Offert à mon ami Bienaymé.

J. Liouville.

J. Timtchenko
MDCCCXCI

Catait De Jouy

Ces Elemens de Geometrie sont du Celebre Antoine Arnaud, Docteur de Sorbonne.

Euclide n'a pensé qu'a ranger ses propositions de maniere qu'elles se servirent de preuves les unes aux autres; en quoi il a réussi. La Verité se trouve dans ses Elemens; mais il y a tant de Confusion que bien loin de donner a l'Esprit l'idée et le goût du veritable ordre, ils ne peuvent au contraire que l'accoutumer au desordre et a la Confusion.

C'est dans les Elemens de M. Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel qui n'est point dans ceux d'Euclide. S'il eut traité des Solides, je n'aurais peut etre jamais pensé a travailler a des nouveaux Elemens. Ce fut pour y suppléer que j'en eus la premiere pensée. B. Lamy.

La Préface de ces Elemens est de Nicole auteur de la Logique de P. R.

NOUVEAUX ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
CONTENANT,

Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonstrations des Propositions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles Lignes sont incommensurables:

De nouvelles mesures des Angles, dont on ne s'étoit point encore avisé:

Et de nouvelles manieres de trouver & de démontrer la proportion des Lignes.

SECONDE EDITION.

Où il y a un Traité tout nouveau des Proportions, & beaucoup d'autres changemens considerables.

DeBerennay De Bois fleurans

Suivant la Copie de Paris.

A LA HAYE,
Chez HENRY VAN BULDEREN, Marchand Libraire, dans le Pooten, à l'Enseigne de MEZERAY.
M. DC. XC.

AVERTISSEMENT
Sur cette ſeconde Edition.

Fouchy

LA Geometrie eſt d'une ſi grande utilité, & il eſt ſi neceſſaire de bien connoître les rapports qui ſe rencontrent entre diverſes Grandeurs: qu'il eſt preſque impoſſible de faire aucun progrés conſiderable dans les Arts liberaux, ſans avoir quelque teinture de cette Science. Il ſeroit à deſirer que l'on s'y appliquât plus qu'on ne fait, & que cette connoiſſance devint plus commune. Car outre l'uſage continuel qu'on en peut faire dans tous les Arts avec un trés grand avantage: un Eſprit Geometrique eſt plus juſte que celui qui ne l'eſt pas, & beaucoup moins ſujet à prendre la vrai-ſemblance pour la verité. C'eſt pourquoi l'on eſt redevable à ceux qui travaillent à rendre cette Science facile, & en particulier à l'Autheur; non ſeulement de nous avoir donné ces *nouveaux Elemens, ſans leſquels pluſieurs perſonnes n'auroient jamais eu de goût pour une connoiſſance qui demande tant d'application: mais auſſi de ce qu'il a pris la peine de les corriger, & d'y faire pluſieurs changemens conſiderables. La matiere qui y eſt traitée, principalement dans les quatre premiers Livres, eſt d'elle même ſi abſtraite, qu'il ne faut pas s'étonner ſi pluſieurs ſe ſont aiſément rebutez dés l'entrée, & s'ils ont été obligez trés ſouvent de commencer par le cinquiéme Livre. C'eſt dans le deſſein de lever cette difficulté que l'Autheur y a changé beaucoup de choſes, & qu'il a refait entierement le ſecond & le troiſiéme Livre: où il explique la nature des Raiſons & des Proportions Geometriques, ſoit ſimples, ſoit compoſées, avec beaucoup plus de netteté & d'ordre qu'il n'avoit fait dans la premiere Edition. Et l'on peut dire que la maniere dont il ſe ſert ne paroîtra pas ſi difficile à ceux qui voudront s'y appliquer un peu. Il y auroit ici aſſez de fondement de s'étendre ſur la bonté de cét Ouvrage, qui fut reçeu dés la premiere fois avec tant d'applaudiſſement. Mais il eſt plus à propos de ne point prevenir les Lecteurs; & l'on doit eſperer que l'avancement que feront dans la Geometrie ceux qui ſe ſerviront de ces Elemens, en ſera une preuve plus ſeure que tout ce qu'on en pourroit dire.*

PREFACE. Fouchy

QUOI que j'aye quelque ſorte de liberté de parler avantageuſement de ces Nouveaux Elemens de Geometrie, puiſque je n'y ay point d'autre part que celle de les avoir tirez des mains de l'Autheur pour les donner au Public; mon deſſein n'eſt pas neanmoins d'en faire voir icy l'excellence, ny de les propoſer au monde comme un ouvrage fort conſiderable. Je ſerois plûtoſt porté à diminuer l'idée trop haute que quelques perſonnes en pouvoient avoir, étant trés perſuadé qu'il eſt beaucoup plus dangereux d'eſtimer trop ces ſortes de choſes, que de ne les pas eſtimer aſſez.

La nature de toutes les Sciences humaines, & principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, eſt d'être mêlées d'utilitez & d'inutilitez: & je ne ſçay ſi l'on ne peut point dire qu'elles ſont toutes inutiles en elles-mêmes, & qu'elles devroient paſſer pour un amuſement entierement vain & indigne de perſonnes ſages, ſi elles ne pouvoient ſervir d'inſtrumens & de preparations à d'autres connoiſſances vraiment utiles. Ainſi ceux qui s'y attachent pour elles-mêmes comme à quelque choſe de grand & de relevé, n'en connoiſſent pas le vray uſage; & cette ignorance eſt en eux un beaucoup plus grand défaut, que s'ils ignoroient abſolument ces Sciences.

Ce n'eſt pas un grand mal que de n'être pas Geometre; mais c'en eſt un conſiderable que de croire que la Geometrie eſt une choſe fort eſtimable, & de s'eſtimer ſoy-même pour s'être rempli la têſte de Lignes, d'Angles, de Cercles, de proportions. C'eſt une ignorance trés blâmable que de ne pas ſçavoir que toutes ces ſpeculations ſteriles ne contribuent rien à nous rendre heureux; qu'elles ne ſoulagent point nos miſeres; qu'elles ne gueriſſent point nos maux; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel & ſolide; que l'Homme n'eſt point fait pour cela, & que bien loin que ces Sciences lui donnent ſujet de s'élever en lui-même, elles ſont au contraire des preuves de la baſſeſſe de ſon eſprit; puiſqu'il eſt ſi vain & ſi vuide de vray bien, qu'il eſt capable de s'occuper tout-entier à des choſes ſi vaines & ſi inutiles.

Cependant on ne voit que trop par experience, que ces ſortes de connoiſſances ſont d'ordinaire jointes à l'ignorance de leur prix & de leur uſage. On les recherche pour elles-mêmes; on s'y applique comme à des choſes fort importantes; on en fait ſa principale profeſſion; on ſe glorifie des découvertes que l'on y fait; on croit fort obliger le monde ſi l'on veut bien luy en faire part; & l'on s'imagine meriter par là un rang fort conſiderable entre les Sçavans & les grands Eſprits.

Si cét Ouvrage n'a rien de ce qui merite la reputation de grand Geometre au jugement de ces perſonnes, en quoy il eſt trés juſte de les en croire; au moins on peut dire avec verité que celuy qui l'a composé eſt exempt du défaut de la ſouhaiter, & que quoy qu'il eſtime beaucoup le genie de pluſieurs perſonnes qui ſe mêlent de cette Science, il n'a qu'une eſtime trés mediocre pour la Geometrie en elle même. Neanmoins comme il eſt impoſſible de ſe paſſer abſolument d'une Science qui ſert de fondement à tant d'Arts neceſſaires à la vie humaine: il peut y avoir quelque utilité à montrer aux Hommes de quelle ſorte ils en doivent uſer, & de leur rendre cette étude la plus avantageuſe qu'il eſt poſſible.

C'eſt l'unique vûë qu'a eüe l'Autheur de ces nouveaux Elemens. Il n'a pas tant conſideré la Geometrie, que l'uſage qu'on en pouvoit faire; & il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en ſont pas inſeparables, on s'en pouvoit trés-utilement ſervir pour former les jeunes gens, non ſeulement à la juſteſſe de l'eſprit, mais même en quelque ſorte à la pieté & au reglement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on en peut tirer, il faut conſiderer que dans les premieres années de l'enfance, l'Ame de l'Homme eſt comme toute plongée & toute enſevelie dans les ſens, & qu'elle n'a que des perçeptions obſcures & confuſes des objets qui font impreſſion ſur ſon corps. Elle ſort à la verité de cét état à meſure que ſes organes ſe dégagent & ſe fortifient par l'âge, & elle acquiert quelque liberté de former des penſées plus claires & plus diſtinctes, & même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raiſonnement. Mais l'amour des choſes ſenſibles & exterieures lui étant devenu comme naturel, & par la corruption de ſon origine & par l'accoûtumance qu'elle a contractée durant l'enfance: les choſes exterieures ſont toûjours le principal objet de ſon plaiſir & de ſa pente. Ainſi non ſeulement les jeunes gens

gens ne ſe plaiſent gueres que dans les choſes ſenſuelles ; mais même entre les perſonnes avancées en âge il y en a peu qui ſoient capables de trouver du gouſt dans une verité purement ſpirituelle, & où les ſens n'ayent aucune part. Toute leur application eſt toûjours aux manieres agreables ; ils n'ont de l'intelligence & de la delicateſſe que pour cela, & ils ne ſe ſervent de leur eſprit que pour étudier l'agréement & l'art de plaire, par les choſes qui flatent la concupiſcence & les ſens.

