by, utpote quod invenitur multiplicando C B seu b per C H seu y. Adeoque si utrinque auferatur ax, relinquetur $xy \infty by - ax$. Quæ est æquatio posterior.

E quibus manifestum fit, quòd, licèt plurimi referat, quænam rectæ pro quantitatibus indeterminatis sumantur, ut æquatio brevis atque facilis reddatur, semper tamen linea ejusdem generis appareat, quocunque tandem modo sumantur.

Omitto alios æquationum modos seu formulas, eandem curvam designantes, quandoquidem complures sunt. In genere hoc dicam, totam æquationum illarum varietatem oriri tantùm ex varia harum curvarum ad diversas rectas lineas relatione. Nam, ut ostendatur quænam differentia obtineri possit, cùm curva linea ad diversas rectas lineas refertur: Sunto duæ rectæ lineæ positione datæ A B, D F, sibi mutuò occurrentes in D; punctum autem



tem in curva sit C. Et in A B quidem puncto A existente dato, & in ipsam à puncto C demissâ perpendiculari C B, ad referendum punctum C ad aliquod punctum ipsius A B: voco A B, x; & B C, y. Deinde, quoniam, propter positione datas A B, D F, datum est punctum intersectionis D, data quoque erit recta D A, nec non A F, quæ ipsi A B est perpendicularis, secans D H in F. Denique, demissâ ex puncto C super D H perpendiculari C G, producatur C B, donec occurrat rectæ D F in puncto H. Quibus positis, ut inveniantur rectæ D G, G C, ostendentes relationem, quam habet punctum C ad punctum G; ponatur D A ∞a, A F ∞b. Hinc, cum A B sit ∞x, erit D B $\infty a + x$. Iam verò quia propter similitudinem triangulorum D A F, D B H, D A est ad A F, hoc est, a ad b, sicut D B, hoc est, $a + x$, ad B H, erit B H $\infty \frac{ab + bx}{a}$. Cui si addatur C B ∞y, fiet tota C H $\infty y + b + \frac{bx}{a}$. Porrò quoniam rectangulum est triangulum D A F, erit quadratum ex D F æquale quadratis ex D A & A F; ideoque D F $\infty \sqrt{aa + bb}$. Hinc cum D A sit ad D F, hoc est, a ad $\sqrt{aa + bb}$, sicut D B, hoc est, $a + x$, ad D H; erit ipsa $\infty \frac{a + x}{a} \sqrt{aa + bb}$ seu $\sqrt{aa + bb} + \frac{x}{a} \sqrt{aa + bb}$. similiter, ob similitudinem triangulorum F A D, H G C, cum sit ut D F ad F A, hoc est, $\sqrt{aa + bb}$, ad b, ita C H, hoc est, $y + b + \frac{bx}{a}$ ad H G; erit H G $\infty \frac{aby + abb + bbx}{a\sqrt{aa + bb}}$. Quæ si subtrahatur ex D H $\infty \sqrt{aa + bb} + \frac{x}{a} \sqrt{aa + bb}$, relinquetur D G $\infty \frac{a^3 + aax - aby}{a\sqrt{aa + bb}}$ seu $\frac{aa + ax - by}{\sqrt{aa + bb}}$. Denique quoniam D F est ad D A, hoc est, $\sqrt{aa + bb}$ ad a, sicut C H, hoc est,

$y +$

$y+b+\frac{bx}{a}$ ad CG; erit CG $\infty \frac{ab+bx+ay}{\sqrt{aa+bb}}$. E quibus perspicuum fit, differentiam omnem, quæ in referendis curvæ punctis C, tum ad puncta rectæ A B, tum ad puncta rectæ D F, obtineri poteſt, in eo tantùm consistere, quòd, cùm A B indeterminata relinquitur, C B exprimatur per y; ſed C G per $\frac{ab+bx+ay}{\sqrt{aa+bb}}$, & D G per $\frac{aa+ax-by}{\sqrt{aa+bb}}$. Ita ut ſi y ſpeciem induat, quæ ei ex proprietate curvæ convenit; conſtabit ſimul relatio, quam curvæ puncta C obtinebunt ad puncta utriuſque rectæ A B, D F. Id quod eodem modo in omni alia datarum linearum positione oſtendi poſſet, niſi breviores eſſe vellemus.

B *Saltem ſi ſupponamus quantitatem e z majorem quàm c g. nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna + & —.*] Exiſtente enim ez minore quàm cg, & multiplicando utrobique per z^2, foret ez^3 minor quàm cgz^2. Quo caſu omnes quoque numeratoris termini, qui ſigno + adficiuntur, minores erunt illis, qui ſigno — adficiuntur; adeò ut tantùm mutanda ſint omnia ſigna. Æquationem autem hoc facto illæſam manere, ita oſtenditur. Eſto $y \infty \frac{fe-dk}{d-e}$ (ſufficit enim id per facile aliquod exemplum oſtendere), ſuppoſitaque d minori quàm e, mutentur omnia ſigna + & —: fietque $y \infty \frac{-fe+dk}{-d+e}$.

Quoniam enim ex hypotheſi $y \infty \frac{fe-dk}{d-e}$, erit, multiplicando utrinque per $d-e$, $dy-ey \infty fe-dk$. Vnde factâ transpoſitione, ut totum æquetur nihilo, erit $dy-ey-fe+dk \infty 0$. Transferantur rurſus $+dy-ey$ in alteram æquationis partem, & fiet $-fe+dk \infty -dy+ey$. Quæ æquatio à præcedenti non differt, niſi quòd termini omnes contrariis ſignis ſint adfecti. Quare ſi utraque æqualitatis pars dividatur per $-d+e$, prodibit $y \infty \frac{-fe+dk}{-d+e}$. ut erat propoſitum.

Vnde colligere licet: Si quantitates quædam ſignis + & — junctæ æquentur aliis quibuſdam quantitatibus etiam ſignis + & — junctis: erunt quoque eædem contrariis ſignis affectæ inter ſe æquales. *Vnde*

Vnde ſi in hac æquatione quantitas y nulla ſit, aut minor quàm nihil, poſtquam punctum C ſuppoſuimus in angulo D AG, oporteret & illud ſupponere in angulo D AE, aut E AR, aut R AG, mutando ſigna + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd ſi verò in quatuor hiſce positionibus valor ipſius y nullus reperiretur, indicio eſſet, quæſtionem caſu propoſito eſſe impoſſibilem.] Sciendum hic ab Autore obiter notari, ad plenam compositionem loci, in quem cadit quæſitum punctum C, opùs eſſe ut inveſtigemus id ipſum in omnibus 4^or angulis D A G, D A E, E A R, & R A G, quærendo nempe ad hoc 4^or æquationes diverſas. Id quod notat facile eſſe, unà æquatione jam inventâ, quoniam ad reliquas obtinendas tantummodo mutare oportet ſigna + & —, pro diverſa habitudine quantitatum inventarum ad figuræ lineas; ut punctum C, quando cadit intra angulum D A E, aut E A R, aut R A G quæratur eâdem ratione, quâ illud hîc invenire docuit, cùm intra angulum D A G cadere ſupponitur. Manifeſtum enim eſt, quòd, ſi in 4^or hiſce positionibus valor ipſius y nullus reperiatur, quæſtio propoſita futura ſit impoſſibilis. Quod ipſum hîc in genere de puncto C intelligi debet, etiamſi quæſtio alias conditiones præſupponat: cum illa vix alioquin Autori (ob exiguam ejus utilitatem) iſtius momenti viſa ſit, ut in conſtructione hujus loci totus eſſet, niſi quatenus hîc unà ſimul compoſitionem Locorum Planorum & Solidorum traderet, ſicut ipſius verba indicant p. 12 & 34. Quippe aliàs in hac positione datarum linearum contingit, quando videlicet rectangulum ſub C B, C F ponitur æquale rectangulo ſub C D, C H, ut punctum C non tantùm ubivis cadat in Circulum, qui transit per puncta A, G, & duas interſectiones linearum F E, G H, & ipſarum D A, F E; verùm etiam in utramque duarum oppoſitarum Hyperbolarum, quarum una transit per A & G puncta, & altera per duas reliquas interſectiones dictas. Quemadmodum etiam, ſi duæ ex datis lineis ſunt parallelæ, fieri poteſt, ut punctum C ubilibet cadat in duas oppoſitas Hyperbolas & inſuper in Parabolam vel in duas alias oppoſitas Hyperbolas; aut etiam in duas oppoſitas Hyperbolas & in rectam lineam, ubi videlicet bina ſunt parallelarum paria ſeſe interſecantia. atque ita de aliis. Idem obſervare licet in

B

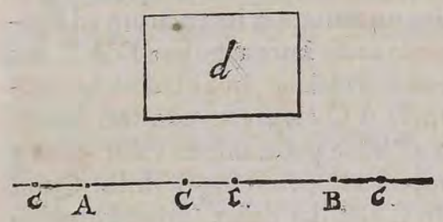
Vide fig. pag. 12.

in Apollonii Locis Planis, à me restitutis, in quorum nonnullis, ad plenam loci compositionem, quæsitum punctum præter lineas jam expressas etiam alia plana loca contingit, quæ pari facilitate investigari & construi possunt, prout nimirum idem punctum ad id in aliis tantùm angulis suppositum fuerit, quemadmodum & ibidem fuit indicatum.

His similia notare quoque licet circa Problemata omnino determinata, in quibus non nisi certus est punctorum numerus. Cujusmodi est sequens.

PROBLEMA.

IN recta interminata assignatis duobus punctis A, B, in eadem aliud assignare punctum C, ut rectangulum A C B, quod fit sub rectis A C, C B, ad assignata puncta A, B abscissis, dato spatio *d* æquale sit, quod tamen minus sit quartâ parte quadrati ex A B. quæ sit ∞ *a*.



Quoniam hîc juxta mentem Problematis punctum C indeterminatum est respectu puncti A, ut & respectu puncti B, hoc est, indeterminatum quò magis ad dextram quàm ad sinistram utriusque cadat, hinc si concipiatur determinatum inter A & B, æquatio huc pertinens comprehendet plus quàm oportet, neque legitima erit, si ei soli acquiescere velimus. Quocirca & illud ipsum extra A & B ab utraque parte supponendum est, si velimus ut solutio Problematis omnibus numeris sit absoluta.

Vnde supponendo C primùm cadere extra A B ad sinistram ipsius A, erit, assumptâ x pro A c, $xx + ax \infty d$; ac deinde supponendo C cadere inter A & B, erit $ax - xx \infty d$; & denique supponendo *c* cadere extra A B ad dextram ipsius B, erit $xx - ax \infty d$. Hoc est in numeris, si a sit ∞ 20, $d \infty 96$, habebitur $x \infty 4$, $x \infty -24$; $x \infty 12$; $x \infty 8$; $x \infty 24$, & $x \infty -4$. Quæ quidem omnes sunt radices, quæ ad propositum Problema pertinent. Quarum prima & ultima designant longitudinem lineæ A c ∞ x, qualis

qualis ipsa sumenda est ab A versùs sinistram, & quatuor reliquæ, qualis ipsa sumi debet ab A versùs dextram, cadente puncto C inter A & B, vel ultra B; adeò ut in toto sint 4^{or} diversa puncta, quæ quæsito satisfaciant.

Cæterùm si velimus, ut una obtineatur æquatio, quæ hasce omnes radices simul includat, oportet tantùm, ubicunque accepto puncto C, factâque A c ∞ x, multiplicare $xx + 20x - 96 \infty 0$ per $20x - xx - 96 \infty 0$; & id quod fit rursus per $xx - 20x - 96 \infty 0$, & invenietur $- x^6 + 20x^5 + 496x^4 - 11840x^3 + 47616xx + 184320x - 884736 \infty 0$ seu $x^6 - 20x^5 - 496x^4 + 11840x^3 - 47616xx - 184320x + 884736 \infty 0$.

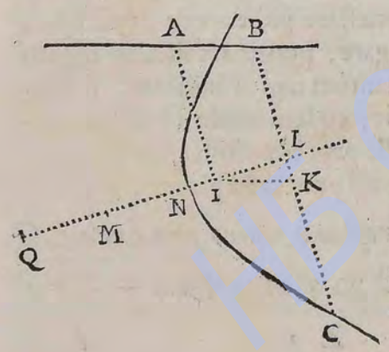
Id quod etiam universaliùs fieri potest multiplicando C B ∞ ∞ 20 ∞ x per A C ∞ x, obtinebitur enim ∞ $20x$ ∞ $xx \infty 96$. Quæ æquatio præter radices superiores etiam continet $x \infty -8$, & $x \infty -12$, quippe quæ eliciuntur ex æquatione $-xx - 20x \infty 96$.

Vbi demum notandum, ex æquatione inventa ∞ $20x$ ∞ $xx \infty 96$ facile quoque esse aliam vulgari modo affectam invenire, quæ omnes easdem radices cum illa comprehendat, utpote multiplicando utramque partem in se quadratè, & fit $400xx$ ∞ $40x^3 + x^4 \infty 9216$. Vnde servatâ ∞ $40x^3$ ab una parte, & deinde utrâque rursus quadratâ, invenitur æquatio $x^8 - 800x^6 + 141568x^4 - 7372800xx + 84934656 \infty 0$, cujus radices eædem sunt quæ præcedentis æquationis ∞ $20x$ ∞ $xx \infty 96$, quas enumeravimus. Ratio autem, cur D. des Cartes hujusmodi æquationibus ad solutionem quæstionis ex Pappo allatæ non fuerit usus, vel ea videtur, quòd alias tum vulgares, tum etiam à quolibet faciliùs perceptibiles animadverterit; ita ut, dum quæstio per se satis difficilis existit, præstare judicaverit, specialem æquationem pro C puncto investigare, postquam illud in angulo D A G supponitur, ulteriùsque tantùm digito indicare, si Problemati penitus satisfaciendum sit, eodem modo in reliquis angulis D A E, E A R, & R A G esse procedendum; quàm æquationem universalem, quæ omnia simul puncta respiceret, invenire.

Hinc nihil mihi ampliùs restare video pro linea L C præter hosce terminos: $LC \infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$.

Vnde cognoscitur, quòd si nulli fuissent, futurum fuisse ut punctum C reperiretur in linea recta I L; & si tales extitissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}$ xx signo + notatis, oo fuisset æqualis 4 p m, sive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}$ xx nihilo fuissent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quàm I L.] Hæc verba tres conditiones complectuntur ad determinandum punctum C, quando in lineam rectam cadit. Nam cum facienda sit L C $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{pxx}{m}}$, reperietur illud punctum in linea recta I L, si termini, quibus ipsa exprimitur, nulli sint. Et si tales fuerint, ut radix ex iis extrahi possit, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}$ xx signo + notatis, oo sit æqualis 4 p m, hoc est, ut L C sit $\sqrt{mm + \frac{pxx}{m}}$ 8 $x\sqrt{4pm}$ seu m 8 $x\sqrt{\frac{p}{m}}$: punctum C similiter in recta linea reperietur. Idem continget, si termini mm & ox, aut ox & $\frac{pxx}{m}$ fuerint nulli, dummodo reliquus $\frac{pxx}{m}$, aut mm semper signo + adfectus sit.

CC *Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus, &c.*] Quò ista, quæ hîc deinceps pag. 29, 30, & 31 ab Autore traduntur, cuivis manifestiora fiant, sequentia in medium afferre visum fuit.



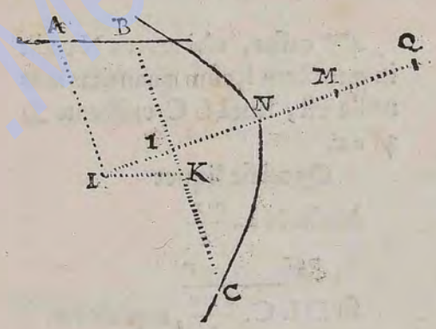
Primus casus, cùm Sectio est Parabola, in quâ linea L C una ex iis existit, quæ ordinatim ad diametrum, quæ semper in lineam I L cadit, adplicantur; & cujus vertex N in ea ex altera parte puncti L sumendus est respectu puncti I, linea L C existente $\infty \sqrt{mm + ox}$. Ad quem inveniendum, sicut & latus rectum

ctum r, pono pro N I f, eritque N L $\infty f + \frac{ax}{z}$, deinde ita procedo:

Mult. N L. $f + \frac{ax}{z}$
per r
fit □ L C. $fr + \frac{arx}{z}$, æquale $mm + ox$.

$\frac{ar}{z} \infty o$
$ar \infty oz$
$r \infty \frac{oz}{a}$

$fr \infty mm$, dele r
$\frac{foz}{a} \infty mm$
$foz \infty amm$
$f \infty \frac{amm}{oz}$



2dus casus, ubi vertex N in linea I L ex eadem parte puncti L sumendus est respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox}$.

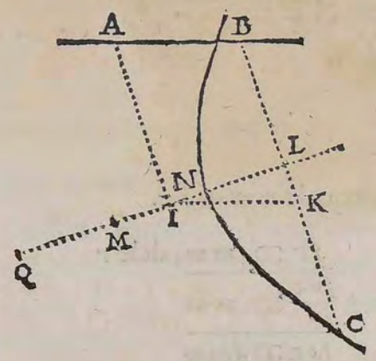
Quod sic liquet

Mult. L N. $f - \frac{ax}{z}$
per r
fit □ L C. $fr - \frac{arx}{z}$ æquale $mm - ox$.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.

3tius ca-

HB OVM Mechelen



3tius casus, ubi vertex N in linea I L sumi debet inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm+ox}$.

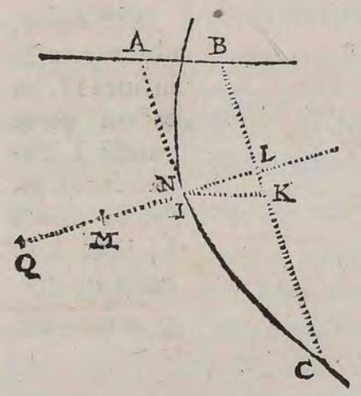
Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z} - f$

per r

fit □ L C. $\frac{arx}{z} - fr$, æquale $-mm+ox$.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.



4tus casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{ox}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

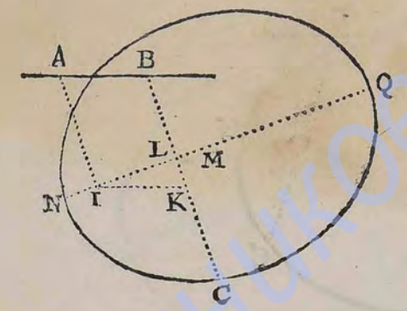
per r

fit □ L C. $\frac{arx}{z}$, æquale ox.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$.

E quibus colligitur, cum in omnibus hisce Parabolæ casibus sive diversis ejus positionibus latus rectum sit $\infty \frac{oz}{a}$, atque in iis nullibi reperiatur quantitas in xx ducta, nec præter easdem ulla alia excogitari possit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur, quæsitum punctum C cadere in Parabolam, cujus latus rectum est $\frac{oz}{a}$, quæque pro diversa terminorum ipsius L C constitutione, positiones jam explicatas admittat.

Pri-



Primus casus, cùm linea est Circulus, & centrum ejus M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Ad quod inveniendum, ut & diametrum N Q, pono pro N M vel M Q c, & pro I M d; eritque N L $\infty c-d+\frac{ax}{z}$, & L Q $\infty c+d-\frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

Mult. N L. $c - d + \frac{ax}{z}$

per L Q. $c + d - \frac{ax}{z}$

$cc - cd + \frac{acx}{z}$

$+cd - dd + \frac{adx}{z}$

$-\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

fit □ N L Q seu □ L C. $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm+ox-\frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c majorem esse quàm d.

$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$ $\quad \frac{2ad}{z} \infty o$

$aam \infty pzz$ $\quad 2ad \infty oz$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$. Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc - dd \infty mm$, dele dd

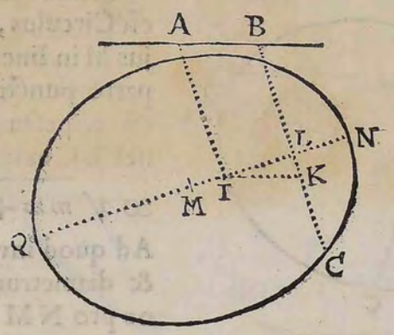
$cc \infty \frac{oozz}{4aa} + mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

2dus



2^dus^ casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m} xx}$.

Quod sic liquet:

Mult. Q L. $c + d + \frac{ax}{z}$

per L N. $c - d - \frac{ax}{z}$

$cc + cd + \frac{acx}{z}$

$- cd - dd - \frac{adx}{z}$

$- \frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

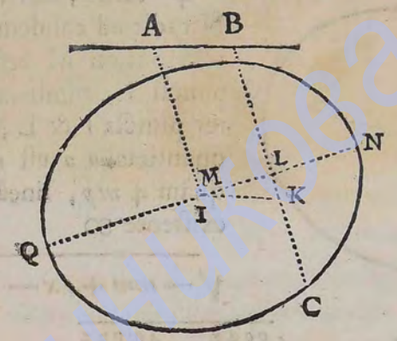
fit ▭ Q L N seu □ L C. $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$ æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, $aam \infty pzz$, $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, &

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

3^tius^



3^tius^ casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m} xx}$.

Et fit $2c \infty 2m$ vel $\frac{2pzz}{aa}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$.

Quod sic liquet

Mult. Q L. $c + \frac{ax}{z}$

per L N. $c - \frac{ax}{z}$

$cc + \frac{acx}{z}$

$- \frac{acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

& fit ▭ Q L N seu □ L C. $cc - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - \frac{p}{m} xx$.

Intellige hîc d esse ∞ o.

$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

$aam \infty pzz$

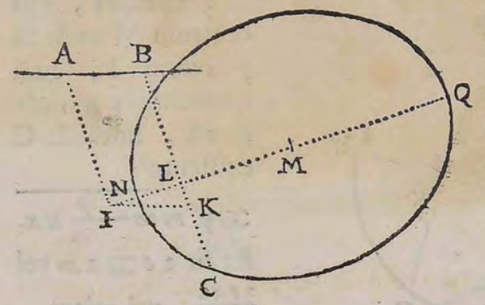
$m \infty \frac{pzz}{aa}$, & $mm \infty \frac{ppz^4}{a^4} \infty cc$

$\frac{4ppz^4}{a^4} \infty 4cc$

$2c \infty r \infty \frac{2pzz}{aa}$ vel $2m$.

Nota hîc in tribus allatis casibus, in quibus c major intelligitur quàm d, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+ mm$.

HB OWIMEHI Meyhuroa



4tus casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm quantitas oo est major quàm $4\,mp$, lineâ L C existente ∞

$$\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}.$$

Et fit $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$

Quod sic liquet

Mult. N L. $c-d+\frac{ax}{z}$

per L Q. $c+d-\frac{ax}{z}$

$$cc-cd+\frac{acx}{z}$$
$$+cd-dd+\frac{adx}{z}$$
$$-\frac{acx}{z}+\frac{adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$$

fit ▭ N L Q seu □ L C. $cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, æquale

$$-mm+ox-\frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c minorem quàm d.

$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

$aam \infty pzz$

$\frac{2ad}{z} \infty o$

$2ad \infty oz$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$.

Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc-$

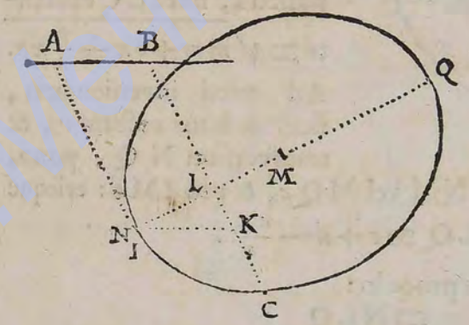
$cc-dd \infty -mm$, dele dd

$cc \infty \frac{oozz}{4aa}-mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa}-\frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$. Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Circulum, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo hoc casu majorem requiri quàm $4\,mp$.



5tus casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente ∞

$\sqrt{ox-\frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \frac{oz}{a}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

per L Q. $2c-\frac{ax}{z}$

fit ▭ N L Q seu □ L C. $\frac{2acx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, æquale $ox-\frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d esse æquales.

$\frac{2ac}{z} \infty o$

$2ac \infty oz$

$2c \infty r \infty \frac{oz}{a}$

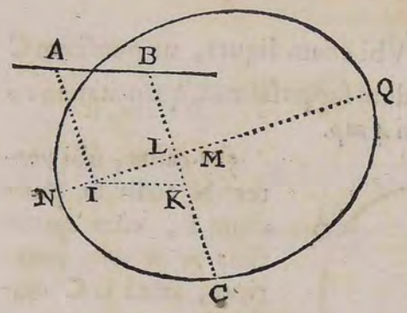
$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

$aam \infty pzz$

Hinc cùm in omnibus hisce Circuli casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo — adfecta reperiatur, ut & quantitas $aam \infty pzz$; nec præter positiones hasce ulla alia

HBOHV.IMCHI.Meuhicoa

la alia excogitari possit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo — fuerit adfectus, & quantitas $aam \infty pzz$, angulo I L C existente recto, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Circulum, quemadmodum est ostensum.



Primus casus, cùm linea est Ellipsis, & centrum ejus M in linea I L sumendum est ex eadem parte puncti L respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Ad quod inveniendum, sicut & latus rectum r, & transversum N Q, pono, ut ante in Circulo, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque $NL \infty c - d + \frac{ax}{z}$, & $LQ \infty c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

lat. transv. lat. rect. ▭ N L Q

$$2c \text{ ——— } r \text{ ——— } cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}, \text{ ad}$$

▭ L C

$$\frac{ccr - ddr + \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } mm + ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c majorem esse quàm d.

$$\frac{adr}{cz} \infty o$$

$$adr \infty coz$$

$$\frac{adr}{oz} \infty c, \& \frac{aaddrr}{oozz} \infty cc \qquad \frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$,

$$aamr \infty \frac{2adpzr}{o} \quad \text{ita } pzz \text{ ad } aam$$

$$aom \infty 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \infty d$$

ccr—

$$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty mm$$

$$ccr - ddr \infty 2cmm, \text{ dele } c \text{ \& } cc$$

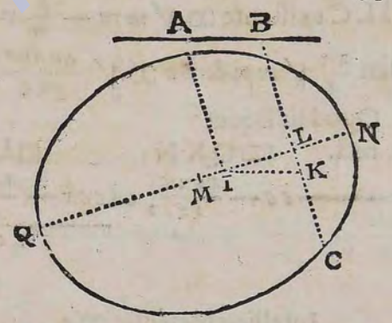
$$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty \frac{2admmr}{oz}$$

$$aadrr \infty doozz + 2ammoz$$

$$rr \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad}, \text{ dele } d, \text{ \& extr. } \sqrt{}$$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ ad } \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}.$$



2dus casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte est sumendum puncti L respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. ▭ Q L N

$$2c \text{ ——— } r \text{ ——— } cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz},$$

▭ L C

$$\text{ad } \frac{ccr - ddr - \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } mm - ox - \frac{p}{m}xx.$$

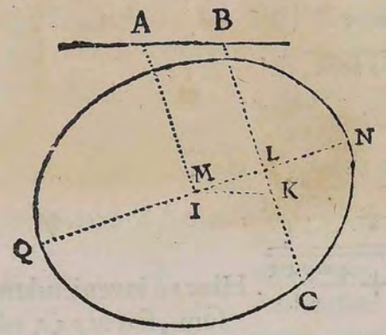
Intellige hîc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \& \ 2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

3tius

HBGHY.IMEHI.Meuhlenga



3tius casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ seu $\frac{2z}{a}\sqrt{mp}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. ▭QKN ▭LC

$2c$ —— r —— $cc - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{ccr - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - \frac{p}{m}xx$.

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$c \infty \frac{aamr}{2pzz}$

$\frac{cr}{2} \infty mm$

$cr \infty 2mm$, dele c

$\frac{aamrr}{2pzz} \infty 2mm$

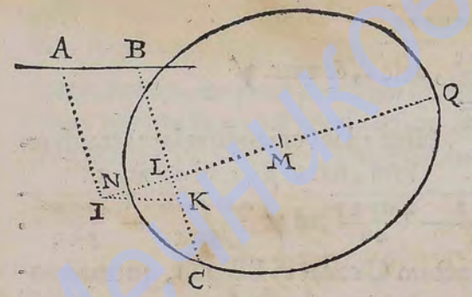
$aarr \infty 4mpzz$

$rr \infty \frac{4mpzz}{aa}$

$r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi

Ubi notandum, in allatis tribus casibus, sicut in Circulo, propter c ipsâ d majorem, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+mm$.



4tus casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm oo est major quàm $4mp$. lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm + ox - \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. ▭NLQ ▭LC

$2c$ —— r —— $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{ccr - ddr + \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm + ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c minorem quàm d.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{az} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$d \infty \frac{aom}{2pz}$

$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty - mm$

$ccr - ddr \infty - 2cmm$, dele c & cc

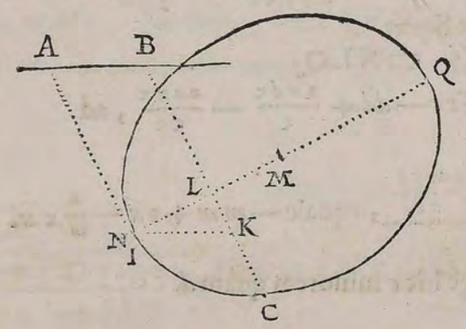
$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty - \frac{2admmr}{oz}$

$aadrr \infty doozz - 2ammoz$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Ellipsin, quemadmodum hîc supposuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$.



5tus casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente $\infty \sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et sit $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. $\square$NLQ $\square$LC

$2c$ —— r —— $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{\frac{2acrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d æquales.

$\frac{ar}{z} \infty o$

$ar \infty oz$

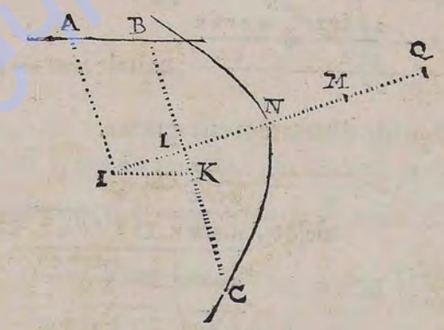
$r \infty \frac{oz}{a}$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam. Vnde ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\frac{oz}{a}$, ad $\frac{aom}{pz}$.

Quo-

Quocirca cum in omnibus hisce Ellipseos casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo — adfecta reperiatur, & ratio recti lateris ad transversum sit, ut pzz ad aam; nec præter allatas positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo — denotatus fuerit, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Ellipsin, cujus rectum latus ad transversum sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, cujusmodi jam est ostensum, existat.



Primus casus, cùm sectio est Hyperbola, in quâ linea L C est una ex iis, quæ ad diametrum, quæ est in linea I L, ordinatim adplicantur, & ubi centrum M in linea I M ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est major quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum r, & transversum N Q, pono, ut ante in Circulo & Ellipsi, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque N L $\infty d - c - \frac{ax}{z}$, & L Q $\infty d + c - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

Mult. N L. $d - c - \frac{ax}{z}$

per L Q. $d + c - \frac{ax}{z}$

$dd - cd - \frac{adx}{z}$

$+ cd - cc - \frac{acx}{z}$

$- \frac{adx}{z} + \frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ —— r —— □ N L Q. $dd - cc - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ L C. $\frac{ddr - ccr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d majorem esse quàm c.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty mm$

$ddr - ccr \infty 2cmm$, dele c & cc

$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty \frac{2admmr}{oz}$

$doozz - aadrr \infty 2ammoz$

$doozz - 2ammoz \infty aadrr$

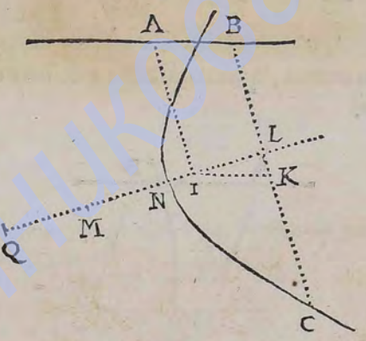
$\frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi

Vbi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo hoc casu majorem requiri quàm $4mp$.



2dus casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm oo est major quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

Mult. Q L. $c + d + \frac{ax}{z}$

per L N. $-c + d + \frac{ax}{z}$

$-cc - cd - \frac{acx}{z}$

$+ cd + dd + \frac{adx}{z}$

$+ \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ —— r —— □ Q L N. $dd - cc + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ L C. $\frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

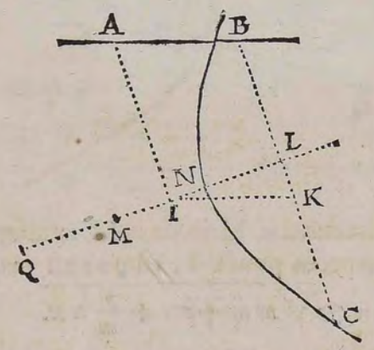
Simi-

Similiter hîc d majorem intellige quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \;\&\; 2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppoſuimus, quantitatem oo & hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.



3tius caſus, ubi vertex N ſumendus eſt inter puncta I & L, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{-mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod ſic liquet

Mult. Q L. $c + d + \frac{ax}{z}$

per L N. $-c + d + \frac{ax}{z}$

$-cc - cd - \frac{acx}{z}$

$+cd + dd + \frac{adx}{z}$

lat. tr. lat. rect. $+\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

$2c$ —— r —— □ Q L N. $dd - cc + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

ad □ L C. $\dfrac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$-mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

In-

Intellige hîc d minorem eſſe quàm c.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty -mm$

$ddr - ccr \infty -2cmm$, dele, c & cc

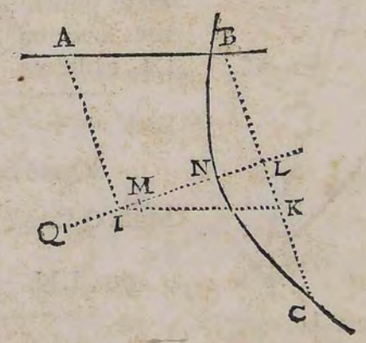
$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty -\frac{2admmr}{oz}$

$doozz + 2ammoz \infty aadrr$

dele d, & extr. $\sqrt{}$. $\frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus tranſverſum fiat ut pzz ad aam, ita

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



4tus caſus, ubi centrum M & vertex N ſumi debent inter puncta I & L, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{-mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod

Quod ſic liquet

Mult. QL. $c - d + \frac{ax}{z}$

per LN. $-c - d + \frac{ax}{z}$

$-cc + cd - \frac{acx}{z}$

$-cd + dd - \frac{adx}{z}$

lat. tr. lat. rect. $+\frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

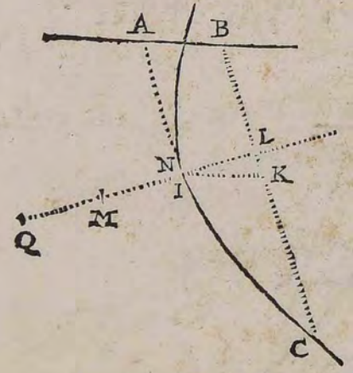
$2c$ —— r —— □ QLN. $-cc + dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ LC. $\frac{-ccr + ddr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc ſimiliter d minorem quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{a}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



5tus caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC exiſtente

$\infty \sqrt{ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

Mult. QL. $2c + \frac{ax}{z}$

per LN. $\frac{ax}{z}$

lat. tranſv. lat. rect.

$2c$ —— r —— □ QLN. $\frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

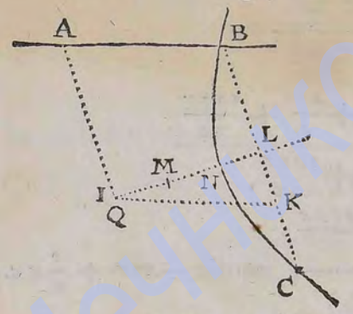
ad □ LC. $\frac{\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ox + \frac{p}{m}xx$.

Intel-

Intellige hîc c & d eſſe æquales.

Et fit, ut ante in Ellipſi, r ad $2c$, ut pzz ad aam,

$d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$



6tus caſus, ubi vertex Q cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC exiſtente

$\infty \sqrt{-ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

Mult. QL. $\frac{ax}{z}$

per LN. $-2c + \frac{ax}{z}$

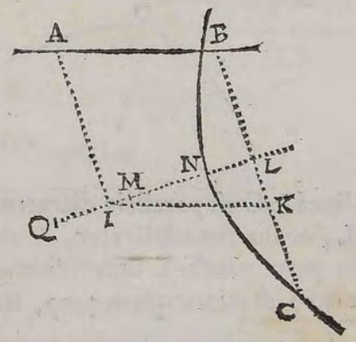
lat. tranſv. lat. rect.

$2c$ —— r —— □ QLN. $-\frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ LC. $\frac{-\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc ſimiliter c & d eſſe æquales.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$,



7mus caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla eſt, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Quod

Quod ſic liquet

Mult. Q L. $c + \frac{ax}{z}$

per L N. $-c + \frac{ax}{z}$

$-cc - \frac{acx}{z}$

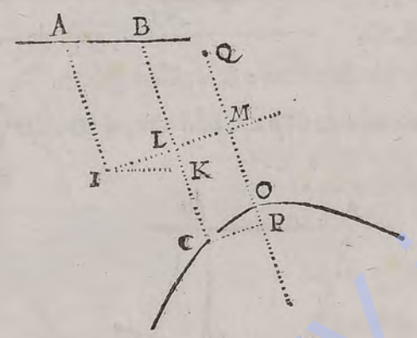
lat. tr. lat. rect. $+\frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

$2c$ —— r —— □ Q L N. $-cc + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ L C. $\frac{-ccr + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm + \frac{p}{m}xx$.

Intelligehîc d eſſe ∞ o.

Unde, ut ante in Ellipſi, invenitur, r eſſe ad $2c$, ſicut pzz ad aam, & $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, at verò $2c \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.



8vus caſus, ubi linea L C eſt parallela diametro, ad quam illa, quæ eſt in linea I L, ordinatim adplicatur, & ubi centrum M in linea I L ex eadem parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, cùm quantitas oo eſt minor quàm $4mp$, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum R pertinens ad diametrum O P, & latus tranſverſum O Q, pono, ut ante, pro I M d, & pro O M vel M Q e.

Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. L M vel C P. $d - \frac{ax}{z}$

per C P. $d - \frac{ax}{z}$

$dd - \frac{adx}{z}$

lat. rect. lat. tranſv. $-\frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

R —— $2e$ —— □ C P. $dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ Q P O. $\frac{2dde - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

$\frac{4ade}{Rz} \infty o$

$4ade \infty oRz$

$e \infty \frac{oRz}{4ad}$

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$\frac{aomRz}{2d} \infty pRzz$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{2dde + eeR}{R} \infty mm$

$2dde + eeR \infty mmR$, dele e

$\frac{dozR}{2a} + eeR \infty mmR$

$\frac{oom}{4p} + ee \infty mm$

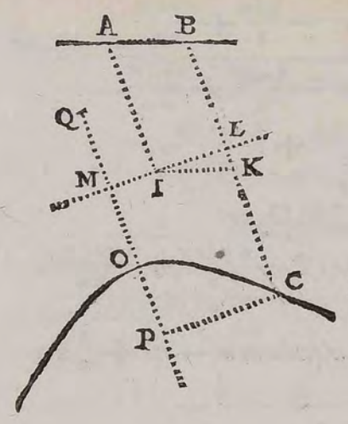
$ee \infty mm - \frac{oom}{4p}$

$e \infty \sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$, & $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$.

Hinc

Hinc ad inveniendum latus rectum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, ad $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in primo caſu.



9nus caſus, ubi centrum M in linea I L ſumendum eſt ex altera parte puncti L reſpectu puncti I, cùm oo eſt minor quàm $4mp$, lineâ L C exiſtente

$$\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod ſic liquet

Mult. M L vel P C. $d + \frac{ax}{z}$

per P C. $d + \frac{ax}{z}$

$dd + \frac{adx}{z}$

$+ \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. rect. lat. tranſv.

R —— $2e$ —— □ P C. $dd + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

□ Q P O

ad $\frac{2dde + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □ M O. ee

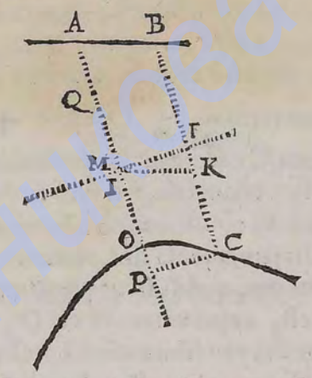
fit □ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

Et fit, ut ante, $2e$ ad R, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, & $R \infty \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo & hoc caſu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in 2do caſu.



10mus caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas oo nulla eſt, lineâ L exiſtente $\infty \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $2e \infty 2m$, & $R \infty \frac{2aamm}{pzz}$, & ratio $2e$ ad R, ut pzz ad aam.

Quod ſic liquet

Mult. M L vel P C. $\frac{ax}{z}$

per P C. $\frac{ax}{z}$

lat. rect. lat. tranſv.

R —— $2e$ —— □ P C. $\frac{aaxx}{zz}$, ad □ Q P O. $\frac{2aaexx}{Rzz}$

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $ee + \frac{2aaexx}{Rzz}$,

æquale $mm + \frac{p}{m}xx$.

$ee \infty mm$

$e \infty m$, & $2e \infty 2m$

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$2aamm \infty pRzz$

$\frac{2aam}{pzz} \infty R$

Hinc

НБОНУ Мечникова

Hinc cum in omnibus hiſce Hyperbolæ caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus quantitas in xx ducta ubique ſigno $+$ adfecta reperiatur, & in prioribus ſeptem latus rectum ad tranſverſum ſit, ut pzz ad aam, at in tribus poſterioribus ut aam ad pzz; nec præter has poſitiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus caſibus data fuit, obtineatur: ſequitur, ſi in quæſtione terminus $\frac{p}{m}\,xx$ ſigno $+$ denotatus fuerit, punctum quæſitum C cadere in Hyperbolam, cujus rectum latus ad tranſverſum ſive etiam tranſverſum ad rectum, pro diverſa terminorum ipſius L C conſtitutione, ſit ut pzz ad aam, ac ejuſdem poſitio, qualis jam oſtenſa fuit, exiſtat.

Ubi denique notandum, quòd, ſicut punctum C in Hyperbolam cadere oſtenſum eſt, cujus vertex N vel O, id ipſum ſimiliter in Hyperbola oppoſita pro libitu aſſumi poſſit, cujus vertex eſt Q, non autem indifferenter in 4^{or} ejuſmodi ſectionibus, quæ Conjugatæ vocantur, ſimul.