Il me ſeroit aiſé de montrer que cette diſpoſition d'eſprit eſt non ſeulement un trés grand défaut ; mais que c'eſt la ſource des plus grands deſordres & des plus grands vices. Il eſt vray qu'il n'y a que la Grace & les exercices de pieté qui puiſſent la guerir veritablement : mais entre les exercices humains qui peuvent le plus ſervir à la diminuer, & à diſpoſer même l'Eſprit à recevoir les veritez Chrêtiennes avec moins d'oppoſition & de dégouſt, il ſemble qu'il n'y en ait gueres de plus propre que l'étude de la Geometrie. Car rien n'eſt plus capable de détacher l'Ame de cette application aux ſens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agreable ſelon les ſens ; & c'eſt ce qui ſe rencontre parfaitement dans cette Science. Elle n'a rien du tout qui puiſſe favoriſer tant ſoit peu la pente de l'Ame vers les ſens ; ſon objet n'a aucune liaiſon avec la concupiſcence ; elle eſt incapable d'éloquence & d'agréement dans le langage ; rien n'y excite les paſſions ; elle n'a rien du tout d'aimable que la verité, & elle la preſente à l'Ame toute nuë & détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choſes.

Que

Que ſi les veritez qu'elle propoſe ne ſont pas fort utiles ny fort importantes, ſi l'on en demeuroit là ; il eſt neanmoins trés utile & trés important de s'accoûtumer à aimer la verité, à la gouſter, à en ſentir la beauté. Et Dieu ſe ſert ſouvent de cette diſpoſition d'eſprit, pour nous faire entrer dans l'amour & dans la pratique des veritez qui conduiſent au ſalut, pour nous faire voir l'illuſion de tout ce qui plaiſt dans les choſes ſenſibles & exterieures, & pour nous rendre juſtes & équitables dans toute la conduite de nôtre vie ; cét eſprit d'équité conſiſtant principalement dans le diſcernement & dans l'amour de la verité en toutes les affaires que nous traitons.

Mais la Geometrie ne ſert pas ſeulement à détacher l'Eſprit des choſes ſenſibles, & à inſpirer le gouſt de la verité ; elle apprend auſſi à la reconnoiſtre & à ne ſe laiſſer pas tromper par quantité de maximes obſcures & incertaines, qui ſervent de principes aux faux raiſonnemens dont les diſcours des Hommes ſont tout remplis. Car ſi l'on y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur & nous fait prendre le faux pour le vray, n'eſt pas le défaut de la liaiſon des conſequences avec les principes, en quoy conſiſte ce qu'on appelle la forme des argumens ; mais c'eſt l'obſcurité des principes mêmes, qui n'étant pas exactement vrais, & n'étant pas auſſi évidemment faux, preſentent à l'Eſprit une lumiere confuſe où la verité & la fauſſeté ſont mêlées ; ce qui cauſe à pluſieurs un eſpece d'éblouiſſement qui leur fait approuver ces principes ſans les examiner davantage.

Il eſt vray que la Logique nous donne deux ex-

excellentes regles pour éviter cette illusion, qui sont de définir tous les mots équivoques, & de ne recevoir jamais que des principes clairs & certains. Mais ces regles ne suffisent pas pour nous garantir d'erreur. Premierement, parce qu'on se trompe souvent dans la notion même de l'évidence, en prenant pour évident ce qui ne l'est pas. Et en second lieu, parce que quoy qu'on sçache ces regles, on n'est pas toûjours appliqué à les pratiquer. Il n'y a donc que la Geometrie qui remedie en effet à l'un & à l'autre de ces défauts. Car d'une part en fournissant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modelle de la clarté & de l'évidence pour discerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l ont pas: & de l'autre, comme elle ne se dispense jamais de l'observation de ces deux regles, elle accoûtume l'Esprit à les pratiquer, & à être toûjours en garde contre les équivoques des mots & contre les principes confus, qui sont les deux sources les plus communes des mauvais raisonnemens.

Il ne faut pas dissimuler neanmoins, que cette coûtume même de rejetter tout ce qui n'est pas entierement clair, peut engager dans un défaut trés considerable, qui est de vouloir pratiquer cette exactitude en toute sorte de matieres, & de contredire tout ce qui n'est pas proposé avec l'évidence Geometrique. Cependant il y a une infinité de choses dont on ne doit pas juger en cette maniere, & qui ne peuvent pas être reduites à des demonstrations methodiques. Et la raison en est, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes grossiers & certains, comme les veritez Mathematiques; mais d'un grand nombre de preuves & de circonstan-

ces qu'il faut que l'Esprit voye tout dun coup, & qui n'étant pas convainquantes separément, ne laissent pas de persuader avec raison, lors qu'elles sont jointes & unies ensemble. La plûpart des matieres morales & humaines sont de ce nombre; & il y a même des veritez de la Religion qui se prouvent beaucoup mieux par la lumiere de plusieurs principes qui s'entr'aident & se soûtiennent les uns les autres, que par des raisonnemens semblables aux demonstrations Geometriques.

C'est donc sans doute un fort grand défaut que de ne faire pas distinction des matieres; d'exiger par tout cette suite methodique de propositions que l'on voit dans la Geometrie; de faire difficulté sur tout, & de croire avoir droit de rejetter absolument un principe, lors qu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais si ce défaut est assez ordinaire à quelques Geometres, il ne naist pas neanmoins de la Geometrie même. Cette Science étant toute veritable ne peut pas authoriser une conduite qui n'est fondée que sur des principes d'erreur. Car il n'est pas vray qu'un principe qui ne prouve pas absolument ne prouve rien; & que ne prouvant pas tout-seul, il ne prouve pas étant joint à d'autres. Il y a differens degrez de preuves. Il y en a dont on conclud la certitude, & d'autres dont on conclud l'apparence; & de plusieurs apparences jointes ensemble on conclud quelquefois une certitude à laquelle tous les Esprits raisonnables se doivent rendre. Il n'est pas absolument certain que l'on doive voir le Soleil quelqu'un des jours de l'Année qui vient, je le dois neanmoins croire ; & je ſerois ridicule d'en douter, quoy qu'il ſoit impoſſible de le démontrer. La Raiſon ne doit donc pas prétendre de démontrer Geometriquement ces choſes ; mais elle peut prouver Geometriquement que c'eſt une ſottiſe de ne les pas croire : & c'eſt en cette maniere qu'on ſe peut ſervir de la Geometrie même dans ces ſortes de matieres, pour faire voir plus clairement la force de la vrai-ſemblance qui nous les doit faire croire.

Outre ces utilitez que l'on peut tirer de la Geometrie, on en peut encore remarquer deux autres qui ne ſont pas moins conſiderables. Il y a des veritez importantes pour la conduite de la vie & pour le ſalut, qui ne laiſſent pas d'être difficiles à comprendre, & qui ont beſoin d'une attention pênible ; Dieu ayant voulu, comme dit S. Auguſtin, que le pain de l'Ame ſe gagnaſt avec quelque ſorte de travail auſſi bien que le pain du Corps. Et il arrive de là que pluſieurs perſonnes s'en rebutent par une certaine pareſſe, ou plûtoſt par une delicateſſe d'eſprit qui leur donne du dégouſt de tout ce qui demande quelque effort & quelque ſorte de contention. Or l'étude de la Geometrie eſt encore un remede à ce défaut ; car en appliquant l'Eſprit à des veritez abſtraites & difficiles, elle lui rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application ; comme en accoûtumant le corps à porter des fardeaux pezans, on fait qu'il ne ſent preſque plus le poids de ceux qui ſont plus legers.

Non ſeulement elle ouvre l'Eſprit & le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine ; mais elle fait auſſi qu'il devient plus éten-

du & plus capable de comprendre pluſieurs choſes à la fois. Car les veritez Geometriques ont cela de propre qu'elles dépendent d'un long enchaînement de principes qu'il faut ſuivre pour arriver à la concluſion ; & comme cette concluſion tire ſa lumiere de ces principes, il faut que l'Eſprit voye en même temps, & ce qui éclaire & ce qui eſt éclairé : ce qu'il ne peut faire ſans s'étendre, & ſans porter ſa veuë plus loin que dans ſes actions ordinaires.

Cette étenduë d'eſprit, qui paroiſt dans la Geometrie, eſt non ſeulement trés - utile pour tous les ſujets qui ont beſoin de raiſonnement : mais elle eſt auſſi trés admirable en elle-même ; & il n'y a gueres de qualité de nôtre Ame qui en faſſe mieux voir la grandeur, & qui détruiſe davantage les imaginations baſſes & groſſieres de ceux qui voudroient la faire paſſer pour une matiere. Car le moyen de s'imaginer qu'un Corps, c'eſt à dire, un Eſtre où nous ne concevons qu'une étenduë figurée & mobile, puiſſe penetrer ce grand nombre de principes tout ſpirituels qu'il faut lier enſemble pour la preuve des propoſitions que la Geometrie nous démontre, & qu'il porte même ſa veuë juſques dans l'Infiny pour en aſſeurer ou en tirer pluſieurs choſes avec une certitude entiere ? Elle nous fait voir par exemple, que la Diagonale & le côté d'un Quarré n'ont nulle meſure commune ; c'eſt à dire, que l'Eſprit voit que dans l'infinité des parties de differente grandeur qu'on y peut choiſir, il n'y en a aucune qui puiſſe meſurer exactement l'une & l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propositions Geometriques sont de même infinies en étenduë ; parce que l'on n'y conclud pas ce qu'on démontre d'une seule Ligne, d'un seul Angle, d'un seul Cercle, d'un seul Triangle: mais de toutes les Lignes, de tous les Angles, de tous les Cercles, de tous les Triangles ; & qu'ainsi l'Esprit les renferme & les comprend tous en quelque sorte, quelque infinis qu'ils soient. Or que tout cela se puisse faire par le bouleversement d'une matiere, & qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets spirituels, & d'en comprendre même une infinité : c'est ce que personne ne sçauroit croire ny penser, pourvû qu'il veuille de bonne foy songer à ce qu'il dit.