CCC *Quâ quidem ratione inde facile eſt invenire hanc Parabolam per Problema* I. *primi libri Conicorum Apollonii.*] Quò illis, quibus hi Apollonii libri, aut etiam aliorum, qui de Conicis ſcripſerunt, non ſunt ad manus, hac in parte ſatisfiat: lubet hoc loco adducere ea, quæ mihi olim circa hæc, dum me inter peregrinandum in hac Geometriæ methodo exercebam, excideranr, ſimili occaſione ipſe inveſtiganda propoſui ac inveni. Quod etiam iis in hac Methodo ſe oblectare cupientibus, ut proprio marte propoſitiones invenire addiſcant, inſervire poteſt, prout iis, hiſce tanquam exemplis, quibus ad alias quærendas & inveſtigandas inſtigentur, præivero; ne ad univerſalem Matheſeos complexionem plura librorum volumina evolvere & propoſitiones in iis ſingulas excutere (quod pleriſque ſummus eſt ſcopus) opus habeant; quin potiùs quo pacto illæ inventæ fuerint perpendant, novaſque alias innumeras, quibus ſcientia hæc non parvum incrementum capere valeat, invenire moliantur.

Verùm enimvero ut non ſolùm pateat, quâ ratione illa, quæ hoc loco Autor ab Apollonio oſtenſa citavit, juxta Geometriæ ſuæ methodum inveniri poſſint; ſed etiam illa, quæ ex ipſo p. 29, 31, & 32 allegavit (quæ omnia, quod ſciam, ea ſunt, quæ ab eo ad Geometriam ſuam ex Apollonio præſupponuntur): non abs re

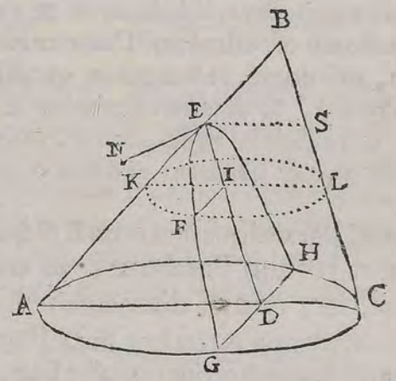
re fuerit illa præſenti commentario ſimul comprehendere atque ad Autoris mentem ſic explicata exhibere.

DE LOCIS SOLIDIS SIVE CONICARVM SECTIONVM PROPRIETATIBVS.

Suppoſitiones.

1. RectamLineam B A vel B C, quæ à vertice coni B ducitur ad baſis A C circumferentiam, eſſe in ſuperficie conica.

2 Sectionem K F L, baſi coni A C parallelam, eſſe circulum.



De *PARABOLA*, quæ eſt ſectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E D, communis ſectio trianguli per axem A B C & plani ſecantis G F E H, quæ & ſectionis diameter dici conſuevit, parallela eſt uni laterum A B, B C ejuſdem trianguli, ut hîc ipſi B C; lineâ G H, quæ Baſis Sectionis G F E H vocatur, ipſam A C, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

Eſto

Esto A B ∞ a
B C ∞ b Fiat propter similitudinem △rum A B C & K E I
A C ∞ c
E B ∞ d ut B C ad C A, ita E I ad I K
E I ∞ x b —— c —— x / $\frac{cx}{b}$
F I ∞ y Rursus fiat propter similitudinem △rum A B C & E B S ut A B ad A C, ita E B ad E S seu I L
a —— c —— d / $\frac{cd}{a}$ } Mult.

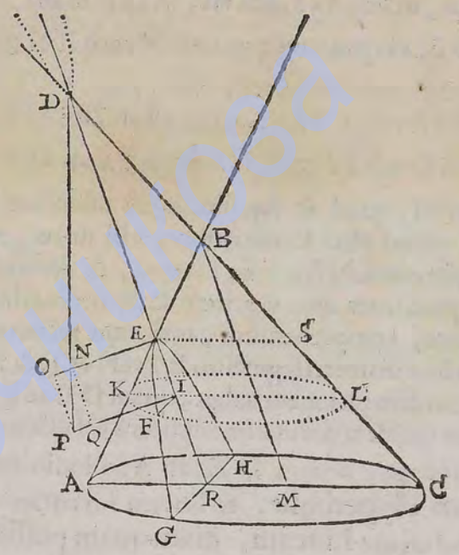
—— □F I

fit □K I L. $\frac{ccd}{ab}x \infty yy$.

Hinc si fiat, ut ab ad cc, hoc est, ut □ A B C ad □ A C, ita d, hoc est, E B, ad quartam, quæ sit E N: erit E N ∞ $\frac{ccd}{ab}$. Quæ si brevitatis causâ nominetur r, habebitur $rx \infty yy$. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate 11mo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodlibet, sub rectâ E N seu r sic inventâ, & diametri segmento E I, quod inter verticem ejus E & ordinatim adplicatam F I intercipitur, comprehensum, esse æquale quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ F I.

Ubi notandum, lineam hanc inventam E N seu r, ab Apollonio vocari Latus rectum Parabolæ, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum E D ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea Parameter appellatur. Quam porrò lineam breviùs obtinere licet, quàm hîc cum Apollonio ostendimus. Etenim lineâ E S existente ∞ $\frac{cd}{a}$, cum B C sit ad C A, hoc est, b ad c, sicut E S, hoc est, $\frac{cd}{a}$ ad E N ∞ $\frac{ccd}{ab}$: inveniri poterit E N, quærendo tantùm ipsis B C, C A, & E S quartam proportionalem. Quemadmodum ex ostensis est manifestum.

De



De *HYPERBOLA*, quæ est sectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E R, communis sectio trianguli per axem A B C & plani secantis G F E H, quæ & Sectionis diameter dicitur, extra ejus verticem E producta convenit cum uno laterum A B, B C ejusdem trianguli extra verticem coni B producto, ut hîc in D; lineâ G H, quæ basis sectionis G F E H vocatur, ipsam A C, basin trianguli per axem, ad rectos angulos secante.

Sit A M ∞ a
M B ∞ b Fiat propter similitudinem △rum C B M & L D I
M C ∞ c
D E ∞ q ut B M ad M C, ita D I ad I L
E I ∞ x, eritque D I ∞ $q+x$ b —— c —— $q+x$ / $\frac{cq+cx}{b}$
F I ∞ y.
Rursus fiat propter similitudinem △rum M B A & I E K ut B M ad M A, ita E I ad I K
b —— a —— x / $\frac{ax}{b}$ } Mult.

—— □F I

fit □L I K. $\frac{acqx+acxx}{bb}$ ∞ yy.

Hinc si fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □ BM ad ▭ AMC, ita q, hoc est, DE, ad quartam, quæ sit EN: erit EN ∞ $\frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

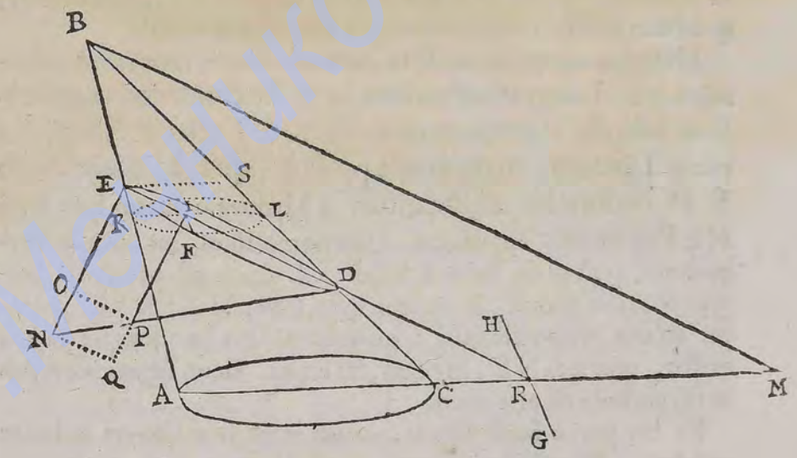
Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut DE ad EN, ita x, hoc est, EI seu NQ ad QP ∞ $\frac{acx}{bb}$. Eritque rx + QP in x ∞ yy. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate duodecimo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ EN seu r sic inventâ, & diametri segmento EI seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam FI interjicitur, comprehensum, unà cum rectangulo NQP, quod sub eodem diametri segmento EI vel NQ, & lineâ QP, ad quam NQ eandem rationem habet, quam DE ad EN, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI esse æquale.

Ubi notandum, lineam DE ab Apollonio vocari Latus transversum Hyperbolæ, & lineam inventam EN Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ER ordinatim adplicantur. à Mydorgio verò hæc ipsa Parameter appellatur. Quæ porrò linea faciliùs obtineri potest, hoc modo; Ductâ scilicet ES ipsi AC parallelâ, ac deinde ipsis BM, MA, & SE quærendo quartam proportionalem EN. Etenim cum BM sit ad MC, hoc est, b ad c, sicut DE, hoc est, q, ad ES: erit ES ∞ $\frac{cq}{b}$. Unde cum præterea BM ad MA sit, hoc est, b ad a, sicut ES, hoc est, $\frac{cq}{b}$, ad quartam $\frac{acq}{bb}$, quæ hîc eadem est, quæ linea EN superiori modo inventa: manifestum est id, quod proponitur.

De *ELLIPSI*, quæ est sectio Coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis sectio trianguli per axem ABC & plani secantis GFEH convenit cum utroque latere AB, BC ejusdem trianguli in E & D; lineâ GH, quæ basis sectionis GFEH vocatur, ipsam AC, basin trianguli per axem, eandemve productam, ad rectos angulos secante.

Esto

Esto AM ∞ a
MB ∞ b
MC ∞ c
ED ∞ q
EI ∞ x, eritque ID ∞ $q - x$
FI ∞ y.



Fiat propter similitudinem △rum BCM & DLI
ut BM ad MC, ita DI ad IL
b —— c —— $q - x$ / $\frac{cq - cx}{b}$
Rursus fiat propter similitudinem △rum ABM & KEI
ut BM ad MA, ita EI ad IK
b —— a —— x / $\frac{ax}{b}$ } Mult.
——— □FI
fit ▭KIL. $\frac{acqx - acxx}{bb}$ ∞ yy

Hinc si ut in Hyperbola fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □BM ad ▭AMC, ita q, hoc est, DE, ad quartam, quæ sit EN: erit EN ∞ $\frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut DE ad EN, ita x, hoc est, IE seu PO, ad ON ∞ $\frac{acx}{bb}$. Eritque rx -- NO in x ∞ yy.

 Quod

Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate decimotertio primi libri Conicorum, Ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ N E seu r sic inventâ, & diametri segmento E I seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam F I interjicitur, comprehensum, minus rectangulo N O P, quod sub eodem diametri segmento E I vel O P, & lineâ N O, ad quam O P eandem rationem habet, quam D E ad E N, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ F I esse æquale.

Ubi notandum lineam E D, sectionis diametrum, ab Apollonio vocari **Latus transversum** ut & **Diametrum transversam Ellipsis**, & lineam inventam N E **Latus rectum**, vel etiam **Lineam**, juxta quam possunt, quæ ad diametrum E D ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea N E **Parameter** appellatur. Quæ porrò linea, ut ante in Hyperbola, postquam linea E S ipsi A C ducta est parallela, breviùs obtineri potest, si tantùm ipsis B M, M A, & S E quæratur quarta proportionalis: quandoquidem hæc semper eadem existit, quæ ipsa N E, inventa, ut supra. Sicut superiùs à nobis in Hyperbola est ostensum.

Ex his porrò facilè liquet, quam inter se rationem habeant quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum in unaquaque harum trium sectionum. Etenim si in Parabolâ linea E D vocetur z, & ordinatim adplicata G D vocetur v, erit, ut supra, $\frac{ccdz}{ab} \infty vv$: ac proinde yy ad vv, hoc est, □ F I ad □ G D, ut $\frac{ccdx}{ab}$ ad $\frac{ccdz}{ab}$, seu x ad z, hoc est, E I ad E D. Hoc est, in Parabola quadrata ordinatim adplicatarum F I, G D inter se sunt, sicut lineæ E I, E D, quæ ab ipsis ex diametro E D ad verticem E abscinduntur. Quod ipsum est, quod docet Apollonius Prop^ne 20ma libri 1^mi Conicorum.

Vide figuram 1.

Eodem modo in Hyperbola & Ellipsi acceptâ pro E I aliâ magnitudine quàm ante, ut puta z, erit in Hyperbola $vv \infty \frac{acqz + aczz}{bb}$, & in Ellipsi $vv \infty \frac{acqz - aczz}{bb}$. Unde yy ad vv in Hyperbola fit, ut $\frac{acqx + acxx}{bb}$ ad $\frac{acqz + aczz}{bb}$, hoc est, ut $qx + xx$ ad $qz + zz$; at in Ellipsi, ut $\frac{acqx - acxx}{bb}$ ad $\frac{acqz -}{}$

Vide fig. 2. & 3.

$\frac{acqz - aczz}{bb}$, hoc est, ut $qx - xx$ ad $qz - zz$. Hoc est, in Hyperbola & Ellipsi quadrata ordinatim adplicatarum inter se sunt, ut rectangula contenta lineis, quæ inter ipsas & vertices transversi lateris interjiciuntur. Denique, quia in Hyperbola □ F I $\infty \frac{acqx + acxx}{bb}$ est ad ▭ E I D $\infty qx + xx$, ut ac ad bb; similiterque in Ellipsi □ F I $\infty \frac{acqx - acxx}{bb}$ ad ▭ E I D $\infty qx - xx$, ut ac ad bb, hoc est, ut N E ad E D: patet in utrâque figurâ quadrata ordinatim adplicatarum F I esse ad rectangula E I D, quæ sub rectis E I, I D, inter F I & vertices transversi lateris E, D interceptis, comprehenduntur, ut figuræ rectum latus N E ad transversum E D. Omnino ut habet Prop^tio 21ma libri 1^mi Conicorum Apollonii. Eadem est ratio in Circulo, qui non nisi certa Ellipsis species censenda est, quippe in qua rectum latus & transversum sunt æqualia.

Ostensis igitur quo pacto Cono dato, eoque secto, ita ut sectio Parabola, Hyperbola, vel Ellipsis existat, sectionis sive figuræ hujus latera inveniri queant: restat ut è contra ostendamus, quâ viâ Conus inveniri possit, & in eo unaquæque trium harum figurarum exhiberi, cujus latera sint datis rectis lineis æqualia.

Ut ad inveniendum Conum A B C, in eoque sectionem GFEH, quæ Parabola appellatur, cujus latus rectum sit $\infty \frac{oz}{a}$, facio $\frac{ccd}{ab} \infty \frac{oz}{a}$ seu $\frac{boz}{ab}$, & fit rejecto ab, communi denominatore, $ccd \infty boz$. Hoc est, diviso utrobique per cc, erit $d \infty \frac{boz}{cc}$. Hinc assumpto triangulo quolibet A B C, cujus latera sint, A B ∞a, B C ∞b, & A C ∞c, si in ipso sumatur E B $\infty \frac{boz}{cc}$, atque ex E ducatur E D ipsi B C parallela: erit A C diameter circuli sive basis Coni, & A B C triangulum per axem. Ac proinde si per D in plano basis hujus Coni ipsi A C ad rectos angulos ducatur G H, atque per rectas G H, D E sectio instituatur, faciens in superficie Conica curvam lineam G F E H: erit hæc ipsa Parabola, cujus latus rectum N E sit datæ $\frac{oz}{a}$ æqualis, quemadmodum requirebatur. Quòd si verò ipsa talis præterea exhiberi debeat, ut rectæ F I, quæ semper ipsi G H parallelæ intelligun-

Vide fig. 1.

guntur, in dato angulo ad diametrum E D adplicentur, opùs tantùm erit angulum G D E ſive E D H dato æqualem efficere, intelligendo ad id circulum A G C H moveri circa A C, tanquam axem, eritque Problemati ex omni parte ſatisfactum.

Vide 2. & 3. fig. Similiter ad inveniendum Conum A B C, & in eo ſectionem G F E H, quæ ſit vel Hyperbola vel Ellipſis, cujus latus rectum ſit $\infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & tranſverſum $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$: facio $\frac{acq}{bb} \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $q \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Hoc eſt, aſſumptis horum quadratis, erit $\frac{aaccqq}{b^4} \infty \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$, & $qq \infty \frac{aaoomm + 4aam^3p}{ppzz}$. Adeoque ſi in termino $\frac{aaccqq}{b^4}$ pro qq hic numerus ſubſtituatur, habebitur $\frac{a^4ccoomm + 4a^4ccm^3p}{b^4ppzz} \infty \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. Hoc eſt, multiplicato per crucem, erit $a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p \infty b^4oopp z^4 + 4b^4mp^3z^4$: & fit, ſi utrinque per $oopp z^4 + 4mp^3z^4$ dividatur, $\frac{a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p}{oopp z^4 + 4mp^3z^4}$ ſeu $\frac{a^6ccmm}{ppz^4} \infty b^4$. Unde, extrahendo utrobique radicem biquadratam, invenitur $\sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}} \infty b$. Hinc aſſumptis ad libitum duabus lineis A M & M C, iiſque in directum ſeu in unam lineam poſitis, quarum major A M ſit ∞a, & minor M C ∞c, duco ex M in angulo quocunque rectam M B $\infty \sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}}$, jungoque B A & B C; ita ut habeatur triangulum per axem A B C, cujus baſis A C diametrum circuli referat, qui Coni baſis exiſtit, & punctum B verticem ipſius Coni. Deinde productâ B C, ad Hyperbolam obtinendam, inter angulum A B D pro utrâque figurâ aptanda erit recta E D $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; ita ut ipſa parallela ſit lineæ B M, (quod facile eſt,) continuataque occurrat rectæ A M in R. Quibus ſic poſitis, ſi per R in plano baſis hujus Coni ipſi A M ad rectos angulos ducatur G H, atque per rectas G H, R E ſectio inſtituatur, faciens in ſuperficie conica curvam lineam F E: erit hæc ipſa Hyperbola vel Ellipſis quæſita, hoc eſt, cujus rectum latus eſt $\infty \sqrt{\frac{oozz}{a} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & tranſverſum

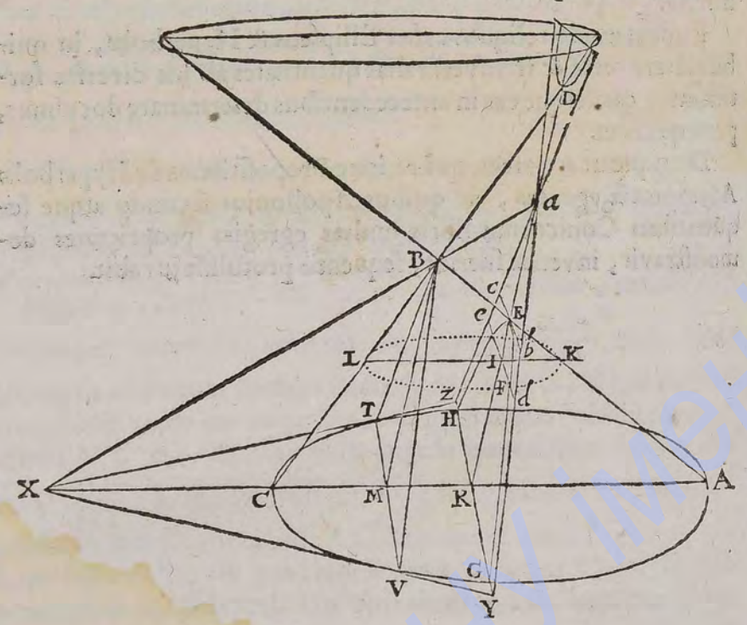
ſum $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Quòd ſi verò inſuper tales exhibendæ ſint, ut rectæ F I, quæ ſemper ipſi G H parallelæ intelliguntur, in dato angulo ad diametrum E R adplicentur, oportet tantùm (ut ante in Parabola) angulum G R E ſive E R H dato æqualem efficere, intelligendo ad id planum baſis hujus Coni eſſe mobile circa A M, tanquam axem: eruntque ſic conditiones quæſtionis omnes adimpletæ, ita ut his primo, ſecundo, & tertio Problematis primi libri Conicorum Apollonii ſatisfactum putem. Quorum quidem omnium veritas ex præcedentibus fit manifeſta.

Eodem modo reliquos caſus Ellipſeos & Hyperbolæ, in quibus latera recta & tranſverſa alias quantitates ab his diverſas ſortiuntur, qualeſque eas in antecedentibus determinare docuimus, perſequi licet.

Denique ut appareat, quâ ratione Propoſitiones de Hyperbolæ Aſymptotis agentes, de quibus Apollonius ſecundo atque ſequentibus Conicorum libris multas egregias proprietates demonſtravit, inventæ fuerint, ſequentia protuliſſe juvabit.

Sit

Sit A M ∞ a
M B ∞ b
M C ∞ c
D E ∞ q
E I ∞ x
F I ∞ y
E R ∞ z, eritque D R ∞ $q+z$.
G R ∞ v
a E ∞ s
X M ∞ t, eritque X C ∞ $t-c$.



Mult. X A. $t+a$
per X C. $t-c$

$-tc-ac$

Ad □ X M. tt

add. ▭ C M A seu □ M V. ac $\quad tt+ta$

▭ C X A.

per 47. 1mi Elem. □ X V. $tt+ac$ ∞ $tt+ta-tc-ac$. per 36. 3tii Elem.