Ce sont ces reflexions qui ont fait juger à l'Autheur de ces Elemens, qu'on pouvoit faire un bon usage de la Goemetrie ; mais ce n'est pas neanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puisqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la verité ; ils apprennent à la discerner ; ils fortifient la Raison ; ils étendent la veuë de l'Esprit, & ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'Ame de l'Homme, & de reconnoistre qu'elle ne peut être autre que spirituelle & immortelle.

Ce qui lui a donc fait croire qu'il étoit utile de donner une nouvelle forme à cette Science, est, qu'étant persuadé que c'étoit une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses pensées à un ordre naturel, cét ordre étant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes par les autres : il a toûjours eu quelque peine

peine de ce que les Elemens d'Euclide étoient tellement confus & broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'Esprit l'idée & le goust du veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au desordre & à la confusion.

Ce défaut lui paroissoit considerable dans une Science dont la principale utilité est de perfectionner la Raison ; mais il n'eust pas pensé neanmoins à y remedier, sans la rencontre que je vai dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands Esprits de ce siecle, & des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un Essay d'Elemens de Geometrie ; & comme il n'avoit pas cette veuë de l'ordre, il s'étoit contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide, pour en substituer d'autres plus nettes & plus naturelles. Ce petit Ouvrage étant tombé entre les mains de celuy qui a depuis composé ces Elemens, il s'étonna qu'un si grand Esprit n'eust pas été frappé de la confusion qu'il avoit laissée pour ce qui est de la methode, & cette pensée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de disposer toute la Geometrie ; les démonstrations s'arrangerent d'elles mêmes dans son Esprit, & tout le corps de l'Ouvrage que nous donnons maintenant au Public se forma dans son idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques-uns de ses amis, que s'il avoit le loisir, il luy feroit facile de faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez ; mais ce n'étoit encore qu'un projet en en l'air qu'il avoit peu d'esperance de pouvoir executer, quoi que quelques personnes l'en priassent; parce qu'il auroit fait scrupule d'y employer un temps où il auroit été en état de faire quelqu'autre chose.

Il est arrivé neanmoins depuis que diverses rencontres luy ont donné le loisir dont il avoit besoin pour cela. Il fut une fois obligé par une indisposition de quitter ses occupations ordinaires, & il trouva son soulagement en se déchargeant d'une partie de ce qu'il avoit dans l'Esprit sur cette matiere. Une autrefois il se trouva quatre ou cinq jours dans une maison de Campagne sans aucun livre, & il remplit encore ce vuide en composant quelque partie de ce Traité. Enfin en ménageant ainsi quelques petits temps, il a achevé ce qu'il avoit dessein de faire de cét Ouvrage, s'étant borné d'abord à la Geometrie des Plans, comme pouvant suffire au commun du monde.

Quelques personnes se sont étonnez qu'en écrivant d'une matiere si étenduë, & qui a été traitée par un si grand nombre d'habiles gens, il ne leût pour cela aucun livre de Geometrie, n'en ayant point même dans sa Bibliotheque: mais il leur répondoit, que l'ordre le conduisoit tellement, qu'il ne croyoit pas pouvoir rien oublier de considerable. Il ajoûtoit même que cét ordre ne servoit pas seulement à faciliter l'intelligence & à soulager la memoire: mais qu'il donnoit lieu de trouver des principes plus feconds, & des demonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire. Et en effet il n'y a presque dans ces nouveaux Elemens

mens que des démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui y sont établis, & qui comprennent un assez grand nombre de nouvelles propositions.

On voit assez par là qu'il n'étoit pas fort difficile à l'Autheur de la nouvelle Logique ou Art de penser, qui avoit veu quelque chose de cette Geometrie, de remarquer, comme il a fait dans la IV. Partie, les défauts de la methode d'Euclide, & d'avancer qu'on pourroit digerer la Geometrie dans un meilleur ordre. C'étoit deviner les choses passées. Mais cette avance qu'il avoit faite, sans se hazarder beaucoup, a depuis servi d'engagement à produire ce petit Ouvrage, à quoy l'on n'auroit peut-être jamais pensé. Car tant de personnes ont demandé au Libraire une nouvelle Geometrie, qu'on n'a pas pû la refuser aux instances qu'il a faites de leur part pour l'obtenir, n'étant pas juste de se faire beaucoup prier pour si peu de chose.

On s'est donc resolu de la donner au Public, & de le rendre juge de l'utilité qu'on en peut tirer. On croit seulement devoir avertir le monde qu'il y aura peut-être quelques personnes qui pourront trouver les IV. premiers Livres un peu difficiles, parce qu'on s'y est servi de démonstrations d'Algebre, auxquelles on a quelque peine d'abord à s'accoûtumer. La raison qui a obligé d'en user ainsi, est, que traitant des Grandeurs en general, entant que ce mot comprend toutes les especes de quantité, on ne pouvoit pas se servir de figures pour aider l'Imagination; outre que l'on jugeoit qu'il étoit utile de se rompre d'abord à cette methode, de, qui eſt la plus feconde & la plus Geometrique ; mais ceux neanmoins à qui elle feroit trop de peine ont moyen de s'en exempter, en commençant par le V.e Livre, & en ſuppoſant prouvées quelques Propoſitions qui dépendent des quatre premiers. Ce remede eſt aiſé ; & il ne les privera pas du fruit qu'ils pourront tirer de la methode de ces Elemens, lors qu'en une ſeconde lecture ils les liront tous de ſuite.

Pour les autres jugemens qu'on peut faire de cét Ouvrage, comme il eſt facile de les prévoir, il ſemble auſſi qu'on n'ait pas ſujet de s'en mettre en peine. Car s'il ſe trouve des perſonnes qui le mépriſent par des principes plus élevez, & par un éloignement de toutes ces ſortes de ſciences, peut-être ne feront-ils pas fort éloignez du ſentiment de l'Autheur. S'il y en a qui le blâment comme Geometres en y remarquant de veritables fautes, ils feront encore d'accord avec lui, parce qu'il ſera toûjours tout-preſt de les corriger. Enfin ceux qui le reprendront comme Geometres, mais en ſe trompant, ne peuvent pas lui être fort incommodes, parce que c'eſt une matiere où les veritez ſont ſi claires, qu'elles n'ont gueres beſoin d'apologie contre les injuſtes accuſations.

DE-

DEFINITIONS DE QUELQUES mots dont on s'eſt ſervi dans ces Elemens ſans les definir, parce qu'ils ſont plû-tôt de Logique que de Geometrie.

AXIOME. On appelle ainſi une propoſition ſi claire qu'elle n'a pas beſoin de preuve : comme, *Que le tout eſt plus grand que ſa partie.* Voiez la Logique IV. Part. Chap. VI.

DEMANDE. On ſe ſert de ce mot quand on a quelque choſe à faire, qui eſt ſi facile qu'on n'a pas beſoin de preuve pour démontrer qu'on a fait ce que l'on vouloit faire : comme, *Décrire un Cercle d'un intervalle donné.*

DEFINITION. Ce qu'on appelle de ce nom en Geometrie, eſt la determination d'un mot qui pourroit former diverſes idées, à une idée ſi claire & ſi diſtincte, qu'elle revienne toûjours dans l'Eſprit lorſqu'on ſe ſert de ce mot : comme, *On appelle Parallelogramme une figure dont les côtez oppoſez ſont paralleles.* Voyez l'Art de penſer. I. Part. Chap. XI.

THEORÉME. On nomme ainſi une propoſition dont il faut démontrer la verité : comme, *que le quarré de la baſe d'un Angle droit eſt égal aux quarrez des deux côtez.*

PROBLEME. C'eſt auſſi une propoſition qu'il faut démontrer ; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire : comme, *Faire paſſer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.*

LEMME.

Lemme. C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt, que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent. On en peut voir des exemples au commencement des Livres VI. X. & XI.

Corollaire. C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente ; on en peut voir un grand nombre dans le Livre IX.

Mais il faut remarquer, que pour mieux faire voir la dependance qu'avoient pluſieurs propoſitions d'une ſeule qui en étoit comme le principe & le fondement, on a quelquefois mis en Corollaire ce qu'on auroit pû mettre en Theoréme, ſi on avoit voulu.

Et pour la même raiſon, il y a de certains Theorémes à qui on a donné le nom de *Propoſition fondamentale*; parce que toutes les Propoſitions d'une certaine matiere en dépendent. On en peut voir des exemples dans les Livres VI. VIII. X. XI.

Explication de quelques Notes.

Quoi que ces Notes ſoient expliquées chacune en ſon lieu : neanmoins on a crû les devoir encore mettre ici, afin de les faire mieux entendre.

+ *Plus*; ainſi 9+3, c'eſt à dire, neuf plus trois.

— *Moins*; ainſi 14—2, c'eſt à dire, quatorze moins deux.

= *Marque de l'égalité*; ainſi 9+3 = 14—2, c'eſt à dire, neuf plus trois eſt égal à quatorze moins deux.

: : Ces quatre points entre deux termes devant, & deux termes aprés, marquent que ces quatre termes ſont proportionels ou Arithmetiquement, ou Geometriquement.

Ainſi, Arithmetiquement, 7. 3. : : 13. 9.

Et Geometriquement, 6. 2. : : 12. 4.

∺ Ces mêmes quatre points avec une ligne qui les coupe, marquent la Proportion continuë; ainſi ∺ 3. 9. 27. c'eſt à dire, 3 eſt à 9 : comme 9 eſt à 27.