$2ac$ ∞ $ta-tc$

X M. $\frac{2ac}{a-c}$ ∞ t

Fiat

Fiat propter similitudinem △rum B M A & E R A
ut B M ad M A, ita E R ad R A

b —— a —— z / $\frac{az}{b}$

Rursus fiat propter similitudinem △rum
B M C & D R C
ut B M ad M C, ita D R ad R C

b —— c —— $q+z$ / $\frac{cq+cz}{b}$ } add.

C A. $\frac{az+cz+cq}{b}$ ∞ $a+c$

$az+cz+cq$ ∞ $ab+cb$

$az+cz$ ∞ $ab+cb-cq$

z ∞ $\frac{ab+cb-cq}{a+c}$.

Ad R C. $\frac{cq+cz}{b}$

adde X C. $t-c$

Fiat propter similitudinem
△rum X M B & X R a.

X M M B —— R a

t —— b —— X R. $\frac{cq+cz+bt-bc}{b}$ / ad $s+z$

Eritque, per 16. 6ti Elem. $ts+tz$ ∞ $cq+cz+bt-bc$

$ts+tz-bt$ ∞ $cq+cz-bc$

t ∞ $\frac{cq+cz-bc}{s+z-b}$ ∞ $\frac{2ac}{a-c}$

$aq+az-ab-cq-cz+cb$ ∞ $2as+2az-2ab$

$ab+cb+aq-cq-2as$ ∞ $az+cz$

$\frac{ab+cb-cq}{a+c}$ ∞ $\frac{ab+cb+aq-cq-2as}{a+c}$ ∞ z

$ab+cb-cq$ ∞ $ab+cb+aq-cq-2as$

$2as$ ∞ aq.

fit a E ∞ s ∞ $\frac{1}{2}q$. Id quod ostendit, rectas, quæ oppositarum sectionum Asymptoti dicuntur, in medio transversi lateris D E se invicem decussare. Ubi etiam patet, angulos, quos comprehendunt, angulo verticis trianguli T B V, cui planum harum sectionum æquidistat, esse æquales.

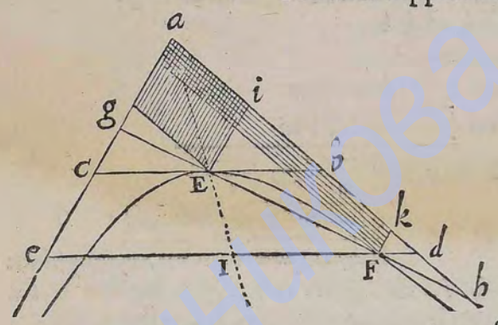
Fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ BMV & aRY

$\square aE$		$\square Eb$
$\frac{1}{4}qq$		$\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.
$\square aI$		$\square Id$
$\frac{1}{4}qq+qx+xx$		$\frac{\frac{1}{4}acqq+acqx+acxx}{bb}$. A quo ſubducto $\square^{to}$ I F ante invento, ∞ $\frac{acqx+acxx}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem., $\square$ eFd ∞ $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$.
$\square$BM $\square$MV, bb —— ac	ad	
$\square aR$		$\square$RY
$\frac{1}{4}qq+qz+zz$		$\frac{\frac{1}{4}acqq+acqz+aczz}{bb}$. A quo ſubducto $\square^{to}$ R G, ante invento, ∞ $\frac{acqz+aczz}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem, $\square$ ZGY ∞ $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$.

Jam cùm $\square$E b, $\square$ eFd, & $\square$ ZGY ſingula ſint inventa ∞ $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$, conſtat ipſa inter ſe eſſe æqualia. Eadem eſt ratio de quibuſcunque aliis hujuſmodi rectangulis, in infinitum aſſumptis. Quod ipſum eſt, quod docet Prop^{tio} 10. 2^{di} libri Conicorum Apollonii.

Porrò, quoniam $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$ eſt $\frac{1}{4}$^{ta} pars rectanguli ſub latere tranſverſo DE ∞ q & latere recto NE, ante invento, ∞ $\frac{acq}{bb}$, manifeſta hinc etiam eſt Prop^{tio} 1ma ejuſdem libri.

Præ-



Præterea ſupponatur cE vel Eb ∞ e
eF ∞ f, eritque
Fd ∞ $\frac{ee}{f}$
gE ∞ g
EF ∞ h
Fh ∞ i, eritque
Eh ∞ $h+i$
Ei ∞ k
a i ∞ l
Fk ∞ m
& a k ∞ n, eritque
ik ∞ $n-l$.

Tum fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{lorum}$ cgE & egF
ut gE ad Ec, ita gF ad Fe
g —— e —— $g+h$ / f
Eritque per 15. 6^{ti} Elem. $\frac{gf \infty eg+eh}{gf-ge \infty eh}$

Rurſus fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{lorum}$ Fdh & Ebh.
ut Fh ad Fd, ita Eh ad Eb
i —— $\frac{ee}{f}$ —— $h+i$ / e
Eritque per 16. 6^{ti} Elem. $i \infty \frac{eh+ei}{f}$
$fi \infty eh+ei$
Et fit $gf-ge \infty fi-ei \infty eh$

Id eſt, dividendo utrinque per $f-e$, erit $g \infty i$. Hoc eſt, gE eſt æqualis Fh. Eadem eſt ratio de recta EF, quomodocunque per duo quælibet alia puncta in Hyperbolâ ducta, & utrinque Aſymptotis terminata. Id quod cum octava convenit Propoſitione ſecundi libri Conicorum Apollonii.

Ad hæc fiat propter parallelas Ei & Fk
ut gE ad EF, ita ai ad ik
g —— h —— l / $n-l$
Eritque per 16. 6^{ti} Elem. $gn-gl \infty hl$

Hoc eſt, in locum g ſubſtituto i, habebitur $in-il \infty hl$, & fit $h \infty \frac{in-il}{l}$.

Deni-

НБ ОНУ імені І. Мечникова

Denique fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{lorum}}$ E ih & F kh
ut E i ad E h, ita F k ad F h

$$k \text{——} h + i \text{——} m \,/\, i$$

Eritque per 16. 6ti Elem. $\overline{ki \infty hm + im}$

vel $\overline{ki - mi \infty hm}$

& fit $h \infty \frac{ki - mi}{m} \infty \frac{in - il}{l}$

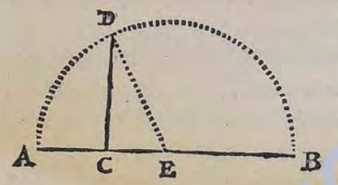
$\overline{kl - ml \infty mn - ml}$

& $kl \infty mn$. Hoc eſt, rectangulum ſub E i & ia eſt æquale rectangulo ſub F k & ka. Id quod eodem modo de omnibus aliis rectangulis, ſub ſimilibus lineis comprehenſis, manifeſtum eſt; prout nimirum ad hoc præter puncta E & F alia quævis in Hyperbola aſſumpta fuerint. Quibus haud diſſimilia ſunt ea, quæ Apollonius demonſtravit Propne 12ma libri 2di Conicorum.

Unde demum facile eſt inferre, cum puncta hæc ulteriùs atque ulteriùs ſemper in Hyperbola aſſumi poſſint, ac inde uno latere horum rectangulorum continuè accreſcente latus alterum ipſorum perpetuò decreſcat; quòd idcirco Aſymptoti ab, ac, & Hyperbola E F in infinitum productæ ad ſe ipſas propiùs accedant, & ad intervallum perveniant, minus quolibet dato intervallo. Quibus & illa quadrant, quæ ab Apollonio Propbus 1ma & 14ta ejuſdem libri ſunt oſtenſa.

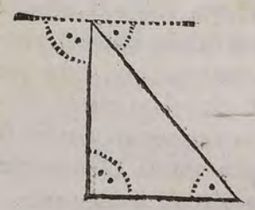
Cæterùm quoniam Dnus des Cartes univerſim iis tantùm propoſitionibus uſus fuiſſe videtur, quæ non niſi proprietates declarant, quæ cum ſubjecto ſuo omnimodè reciprocantur, & à Logicis proprietates 4ti modi appellari ſolent: viſum fuit hoc loco deinceps modum, quo cognoſci poſſunt, qualem eum eruditiſſimus atque ingenioſiſſimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Amſtelodamenſis, Gerh. fil. excogitavit, per unum aut alterum exemplum exponere.

Ut



Ut ad inquirendum, utrum proprietas circuli, quæ declarat, quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum eſſe æqualia rectangulis ſub ſegmentis diametri, cum circulo ſit reciproca nec ne: ſupponatur recta A B, & in eam perpendicularis C D, hanc habens proprietatem, ut quadratum ſuper ipsâ ſit æquale rectangulo ſub ſegmentis A C, C B. Quæritur qualis ſit linea A D B.

Ad quod inveſtigandum, ſectâ A B bifariam in E, ponatur A E vel E B ∞a, C E ∞x, & C D ∞y: eritque A C $\infty a - x$, & C B $\infty a + x$. Jam cum A C multiplicatâ per C B proveniat $aa - xx$, pro rectangulo A C B; hocque ex data proprietate æquetur quadrato ex C D: erit $aa - xx \infty yy$. Deinde, quoniam, lineâ C D perpendiculari exiſtente ſuper A B, quadratum ex E D, per 47 Primi Elementorum Euclidis, eſt æquale duobus quadratis ex E C & C D: erit quadratum ex E D $\infty xx + yy$. Ac proinde ſi in hac ſumma pro yy ſubrogetur $aa - xx$, habebitur quadratum ex E D ∞aa, hoc eſt, E D ∞a. Id quod oſtendit, rectis A E, E D, & E B ſingulis ipſi a æqualibus exiſtentibus, lineam A D B eſſe circulum, cujus centrum E, ac idcirco proprietatem allegatam cum circulo eſſe reciprocam. Quod ipſum & hoc modo cognoſci poteſt. Advertendo ſcilicet, utrum proprietas propoſita ſine neceſſariâ ſubjecti incluſione demonſtrari poſſit nec ne. Si enim ea abſque neceſſaria ſubjecti incluſione demonſtrari nequeat, proprietas erit reciproca; ſin ſecus, proprietas communis.



Ut ad intelligendum, num proprietas hæc cum triangulo rectangulo ſit reciproca, nimirum: tres angulos ſimul ſumptos æquales eſſe duobus rectis: advertendum tantummodo eſt, utrum demonſtratio illius triangulum rectangulum præſupponat nec ne; ac proinde cum ipſa abſque ulla diſcretione in quolibet triangulo locum obtineat, concludendum

eſt eandem non niſi pro communi trianguli rectanguli proprietate eſſe habendam.

Ita etiam conſiderando demonſtrationem ſupradictæ proprietatis circuli, quoniam ipſa radiorum æqualitatem, in quâ circuli natura conſiſtit, omnino expoſcit, convincitur eandem proprietatem ſoli circulo competere ac cum eodem reciprocari.

Similiter, ſi quis naturam demonſtrationis perpendat, quâ oſtenditur, quadrata ordinatim adplicatarum inter ſe eſſe, ſicut rectangula ſub ſegmentis diametri: comperietur, eandem demonſtrationem radiorum æqualitatem non includere, adeoque proprietatem hanc non niſi communem proprietatem circuli exiſtere: quandoquidem & Ellipſi, cujus Circulus non niſi ſpeciem refert, omnino convenit.

Sed & uſum horum perpendere, cum in univerſa Matheſi haud exigui ſit momenti, non inutile fuerit ſequentia, quibus eundem quadantenus indicaſſe exiſtimamus, in medium afferre.

Primò itaque, poſtquam in quærenda æquatione proprietas reciproca adhibita fuit, certi ſumus totam ſubjecti naturam hâc ratione in ea eſſe incluſam; adeoque, ad aliam adhuc æquationem à præcedenti diverſam obtinendam, non licere ut ad id alia ejuſdem ſubjecti proprietas adhibeatur, niſi accedat aliquid, quod in præcedenti æquatione nondum ſit involutum: quandoquidem ſic circulum committi manifeſtum eſt.

2do, Theoremata omnia, quæ neceſſitatem ſubjecti inferunt ex proprietate jam oſtensâ, (ut, verbi gratiâ, Prop. 48. primi libri Elementorum) quæque ut plurimùm indirectè per deductionem ad abſurdum demonſtrari ſolent, poſſunt directè demonſtrari, dummodo oſtendatur, proprietatem illam cum ſubjecto ſuo eſſe reciprocam.

3tio, Si quis ad ſolvenda Problemata naturam ſubjecti retinere velit, commodiſſimè id præſtare poterit, retinendo tantùm proprietatem aliquam, cum eodem ſubjecto reciprocam, quæ aut omnium facillimè memoriæ mandari queat aut etiam ſimpliciſſima exiſtat: cum minimè neceſſum ſit, ut is retinendis omnibus illius Theorematis aggravetur, quippe quæ omnia Geometriæ hujus Methodo certâ arte ex hujuſmodi proprietate deducuntur.

4to, Hinc etiam perſpicuum eſt, quàm parùm neceſſe ſit, libros, qui Theorematibus referti ſint, conſcribere, quæ aut uſum nullum

lum habent, aut difficulter retineri poſſunt, aut etiam beneficio alicujus facilioris ſive ſimplicioris proprietatis reciprocæ è natura ſubjecti ſui nullo negotio eruuntur.

Nimirum ſi latus hoc ce rectum ſtatuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, D *transverſum erit* $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$.] Qui termini hoc etiam pacto ſcribi poſſunt $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quemadmodum poſtea in demonſtratione pag. 33 à Domino des Cartes ſunt aſſumpti. Similiter, ſi habeatur, ut paulò ſuperiùs, $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$: poterit ejus loco ſcribi $\frac{z}{a}\sqrt{oo-4mp}$. Eodem modo cùm habetur $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$ (ut paulò poſt pagin. 31): poſſumus ejus loco ſcribere $\frac{aam}{pzz}\sqrt{4mm-\frac{4oom}{p}}$, tollendo ſcilicet ex ſigno radicali quicquid eſt rationale. Haud ſecus fit, cùm pro $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ ſcribitur $\frac{a}{b}\sqrt{3}$. Quæ ſcribendi ratio non ineptè quoque ad radicum commenſurabilium ſpecies ſive operationes adhiberi poteſt. Ut, ad addendum $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{75}$: quoniam $3\sqrt{3}$ idem eſt quod $\sqrt{27}$, & $5\sqrt{3}$ idem quod $\sqrt{75}$, hinc ſumma earum erit $8\sqrt{3}$, & differentia $2\sqrt{3}$, productum verò multiplicationis 15, 3 ſeu 45; & quotiens ex diviſione majoris per minorem $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic ad multiplicandum $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ per $3\sqrt{3}$, divido $27\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, ſeu, quod idem eſt, 27 per 3, & fit productum $\frac{8}{9}$. Similiter ad dividendum fractiones $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$ per $\sqrt{3}$, multiplico earum denominatores per $\sqrt{3}$, & fiunt quotientes $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, & $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ ſeu $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, perinde enim eſt ſive hoc ſive illo modo ſcribantur. Idem de ſequentibus formulis, quas hîc ſubjungere viſum fuit, intellige. Ut ſi habeatur $\sqrt{ac}$, ejus loco ſcribere poſſumus $a\sqrt{\frac{c}{a}}$, vel $c\sqrt{\frac{a}{c}}$. Et ſi habeatur $\frac{ab}{\sqrt{ac}}$ ſcribi ejus loco poteſt $b\sqrt{\frac{a}{c}}$; adeò ut, ſi habeatur $\frac{acc+a^3}{2\sqrt{aa+cc}}$, ejus loco ſubſtitui poſſit $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Ita pro $b\sqrt{\frac{ac}{bb}}$ ponere licet $\sqrt{ac}$, nec non.

Vide pag. 75. lin. penult. & ult.

Vide pag. 76. lin. 7.

Vide pag. 82. lin. 18.

non pro $2b\sqrt{\frac{cbb}{a}}$ reponere $\frac{2bb}{a}\sqrt{ac}$. Similiter pro $d+\frac{bb-bd}{b+d}$ ſcribi poteſt $\frac{dd+bb}{b+d}$. Sic etiam loco $d+\frac{bb}{b+d}$ ſcribi poteſt $b+\frac{dd}{b+d}$: cum ſub eodem denominatore reducti faciant $\frac{bb+bd+dd}{b+d}$. Et denique pro $\frac{c}{\sqrt{c}}-\frac{a}{\sqrt{a}}$ ſcribere poſſumus $\frac{c-a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ vel $\sqrt{c}-\sqrt{a}$. Et ſic de aliis, ut paſſim in hiſce commentariis eſt videre.

E *Sed ſi ſectione Hyperbolâ exiſtente &c.*] Notandum hîc, applicatam eſſe Hyperbolam ei linearum poſitioni, cui poſtea Circulum quadrare ab Authore oſtenditur. Quod tam perſpicuitatis quàm brevitatis ſtudio factum; quandoquidem ea, cùm literæ A, B, C, D, &c. in iiſdem omnium figurarum locis reperiuntur, quæ ibidem ſcripſit, ſic faciliùs intelligi poſſunt, quàm ſi nunc in uno, nunc in alio eſſent quærendæ.

Etenim cùm requiritur, ut productum, quod oritur ex multiplicatione C B per C F, æquale ſit ei, quod fit ex ductu C D in C H, oportet lineam illam curvam tranſire per quatuor interſectionum puncta datarum linearum: nimirum, per interſectionem A, linearum D A, A B (quoniam eo caſu lineæ B C & C D nullæ ſunt, ac proinde ſingulæ, in ſingulas ex reliquis ductæ, nihil producunt), & per interſectionem G linearum A B, G H, (quo caſu lineæ C H & C B nullæ ſunt): nec non per utramque reliquam, utpote ipſarum F E, G H (quo caſu C F & C H nullæ ſunt), & ipſarum D A, E F (quo caſu C D & C F nullæ ſunt), quæ in hac figura non ſunt expreſſæ, ſed in Circulo obſervatæ apparent. Unde, cum D^nus des Cartes, brevitati ſtudens, referre voluerit caſus omnes ad unum exemplum, figuræ nempe pag. 12. mirum videri non debet, quòd, poſtquam hujus exempli locum Circulum eſſe oſtendit, nec in quæſtione quicquam mutavit, eidem linearum poſitioni non Hyperbola ſicut Circulus reſponderit. Nec etiam hinc ullus ſequitur error, quandoquidem tota quæſtio nondum determinata exiſtit, ſed pagin. 33 primò determinatur. Quippe fieri poteſt, ut, paucis in ea mutatis, eidem linearum poſitioni, cui Circulus competit, quadret Hyperbola; & quidem Hyperbola, quæ non tranſeat per ullas datarum linearum interſectio-

ſectiones. Ut, exempli causâ, ſi rectangulum ex F C in C D debeat eſſe majus, quàm rectangulum ex C B in C H, datâ quâdam quantitate, vel aliud quid ſimile: ſequitur eam ſic applicari poſſe, ut, manentibus literis I, K, L, B, C, D, &c. ſuis locis, ea pauca, quæ de Hyperbola afferre voluit, faciliùs intelligantur, quàm ſi figura mutata fuiſſet.

Ejuſdem brevitatis ſtudio nulla etiam hîc mentio fit oppoſitarum Hyperbolarum, non quòd ab Authore ignorentur, utpote qui paulò poſt pag. 37. quatuor lineas Hyperbolæ affines, inter ſe oppoſitas, exhibuit: Sed quòd faciliora ferè ſemper in hac Geometria neglexerit. In difficilioribus certè, quæ tractanda ſuſcepit, nihil omiſit. Atque idcirco hîc maluit eam linearum poſitionem exhibere, cui conveniret Circulus, quàm cui competeret Ellipſis, aut Hyperbola, quia ejus inventio peculiarem habet difficultatem.

Quippe hæc loca nihil aliud ſunt, quàm cùm in quæſtione aliqua eſt inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipſa prorſus ſit determinata.] Nimirum, ubi ad inveniendum illud punctum duas ſupponere oportet lineas incognitas, & materia tantùm pro una æquatione ſuppetit. Ut in hoc exemplo, ubi ad determinandum punctum C, duæ ſupponendæ ſunt incognitæ lineæ A B & B C; quarum una oſtendat, ad quod punctum lineæ A B duci debeat recta B C in dato angulo; & altera, ubinam illud ipſum in eadem recta ſit ſumendum. Ubi porrò, poſtquam conditiones omnes ſunt adimpletæ, inventa eſt æquatio

$$yy \infty \frac{\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\,y\,\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\,y\,\begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz},$$

duas continens quantitates incognitas x & y. Adeò ut, cum in ipsâ una deſit conditio ut ſit prorſus determinata, quantitatem aliquam cognitam pro arbitrio aſſumere liceat pro incognita x, cui non reſpondet aliqua æquatio, atque tot inde invenire puncta C, quot ipſi radici x tribuerimus diverſos valores.