Deux lettres enſemble comme *bd*, marquent quelquefois une Grandeur de deux dimenſions, comme un Plan dont la longueur ſoit *b* & la largeur *d*. Mais d'autres fois ce n'eſt qu'une ligne dont ces deux lettres marquent les deux extremitez ; ce qu'il eſt aiſé de diſcerner par le ſujet que l'on traite.

Les Livres ſont diviſez en Nombres par des chiffres qui ſont en marge : & c'eſt ſeulement à cela qu'on a égard dans les citations & les renvois à quelques points des Livres precedens; le premier chiffre, qui eſt Romain marquant le Livre ; & le ſecond qui eſt Arabe, marquant le Nombre de ce Livre. Ainſi V. 29. veut dire *le vingt-neuviéme Nombre du Livre cinquiéme.*

Que ſi l'endroit où l'on renvoie eſt du même Livre, on cite quelquefois un tel Theorême, ou un tel Lemme, ou bien le Nombre precedent avec cette marque S. qui veut dire *ſuprà*; comme S. 15. c'eſt à dire, *cy-deſſus*, *Nombre* 15.

TA-

TABLE

De ce qui est traité dans chaque Livre.

On pourroit dire beaucoup de choses sur l'ordre qu'on a suivi dans ces Elemens, & pour faire voir qu'il est beaucoup plus naturel qu'aucun autre ait jamais observé dans ces matieres. Mais on aime mieux en laisser le jugement à ceux qui les liront, & l'on se contente d'en representer le plan, en faisant voir de suite ce qui est traité dans chaque Livre.

AVER-

AVERTISSEMENT
Sur cette nouvelle Edition.

LA ſeconde Edition de Paris, qui eſt la derniere, & ſur laquelle on a fait celle-ci, eſt ſi vitieuſe, qu'on y a compté pluſieurs centaines de fautes eſſentielles; & entr'autres un grand nombre de citations fauſſes. On a donc pris ſoin de tout corriger: on a même éclairci certains endroits qui ſembloient un peu obſcurs & ajoûté les figures qui manquoient. Cependant quelque précaution que l'on y ait apportée, on n'a pû ſi bien faire, qu'il n'ait échapé auſſi les fautes ſuivantes.

FAUTES A' CORRIGER.

Pag. 31. lign. 9. Raiſon (liſez) Grandeur
Pag. 40. lign. 8. $\frac{D}{B}$ (liſez) $\frac{B}{D}$
Pag. 73. lign. 3. N 47. (liſez) II. 47.
Pag. 76. lign. 15. de $\frac{cn}{bm}$, (liſez) de $\frac{cm}{bn}$,
Pag. 84. lign. 15. $\frac{9}{4}. :: \frac{3}{2}. \frac{5}{18}.$ (liſez) $\frac{5}{4}. :: \frac{3}{2}. \frac{15}{8}.$
Pag. 88. lign. 3. :: *b. c.* (liſez) :: *b. c*; & *b c.*
Pag. 140. lign. penult. membre l'équation (liſez) membre de l'équation
Pag. 185. lign. 26. (par le 6.e Lemme.) liſez (par la 2.de Propoſition.)

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

DES GRANDEURS EN GENERAL; ET DES QUATRE OPERATIONS,

Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer, entant qu'elles ſe peuvent appliquer à toutes ſortes de grandeurs.

SUPPOSITIONS GENERALES.

TOUTES les Sciences ſuppoſent des connoiſſances naturelles, & elles ne conſiſtent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous ſçavons naturellement. I.

AINSI *quoi qu'il ſemble que ce ſoit contre le vrai*

vrai ordre des ſciences de ſuppoſer dans les ſuperieures, ce qui ne ſe doit traiter que dans les inferieures, comme qui ſuppoſeroit dans la Geometrie, ce qui ne s'apprendroit que dans l'Aſtronomie; neanmoins ce n'eſt point contre cét ordre que de ſuppoſer dans une ſcience ſuperieure ce qui regarde l'objet de l'inferieure, lors que nous ne ſuppoſons que ce qui ſe peut ſçavoir par la ſeule lumiere naturelle ſans l'aide d'aucune ſcience.

C'EST POURQUOI *aiant entrepris de traiter icy de la quantité ou grandeur en general, entant que ce mot comprend l'étenduë, le nombre, le temps, les degrez de vîteſſe, & generallement tout ce qui ſe peut augmenter en ajoûtant ou multipliant; & diminuer en ſouſtraiant ou diviſant, &c. je ne ferai point de difficulté de ſuppoſer qu'on ſçait de certaines choſes qui ſemblent appartenir à la ſcience des nombres qu'on appelle* Arithmetique, *ou à la ſcience de l'étenduë qu'on appelle* Geometrie; *parce que je ne ſuppoſerai rien qu'on ne puiſſe ſçavoir ſans l'aide de l'Arithmetique ou de la Geometrie pour peu d'attention qu'on y faſſe, ou qu'on y ait déja fait.*

PREMIERE SUPPOSITION.

II. JE ſuppoſe donc premierement qu'on ſçache ajoûter & multiplier de petits nombres, comme que 4 & 5 font 9, que 3 fois 5 font 15, &c.

SECONDE SUPPOSITION.

III. SECONDEMENT qu'on ſçache que c'eſt la même choſe dans la multiplication de commencer par lequel on veut des deux nombres que l'on multiplie: comme que 3 fois 5 eſt la même choſe que 5 fois 3; que 4 fois 6, eſt la même choſe que 6 fois 4.

TROI-

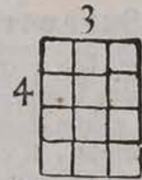
TROISIÉME SUPPOSITION.

JE ſuppoſe en troiſiéme lieu, que l'on ſçache que ce qu'on appelle corps, eſpace, étenduë, (car tout cela ſignifie la même choſe) a trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur. Et que quand on les conſidere toutes trois, c'eſt alors que cette ſorte de grandeur s'appelle proprement *Corps* ou *Solide*. Que quand on n'en conſidere que deux, ſçavoir la longueur & la largeur, on l'appelle alors *Surface*. Et que quand on n'en conſidere qu'une, ſçavoir la longueur, on l'appelle alors *Ligne*. IV.

QUATRIÉME SUPPOSITION.

JE ſuppoſe en quatriéme lieu, que la multiplication & la diviſion ſe peuvent appliquer à toutes grandeurs, & non ſeulement aux nombres. Car par exemple dans l'étenduë on appelle multiplier la longueur par la largeur, lors qu'aiant un morceau de terre de 4 perches de longueur & 3 de largeur, on dit que ce morceau de terre a 12 perches de ſurface. Et au contraire, on appelle diviſer, lors que ſçachant par exemple quel eſt le contenu d'un morceau de terre, comme qu'il eſt de 12 perches, & ſçachant auſſi quelle en eſt la longueur, comme de 4 perches, on en cherche la largeur qui ſe trouvera étre de 3 perches. On pourroit encore donner une autre notion de la multiplication & de la diviſion par rapport à l'unité; mais celle-là ſuffit pour ce que nous avons à faire, & l'autre ne ſe pourroit bien expliquer qu'en ſuppoſant des choſes dont nous ne parlerons que dans la ſuite. V.

CIN-

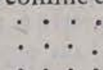


CINQUIÉME SUPPOSITION.

VI. JE ſuppoſe en cinquiéme lieu, que l'on ſe puiſſe mettre dans l'eſprit que ce qu'on appelle les trois dimenſions dans les corps s'applique par accommodation à toutes les autres grandeurs, & même aux nombres.

CAR on les conſidere quelquefois comme n'aiant qu'une dimenſion, lors qu'on ne ſuppoſe point qu'on les ait multipliez par une autre grandeur. Et alors on les peut appeller grandeurs lineaires : comme eſt par exemple le nombre de 7, qu'on ne conſidere que comme étant composé de ſept unitez.

ET quelquefois on les conſidere comme aiant deux dimenſions, lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de deux lineaires; & alors on les peut appeller *grandeurs planes*. Comme eſt par exemple le nombre de 12, lors qu'on le conſidere comme étant né de la multiplication de 3 par 4.



Et enfin on les conſidere comme aiant trois dimenſions, lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de trois grandeurs lineaires, ou d'une plane qui en a déja deux, par une lineaire. Et alors on peut appeller ces grandeurs *ſolides*. Comme eſt par exemple le nombre de 24, quand on le conſidere comme né de la multiplication de ces trois nombres 2, 3, 4; parce que 2 fois 3 font 6, & 4 fois 6 font 24.

SIXIE-

SIXIÉME SUPPOSITION.

JE ſuppoſe enfin qu'on s'accoûtume à concevoir generalement les choſes en les marquant par des lettres ſans ſe mettre en peine de ce qu'elles ſignifient, puis qu'on ne s'en ſert que pour conclure que *b* eſt *b*, que *c* eſt *c*: ou (ce qui eſt pris pour la même choſe en matiere de grandeur, ſur tout en general) que *b* eſt égal à *b*, & *c* à *c*: ou que *b* multiplié par *c* eſt égal à *b* multiplié par *c*, ou, ſelon la 2.e Suppoſition, à *c* multiplié par *b*. VII.

CETTE *remarque eſt de grande importance. Car on ne feroit que ſe broüiller, ſi dans ces commencemens, qui doivent étre tres-ſimples, on vouloit appliquer ce qu'on traite generalement à des exemples particuliers dont la connoiſſance dépendroit d'autres principes. Et de plus, l'une des plus grandes utilitez de ce traitté, eſt d'accoûtumer l'eſprit à concevoir les choſes d'une maniere ſpirituelle ſans l'aide d'aucunes images ſenſibles, ce qui ſert beaucoup à nous rendre capables de la connoiſſance de Dieu & de nôtre ame.*

PRINCIPES GENERAUX.