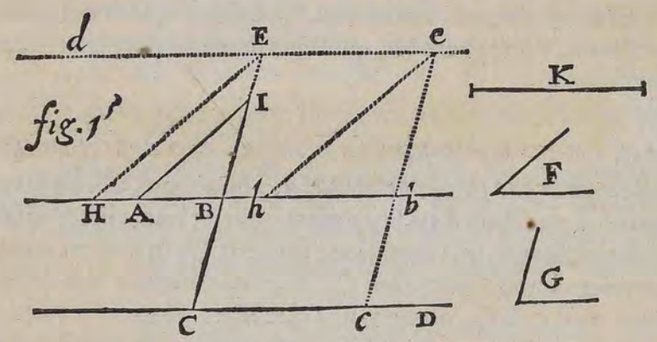
Cæterùm quoniam hæc quæſtio extendi poteſt ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum cadunt, atque in Geometriam recipi poſſunt: ita ut nulla ſit linea curva primi generis, quæ ad illam non ſit utilis, quando in quatuòr lineis proponitur: nec ulla

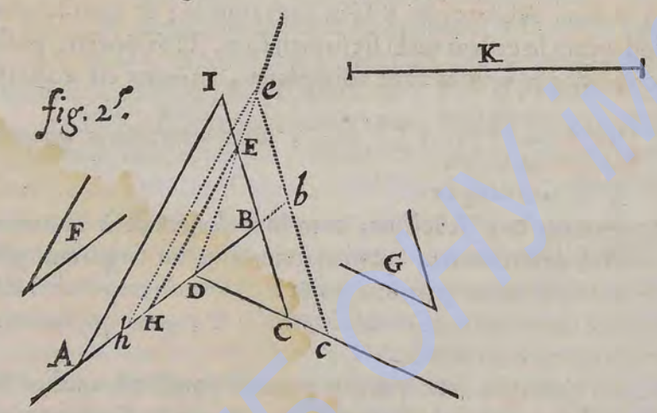
 ſecun-

ſecundi, quando in 8 lineis: nec ulla tertii, quando in 12 lineis eſt propoſita, atque ita porrò: placuit hîc quoque ſubjungere caſum, quando in duabus tantùm lineis eſt propoſita, qui quidem omnium ſimpliciſſimus exiſtit.

Locus ad duas lineas.

Datis poſitione duabus rectis lineis A B, C D, inter ſe parallelis, aut concurrentibus in puncto D; punctum extra ipſas invenire, ut E, à quo ſi in datis angulis F & G ad poſitione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ E H, E C, ipſæ datam inter ſe habeant rationem *r* ad *ſ*.





Supponantur anguli B A I, D C B æquales angulis F, G; & con-

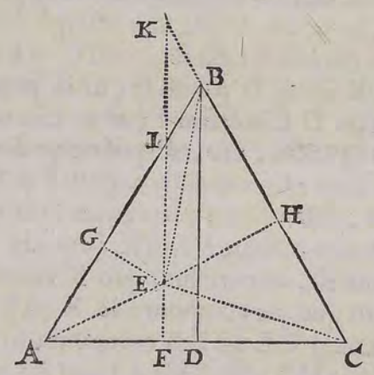
concurrant rectæ A I, C B, (ubicunque hoſce æquales angulos ad poſitione datas conſtituentes) in punctum I. Deinde ratio, quam H E ad E C ſervare debet, detur ut A I ad K, vel ſi non ita detur, ad hanc formam reducatur.

Reſolutio. Puta factum eſſe, quod quæritur, ponaturque B C ∞ *q*, A I ∞ *r*, K ∞ *ſ*, B I ∞ *t*, & B E ∞ *x*. Unde, cum propter triangulorum B I A, B E H ſimilitudinem, B I ſit ad I A, hoc eſt, *t* ad *r*, ſicut B E ſeu *x* ad E H, erit E H ∞ $\frac{rx}{t}$. Deinde quoniam A I eſt ad K, hoc eſt, *r* ad *ſ*, ſicut H E ad E C, ſive $\frac{rx}{t}$ ad $q + x$: erit productum ſub extremis $rq + rx$, æquale producto ſub mediis $\frac{rſx}{t}$. Ac proinde ſi utrinque dividatur per *r*, atque multiplicetur per *t*, æquatio erit $ſx - tx$ ∞ tq. Hoc eſt, revocatâ æqualitate ad proportionem, erit ut $ſ - t$ ad *t*, ita *q* ad *x*. Unde talis emergit *Conſtructio.* Fiat, ut exceſſus, quo K excedit B I, ad B I; ita B C ad B E. Tum per E ducatur E *d* ipſi A B ſeu C D parallela (ut in prima fig.); aut ex D per E agatur recta D E indefinitè (ut in ſecunda fig.): Dico ſi ex quolibet ejus puncto, ut *e*, ad poſitione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ *e h*, *e c* in datis angulis F & G, hoc eſt, ipſis A I, I C parallelæ, dictas lineas datam inter ſe rationem ſervaturas, hoc eſt, *h e* fore ad *e c*, ſicut A I ad K, ſeu *r* ad *ſ*.

Demonſtratio. Quoniam enim eſt, ut exceſſus, quo K excedit B I, ad B I, ita B C ad B E: erit quoque componendo K ad B I, ſicut C E ad E B. Unde cum ratio C E ad E B compoſita ſit ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B ſeu A I ad I B: erit quoque ratio K ad B I ex eiſdem rationibus compoſita. Eodem modo, quoniam item ratio K ad B I componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio compoſita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B, eadem cum ratione, quæ componitur ex K ad A I, & ex A I ad I B. Quare ſi communis auferatur ratio A I ad I B, erit quoque reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, ſeu *ſ* ad *r*. Quod erat faciendum. Eadem eſt ratio ubicunque tandem in recta *d* E punctum *e* aſſumatur. Unde manifeſtum fit, punctum quæſitum *e* rectam lineam contingere D E, poſitione datam, ac proinde in loco plano eſſe. Omitto reliquos hujus quæſtionis caſus, cum à quovis ad horum imitationem facilè conſtrui poſſint.

G *At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut Sphærica, aut magis composita esse potest.*] Quæ verba, ut rectè intelligantur, exemplis sequentibus illustrare conabimur.

Locus ad Superficiem. Dato triangulo æquilatero A B C, à cujus vertice B ad basin A C demissa sit perpendicularis B D: oporteat intra ipsum invenire punctum, ut E, à quo si ad opposita latera deducantur perpendiculares E F, E G, & E H, ipsæ simul sumptæ æquentur perpendiculari B D.



Factum jam sit, & productâ F E, usque dum secet latus A B in I, B C verò productum in K; ponatur A D seu D C ∞ a, D B ∞ b, A F ∞ x, & F E ∞ y. Hinc cum similia sint triangula A D B, & A F I, erit sicut A D ad D B, hoc est, a ad b, ita A F seu x ad F I; quæ ideo erit $\frac{bx}{a}$. E qua si auferatur F E ∞ y, relinquetur E I ∞ $\frac{bx}{a} - y$. Similiter, quoniam similia sunt triangula C D B & C F K, erit C D ad D B, hoc est, a ad b, ut C F seu $2a - x$ ad F K; quæ ideo erit $2b - \frac{bx}{a}$. E qua si auferatur F E ∞ y, restabit E K ∞ $2b - \frac{bx}{a} - y$. Eodem modo cum, propter similitudinem triangulorum A D B, E G I, A B sit ad A D, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, sicut I E seu $\frac{bx}{a} - y$ ad E G; erit E G ∞ $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Non secus, cum similia sint triangula E K H & D B C, erit ut B C ad C D, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, ita E K seu $2b - \frac{bx}{a} - y$ ad E H; quæ ideo erit

erit $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Adeoque si addantur perpendiculares inventæ E F, E G, & E H, erit earum summa b, æqualis b, perpendiculo trianguli A B C.

Ubi patet, quòd, postquam incidimus in æquationem, in qua ab utraque parte reperitur eadem quantitas, quæstio proposita non sit Problema, sed Theorema; seu quòd conditio, ex qua hæc æquatio deducta fuit, in quæstionis datis sit comprehensa, neque unquam sine hac conditione esse possit: Atque adeò, duas in ea conditiones desiderari, ad dicti puncti determinationem; unam, ad æquationem pro x inveniendam, quâ innotescat, ad quod punctum lineæ A C duci debet perpendicularis E F; atque alteram, ad æquationem pro y inveniendam, quâ cognoscatur, ubinam illud ipsum in hac perpendiculari sit sumendum: quibus mediantibus quæstio penitus determinata reddatur. Quare, postquam conditiones in quæstione præstandæ exsecutæ sunt, & neutri linearum incognitarum A F, F E æquatio respondet, poterunt illæ ad arbitrium accipi, atque idcirco quæsitum punctum E ubique intra triangulum A B C assumi. Cujus demonstratio facilis est. *Vide ea, quæ habentur pag. 4.*

Ducantur enim rectæ A E, E B, & E C, ut constituantur tria triangula A E C, A E B, & B E C.

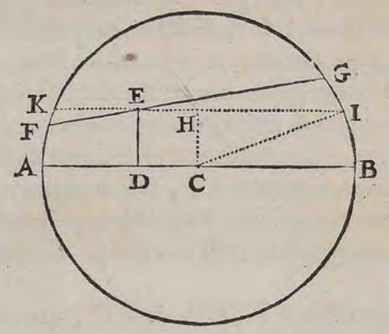
Quoniam igitur horum triangulorum bases sunt æquales, ac quælibet ex ipsis æqualis basi trianguli A B C; habebunt ipsa ad triangulum A B C eandem rationem, quam perpendicula F E, E G, & E H. Quare cum triangula A E C, A E B, & B E C simul sumpta ipsi triangulo A B C sint æqualia: erunt quoque perpendiculares E F, E G, & E H simul sumptæ ipsi perpendiculari B D æquales. Quod erat demonstrandum.

Porrò notandum est, quòd, quemadmodum punctum E, intra triangulum A B C assumptum, exhibet semper eandem summam perpendicularium E F, E G & E H, quæ ab eo ad trianguli latera deducuntur, & æqualem perpendiculari B D, ita contra, si sumatur extra triangulum A B C, atque ab eo ad singula ejus latera, si opùs est, producta perpendiculares demittantur, obtineatur semper eadem perpendicularium differentia, quæ rursus perpendiculari B D sit æqualis. Oportet autem perpendicularem, quæ ducitur in latus subtensum angulo, intra quem punctum sumptum

 erit,

erit, auferre ex ſumma duarum reliquarum. Quæ ſimili ratione aliis quoque figuris rectilineis ordinatis competunt, cum eadem in omnibus ſit demonſtratio.

Alterum exemplum, quod hîc afferendum duxi, deſumpſi ex inventis Nobiliſſimi & præclari Juvenis D. Chriſtiani Hugenii, quibus ſibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non niſi magna quæque ab eo expectanda eſſe affirmare non veriti fuerint.



Dato Circulo A G B, dataque poſitione diametro A B: invenire extra ipſam punctum E, à quo ſi ad A B demittatur perpendicularis E D, & per idem punctum agatur recta quædam linea F G utrinque à circumferentiâ terminatâ, ut rectangulum F E G, ſub ſegmentis ejus F E, E G comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ E D, æquetur rectangulo A D B, ſub ſegmentis diametri A D, D B.

Ductâ per E rectâ K I parallelâ ipſi A B, deducatur ex centro C in eam perpendicularis C H, jungaturque C I. Poſitâ igitur A C vel C B ∞ a, C D ∞ x, & D E ∞ y: erit H I ∞ $\sqrt{aa-yy}$, E I ∞ $\sqrt{aa-yy}+x$, & E K ∞ $\sqrt{aa-yy}-x$. Unde ſi multiplicavero E K ∞ $\sqrt{aa-yy}-x$ per E I ∞ $\sqrt{aa-yy}+x$, fiet rectan-

rectangulum K E I ſeu F E G ∞ $aa-yy-xx$. Cui ſi addatur quadratum ex E D ∞ yy, erit ſumma $aa-xx \infty aa-xx$, rectangulo A D B, utpote æqualis ei, quod fit ex $a-x$ in $a+x$. 35 Tertii Elem.

Quia igitur hîc utrinque eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri poteſt æquatio, quâ innoteſcat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad arbitrium ſumi poſſe, atque Problema propoſitum eſſe Theorema. Defectus itaque duarum in hac quæſtione conditionum, ad determinandum punctum E, oſtendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere poſſe, & locum ejus eſſe ad ſuperficiem Circuli. Id quod facilè demonſtrari poteſt.

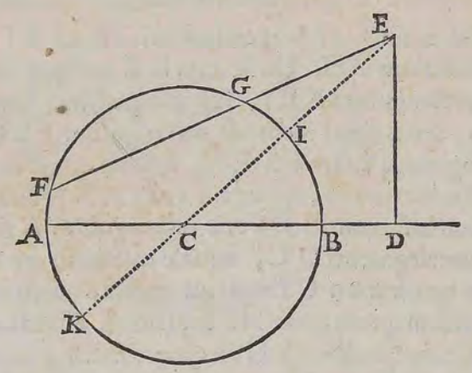
Quoniam enim C H perpendicularis eſt ad K I, ſecabit rectam K I bifariam in H. Unde cum in E quoque inæqualiter ſit ſecta, erit rectangulum K E I, ſub inæqualibus ſegmentis comprehenſum, ſeu, quod idem eſt rectangulum F E G, unà cum quadrato ſegmenti intermedii E H, æquale quadrato dimidiæ lineæ H I. Eodem modo, quoniam recta A B bifariam diviſa eſt in C, & non bifariam in D: erit rectangulum A D B unà cum quadrato interſegmenti D C, æquale quadrato ex C B ſeu C I. Quare cum quadratum C I æquetur quoque quadratis C H, H I, quorum quidem quadratum H I æquale eſt oſtenſum rectangulo F E G, unà cum quadrato E H: ſequitur rectangulum A D B unà cum quadrato D C ſeu E H æquari rectangulo F E G unà cum duobus quadratis C H, E H. Ac proinde, dempto communi quadrato E H, remanebit rectangulum A D B æquale rectangulo F E G, unà cum quadrato C H ſeu E D. Quod erat demonſtrandum. Non ſecus demonſtrabitur, omne aliud punctum, intra Circulum extra diametrum A B aſſumptum, præſtare id quod quæritur: Quocirca, Si in Circulo extra diametrum, ſumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum demittatur perpendicularis, & per idem punctum agatur recta linea à circumferentia utrinque terminata: erit rectangulum ſub ſegmentis hujus rectæ comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ, æquale rectangulo ſub ſegmentis diametri. Idem ferè contingit ſi extra Circulum acceptum fuerit punctum.

3 Tertii Elem.
5 Secundi Elem.
35 Tertii Elem.

Etenim,

Etenim,

Assumpto extra Circulum puncto quolibet, ut E, ab eoque ad diametrum A B, ipsamve productam, si opùs est, deductâ perpendiculari E D, tum verò rectâ E F, Circulum utcunque in F & G secante: erit rectangulum A D B, unà cum quadrato rectæ D E, æquale rectangulo F E G. Quod similiter ut supra experiri licet, atque demonstrare.



Porrò sicut in allatis exemplis loca quæsitorum punctorum fuerunt ad superficies planas, easque terminatas, vel in infinitum extensas; ita quoque inveniuntur loca punctorum, quæ sunt ad superficies curvas, & quidem vel terminatas, vel in infinitum extensas.

Si enim, exempli causâ, in figura pag. 123 manente rectâ A B, & in ea punctis A & B, circumvolvatur semicirculus F D E, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat, describetur superficies Sphærica, in qua si quodlibet punctum accipiatur, ut D, ab eoque ad puncta A & B rectæ agantur D A, D B; habebunt ipsæ datam inter se rationem, hoc est, eandem, quam P H ad M N. Ita ut punctum D sit ad superficiem curvam terminatam, utpote ad superficiem Sphæricam, conversione semicirculi F D E descriptam. Eâdem ratione, si à duobus datis punctis duæ inflectantur rectæ

rectæ lineæ in data differentia: punctum ad inflexionem erit ad superficiem Hyperbolicam, positione datam. Etenim si in plano quocunque, quod per data puncta transit, describatur Hyperbola, cujus foci hæc puncta existant, & axis transversus differentia data: & manentibus punctis Hyperbola circa axem circumvertatur, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat; describetur superficies curva, quæ in infinitum extenditur, & Hyperbolica dicitur (quippe Hyperbolâ in infinitum extensâ), in qua si ad libitum sumatur punctum, à quo ad data puncta agantur duæ rectæ lineæ, servabunt illæ inter se differentiam datam.

Atque sic progrediendo curvæ superficies ostendi possunt, in infinitum magis magisque compositæ, quæ quæsitorum punctorum determinationi inserviunt. Verùm cum sufficiat nobis per exempla aliquot modum explicuisse, quo hæc loca per calculum detegantur, & à locis planis, solidis, aliisve magis compositis discernantur: ulteriori explicationi supersedebimus.

Cæterùm, ne quid, quod ad hanc materiam spectare possit, desideretur, sed Geometria omnibus numeris sit absoluta, paucis subjiciam, quomodo cognosci possit, quando locus alicujus puncti est ad solidum: cum id neque ab Antiquis, neque à Recentioribus (quod sciam) hactenus sit deprehensum.

Tribus igitur conditionibus deficientibus, ad puncti alicujus determinationem, locus, in quo illud reperitur, Solidum est: & vel planis constans superficiebus, vel Sphæricâ, vel aliâ magis compositâ, vel denique mixtis ex planis & curvis. Solida autem hæc vel sunt terminata, vel indefinitè extensa.

Ut, si intra Tetraëdrum, inveniendum sit punctum, ita ut summa perpendicularium, ab eo in quatuor ejus plana, quibus constat, demissarum, æquetur perpendiculo Tetraëdri: cadet illud quovis loco intra Tetraëdrum, ita ut nullum intra ipsum punctum assumi possit, quod quæsito non satisfaciat. Quod eodem modo indagatur & demonstratur, atque superiùs in triangulo æquilatero est ostensum. Nam, cum ad hujus puncti determinationem tres requirantur radices seu incognitæ quantitates (quarum una inservit determinandæ longitudini perpendicularis, *Locus ad Solidum.*

quæ à quæsito puncto cadit supra unum ex planis, & reliquæ duæ, ad locum hujus perpendicularis in eodem plano determinandum), & adimpletis conditionibus omnibus tandem in æquationem incidamus, ubi utrinque eædem occurrunt quantitates: indicio est, incognitas quantitates ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Nihil igitur refert quodcunque intra Tetraëdrum assumatur punctum, cum omnia quæsito satisfaciant.

Non dissimili ratione demonstrare possumus: Si extra Tetraëdrum sumatur punctum, à quo ad singula ejus plana demittantur perpendiculares, earum differentiam æquari perpendiculo Tetraëdri. Adeò ut, si quæstio fuerit de inveniendo puncto, à quo demissæ perpendiculares simul collectæ, æquentur Tetraëdri perpendiculo, punctum illud futurum sit in solido terminato, utpote ubique intra Tetraëdrum; si verò postuletur, ut differentia ipsarum eidem perpendiculo sit æqualis, reperietur punctum illud in solido indefinitè extenso, atque sumi poterit extra Tetraëdrum, ubicunque libuerit. Idem de aliis figuris ordinatis, planisque superficiebus contentis, dici & demonstrari posse, perspicuum est.

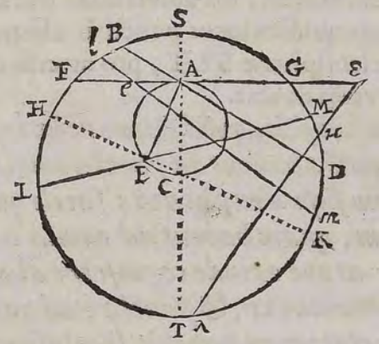
Alterum exemplum, quod hîc adducemus, ex Hugeniano Problemate deduci potest, quemadmodum præcedens Tetraëdri ex triangulo æquilatero deduximus, & est hujusmodi: Si Sphæra plano per centrum secetur, sumatur autem extra planum quodlibet punctum intra Sphæram, ab eoque ad planum demittatur perpendicularis, & per subjectum punctum in eodem plano utcunque ducatur recta linea, utrinque à Sphæræ superficie terminata: erit rectangulum, sub segmentis hujus rectæ comprehensum, æquale rectangulo sub segmentis rectæ, utcunque per assumptum punctum ad Sphæræ superficiem ductæ, unà cum demissæ perpendicularis quadrato. Idem fermè contingit si punctum sumatur extra Sphæram.

His adde sequens Problema, quod occasione istius Hugeniani sibi ante tres annos è vestigio inquirendum proposuit Vir Celeberrimus atque undequaque Doctissimus D. Johannes Wallisius, S. T. D, & in Academia Oxoniensi Geometriæ Professor SAVILIANUS. Estque hujusmodi:

In circulo, cujus centrum C, assignato ubivis puncto A, per quod ducta recta peripheriæ occurrat in punctis B, D: inveniantur alia quotlibet puncta, ita ut, si per quodvis eorum ducatur recta peripheriæ occurrens in punctis L, M, quadratum distantiæ A E æquetur vel differentiæ vel summæ rectangulorum L E M, B A D.

$$\text{Puta } \square AE \infty \begin{cases} \square LEM - \square BAD. \\ \square BAD - \square LEM. \\ \square BAD + \square LEM. \end{cases}$$

Diametro A C describatur circellus, quem contingat recta infinita F A G. Dico, singula puncta in peripheria circelli præstare



primum quæsitum: quæ verò in recta F G intra circulum, secundum: quæ denique in eadem continuata extra circulum, tertium.

Nam 1mò, si sit E in peripheria circelli, (ductis diametris S A C T, H E C K,) erit * $\square$ B A D ∞ $\square$ S A T ∞ $\square^{to}$ Radii (— $\square$ A C ∞) — $\square$ E C — $\square$ A E *. Et $\square$ L E M ∞ $\square$ H E K ∞ $\square^{to}$ Radii — $\square$ E C. Ergo $\square$ L E M — $\square$ A E ∞ $\square$ B A D, vel $\square$ L E M — $\square$ B A D ∞ $\square$ A E. * per 35 Tertii Elem. * per 5 Secundi Elem.

2dò. Si in recta F G intra circulum sumatur E vel *e*: erit $\square$ B A D ∞ $\square$ F A G ∞ $\square$ F A ∞ $\square$ F *e* G + $\square$ A *e*. Et $\square$ *lem* ∞ $\square$ F *e* G. Ergo $\square$ B A D — $\square$ *lem* ∞ $\square$ A *e*.

3tiò. Si in F C continuatâ ſumatur *e* vel ε extra circulum, erit
* □λεμ∞□FεG∞□Aε(—□FA∞)—□BAD*.
Ergo □BAD + □λεμ∞□Aε. Quod erat faciendum. Idem, mutatis paucis, procederet pariter, etiamſi punctum A extra circulum aſſignaretur.

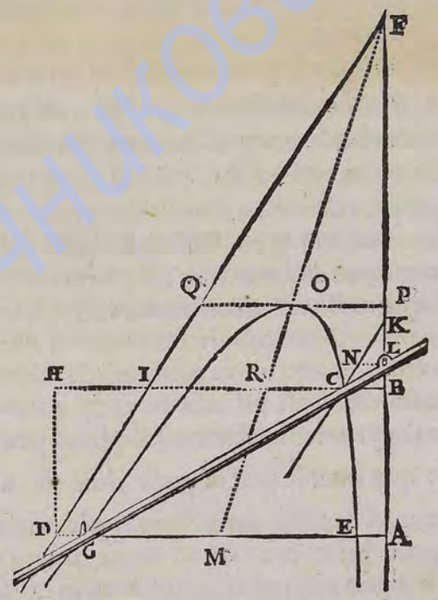
* per 36 Tertii Elem.
* per 6 Secundi Elem.

Quoniam igitur aſſumpto puncto A ceu dato, puncta invenienda E cadunt in locum planum, utpote in peripheriam circelli, aut in rectam F G intra circulum, aut denique in eandem extra circulum continuatam: patet, ſi in locum horum circulorum accipiantur duæ ſphæræ, quòd ſimiliter hæc puncta E ubique pro lubitu ſumi poſſint in ſuperficie convexa ſphæræ A E C, aut in ſuperficie plana circuli, cujus diameter F G, aut denique in eodem plano, extra hujus circumferentiam in infinitum extenſo, prout ſcilicet, ut ante, dictorum rectangulorum vel differentia vel ſumma quadrato diſtantiæ horum ſumendorum punctorum E à puncto A requiritur æqualis. Quòd ſi verò idem punctum A non unum locum obtineat, ſed ubivis intra circulum S L T aſſignetur, quòd tunc quidem locus puncti E ubique in ſolido intra vel extra ſuperficiem ſphæræ S L T, pro diverſa quæſiti ratione, ſit futurus. Atque ita de aliis.

H *Iam verò ex hoc ſolo, quòd ſcitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem ſupra explicavi; facile quoque eſt invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoſcere diametros, axes, centra, aliaſque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit ſpecialiorem vel ſimpliciorem, quàm ad alia: atque ita imaginari diverſos modos illas deſcribendi, ex quibus faciliores eligi poſſunt.*]

Ita, cum relatio, quam habent puncta lineæ C E, per motum regulæ G L & plani rectilinei C N K L deſcriptæ, (quam ſuperiùs Hyperbolam eſſe oſtendimus) ad puncta lineæ rectæ A B exprimatur per æquationem $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$; prout nimirum in ea aſſumitur punctum A, tanquam certum ac determinatum, à quo calculus incipiat: facile quoque eſt invenire relationem, quam habent ad puncta ejuſdem A B, quando in ea, loco pun-

puncti A, aſſumitur aliud punctum nempe F, à quo calculus initium ſumat. Etenim ſi fiat, ut N L ad L K, hoc eſt, ut *c* ad *b*, ita D A ſeu *a* + *c* ad A F, erit ipſa $\infty \frac{ab}{c} + b$. E qua ſi dematur A B



∞x, relinquetur B F $\infty \frac{ab}{c} + b - x$. Hinc ſi in æquatione inventa $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ loco *x* ſubſtituamus $\frac{ab}{c} + b - x$: inveniemus æquationem $yy \infty \frac{cx}{b}y - ac$, quâ oſtenditur relatio, quam habent puncta Hyperbolæ C E ad puncta rectæ B A, reſpectu puncti F. Quæ æquatio, cum præcedenti ſit ſimplicior, arguit, Hyperbolæ puncta ad puncta rectæ B A ſpecialiorem ſeu ſimpliciorem habere relationem, quando in A B punctum F pro certo & determinato aſſumitur, quàm cum in ea accipitur punctum A.

Cæterùm relationem, quam Hyperbolæ puncta ſervant ad omnia alia puncta & lineas datas, cognoſces ex pag. 177. Ubi ex relatione, quam habent puncta alicujus curvæ ad puncta rectæ

 poſi-

positione datæ, datus est modus inveniendi relationem eorundem punctorum ad puncta alterius cujusvis rectæ positione datæ. Adeoque tot inventis æquationibus diversis, ad quot diversas rectas curva illa fuerit relata, atque ex iis juxta æquationum regulas extractis radicibus: constabunt totidem modi eam describendi, ex quibus faciliores seligi poterunt.

I *Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem spectat: ita ut non opùs sit de his agere apertiùs.*] Sic ad comparandam Ellipsin cum Circulo, atque ad inveniendam relationem, quam inter se habent, prout circa eundem axem sunt descriptæ: Esto axis ∞q, latus rectum pertinens ad axem ∞r, segmentum axis inter verticem & utriusque ordinatam interceptum ∞x, ipsa verò adplicata ∞y. Hinc cum in Circulo latus transversum sive diameter æquale sit lateri recto, & æquatio exprimens relationem punctorum Circuli ad puncta diametri vel axis sit $yy \infty qx - xx$; at verò quæ relationem exprimit punctorum Ellipsis ad puncta axis sit $yy \infty rx - \frac{rxx}{q}$: quæ inter se sunt ut q ad r, hoc est, ut axis ad latus rectum pertinens ad eundem axem; quæ quidem ratio duplicata est rationis, quam habet hic axis ad axem secundum, sequitur Circulum ad Ellipsin esse, ut axis primus ad axem secundum. Id quod demonstratum est ab Archimede prop^{ne} 5^{tâ} libri de Conoïdibus & Sphæroïdibus, ut & à nobis cap. 2do tractatus de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione.

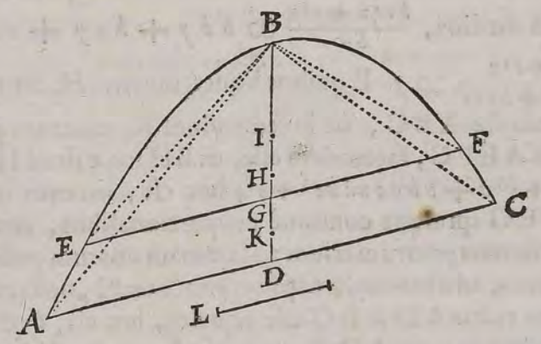
Porrò extendi potest hoc ipsum ad cognoscendam quoque relationem, quam habet Sphæra ad Sphæroïdes, prout eundem habent axem.

Etenim, cum ostensum sit, quadrata ordinatim adplicatarum utriusque curvæ esse inter se, sicut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem; & quadrata illa ad se invicem sint ut Circuli, qui ab ipsis tanquam radiis conversione semicirculi & semi-ellipsis fiunt & utramque figuram describunt: patet Sphæram ad Sphæroïdes esse, ut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem: vel, ut quadratum ejusdem axis ad quadratum axis minoris. Quod & ab Archimede ostensum.

Adeò ut non modò ex hoc solo inveniri propemodum possit omne

omne id, quod determinari potest, atque ad magnitudinem spacii, quod hæ curvæ comprehendunt, spectat, quemadmodum Auctor innuit; sed etiam, quod spectat ad magnitudinem solidi, à superficie aliqua curva comprehensi, atque ab hujusmodi linea generati. Sic ut ex his omnibus constet, Authorem id præcipuè operam dedisse, ut, neglectis particularibus, & præsuppositis iis, quæ ab aliis vel inventa vel demonstrata essent, ea tantùm traderet, quæ difficilia, utilia, & maximè generalia essent, omniaque paucis comprehenderet; quæ verò faciliora & levioris momenti, non nisi obiter tantùm perstringeret. Quod sanè rarò ab Auctoribus hodie observatum cernimus, cum plerique id studeant, ut eorum opera in amplissima volumina excrescant.

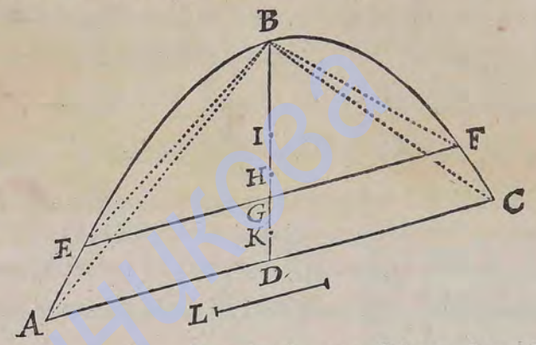
Cæterùm cum ex hac spacii aut solidi magnitudine deinceps facile sit invenire ejusdem centrum gravitatis, non abs re fuerit si hîc similiter modum, quo id investigari possit, uno atque altero exemplo exponam.



Igitur ad inveniendum, exempli causâ, gravitatis centrum Parabolæ A B C ac ejus portionis A E F C, abscissæ videlicet per rectam E F ipsi A C parallelam: suppono centrum totius A B C esse H, Parabolæ autem E B F centrum esse I, & centrum portionis A E F C esse K. Deinde factâ B D ∞a, A D vel D C ∞b, E G vel G F ∞c, B H ∞x, & H K ∞y, jungo A B, B C, E B, & B F. Quibus positis, quæro rationem, quæ est inter triangulum A B C & triangulum E B F. Hinc cum ex natura Parabolæ quadratum ex A D seu bb sit ad quadratum ex E G seu cc, sicut D B seu a ad G B

GB: erit GB $\infty \frac{acc}{bb}$. Ac proinde cum AD multiplicata per DB producat ab, at EG multiplicata per GB producat $\frac{ac^3}{bb}$, erit ratio trianguli ABC ad triangulum EBF quæ ab ad $\frac{ac^3}{bb}$ seu b^3 ad c^3. Hæc autem cum eadem sit rationi, quam inter se habent Parabolæ ABC & EBF (siquidem Parabola quælibet trianguli sibi inscripti maximi est sesquitertia): sequitur rationem portionis AEFC ad Parabolam EBF eandem fore quam $b^3 - c^3$ ad c^3. Porrò cum eadem sit situs ratio centri I in Parabola EBF, quæ centri H in Parabola ABC: erit DB seu a ad BH seu x, sicut GB seu $\frac{acc}{bb}$ ad BI $\frac{ccx}{bb}$. Quâ subductâ ex BH seu x, relinquitur IH $\infty \frac{bbx - ccx}{bb}$. Denique cum IH ad HK, hoc est, $\frac{bbx - ccx}{bb}$, ad y, eandem habere debeat rationem, quam portio AEFC ad Parabolam EBF seu $b^3 - c^3$ ad c^3, fiet, abbreviando primum & tertium terminum per $b - c$, ac deinde multiplicando extremos tum medios, $\frac{bc^3x + c^4x}{bb} \infty bby + bcy + ccy$, vel $\frac{bc^3x + c^4x}{b^4 + b^3c + bbcc} \infty y$. E quibus liquet, invento H, centro gravitatis Parabolæ ABC, ad inveniendum K, centrum gravitatis portionis AEFC, faciendum esse, ut BH seu x sit ad HK seu y, sicut $b^4 + b^3c + bbcc$ ad $bc^3 + c^4$; hoc est, inventis in ratione AD ad EG quinque continuè proportionalibus, erit BH ad HK, ut summa priorum trium ad summam duarum posteriorum. Ubi demum, ad obtinendum ipsum punctum H, opus tantùm est concipere rectas AD & EG esse æquales, hoc est, $b \infty c$, ita ut EGF coïncidat cum ADC, quo casu & punctum I in punctum H cadet, & K in D, lineaque DH seu y æqualis fiet $\frac{2}{3}x$, hoc est, duabus tertiis ipsius HB. Quod ipsum monstrat, sectâ diametro BD in 5 æquales partes, pro linea BH seu x tunc earundem sumendas esse tres. Id quod aliter quoque à nobis est ostensum in Exercitationibus nostris Mathematicis libr. 5. sectione 19.

Eodem modo si in Conoïde Parabolico ABC & ejusdem portione AEFC centra gravitatum H & K invenire velimus, oportet, iisdem quæ supra positis, quærere rationem, quæ est inter Conum ABC & Conum EBF: invenieturque ut b^4 ad c^4. Hæc enim

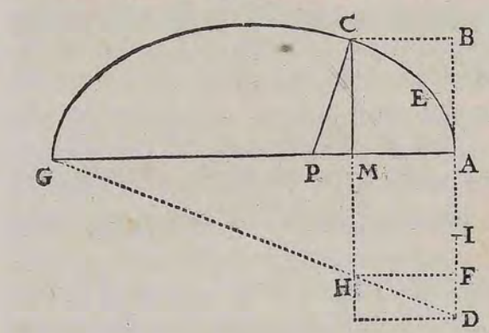


enim cum eadem quoque sit rationi, quæ est inter duos Conoïdes ABC & EBF (quandoquidem per 23 Prop. de Conoïdibus & Sphæroïdibus Archimedis Conoïs quilibet Parabolicus sesquialter esse probatur Coni, qui eandem habet basin eundemque axem cum Conoïde): patet portionem AEFC ad Conoïdem EBF fore, ut $b^4 - c^4$ ad c^4. E quibus porrò, ut supra, invenitur $y \infty \frac{c^4x}{b^4 + bbcc}$, hoc est, invento H, centro gravitatis Conoïdis ABC, ad obtinendum K, centrum gravitatis portionis AEFC, faciendum esse ut BH sit ad HK, sicut $b^4 + bbcc$ ad c^4, seu, quod idem est, ad DB & GB quærendam esse tertiam proportionalem L, atque deinde faciendum ut BH sit ad HK, sicut summa ipsarum DB, GB ad tertiam L. Ubi tandem, si ad ipsum punctum H habendum statuamus, ut ante, $b \infty c$, invenietur $y \infty \frac{1}{2}x$. Quod ipsum docet diametrum BD in 3 æquales partes esse dividendam, atque pro BH earundem sumendas esse duas. Atque ita de aliis.

Sit CE linea curva, oporteatque per punctum C, &c.] K
Quæ hâc lineâ & sequentibus usque ad paginæ sequentis lineam 25 continentur, in genere referri debent ad illa, quæ deinceps ab Authore afferuntur usque ad pag. 44, quibus in specie agit de natura quarundam curvarum, quas, postquam ad æquationes reduxit, deinde hasce æquationes cum alia comparat, nempe $yy - 2ey + ee \infty 0$ aut $zz - 2fz + ff \infty 0$, aliave quæ ex hac vel illa sit composita, ut inveniatur tandem quantitas incognita v.

Quemadmodum si CE est Ellipsis, in qua MA sit segmentũ diametri, ad quam CM sit ordinatim adplicata, quodq; L

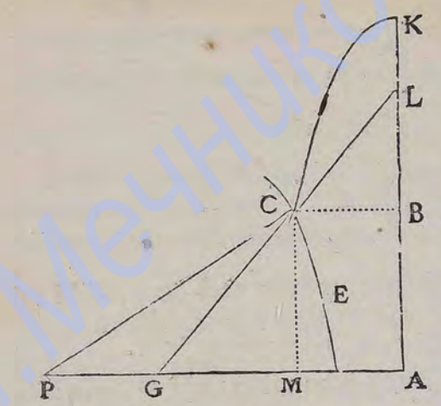
pro latere recto habeat r, pro transverso autem q: fiet per 13^{tium} *Theorema* 1^{mi} *libri Conicorum Apollonii:* $xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$. *unde tollendo* xx, *restabit* $ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{ryy}{q}$, *vel* $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ *æquale nihilo.*] Etenim A D latere existente recto ∞r, eoque ad A G perpendiculari: erit, propter triangulorum G A D, D H F similitudinem, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita H F seu M A, hoc est, y, ad F D, quæ ideo est $\frac{ry}{q}$. Quam si per H F multiplicemus, fiet rectangulum H F D $\infty \frac{ryy}{q}$. Deinde quoniam per 13^{tiam} Prop. 1^{mi} libri Conicorum Apollonii rectangulum M A D, minus rectangulo H F D, æquatur quadrato ex C M; & quidem rectangulum M A D sit ry: erit rectangulum M F $\infty ry - \frac{ryy}{q}$. Atque idcirco æquatio talis; $ry - \frac{ryy}{q} \infty xx$; hoc est, $ry - \frac{ryy}{q} \infty ss - vv + 2vy - yy$: quippe quod similiter ipsi xx est æquale. Hæc autem æquatio ut ad superiorem reducatur, oportebit utrobique per q multiplicare, ut fractio evanescat: fietque $qry - ryy \infty qss - qvv + 2qvy - qyy$. Denique factâ transpositione, ut quantitates in yy ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ autem alteram, dividatur utrinque per $q - r$, habebiturque



$yy \infty \frac{qss - qvv + 2qvy - qry}{q - r}$ sive $yy \frac{-qss + qvv - 2qvy + qry}{q - r} \infty 0$.

Cætera, quæ huc spectant, inveniuntur inter lin. 21. pag. 45. & lin. 9. p. 46: quæ, cum satis sint clara, explicatione non egent.

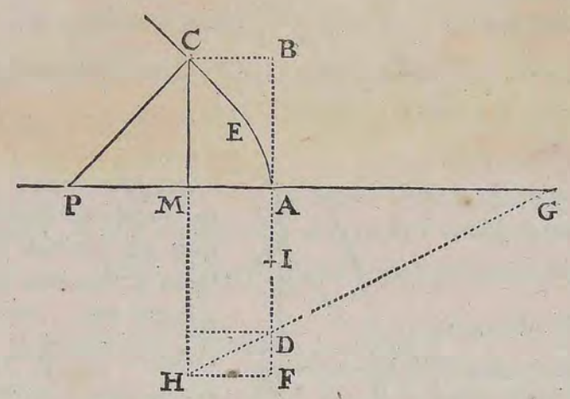
M *Eodem modo, si C E sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, &c.*] Cum enim, propter similitudinem triangulorum G M C, C B L, G M sit ad M C, hoc est, $b - y$ ad x, ut C B, hoc est, y, ad B L; erit B L $\frac{xy}{b - y}$. Cui si addatur K L ∞c, fiet K B $\infty \frac{cb - cy + xy}{b - y}$. Jam verò, quia, per 11 Prop^{nem} libri 1^{mi} Conicorum Apollonii, in Parabola C K rectangulum sub diametri segmento K B & latere ejus recto d æquatur quadrato ipsius C B, quæ ad eandem diametrum ordinatim est applicata: hinc si multiplicetur $\frac{cb - cy + xy}{b - y}$ per d, erit æquatio talis: $yy \infty \frac{dcb - dcy + dxy}{b - y}$. Unde multiplicando utrinque per $b - y$, fiet $dcb - dcy + dxy \infty byy - y^3$. Factaque transpositione, ut dxy unam teneat æquationis partem, erit $dxy \infty dcy - dcb + byy - y^3$. In qua si pro x ponatur summa ipsi æqualis, habebitur $dy \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, seu $\sqrt{ddssyy - ddvvyy + 2ddvy^3 - ddy^4} \infty dcy - dcb + byy - y^3$. Ut autem æquatio ab asymmetria liberetur, quadretur utraque pars, fiatque transpositio ut quantitates omnes ab una parte habeantur, invenieturque



$$y^5 - 2by^4 \left.\begin{matrix} +bb \\ +dd \\ -2dc \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +ddcc \\ +ddvv \\ -2dcbb \\ -ddss \end{matrix}\right\} yy - 2ddccby + ddccbb \infty 0.$$

Reliqua huc spectantia invenientur à lin. 9. pag. 46. usque ad lineam ultimam paginæ sequentis, quæ explicatione non indigent.

Quoniam autem inventio harum linearum non solùm elegans ac subtilis, verùm etiam per se jucunda atque utilis existit: non ingratum futurum confido, quibus hæc exercere volupe est, si ostendero quo pacto in Hyperbola & Parabola nec non in Conchoïde sint inveniendæ.



Inventio dictarum linearum in Hyperbola.

Sit latus transversum A G ∞ q, rectum verò ∞ r, C M vel A B ∞ x, M A vel B C ∞ y, P A ∞ v, & P C ∞ s. Deinde, propter similitudinem triangulorum G A D, D F H, fiat, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita H F seu M A, hoc est, y, ad F D, quæ ideo erit $\frac{ry}{q}$. Hæc si multiplicetur per H F ∞ y, prodibit rectangulum H F D ∞ $\frac{ryy}{q}$. Cui porrò si addatur rectangulum D M, ∞ ry, fiet rectangulum M A F ∞ $\frac{ryy}{q} + ry$. Jam verò, quia, per 12mam Propnem 1mi libri Conicorum Apollonii, rectangulum M A F æquale est quadrato ex M C seu xx, erit æquatio $\frac{ryy}{q} + ry \infty xx$, vel $\frac{ryy}{q} + ry \infty ss - vv + 2vy - yy$, subrogando nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Unde multiplicatâ utrâque parte per q, fiet $ryy + qry \infty qss - qvv + 2qvy - qyy$; transpositisque qyy & qry in contrarias partes, $qyy + ryy \infty - qry + 2qvy - qvv + qss$; ac denique utrâque parte divisâ per $q + r$,

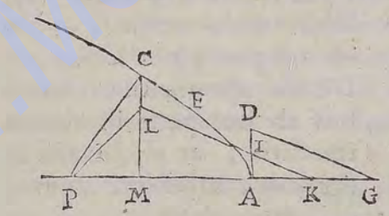
$$yy \infty \frac{-qry + 2qvy - qvv + qss}{q + r}, \text{ vel}$$

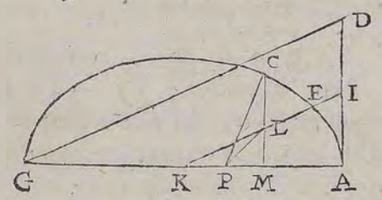
$$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q + r} \infty 0,$$ collocando nimirum quantitates omnes ad unam partem.