DU TOUT ET DES PARTIES.

TOUTE grandeur eſt conſiderée comme diviſible en ſes parties. VIII.

La grandeur eſt appellée *tout* au regard de ſes parties. IX.

Lors qu'une partie de la grandeur eſt contenuë preciſément tant de fois dans ſon tout, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. elle s'appelle *partie aliquote*, ou ſimplement *aliquote*. X.

On dit auſſi qu'elle en eſt *la meſure*; parce qu'elle la meſure juſtement étant priſe autant de fois qu'il faut. XI.

Ainſi

Ainſi 3 eſt partie aliquote de 9, parce qu'il y eſt trois fois; 5, partie aliquote de 20, parce qu'il y eſt 4 fois.

XII. Quand les parties aliquotes d'une grandeur ſont autant de fois dans leur tout que les parties aliquotes d'une autre grandeur dans le leur, elles ſont appellées *aliquotes pareilles*. Ainſi 3 & 4, ſont les aliquotes pareilles de 9 & de 12; parce que 3 eſt autant de fois dans 9, que 4 dans 12, l'un & l'autre y étant 3 fois.

XIII. Le tout eſt meſure à ſoi-même, parce que toute grandeur eſt contenuë une fois dans ſoi-même.

XIV. On appelle *portion* toute partie aliquote ou non aliquote. Ainſi 4 eſt une portion de 13; 5 de 7.

AXIOMES.

De l'Egalité et Inegalité.

XV. Le tout eſt plus grand que ſa partie.

XVI. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

XVII. Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles.

XVIII. Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous ſont égaux.

XIX. Si de grandeurs égales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

XX. Si de grandeurs inégales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.

XXI. Si à grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les tous ſeront inégaux.

XXII. Les aliquotes pareilles de grandeurs égales ſont égales. Par exemple, ſi b eſt égal à c, le tiers de b ſera égal au tiers de c, cela eſt manifeſte.

XXIII. Et par la même raiſon deux grandeurs ſont égales quand leurs aliquotes pareilles ſont égales. Si le tiers de b eſt égal au tiers de c, b eſt égal à c; car b eſt égal à ſes trois tiers, & c aux trois ſiens. Or ſi un tiers eſt égal à un tiers, les trois tiers ſont égaux aux trois tiers: puiſque ce n'eſt qu'ajoûter choſes égales à choſes égales. Donc &c.

On peut marquer ainſi qu'une grandeur eſt égale à une autre, comme que b eſt égal à c, $b = c$. XXIV.

DES QUATRE OPERATIONS, AJOUTER, &c.

Addition.

Ajoûter, ou *Addition*, c'eſt mettre deux ou XXV. pluſieurs grandeurs enſemble, & en faire comme un tout qui s'appelle *ſomme*.

Cela s'exprime ainſi b plus c, & ſe marque ainſi $b + c$.

Soustraction.

Souſtraire, ou *Souſtraction*, c'eſt retrancher une XXVI. moindre grandeur d'une plus grande. Et ce qui reſulte de là s'appelle *reſte* ou *difference*. Car ce qui reſte de la plus grande eſt ce en quoi la plus grande ſurpaſſoit la plus petite. Si de 5 je retranche 3, reſte 2, & 2 eſt la difference de 5 à 3.

La Souſtraction s'exprime ainſi, b moins c, & ſe marque ainſi $b - c$.

Multiplication.

Multiplier ou *Multiplication*, c'eſt quand aiant XXVII. deux grandeurs comme b & c, je fais que ce que l'unité eſt à l'une des deux, l'autre l'eſt à ce qui reſulte

reſulte de la Multiplication, qu'on appelle *produit*.

Une toiſe eſt à 3 toiſes, ce que 4 toiſes ſont à 12; Et ainſi 12 toiſes eſt le *produit* de 3 toiſes multipliées par 4.

XXVIII. Cela s'exprime ainſi quand on ne ſe ſert que de lettres, *b* en *c*, ou *b* par *c*; Il y en a qui le marquent ainſi $b \times c$; mais il eſt plus court de les mettre ſeulement enſemble *b c*, & nous ne nous ſervirons que de ce dernier.

Il faut remarquer qu'une grandeur marquée par un ſeul caractere comme *b*, ou *c*, s'appelle grandeur lineaire, ſelon la 5e Suppoſition. Que quand on les joint enſemble en mettant *b c*, cela ne veut pas dire que l'une ſoit ajoûtée à l'autre (ce qu'il faudroit marquer par $b + c$, *b* plus *c*,) mais que l'une eſt multipliée par l'autre, d'où naiſt ce qu'on appelle *produit*.

XXIX. Que s'il n'y a eu que deux grandeurs lineaires qui aient été multipliées l'une par l'autre, ce produit s'appelle *grandeur plane* ou *plan*.

XXX. Et les deux grandeurs lineaires d'où ce plan a été produit, s'appellent *ſes deux dimenſions*, ou *ſes deux côtez*.

XXXI. Et ſi c'eſt la même grandeur lineaire qui a été multipliée par ſoi-même, comme ſi *b* en *b* a fait *b b*, ce plan s'appelle *quarré*. Et cette grandeur lineaire *ſa racine*. On marque quelquefois le quarré ainſi b^q. c'eſt à dire *b* quarré ou b^2. c'eſt à dire *b* de deux dimenſions.

XXXII. Que ſi trois grandeurs lineaires ſont multipliées l'une par l'autre, comme *b* en *c*, & *b c* en *d*, ce qui fait *b c d*: ou (ce qui eſt la même choſe) ſi une grandeur plane, comme *b c*, eſt multipliée par une lineaire, comme par *d*, ce qui fait auſſi *b c d*: ce produit s'appelle *ſolide*, ou *une grandeur de 3 dimenſions*.

XXXIII. Et ſi c'eſt une même grandeur qui eſt multipliée 2 fois

fois par elle-même, comme *b* en *b*, & *b b* en *b*: ou (ce qui eſt la même choſe) ſi un quarré, comme *b b*, eſt encore une fois multiplié par *b* ſa racine, ce qui fait *b b b*: ce ſolide s'appelle *cube*, & *b* la racine de ce cube.

On marque quelquefois le cube ainſi b^c. c'eſt à dire *b* cube, ou b^3. c'eſt à dire *b* de trois dimenſions.

Division.

Diviſer ou *diviſion*, c'eſt lors qu'aiant une grandeur qui s'appelle *diviſeur*, parce qu'elle en doit diviſer une autre qui s'appelle *dividende*: on fait que comme le *diviſeur* eſt au *dividende*, l'unité ſoit à ce qui naiſt de la diviſion, qu'on appelle *quotient*. XXXIV.

Afin que 3 diviſe 12, il faut que je trouve un nombre à qui l'unité ſoit comme 3 eſt à 12, & ce nombre eſt 4; car 3 eſt quatre fois dans 12, comme l'unité eſt quatre fois dans 4.

La diviſion s'exprime ainſi *b c* diviſé par *p*, & ſe marque ainſi $\frac{bc}{p}$, & cela s'appelle *quotient*, comme j'ai déja dit; & la grandeur de deſſus eſt le *dividende* ou *grandeur à diviſer*, & celle de deſſous eſt le *diviſeur*.

C'eſt preſque toûjours une grandeur de pluſieurs dimenſions qu'on diviſe par une grandeur de moins de dimenſions. Car la diviſion eſt oppoſée à la multiplication, comme la ſouſtraction à l'addition; d'où vient que la multiplication du diviſeur & du quotient fait une grandeur égale à la grandeur à diviſer, parce que la multiplication refait ce que la diviſion avoit défait. Et d'où vient auſſi par la même raiſon que ſi on veut multiplier une grandeur diviſée par le diviſeur même, on n'a qu'à oſter le diviſeur, & la grandeur à diviſer de-

 meurant

meurant ſeule, ſera le produit. Ainſi le produit de $\frac{bc}{g}$ en g eſt $b\,c$.

XXXV. La diviſion eſt de peu d'uſage dans le traité de la grandeur en general; parce qu'on ne ſçauroit d'ordinaire déterminer un quotient qu'en deſcendant à quelque eſpece de grandeur, comme l'étenduë ou le nombre.

Il n'y a qu'une rencontre où on le peut, qui eſt lors que le même caractere ſe trouve dans la grandeur à diviſer & dans le diviſeur. Car alors oſtant ce caractere de l'un & de l'autre, ce qui reſtera ſera le quotient.

Ainſi aiant $\frac{bc}{b}$ le quotient ſera c.

Aiant $\frac{bcd}{bc}$ le quotient ſera d.

Aiant $\frac{bcd}{b}$ le quotient ſera $c\,d$.

DES GRANDEURS
INCOMPLEXES ET COMPLEXES.

Outre ce que nous avons remarqué que l'on pou-
XXXVI. voit conſiderer les grandeurs comme n'aiant qu'une dimenſion, ou en aiant pluſieurs: on peut encore conſiderer toutes ces ſortes de grandeurs lineaires, planes, ou ſolides, comme incomplexes, ou comme complexes.

JE les appelle *incomplexes* quand on conſidere
XXXVII. une grandeur d'une ou de pluſieurs dimenſions à part, comme b, ou $c\,d$, ou $m\,n\,o$, ſans y rien ajoûter ou en rien oſter.

ET je les appelle *complexes* quand on y en joint
XXXVIII. d'autres de même genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur ſe doit prendre pluſieurs fois, comme $b + c$, ou $b + c + d$, ou $b + f - g$, ou $b\,c + f\,g$, ou $b\,c + f\,g - m\,n$.