Dein-

Deinde, ad inveniendam quantitatem quæsitam v, comparetur æquatio inventa cum æquatione ejusdem formæ $yy - 2ey + ee \infty 0$, ubi y æquatur e. Quare cum utriusque primus terminus planè sit idem, comparetur secundus cum secundo, nempe, $\frac{+qry - 2qvy}{q + r}$ cum $-2ey$, vel, quod idem est, $\frac{+qr - 2qv}{q + r}$ cum $-2e$: ac idcirco multiplicetur utrinque per $q + r$, & fiet $+qr - 2qv \infty -2qe - 2re$. Postea translato $2re$ ad alteram partem dividatur utrinque per $2q$, fietque $\frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q} \infty v$, vel $v \infty y + \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, quandoquidem e ipsi y supposita est æqualis.

E quibus patet, ad inveniendam rectam P C, latus rectum A D secandum esse bifariam in I, & rectam P M ipsi I F sumendam esse æqualem. Quod in Ellipsi quoque est observandum.





His adde sequentem constructionem, quam Vir insignis ac Geometra præstantissimus D. Auzotius utrique huic sectioni pariter convenientem invenit, ejusque me quinquennio abhinc per literas participem fieri voluit, & talis est.

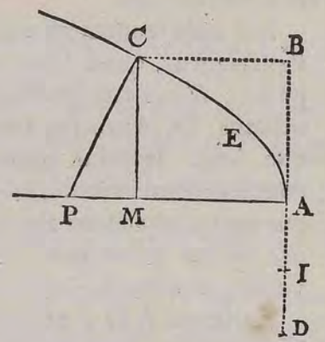
Existente A D, ut ante, latere recto, & A G latere transverso, ad inveniendam P C, ductis C M, A D ordinatim ad A G, junctâque G D, agatur per centrum sectionis K eidem parallela K I, secans C M in L. Dein assumptâ P M æquali M L, jungatur P C, eritque secans quæsita.

Quod ita patet.

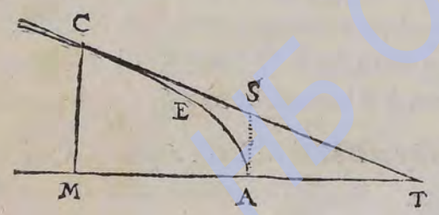
Est enim propter similitudinem triangulorum G A D, K M L, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita K M, hoc est, $\frac{1}{2}q \,\&\, y$ ad M L $\frac{1}{2}r \,\&\, \frac{ry}{q}$. Unde cum A P inventa sit $\infty y \,\&\, \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, adeoque P M $\infty \frac{1}{2}r \,\&\, \frac{ry}{q}$, liquet P M & M L esse æquales. Quemadmodum fuerunt assumptæ.

Ubi porrò animadvertere licet, ſi ex puncto P ceu dato recta P C ſit ducenda, quæ utramque ſectionem vel earum contingentes ad rectos angulos ſecet, ſive ut circulus, qui ex P ejus intervallo deſcribitur, utramque curvam tangat, opùs tantùm eſſe ducere P L, ita ut angulus A P L ſit ſemiſſis anguli A M C: ſi enim per L, ubi hæc recta ipſi K I L occurrit, ducatur M L C ordinatim ad A G, hoc eſt, ipſi A D parallela, erit juncta P C ſecans quæſita, ſive circulus ex P intervallo P C deſcriptus utramque curvam in C continget, ut requirebatur.

In Parabola. Sit latus rectum A D ∞ r, C M vel A B ∞ x, M A vel B C ∞ y, P A ∞ v, & P C ∞ s. Quoniam igitur per 11mam Propnem 1mi libri Conicorum Apollonii rectangulum ſub ſegmento diametri M A & latere recto A D æquatur quadrato ordinatim applicatæ C M: erit $ry \infty xx$, vel $ry \infty ss - vv + 2vy - yy$, ſubſtituendo nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Deinde quantitatibus omnibus ab una parte in alteram tranſlatis, ut yy ſit adfecta ſigno +, habebitur æquatio $yy \overset{+r}{-2v} y \overset{+vv}{-ss} \infty 0$.



Quam ſi porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$, ubi y & e ſunt æquales, conferendo nempe ſingulos terminos unius cum ſingulis alterius: nimirum, ſecundum $+r - 2v$ cum ſecundo $-2e$, invenietur $v \infty e + \frac{1}{2}r$, vel $v \infty y + \frac{1}{2}r$. E quibus manifeſtum fit, ad ducendam rectam P C, opùs tantùm eſſe, dividere latus rectum A D bifariam in puncto I, atque deinde aſſumere P M ipſi A I ſeu I D æqualem.



Quòd ſi verò ipſa tangens C T ſit inveſtiganda, poterimus, ut ante, ſupponendo latus rectum ∞ r, C M ∞ x, & M A ∞ y, quærere A T ∞ v, & A S ∞ $ſ$, hoc pacto:

Fiat

Fiat propter ſimilitudinem triangulorum A S T & M C T, ut A T ad A S, hoc eſt, v ad s, ſic M T, hoc eſt, $y + v$, ad M C. Quæ ideo erit $\frac{sy + sv}{v}$. Unde cum & M C ſit ∞ x, erit $\frac{sy + sv}{v} \infty x$. Hoc eſt, ductâ utrâque parte in ſe quadratè, habebitur $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \infty xx$. Quoniam autem, multiplicatâ M A per latus rectum, rectangulum ry, quod inde fit, ſimiliter ipſi xx, hoc eſt, quadrato ex M C eſt æquale: erit pariter $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \infty ry$. Unde ordinatâ æquatione, terminiſque omnibus ad unam partem tranſpoſitis, fit $yy \overset{+2v}{-} \frac{vvr}{ss} y + vv \infty 0$. Quam ſi porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$, conferendo ſingulos terminos unius cum ſingulis alterius, tertium videlicet cum tertio, obtinebitur $vv \infty ee$, hoc eſt, $v \infty e$. Ac proinde ſi in locum e ſubſtituatur y: fiet $v \infty y$. Id quod oſtendit, ad ducendam rectam C T ad datum punctum C, opùs tantummodo eſſe aſſumere A T æqualem A M, atque connectere puncta C & T.

Quòd ſi autem quæratur A S, poterimus ſecundum terminum cum ſecundo comparare, ſubrogando y in locum v, ut & y in locum e: invenieturque $s \infty \frac{1}{2}\sqrt{ry}$.

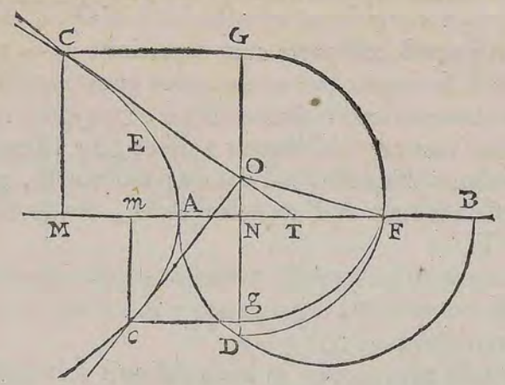
Eodem modò procedendo in binis reliquis ſectionibus, invenietur in Ellipſi $v \infty \frac{qy}{q - 2y}$ & $s \infty \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q - y}}$; at in Hyperbola $v \infty \frac{qy}{q + 2y}$, & $s \infty \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q + y}}$.

Porrò ut appareat, quo pacto è puncto T, in axe vel diametro dato, recta T C ſit ducenda: oportet duntaxat, aſſumptâ quantitate v ceu datâ, quærere y, reliquis manentibus invariatis. Ac proinde, cum in Parabola v & y æquentur, opùs tantùm erit accipere M A æqualem A T, &, ductâ M C ordinatim adplicatâ ad M A, jungere deinde puncta C & T, ut habeatur tangens quæſita.

Quoniam vero in Ellipſi v æquatur $\frac{qy}{q - 2y}$, multiplicando utrinque per $q - 2y$, fiet $qv - 2vy \infty qy$, ſeu $qy + 2vy \infty qv$. Adeoque ſi dividatur utrobique per $q + 2v$, invenietur M A ∞ y ∞ $\frac{qv}{q + 2v}$.

Piri

Pari ratione ſi quæratur M A in Hyperbola erit ipſa $\infty \frac{qv}{q-2v}$. Ubi liquet, ad ducendam ex puncto T rectam T C, quæ tangat Hyperbolam A E C, quantitatem v ſive lineam A T minorem ſemper debere dari quàm $\frac{1}{2}q$, hoc eſt, minorem ſemiſſe lateris tranſverſi, cum aliàs propter Aſymptotos Problema hoc impoſſibile ſit futurum. Quæ determinatio, cum in Parabola & Ellipſi nullum locum habeat, oſtendit, quòd in duabus hiſce ſectionibus ejuſmodi Aſymptotæ non ſint ſuſpiciendæ; ſed in iis ex omni puncto, ubi libet in producta M A aſſumpto, rectas duci poſſe, quæ eaſdem ſectiones contingant.



Ad hæc, ſi ex puncto O, extra axem vel diametrum dato, rectam lineam ducere velimus, ut O C, quæ Parabolam C E contingat: ponatur, ut ſupra, latus rectum ∞r, M A ∞y, M C ∞x, A N ∞a, & N O ∞b, eritque ex jam inventis M T $\infty 2y$ & N T $\infty y - a$.

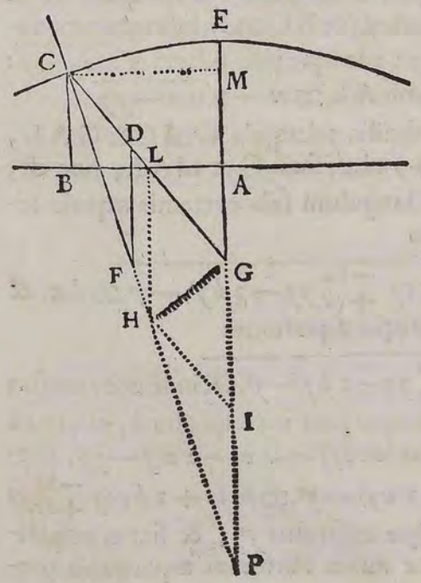
Deinde cum propter ſimilitudinem triangulorum M C T & N O T, M C ad M T, hoc eſt, x ad $2y$, ſicut N O ad N T, hoc eſt, b ad $y - a$: erit $xy - ax$, productum ſub extremis, æquale $2by$, producto ſub mediis. Quoniam verò ex natura Parabolæ, ry, ut ſupra, æquatur xx, hoc eſt, dividendo utrinque per r, y eſt æqualis $\frac{xx}{r}$: hinc ſi in æquatione inventa $xy - ax \infty 2by$ in locum y ſubſtituamus $\frac{xx}{r}$, habebimus

$\frac{x^3}{r} - ax \infty \frac{2bxx}{r}$. Hoc eſt, dividendo ubique per x, & multiplicando per r, invenietur $xx - ar \infty 2bx$, ſeu $xx \infty 2bx + ar$. Quæ eſt æquatio primi caſus quadratarum pag. 6 & 7, admittens unam veram radicem, quæ eſt $b + \sqrt{bb + ar}$, & unam falſam, ſeu minorem quàm nihil, quæ eſt $b - \sqrt{bb + ar}$. Sicut ibidem annotavimus. Cujus utriuſque uſus porrò hîc eleganter elucet.

Nam ſi ad ducendam O C, aſſumptâ N B æquali r, hoc eſt, ∞ lateri recto Parabolæ, ſuper totâ A B deſcribatur ſemicirculus, ſecans O N productam in D: erit N D $\infty \sqrt{ar}$. Quâ poſitâ ab N ad F, ſi jungatur O F, erit ipſa $\infty \sqrt{bo + ar}$. Ac proinde ſi centro O intervallo O F circulus deſcribatur, ſecans N O hinc inde productam in punctis G, g, deſignabit N G verum valorem inventum $b + \sqrt{bb + ar}$, & N g valorem falſum $b - \sqrt{bb + ar}$. Vnde ducendo ex punctis G, g rectas G C, gc, ipſi A M parallelas, donec Parabolæ occurrant: obtinebuntur duo ſimul puncta C, c in quibus rectæ ex O ducendæ eandem contingent.

Simili modo in reliquis ſectionibus eſt procedendum.

Eſto C E prima Conchoïdes Veterum, cujus Polus G, norma verò vel regula, cujus ope ducta eſt, ſit A B; ita ut rectæ omnes, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E & rectam A B continentur, (ut A E, L C) ſint æquales. Oporteat autem rectam lineam ducere (ut C P), quæ Conchoïdem hanc ad angulos rectos ſecet in dato puncto C.] N *In Conchoïde.*



Notandum hîc, quòd, ſi per præcedentem methodum quæratur punctum

ctum in recta A B, per quod quæsita linea C P transire debet, calculus occurrat nullo antecedentium brevior, licèt constructio
o sit valde brevis. *Oportet enim tantùm in recta C G sumere C D, æqualem C B, quæ perpendicularis est ad A B; & deinde ex puncto D rectam ducere D F, parallelam ipsi A G, atque æqualem G L: habebiturque hâc ratione punctum F, per quod quæsita linea C P erit ducenda.*] Quoniam autem in hoc exemplo calculus multò est brevior, si in recta A G quæratur punctum P, per quod linea quæsita C P transire debet, quàm si quæratur in recta A B, atque etiam constructio allata ex illo faciliùs potest ostendi: visum fuit breviorem hîc subjungere, atque constructionem ex eo patefacere.

Esto ergo G A ∞ b, A E vel L C ∞ c, C M vel A B ∞ x, M A vel B C ∞ y, A P ∞ v, & P C ∞ s; eritque tota P M ∞ $v+y$. Cujus quadratum $vv+2vy+yy$ si subtrahatur à quadrato rectæ P C ∞ ss, relinquetur quadratum rectæ C M ∞ $ss-vv-2vy-yy$. Vnde cum C M sit ∞ x, & quadratum ejus ∞ xx: erit $xx \infty ss-vv-2vy-yy$.

Eodem modo, si in triangulo rectangulo B C L à quadrato ex L C ∞ cc auferatur quadratum rectæ B C ∞ yy, relinquetur quadratum rectæ B L ∞ $cc-yy$: adeoque ipsa B L ∞ $\sqrt{cc-yy}$: quâ ab A B ∞ x sublatâ, restabit A L ∞ $x-\sqrt{cc-yy}$.

Iam verò, cum, propter similia triangula G M C & G A L, G M sit ad M C, hoc est, $b+y$ ad x, sicut G A ad A L, hoc est, b ad $x-\sqrt{cc-yy}$: erit rectangulum sub extremis æquale rectangulo sub mediis, nimirum

$$bx+xy-\sqrt{bbcc+2bccy\overset{-bb}{+cc}yy-2by^3-y^4} \infty bx.$$

& deletis utrobique bx, ordinataque æquatione:

$$xy \infty \sqrt{bbcc+2bccy\overset{-bb}{+cc}yy-2by^3-y^4}.$$

Deinde ut evanescat signum radicale, ducatur utraque pars in se quadratè, atque ad tollendum xx substituatur ejus loco $ss-vv-2vy-yy$, fietque æquatio $ssyy-vvyy-2vy^3-y^4 \infty bbcc+2bccy\overset{-bb}{+cc}yy-2by^3-y^4$. Vbi si utrinque auferatur y^4, & fiat transpositio ut quantitates in y^3 ductæ unam obtineant æquationis partem,

tem, reliquæ verò alteram, ac demum utraque pars dividatur per $2v-2b$, orietur æquatio talis:

$$y^3 \infty \frac{\overset{+bb}{-cc}\overset{-cc}{+ss}\overset{-vv}{}yy-2bccy-bbcc}{2v-2b}.$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, erit:

$$y^3\frac{\overset{-bb}{+cc}\overset{+cc}{-ss}\overset{-ss}{+vv}}{2v-2b}yy+2bccy+bbcc \infty 0.$$

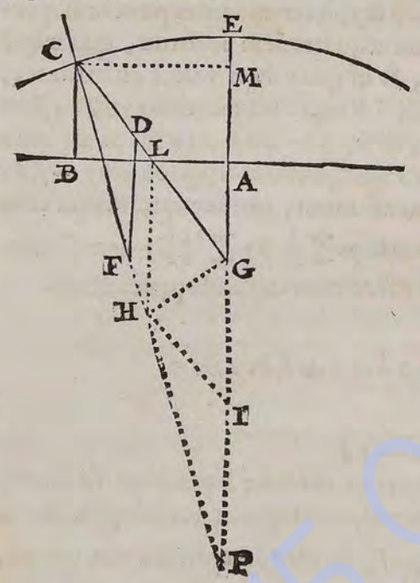
Quæ æquatio relationem ostendit, quam puncta Conchoïdis C E habent ad puncta lineæ rectæ B A. Quare, postquam in ipsa quantitas y est data, quandoquidem punctum C datum est, superest ut inveniamus quantitates v & f, determinantes punctum quæsitum P. Hunc in finem aliam æquationem instituo, quæ æquè multas habeat dimensiones, & in qua y duas valeat quantitates, quæ sibi invicem sint æquales. Ideoque supponendo $y \infty e$, sive $y-e \infty 0$: duco $y-e$ in se, & fit $yy-2ey+ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Hanc porrò multiplico per $y+f$, ut ascendat ad aliam trium dimensionum, ejusdemque formæ cum præcedente, & provenit æquatio $y^3\overset{+f}{-2e}yy\overset{-2ef}{+ee}y+eef \infty 0$. Cujus terminos separatim confero cum terminis præcedentis

$$y^3\frac{\overset{-bb}{+cc}\overset{+cc}{-ss}\overset{-ss}{+vv}}{2v-2b}yy+2bccy+bbcc \infty 0.$$

Vnde cum primus terminus in utraque æquatione sit idem, comparo secundum cum secundo, ac reliquos cum reliquis. Adeò ut, si statuamus $\frac{bbcc}{2v-2b} \infty eef$, & utrinque dividamus per ee, oriatur $f \infty \frac{bbcc}{2vee-2bee}$. Pari ratione, si $\frac{\overset{+2bccy}{-2bccy}}{2v-2b} \infty \overset{-2ef}{+ee}y$, seu $\frac{bcc}{v-b} \infty -2ef+ee$, in locum f subrogetur valor ejus inventus

$\frac{bbcc}{2vee-2bee}$: habebitur $\frac{bcc}{v-b} \infty \frac{-bbcc}{2ve-2be} + ee$, hoc eſt, ſub eodem denominatore $\frac{-bcce}{ve-be} \infty \frac{+bbcc+be^3-e^3v}{ve-be}$. Et omiſſo denominatore, adhibitaque decenti tranſpoſitione, ut quantitas e^3v unam conſtituat æquationis partem, reliquæ verò alteram; dividatur utrinque per e^3, invenieturque $v \infty b + \frac{bcc}{ee} + \frac{bbcc}{e^3}$. Sive, ſubſtituendo y in locum quantitatis ſuppoſitæ e, $v \infty b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

Eodem modo ſi reliquus terminus cum reliquo comparetur, invenietur quantitas incognita s. Quia verò quantitas inventa v ſatis determinat punctum P, quod modò in recta A G quærebatur; & tantùm ab invento puncto P rectam lineam P C ducere oportet, ut quæſtioni ſatisfiat: ulteriori operationi incumbere ſupervacaneum fuerit.



Vt verò ad demonſtrationem ſupra dictæ conſtructionis accedamus, producatur inventa linea C F donec ſecet A G productam in P, atque per L agatur recta L H parallela A G, occurrens ipſi P C in H: unde ductâ H I ipſi C G parallelâ, quæ ſecet A P in I; Dico A P ſeu v æqualem eſſe inventæ quantitati $b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

Cum enim, propter ſimilitudinem triangulorum B C L, A G L, B C ſit ad C L, hoc eſt, y ad c, ſicut A G, hoc eſt, b, ad G L: erit G L $\infty \frac{bc}{y}$. Deinde, quia, propter ſimilia triangula C D F & C L H, C D ∞y eſt ad D F ſeu G L $\infty \frac{bc}{y}$, ſicut C L ∞c ad L H: erit

erit L H $\infty \frac{bcc}{yy}$. Denique, cum, ob ſimilia triangula C D F, H I P, C D ſit ad D F ſeu G L, hoc eſt, y ad $\frac{bc}{y}$, ſicut H I ſeu G L, hoc eſt, $\frac{bc}{y}$, ad I P: erit I P $\infty \frac{bbcc}{y}$. Quare ſi ducatur recta G C, in eaque aſſumatur C D æqualis C B, ac deinde ex puncto D recta agatur D F æqualis G L, & parallela A G: manifeſtum eſt, rectam, quæ puncta F, C, connectit, eſſe lineam quæſitam, quippe quæ Conchoïdem ſecat ad angulos rectos. Quandoquidem, ſi producatur ad P, G I ſit $\infty \frac{bcc}{yy}$, I P $\infty \frac{bbcc}{y^3}$, atque adeò tota A P $\infty b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$. Quod erat faciendum.