Ou par des chiffres, comme $3\,b$.

Or

Or comme il y a quelque difficulté un peu plus grande pour faire les operations dont nous venons de parler ſur les grandeurs complexes, nous en donnerons les principes & les regles.

PRINCIPES
POUR FAIRE LES QUATRE OPERATIONS SUR LES GRANDEURS COMPLEXES.

1. CHAQUE grandeur incomplexe dont la XXXIX.
complexe eſt compoſée ſe peut appeller *terme*.

2. LE plus & le moins ſont appellez *ſignes*. XL.

LE plus $+$ *ſigne affirmatif*; le moins, $-$ *ſigne negatif*.

3. PAR tout où n'eſt point le ſigne negatif, XLI.
l'affirmatif eſt ſous-entendu. Ainſi $b + c$, vaut $+ b + c$. Mais il ſeroit inutile de marquer le plus au commencement.

4. LE plus & le moins d'une même grandeur XLII.
ou terme ſont égaux à rien, ou valent zero. Car l'un oſtant ce que l'autre a mis, il ne demeure rien. Ainſi $b - b$, ce n'eſt rien; $b + c - c$ ne vaut que b. Cela eſt auſſi important que facile.

5. LORS que le même terme eſt pluſieurs fois XLIII.
repeté dans une grandeur complexe, ſi c'eſt toûjours avec le même ſigne, ſoit affirmatif, ſoit negatif, on peut ne le mettre qu'une fois avec ſon même ſigne, en marquant par un chiffre combien il doit être pris de fois. Ainſi pour $b + c + c + c$, on peut mettre b plus $3\,c$, ou $b + 3\,c$: au lieu de $b - g - g - g$, on peut mettre b moins $3\,g$, ou $b - 3\,g$.

6. MAIS ſi la même grandeur ou terme eſt XLIV.
avec des ſignes divers, on peut alors ſelon le principe 4.e oſter ce terme de la grandeur complexe

autant de fois qu'il eſt avec un plus & avec un moins. Ainſi $b + c + c - c - c$, ne vaut que b, parce que c eſt autant de fois oſté que mis, & ainſi il ne reſte rien. Que s'il y avoit un *plus* davantage, comme $b + c + c - c$, alors il le faudroit laiſſer une fois avec *plus* ainſi : $b + c$, & de même s'il y avoit un *moins* davantage.

ADDITION

DES GRANDEURS COMPLEXES

XLV. POUR ajoûter une grandeur complexe, comme $b + c$, à une autre grandeur ou complexe comme $m + c$, ou incomplexe comme m : il ne faut qu'y joindre la grandeur qu'on veut ajoûter & en conſerver tous les ſignes ; en obſervant toûjours que le ſigne affirmatif eſt ſous entendu où il n'y en a point.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b + c. \\ \text{ajoûter} & m + n.\end{array}\right\} \text{Somme } b + c + m + n.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b + c. \\ \text{ajoûter} & m - n.\end{array}\right\} \text{Somme } b + c + m - n.$$

XLVI. Que s'il y a des chiffres, il les faut laiſſer comme on les trouve.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & 2b + 3c. \\ \text{ajouter} & 3m + 4n.\end{array}\right\} \text{Somme } 2b + 3c + 3m + 4n.$$

XLVII. La ſomme étant trouvée, ſi le même terme s'y trouve pluſieurs fois, on peut pratiquer ce qui a été dit dans le principe 5.e & 6.e Ce qui ſoit dit une ſeule fois pour toutes les autres operations.

SOUSTRACTION

DES GRANDEURS COMPLEXES.

XLVIII. POUR ſouſtraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ou incomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les ſignes de

de la grandeur qu'on ſouſtrait, & obſervant toûjours que le ſigne affirmatif eſt ſous-entendu où il n'y en a point.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b + c. \\ \text{oſter} & m + n.\end{array}\right\} \text{reſte } b + c - m - n.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b + c. \\ \text{oſter} & m - n + o.\end{array}\right\} \text{reſte } b + c - m + n - o.$$

IL n'eſt pas difficile de juger pourquoi on change le *plus* ſous-entendu en *moins* dans le premier terme de la grandeur à ſouſtraire : car c'eſt en cela même que conſiſte la ſouſtraction. Mais d'abord on eſt ſurpris de ce qu'il faut changer les ſignes de *moins* en *plus* ; car au lieu que la Souſtraction doit faire la grandeur moindre qu'elle n'étoit, on la rend plus grande par là.

Cela eſt facile à comprendre quand ce que l'on doit ſouſtraire, a d'abord un *plus* & puis un *moins*. Comme ſi de b je veux oſter $p - n$; car $p - n$ étant moins que p : en oſtant p j'oſte trop ; & ainſi aiant oſté p, parce qu'on a trop oſté, il faut ajoûter n, qui eſt ce qu'on a oſté de trop.

Mais quand il n'y auroit dans ce qu'on veut ôter qu'une grandeur avec le ſigne de *moins* : il faut toûjours la mettre par le ſigne de *plus* ; comme ſi de b, j'en voulois ôter $- n$, je devrois mettre $b + n$.

Car ce qui trompe en cela, c'eſt qu'ajoûter *moins*, c'eſt ôter ; & retrancher *moins*, c'eſt ajoûter. Ajouter au bien d'un homme une dette paſſive de mille francs, qu'il croit avoir paiée, ce n'eſt pas augmenter ſon bien, c'eſt le diminuer de mille livres ; & en retrancher une dette paſſive de la même ſomme en la paiant pour lui, ce n'eſt pas diminuer ſon bien, c'eſt l'augmenter de mille francs. Il ne faut donc pas s'étonner ſi dans l'Addition à b, ajoûtant $- n$, je ne change point le *moins* en *plus*, mais le laiſſant comme il étoit, cela fait $b - n$: de ſorte que la ſomme eſt moindre que

 n'étoit

n'étoit ce à quoi je l'ai ajoûté, parce que je n'ai âjouté qu'en apparence, mais j'ai rétranché en effet.

Et au contraire dans la Souſtraction, ſi de b je retranche $-n$, il faut que changeant le ſigne de *moins* en *plus*, je mette $b + n$; ce qui fait un reſte plus grand que ce dont j'ai retranché; parceque retrancher un *moins*, c'eſt ne retrancher qu'en apparence, & ajoûter en effet. On en peut apporter une preuve bien ſenſible dans les nombres. Je veux de 7 retrancher moins 2; au lieu de 7 je prends $9 - 2$, qui lui eſt égal. Il faut donc qu'il reſte la même choſe, ſi de l'un ou l'autre je retranche -2. Or ſi de $9 - 2$, je retranche -2, je le pourrai faire, ou effaçant -2 de $9 - 2$, ou en mettant $+ 2$ apres $9 - 2$; c'eſt à dire en mettant $9 - 2 + 2$. Or de l'une ou de l'autre maniere il reſtera 9; car 2 étant par *plus* & par *moins* ſe reduit à zero. Il faut donc qu'il reſte la même choſe lors que de 7 on ôte -2. Et cela ne peut être qu'en changeant le *moins* en *plus*, & mettant $7 + 2$; ce qui fait 9.

MULTIPLICATION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

XLIX. Pour multiplier une grandeur complexe par une autre complexe ou incomplexe, il faut faire autant de multiplications particulieres que chaque terme de la grandeur complexe peut être comparé avec chaque terme de l'autre grandeur.

De ſorte que multipliant le nombre des termes d'une grandeur à multiplier, avec le nombre des termes de l'autre, on a le nombre des multiplications partiales qu'il faut faire pour avoir la multiplication totale, ou le produit total.

L. Ainsi lors qu'une des deux grandeurs n'a qu'un terme & que l'autre en a deux, parce qu'une fois deux ne ſont que deux, il ne faudra faire que deux

deux multiplications partiales de chacun des deux termes d'une grandeur par le terme unique de l'autre.

$$\left.\begin{array}{l} b. \\ \text{En } c + d. \end{array}\right\} \text{produit } cb + db.$$

Lors que les deux grandeurs ont chacune deux termes, parce que deux fois deux ſont 4, il faudra faire 4 multiplications partiales pour avoir le produit total. LI.

$$\left.\begin{array}{l} b + c. \\ \text{En } p + q. \end{array}\right\} \text{produit } pb + pc + qb + qc.$$

Lors que chacune a trois termes, parce que trois fois trois ſont neuf, il faudra faire neuf multiplications, qu'on pourra diſpoſer trois à trois en cette ſorte: LII.

$$\left.\begin{array}{l} b + c + d \\ \text{En } p + q + r. \end{array}\right\} \begin{array}{l} pb + pc + pd. \\ + qb + qc + qd. \\ + rb + rc + rd. \end{array}$$

& ainſi à l'infini.

La même choſe ſe fait quand on multiplie des grandeurs planes par des grandeurs lineaires, d'où naiſſent des grandeurs ſolides. LIII.

$$\left.\begin{array}{l} bd + pq. \\ \text{En } ſ + t. \end{array}\right\} \text{produit } ſbd + ſpq + tbd + tpq.$$

Voila ce qu'il faut obſerver generalement dans toute multiplication des grandeurs complexes. Mais il y a une difficulté particuliere pour ſçavoir quand il faut mettre les ſignes de *plus* ou de *moins* avant les produits des multiplications partiales. C'eſt ce qu'on apprendra par ces trois Regles: LIV.

PREMIERE REGLE.

Plus en *plus* fait *plus*; c'eſt à dire que la multiplication de deux termes qui ont chacun un *plus* exprimé ou ſous-entendu, donne un produit qui doit avoir le ſigne de *plus*. Cela eſt ſans difficulté, & les exemples qu'on a propoſez le font aſſez voir. LV.

Seconde Regle.

LVI. Plus en *moins*, ou *moins* en *plus* donne *moins*. C'eſt à dire que la multiplication de deux termes dont l'un a *plus* & l'autre *moins*, donne un produit qui doit avoir le ſigne de *moins*.

$$\begin{array}{l} \quad b \\ \text{En } p-q. \end{array}\Big\} \; pb - qb,$$ parce que q a *moins* & b *plus* ſous-entendu.

Troisiéme Regle.

LVII. *Moins* en *moins* donne *plus*; C'eſt à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous deux *moins* donne un produit qui doit avoir le ſigne de *plus*.

$$\begin{array}{l} \quad b-d \\ \text{En } p-q \end{array}\Big\} \; bp - pd - bq + dq.$$

Raison de ces trois Regles.

Ce que nous avons dit pour montrer que dans l'addition on laiſſoit le *moins* comme on le trouvoit, au lieu que dans la ſouſtraction on changeoit le *moins* en *plus*, donnera un grand jour pour l'intelligence de ces trois regles, & ſur tout de la derniere qui paroît d'abord fort étrange.

Suppoſons que les deux grandeurs que l'on veut multiplier ſoient 5, & 3.

On en prend une, laquelle on veut, qu'on appelle le multipliant, & l'autre eſt le multiplié. Suppoſons que 5 ſoit le multipliant, & 3 le multiplié.

Chacune peut avoir l'un des deux ſignes, le *plus* & le *moins* ($+$ ou $-$) ce qui fait 4 cas.

Le 1.[er] cas eſt quand le multipliant a *plus*, & le multiplié a auſſi *plus*; c'eſt à dire quand par $+5$ je multiplie $+3$.

Le 2.[d] cas, eſt quand le multipliant a *plus*, & que

que le multiplié a *moins*; c'eſt à dire quand par $+5$ je multiplie -3.

Le 3.[e] cas, eſt quand le multipliant a *moins*, & que le multiplié a *plus*; c'eſt à dire quand par -5 je multiplie $+3$.

Le 4.[e] cas, eſt quand le multipliant a *moins*, & que le multiplié à *moins* auſſi; c'eſt à dire quànd par -5 je multiplie -3.

Il eſt queſtion de ſçavoir quel ſigne doit avoir le produit qui ſera toûjours 15; c'eſt à dire quand ce ſera $+15$ ou -15.

Or voicy ce me ſemble des remarques qui feront voir que dans le 1.[re] cas qui appartient à la 1.[re] regle, & dans le 4.[e] qui appartient à la 3. regle, le produit aura *plus*; c'eſt à dire que ce ſera $+15$: Et que dans le 2.[e] cas, & dans le 3.[e] qui appattiennent tous deux à la 2.[e] regle, le produit ſera par *moins*, c'eſt à dire que ce ſera -15.

La 1.[re] ramarque eſt, que quand le multipliant a *plus*, comme dans les deux premiers cas, c'eſt multiplier par *plus*, & qu'alors la multiplication ſe fait par voie d'addition; c'eſt à dire en ajoûtant le multiplié, (quel qu'il ſoit, affirmatif ou negatif) autant de fois qu'il y a d'unitez dans le multipliant.

Et que quand le multipliant a *moins*, comme dans les deux derniers cas, c'eſt multiplier par *moins*, & qu'alors la multiplication ſe fait par voie de ſouſtraction; c'eſt à dire en ôtant le multiplié, quel qu'il ſoit, autant de fois qu'il y a d'unitez, quoi que negativement dans le multipliant.

La 2.[de] remarque eſt, que c'eſt le multiplié qui determine en quelque ſorte le ſigne du produit; c'eſt à dire que le ſigne que doit avoir le multiplié dans la multiplication, ſoit en conſervant celui qu'il avoit auparavant, ſoit en le changeant en ſon oppoſé, ſera celui du produit.

La 3.[e] qui eſt la ſuitte & l'application de ces deux-là : que quand la multiplication ſe fait par voie d'addition, comme dans les deux premiers cas où le multipliant a *plus* : il faut obſerver pour le multiplié ce qui s'obſerve dans l'addition, qui eſt de lui conſerver ſon ſigne. Et ainſi dans les deux premiers cas, le produit doit avoir le même ſigne qu'avoit le multiplié avant la multiplication. D'où il s'enſuit que dans le premier cas ou le multiplié a *plus*, le produit a *plus* auſſi. C'eſt pourquoi ſi par + 5 je multiplie + 3 le produit ſera + 15. Et que dans le 2.^{d} cas où le multiplié à *moins*, le produit doit auſſi avoir *moins*. Et c'eſt pourquoi, ſi par + 5 je multiplie — 3, le produit ſera — 15. Ce qui revient à ce qui a été dit que ſi à 5 j'ajoûte — 3, la ſomme ſera 5 — 3 ; ce qui ne fait que 2.

Mais quand la multiplication ſe fait par voie de ſouſtraction, comme dans les deux derniers cas, où le multipliant a *moins* : il faut obſerver pour le multiplié ce qui s'obſerve dans la ſouſtraction pour la grandeur poſitive ou negative qu'on veut retrancher, qui eſt de changer ſon ſigne dans le ſigne oppoſé. Et ainſi dans ces deux derniers cas le produit doit avoir le ſigne oppoſé à celui qu'avoit le multiplié avant la multiplication. D'où il s'enſuit que dans le 3.^{e} cas où le multiplié a *plus*, le produit doit avoir *moins* ; c'eſt à dire que ſi par — 5 je multiplie + 3 le produit ſera — 15. Et que de même dans le 4.^{e} cas où le multiplié a *moins*, le produit doit avoir *plus* ; c'eſt à dire que ſi par — 5 je multiplie — 3 le produit ſera + 15 ; Car la multiplication ſe faiſant par voie de ſouſtraction : multiplier — 3 par — 5, c'eſt ôter 5 fois — 3. Or ôter une fois — 3, c'eſt mettre + 3, comme il a été dit ſur le ſujet de la ſouſtraction ; donc l'ôter 5 fois, c'eſt mettre + 15 ; ce qu'il falloit prouver.

LVIII. *Cette maniere de concevoir la multiplication de moins en moins, en la conſiderant comme faite par voye de ſouſtraction, m'a donné moien de reſoudre la plus grande difficulté qu'on puiſſe, comme je croi, faire ſur cela, & m'avoit fait croire que ce n'étoit que par accident, que moins par moins donnoit plus. C'eſt que je ne pouvois ajuſter à cette ſorte de multiplication, la notion la plus naturelle de la multiplication en general ; qui eſt que l'unité (où determinée dans les nombres, ou arbitraire comme dans l'étenduë) doit étre au multipliant, comme le multiplié eſt au produit. Car cela eſt viſiblement faux dans la multiplication de moins en moins ; puiſqu'il ne peut étre vrai que l'unité ſoit à — 5, comme — 3 eſt à + 15 ; parce qu'il faudroit pour cela que le ſecond terme étant plus petit que le 1.^{er} le 4.^{e} fût auſſi plus petit que le 3.^{e} au lieu qu'il eſt beaucoup plus grand. Je ne voi point d'autre réponſe à cela que de dire que la multiplication de moins par moins ſe faiſant par voie de ſouſtraction, au lieu que toutes les autres ſe font par voie d'addition : il n'eſt pas étrange que la notion des multiplications ordinaires ne convienne pas à cette ſorte de multiplication qui eſt d'une autre genre que les autres, ſans qu'il ſoit beſoin d'en excepter la multiplication des fractions, comme de $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$. Car en quoi celle-là eſt differente de celle des entiers, c'eſt que pour avoir le produit, il faut faire deux multiplications, celle du 1.^{er} Numerateur par le 2.^{e} ce qui donne 10 pour numerateur du produit, & celle du 1.^{er} denominateur par le 2.^{d}, ce qui donne 21 pour le denominateur du produit. Mais l'une & l'autre ſe fait par voie d'addition ; car on prend le 2.^{d} numerateur autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier ; c'eſt à dire qu'on prend 5 deux fois, ce qui fait 10. Et on prend auſſi le 2.^{d} denominateur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le premier ; c'eſt à dire qu'on prend 7 trois fois, ce qui fait 21. Et c'eſt par là qu'il arrive que l'unité, ou $\frac{3}{3}$, eſt à $\frac{2}{3}$: comme $\frac{5}{7}$ eſt à $\frac{10}{21}$.*

COROL-

COROLLAIRE DE LA TROISIÉME REGLE.

LIX. C'EST ſur la 3.^{e} regle qu'eſt fondée une invention fort aiſée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 juſqu'à 10.

Il ne faut que baiſſer les 10 doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille juſqu'à 10 ; comme ſi ce nombre eſt 8, en relever 2, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'aille juſqu'à dix ; comme ſi ce nombre eſt 7, en relever 3 : cela fait, il faut conter autant de dixaines qu'il y a de doigts baiſſez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut. La raiſon de cela eſt qu'on ne fait en cela que multiplier

$$\left.\begin{array}{l} 10. - 2. \\ \text{par} \quad \mathbf{X} \\ 10. - 3. \end{array}\right\} 100 - 20 - 30 + 6. \text{ ſomme } 56.$$

Car en baiſſant les doigts, on fait la premiere multiplication partiale qui donne dix dizaines.

En levant deux doigts d'une main on fait ce que doit faire la ſeconde multiplication partiale, qui eſt de + 10. par — 2, ce qui donne — 20 : car en levant deux doigts on ôte deux dizaines.