Porrò, ut conſtructio adhuc brevior evadat, operæ pretium eſt conſiderare, rectam ab H ad G ductam ipſi G C eſſe perpendicularem. Id quod, ab acutiſſimo noſtro Hugenio primùm obſervatum, deinde ſic verum deprehendi:

Quoniam enim L H ipſi A G eſt parallela, erit angulus H L G æqualis angulo L G A. Deinde, quoniam G A ∞b multiplicata per L H $\infty \frac{bcc}{yy}$ facit $\frac{bbcc}{yy}$, quadratum ipſius G L, quæ eſt $\frac{bc}{y}$: erit A G ad G L, ſicut G L ad L H. Vnde cum in triangulis A G L, L G H latera circa æquales angulos ad G & L ſint proportionalia, erunt itidem anguli G A L & L G H æquales. Eſt autem G A L rectus. Quare & L G H rectus erit.

Hinc talis emergit conſtructio:

Ductâ C G, ſecante A B in L, agatur ex L ipſi A G parallela L H, donec occurrat perpendiculari G H in H: eritque recta H C, quæ ex H per C ducitur, ſecans quæſita.

Non diſſimili ratione invenire licet conſtructionem exempli pag. 47.

Verùm enimverò quoniam lineæ C P alio quoque modo inveſtigari queunt, beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author eſt Vir Clariſſimus D. de Fermat, in Parlamento Toloſano Conſiliarius, quam Herigonius in ſupplemento Curſus ſui Mathematici exemplis aliquot illuſtravit, atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit: haud abs re fore duxi, ſi

hoc loco viam, quâ lineæ C P ope ejusdem Methodi sint inveniendæ, sequenti calculo exposuero.

Esto, ut supra, G A ∞ b, A E vel L C ∞ c, A M ∞ y, & P A ∞ v: eritque G M ∞ $b+y$, & P M ∞ $v+y$. Deinde quæro quadratum ex P C, supponendo illud esse minimum quadratorum omnium, quæ fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. Hoc pacto:

$$\begin{array}{llll}
\text{AM} & \text{LC} & \text{GM} & \text{GC} \\
y & c & b+y, & \text{ad } \frac{bc+cy}{y} \\
 & & & \frac{bc+cy}{y} \\
 & & & \text{subtr.} \begin{cases} \square\,\text{GC.} & \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \\ \square\,\text{GM.} & bb+2by+yy \end{cases} \\
 & & & \square\,\text{MC.} \quad \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by - yy \\
 & & & \text{add. } \square\,\text{PM.} \quad vv+2vy+yy \\
 & & & \text{fit } \square\,\text{PC.} \quad \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by + vv + 2vy.
\end{array}$$

Hoc autem ut sit minimum, positâ jam A M ∞ $y+e$, quæratur rursus, ut ante, quadratum ex P C, quò obtineatur æquatio inter id ipsum bis inventum, quâ innotescat quæsita quantitas v, supponendo e esse ∞ o.

$$\begin{array}{llll}
\text{AM} & \text{LC} & \text{GM} & \text{GC} \\
y+e & c & b+y+e, & \text{ad } \frac{bc+cy+ce}{y+e} \\
 & & & \frac{bc+cy+ce}{y+e} \\
 & & & \text{subtr.} \begin{cases} \square\,\text{GC.} & \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2cccey+cccee}{yy+2ey+ee} \\ \square\,\text{GM.} & bb+2by+yy+2be+2ey+ee \end{cases} \\
 & & & \square\,\text{CM.} \quad \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2cccey+cccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - yy - 2be - 2ey - ee. \\
 & & & \text{add. } \square\,\text{PM.} \quad vv+2vy+yy+2ve+2ey+ee \\
 & & & \square\,\text{PC.} \quad \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2cccey+cccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - 2be + vv + 2vy + 2ve.
\end{array}$$

Hinc

Hinc dempto utrobique $-bb-2by+vv+2vy$, remanebit

$$\infty \frac{\frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy}}{} \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2cccey+cccee}{yy+2ey+ee} - 2be + 2ve, \text{ seu}$$

$$\frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2cccey+ccee-2beyy-4beey-2be^3+2evyy+4eevy+2e^3v.}{yy+2ey+ee}$$

Hoc est, multiplicato per crucem, erit $bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bbccey+4bcceyy+2ccey^3+bbccee+2bcceey+cceeyy \infty bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bcceyy+2ccey^3+cceey-2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Ac proinde sublatis utrinque æqualibus, restabit $2bbccey+2bcceyy+bbccee+2bcceey \infty -2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Diviso jam ubique per e, reserventur quantitates in v ductæ ad unam partem, fietque, translatis reliquis, $2vy^4+4evy^3+2eevyy \infty 2bbccy+2bccyy+bbcce+2bccey+2by^4+4bey^3+2beeyy$. Vnde neglectis iis, quæ in e aut ee ductæ sunt, obtinebitur $2vy^4 \infty 2bbccy+2bccyy+2by^4$. Et fit, dividendo utrinque per $2y^4$, $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$. ut ante. Vbi sciendum, calculum multò abbreviari posse, si in secunda hac operatione multiplicationes, quibus ad ee aut e^3 ascenditur, continuè omittantur.

Atq; hæc quidem via est, quam & Hugenium secutum fuisse confido, prout tangentes curvarum linearum se aliter quàm Fermatius ope hujus ipsius Methodi quæsivisse mihi asseveravit. Quam viam ut omnium maximè contrahamus, poterimus, invento, ut priùs, quadrato ex P C, cum subtilissimo ac sæpiùs laudato nostro Huddenio secundam hanc operationem omnino insuper habere, atque rejectis quantitatibus cc, bb, vv, & ss reliquas per ipsius y dimensiones multiplicare, invertendo porrò signa + & — quantitatum, per y & yy divisarum. Perinde, ut hîc videre est.

$$\square\,\text{PC.} \quad \frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+cc-bb-2by+vv+2vy \infty ss$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{Mult. per} & 2 & 1 & 1 & 1 \\
 & -\frac{2bbcc}{yy} & -\frac{2bcc}{y} & -2by+2vy & \infty \quad 0 \\
 & 2vy \infty \frac{2bbcc}{yy} & +\frac{2bcc}{y} & +2by &
\end{array}$$

Et fit $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$. ut ante. Atque ita de aliis.

Cæte-

Cæterùm quod ad alias Methodos attinet, quibus tum Maximi & Minimi determinatio, tum tangentium ſive ſecantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficiliorum Problematum ſolutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddenio expectare; qui adeò multa ac præclara circa hæc invenit, ut neminem putem repertum iri, qui cum eo in his ſit æquiparandus. quippe is non tantùm Maximi aut Minimi determinationem, cùm quæſtio non niſi unum tale agnoſcit, exhibere valet; ſed etiam, quando complura nec non vario modo infinita Maxima aut Minima admittit, viâ omnium ſimpliciſſimâ elicere novit.

Ad hæc ſi ſuperiori modo ipſam tangentem Conchoïdis C T inveſtigare lubeat, ponatur, ut ante, G A ∞ b, A E vel L C ∞ c, C M vel A B ∞ x, M A vel B C ∞ y, E T ∞ v, & E S ∞ $ſ$: eritque M E ∞ $c-y$, & M T ∞ $c-y+v$. Tum fiat, propter ſimilitudinem triangulorum S T E & C T M, ut T E ad E S, hoc eſt, v ad $ſ$, ita T M, hoc eſt, $c-y+v$, ad M C. $\frac{cſ-ſy+ſv}{v}$ ∞ x. Hinc cum & ſupra inventum ſit $xy \infty \sqrt{bbcc+2bccy-bbyy+ccyy-2by^3-y^4}$, id eſt, dividendo utrinque per y,

$x \infty \frac{\sqrt{bbcc+2bccy-bbyy+ccyy-2by^3-y^4}}{y}$: erit $\frac{cſ-ſy+ſv}{v}$

$\infty \frac{\sqrt{bbcc+2bccy-bbyy+ccyy-2by^3-y^4}}{y}$. Vnde quadratis ſingulis partibus ordinatâque æquatione invenitur

$$\begin{array}{lllll} y^4 \infty & +2cſſy^3 & +ccvvyy & +2bccvvy & +bbccvv \\ & +2vſſ & -bbvv & & \\ & -2bvv & -ccſſ & & \\ & & -2cvſſ & & \\ & & -vvſſ & & \\ \hline & & ſſ+vv. & & \end{array}$$

Hoc eſt, tranſlatis quantitatibus omnibus ad unam partem, habebitur

$$\begin{array}{lllll} y^4- & 2cſſy^3- & ccvvyy- & 2bccvvy- & bbccvv \infty 0. \\ & -2vſſ & +bbvv & & \\ & +2bvv & +ccſſ & & \\ & & +2cvſſ & & \\ & & +vvſſ & & \\ \hline & & ſſ+vv & & \end{array}$$

Deinde, ad inveniendas quantitates v & $ſ$, poſitâ $y \infty e$, ſeu $y-e \infty 0$,

$\infty 0$, multiplico $y-e \infty 0$ per $y-e \infty 0$, & fit $yy-2ey+ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Quam porrò, ut ad æquèmultas cum præcedente dimenſiones aſcendat ac ejuſdem cum illa ſit formæ, multiplico per $yy-fy-gg$, & provenit

$$\begin{array}{lllll} y^4- & 2ey^3 & +eeyy & -eefy & -eegg \infty 0. \\ & -f & +2ef & +2egg & \\ & & -gg & & \end{array}$$

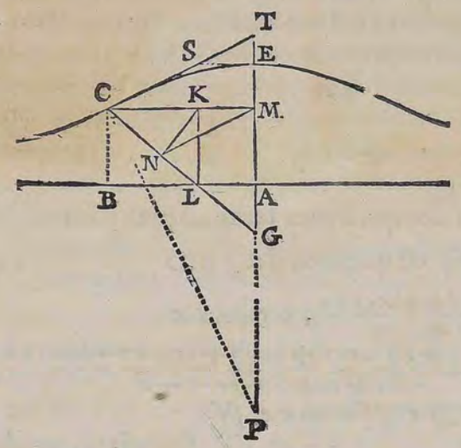
Cujus itaque terminos ſeparatim comparo cum terminis præcedentis. Vltimus terminus, qui hîc eſt quintus, dat $gg \infty \frac{bbccvv}{eeſſ+eevv}$, quartus dat $f \infty \frac{2bbccvv+2bcceevv}{e^3ſſ+e^3vv}$, tertius dat

$ſſ \infty \frac{3bbccvv+4bcceevv+e^4vv+cceeevv-bbeevv}{ccee+2ceev+eevv-e^4}$, & ſecundus dat $vv \infty \frac{e^3ſſv+ce^3ſſ-e^4ſſ}{e^4+be^3+bbcc+bcce.}$ Quocirca, ut obtineatur v, ſi ipſius $ſſ$ valor jam inventus multiplicetur per $\frac{e^3v+ce_3-e^4}{e^4+be^3+bbcc+bcce}$, abbreviando priùs, ad facilitatem operationis, numeratorem prioris & denominatorem poſterioris fractionis per $e+b$, ac deinde denominatorem prioris & numeratorem poſterioris fractionis per $eev+cee-e^3$, exurget $e^4-be^3+ccee+3bcce \infty e^4+e^3v+ce^3+bcce+bccv+bc^3$. Fietque, ordinatâ æqualitate, $v \infty \frac{-bc^3+2bcce+ccee-be^3-ce^3}{bcc+e^3}$. Seu, quia y eſt ∞ e, erit $v \infty \frac{-bc^3+2bccy+ccyy-by^3-cy^3}{bcc+e^3}$.

Denique, inventâ quantitate v, facile eſt invenire quantitatem $ſ$. Si enim in ſuperiori æquatione $\frac{cſ-ſy+ſv}{v}$ $\infty \frac{\sqrt{bbcc+2bccy-bbyy+ccyy-2by^3-y^4}}{y}$ in locum v ſubrogetur valor ejus nunc inventus, obtinebitur

$ſ \infty \frac{-bcc+bcy+cyy+byy}{y^4+by^3+cy^3+bcyy} \sqrt{bbcc+2bccy-bbyy+ccyy-2by^3-y^4}$.

Quod ad conſtructionem hujus attinet, quoniam ipſa, quam inveni, haud inconcinna mihi eſt viſa, placuit eam hîc paucis ſubnectere.



Ductâ ex C super G E perpendiculari C M, agatur G C, secans A B in L; & ex L ducatur L K parallela G E, occurrens ipsi C M in K. Deinde ex K demissâ K N perpendiculari ad C G, jungatur N M: eritque C T huic parallela tangens quæsita.

Quibus explicatis facile etiam est hîc ostendere, quonam pacto punctum Conchoïdis C, quod duas ejus portiones, concavam & convexam, à se invicem distinguit, investigari queat. De quo egit Nobilissimus D. Hugenius ultimo Problematum Illustrium, quæ de Circuli magnitudine inventis adjecit.

Etenim inventâ ad hoc, ut ante, æquatione

$$\begin{array}{llllll} y^4 & -2cssy^3 & -ccvvyy & -2bccvvy & -bbccvv & \infty 0. \\ & -2vss & +bbvv & & & \\ & +2bvv & +ccss & & & \\ & & +2cvss & & & \\ & & +vvss & & & \\ \hline & & vv+ss & & & \end{array}$$

quoniam ex puncto T, utcunque in producta G E accepto, nulla recta duci potest, Conchoïdem in aliquo puncto tangens, quæ, seu postquam est producta, hanc ipsam in alio puncto non secat, exceptâ tantùm rectâ, quæ per flexus punctum ducitur: requiritur ut dicta æquatio ad puncti hujus determinationem tres admittat

tat radicis valores, qui omnes inter se sint æquales. Quod ipsum ut fiat, confero æquationem superiorem cum æquatione $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 \infty 0$, in qua y tres habet valores æquales, qui singuli sunt ∞ e. Hanc autem, ut ad æquè multas dimensiones ascendat, & ejusdem cum præcedenti sit formæ, multiplico per $y+f$, & prodit æquatio

$$\begin{array}{llllll} y^4 & -3ey^3 & +3eeyy & -e^3y & -e^3f & \infty 0. \\ & +f & -3ef & +3eef & & \end{array}$$

Cujus termini si cum alterius terminis comparentur, invenientur inde $f \infty \frac{bbccvv}{e^3ss + e^3vv}$, $ss \infty \frac{3bbccvv}{e^4} + \frac{2bccvv}{e^3} - vv$, $v \infty \frac{bbcc + 2bcce + ccee}{3bcc - 3bee} - b - c$, & $e^3 \infty -3bee^* + 2bcc$, seu, quia y est ∞ e, $y^3 \infty -3byy^* + 2bcc$.

Quoniam autem hæc æquatio Cubica est, neque ad Quadratam reduci potest, superest ut valorem radicis y per sectiones Conicas determinemus. At verò cum æquationes omnes inferiores construi etiam queant beneficio linearum curvarum, quæ sunt superiorum generum, non ingratum fore judicavi, si hîc ulteriùs exponerem, quo pacto ope datæ Conchoïdis C E Problema propositum solvi possit, sic ut ad constructionem ejus non nisi regula atque circino utamur, haud secus ac si Problema foret Planum. Quemadmodum id ab eruditissimo ac præstantissimo Viro-Iuvene D. Henrico van Heuraet, Harlemo-Batavo, inventum fuit, mihique ab eo communicatum.

Esto, ut ante, G A ∞ b, A E vel L C ∞ c, B C vel A M ∞ y, & A T ∞ z. Vnde ut supra pro A P invenietur $\frac{by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$.

$$\begin{array}{lll} \text{add. A M.} & y & \\ \text{P M.} & \frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3} & \\ \text{M T.} & z - y & \\ \hline \square\text{P M T.} & \frac{-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}. & \end{array}$$

Est autem $\square$ C M. $\frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc}{yy}$.

Erit itaque $\dfrac{-y^5 \overset{+z}{-b} y^4 + bzy^3 - bccyy \overset{+bccz}{-bbcc} y + bbccz}{y^3}$

$$\infty \dfrac{-y^4 - 2by^3 \overset{-bb}{+cc} yy + 2bccy + bbcc}{yy}$$

$$\dfrac{-y^5 \overset{+z}{-b} y^4 + bzy^3 - bccyy \overset{+bccz}{-bbcc} y + bbccz \infty -y^5 - 2by^4 \overset{-bb}{+cc} y^3 + 2bccyy + bbccy}{\overset{+z}{+b} y^4 \overset{+bz}{+bb} y^3 - 3bccyy \overset{+bccz}{-2bbcc} y + bbccz \infty 0}$$

$\overset{-cc}{-}$

div. per $y+b$. fit $\overset{+z}{+b} y^3 - ccyy - 2bccy + bccz \infty 0$. Hæc æquatio duas habet veras radices, quippe quæ ad duas tangentes, ex eodem puncto ad utramque portionem ductas, pertinent; quæ si æquales fuerint, tanget T C utramque portionem in eodem puncto.

$$\begin{array}{l} y - e \\ y - e \\ \hline yy - 2ey + ee \infty 0 \\ y + g \\ \hline y^3 - 2eyy + eey + eeg \infty 0 \\ \quad + g \quad - 2eg \end{array}$$

$$\dfrac{\overset{-cc}{-}}{z+b} \infty -2e + g$$

$$g \infty 2e - \dfrac{cc}{z+b}$$

$$\text{dele } g.\ \dfrac{bccz}{z+b} \infty eeg$$

$$\dfrac{bccz}{z+b} \infty 2e^3 - \dfrac{ccee}{z+b}$$

$$bccz \infty 2ze^3 + 2be^3 - ccee$$

$$\text{Mult. per } 3.\ 2ze^3 + 2be^3 - ccee - bccz \infty 0$$

$$6ze^3 + 6be^3 - 3ccee - 3bccz \infty 0$$

$$\text{subtr. } 6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$$

$$\text{div. per } cc.\ \dfrac{ccee + 4bcce - 3bccz \infty 0}{ee + 4be - 3bz \infty 0}$$

Mult. per $3z + 3b$.

$$3zee + 3bee + 12bze + 12bbe - 9bzz - 9bbz \infty 0$$

$$\text{subtr. } 3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0$$

$$12bze + 12bbe + 2cce - 9bzz - 9bbz + 2bcc \infty 0$$

$$12bze + 12bbe + 2cce \infty 9bzz + 9bbz - 2bcc$$

$$e \infty \dfrac{9bzz + 9bbz - 2bcc}{2cc + 12bz + 12bb}.$$

$$\text{dele } g.\ \dfrac{-2bcc}{z+b} \infty ee - 2eg$$

$$-\dfrac{2bcc}{z+b} \infty ee - 4ee + \dfrac{2cce}{z+b}$$

$$-2bcc \infty -3zee - 3bee + 2cce$$

$$\text{Mult. per } 2e.\ 3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0$$

$$6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$$

Igi-

Igitur si in æquatione $ee + 4be - 3bz \infty 0$ in locum e substituatur hic valor inventus, habebitur:

$$81bbz^4 + 162b^3z^3 - 108bbccz - 204b^3ccz - 12bbc^4 + 81b^4 - 12bc^4 - 96b^4cc \infty 0$$

$$\text{div. per } 3b.\ 27bz^4 + 54bbz^3 - 36bccz - 68bbcz - 4bc^4 + 27b^3 - 4c^4 - 32b^3cc \infty 0$$

$$\text{div. per } z+b.\ 27bz^3 + 27bbzz - 36bccz - 32bbcc - 4c^4 \infty 0$$

$$\text{div. per } 27b.\ \text{Et fit } z^3 + bzz - \tfrac{4}{3}ccz - 32bbcc - \dfrac{4c^4}{27b} \infty 0.$$

Iam ut æquatio hæc ope circuli ac datæ Conchoïdis solvatur, ponatur G A ∞b
A E ∞c Tum fiat, ut sequitur.
A T ∞x
T C ∞y
& A M ∞z, eritque M T $\infty x - z$.

$$\text{subtr.} \begin{cases} \square\, \text{C T. } yy \\ \square\, \text{M T. } xx - 2xz + zz \\ \square\, \text{C M. } yy - xx + 2xz - zz \infty \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \square\, \text{C M. Ex natura Conchoïdis.} \\ \dfrac{-z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc}{zz} \end{array}$$

$$yyzz - xxzz + 2xz^3 - z^4 \infty -z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc$$

$$\overset{+2x}{+2b} z^3 \overset{+yy}{-xx} zz - 2bccz - bbcc \infty 0$$

$$\overset{+bb}{-cc}$$

$$\text{div. per } 2x + 2b.$$

$$\text{Et fit } z^3 \overset{+yy}{-xx} zz - 2bccz - bbcc \infty 0$$

$$\overset{+bb}{-cc}$$

$$2x + 2b$$

Hinc cum termini hujus æquationis cum terminis proximè antecedentis sint comparandi, & quidem ad inveniendas quantitates x & y tres essent æquationes quærendæ: facio ut in eadem æquatione tertius terminus sit ad quartum, sicut tertius hujus est ad quartum. In quem finem secundum illius terminum multiplico