En levant 3 doigts de l'autre main on fait encore ce que doit faire la troiſiéme multiplication partiale, qui eſt de + 10 par — 3, ce qui donne — 30 : car en levant 3 doigts on ôte trois dizaines.

Et enfin en multipliant les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, on multiplie — 2 par — 3, ce qui donne + 6 par la raiſon que nous avons dite.

QUA-

QUATRIÉME REGLE.

QUAND les termes ſe trouvent avec des nombres, il faut multiplier les nombres, par les nombres, & les termes par les termes pour en avoir les multiplications partiales, en gardant les regles precedentes pour ce qui eſt des *plus* & des *moins*. LX.

$$\left.\begin{array}{l} 3b \\ 5d \end{array}\right\} 15bd. \qquad \left.\begin{array}{l} 3b. \\ d. \end{array}\right\} 3bd.$$

$$\left.\begin{array}{l} 3b + 2d \\ 4p + 3q \end{array}\right\} 12bp + 8pd + 9bq + 6dq.$$

DIVISION.

Elle n'a rien de particulier, ſinon lors que l'une des grandeurs incomplexes du *diviſeur* ſe trouve dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*; Car alors il la faudra effacer dans le diviſeur & dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*. LXI.

Exemple $\frac{ba + ca + da}{fa}$ le quotient plus abregé ſera $\frac{b + c + d}{f}$

AVERTISSEMENT.

Comme ces 4 operations ſur les grandeurs complexes marquées par lettres, ſont une eſpece de jargon qui embaraſſe quand on n'y eſt pas accoûtumé : il eſt utile d'en propoſer pluſieurs exemples, où on obſervrea les regles qu'on a données aux nombres 42, 43, 44.

EXEMPLES DE L'ADDITION.

SOMMES.

$$\begin{array}{ll} \text{A} & b + c \\ \text{Ajoûter} & c \end{array}\Big\} \; b + 2c.$$

A

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+d \\ \text{Ajoûter} & b+c\end{array}\right\} 2b+d+c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b-c \\ \text{Ajoûter} & d+c\end{array}\right\} b+d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b-c+d \\ \text{Ajoûter} & d+c+g\end{array}\right\} b+2d+g.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & -b+c-m \\ \text{Ajoûter} & d-m-c\end{array}\right\} d-b-2m.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+7a \\ \text{Ajoûter} & -9a\end{array}\right\} b-2a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+7a \\ \text{Ajoûter} & +9a\end{array}\right\} b+16a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+9a \\ \text{Ajoûter} & b-7a\end{array}\right\} 2b+2a.$$

EXEMPLES DE LA SOUSTRACTION.
RESTES.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oster} & b-m\end{array}\right\} d+m.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oster} & -c\end{array}\right\} b+d+c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oster} & c+d\end{array}\right\} b-c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & s-o \\ \text{Oster} & s-a\end{array}\right\} -o+a \text{ (ou) } a-o.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+c-d \\ \text{Oster} & b+m+d\end{array}\right\} c-m-2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & bb+cc+cb \\ \text{Oster} & bb+cc-cb\end{array}\right\} 2cb.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oster} & b-d\end{array}\right\} 2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+7a \\ \text{Oster} & +9a\end{array}\right\} b-2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+9a \\ \text{Oster} & b-7a\end{array}\right\} +16a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & d+b \\ \text{Oster} & b+d\end{array}\right\} o.$$

EXEMPLES DE LA MULTIPICATION.
PRODUITS

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c \\ \text{Mult.} & b+c\end{array}\right\} bb+cc+2bc.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c \\ \text{Mult.} & b-c\end{array}\right\} bb-cc.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b-c \\ \text{Mult.} & b-c\end{array}\right\} bb+cc-2bc.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c+d \\ \text{Mult.} & m\end{array}\right\} bm+cm+dm.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c+d \\ \text{Mult.} & b\end{array}\right\} bb+bc+bd.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c-d \\ \text{Mult.} & b-c\end{array}\right\} bb-cc-bd+cd.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c-d \\ \text{Mult.} & b-c+d\end{array}\right\} bb-cc-dd+2dc.$$

EXEMPLES DE LA DIVISION.
QUOTIENTS.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Dividende} & bbcc \\ \text{Diviseur} & cc\end{array}\right\} bb.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bcdf \\ \text{Diviseur} & cf\end{array}\right\} bd.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & ba+ca+da \\ \text{Diviseur} & b+c+d\end{array}\right\} a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bb-aa \\ \text{Diviseur} & b-a\end{array}\right\} b+a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & ba+ca+da \\ \text{Diviseur} & a\end{array}\right\} b+c+d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bb+aa+2ba \\ \text{Diviseur} & b+a\end{array}\right\} b+a.$$

Divid. $bb - aa$ $\Big\}$ $b - a$.
Diviſeur. $b + a$

DES EQUATIONS.

LXII. Toute égalité entre deux grandeurs ſe peut appeller *équation* : mais pour l'ordinaire on donne ce nom à l'égalité de deux grandeurs complexes, comme $bp + fg = mn + ft$.

Ou au moins dont l'une eſt complexe, comme $b + c = d$.

Chacune de ces grandeurs égales peut étre appellée *membre de l'équation*.

LXIII. Il eſt ſouvent trés-utile de trouver des équations, & l'un des plus grands ſecrets pour les trouver eſt de pouvoir donner à une même grandeur diverſes dénominations ; parce que ſouvent une dénomination en fait voir l'égalité avec une autre grandeur qu'une autre dénomination n'auroit pas fait voir.

Ainſi aiant une grandeur comme b partagée en deux portions, comme c & d, on peut nommer chaque portion ou par ſon propre caractere, comme c, ou par le carectere du tout moins l'autre partie. Car il eſt bien viſible que b étant égal à $c + d$ chaque partie eſt égale au tout moins l'autre partie, & qu'ainſi $c = b - d$. Et $d = b - c$.

Or il y a beaucoup de rencontres où il eſt plus avantageux de nommer une partie du nom du tout moins l'autre partie que de luy donner un nom propre. Comme au contraire il eſt quelquefois plus utile de donner un nom propre à ce qui eſt marqué par une grandeur moins quelque choſe.

THEOREME.

LXIV. La plus importante obſervation touchant les Equations eſt celle-cy:

On

On peut transferer chaque terme d'un des membres d'une équation en l'autre ſans en troubler l'égalité, pourveu qu'on en change les ſignes, c'eſt à dire que l'ôtant d'un des membres où il étoit avec *plus*, on le mette dans l'autre avec *moins* ou au contraire. Par exemple,

$$b + d = f.$$

Je puis tranſporter d en l'autre membre en changeant de ſigne & mettant

$$b = f - d.$$

Et ſi au contraire on avoit.

$$b - d = g.$$

On pourroit mettre.

$$b = g + d.$$

Que ſi on tranſportoit tous les termes d'un membre dans l'autre membre en les changeant chacun de ſigne, le membre où on auroit tranſporté tous les ſignes ſeroit égal à rien, comme ſeroit celui d'où on les auroit tranſportez. Car ſi

$$b + d - f = p + q - r.$$
$$b + d - f - p - q + r = \text{à zero}.$$

Et ſi on ne laiſſe d'un côté qu'un terme avec un *moins*, cela ſera que le membre où on aura tranſporté les autres termes ſera égal à zero moins ce terme-là.

$$b + d = f - g.$$
$$b + d - f = -g.$$

C'eſt à dire ſera moins que rien. Ce qui ſemble impoſſible à concevoir, quoi que cela ne ſoit pas ſans exemple mêmes dans le langage commun, puis qu'on dit d'un homme endetté qu'il s'en faut vingt mille écus qu'il n'ait un ſou :

La raiſon de tout cela n'eſt autre que les deux maximes de l'égalité :

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous ſeront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

 Car

Car si $b - d = g$.

En ajoûtant d de côté & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour ajoûter d au membre où il est avec *moins*, je n'ay qu'à le retrancher; puis qu'aussi bien si je l'avois ajoûté en disant,

$b - d + d$.

$-d$ & $+d$. ne feroient rien par le 4.e principe.

Et pour ajoûter d à l'autre membre où il n'est point du tout, il faut que je l'y mette avec *plus* en disant $g + d$.

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre en un autre en changeant le *moins* en *plus* ne fait qu'ajoûter choses égales à choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

Et si j'avois $b + d = f$.

En retranchant d de côté & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour retrancher d du membre où il est avec un *plus* je n'ay qu'à l'oster tout à fait, puis qu'on ne peut pas mieux le retrancher qu'en le supprimant.

Et pour le retrancher du membre où il n'étoit point du tout, il faut l'y mettre avec un *moins*, en disant $f - d$.

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre à un autre en changeant le *plus* en *moins*, ne fait qu'oster choses égales de choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

EXEMPLES.

De la Solution d'un Probléme par Equations.

LXVI. On feint qu'une Mule allant avec une Asnesse se plaignoit d'étre trop chargée, & que la Mule lui dit; Si je t'avois donné un de mes sacs, nous en aurions au-

autant l'une que l'autre: & si tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy.

On demande combien chacune portoit de sacs. Et on le trouve ainsi.

Le nombre inconnu des sacs de la Mule soit appellé A. & de l'Asnesse B.

Par la premiere hypothese

$A - 1 = B + 1$.

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$A = B + 2$.

Par l'autre hypothese.

$A + 1$ est égal à deux fois $B - 1$, c'est à dire à $2B - 2$.

Donc en mettant au lieu d'A, $B + 2$ qui lui est égal:

$B + 3 = 2B - 2$.

Donc ajoûtant 2 de part & d'autre

$B + 5 = 2B$.

Donc ôtant un B de part & d'autre

$5 = B$.

C'est à dire que B, le nombre des sacs de l'Asnesse, est 5, & 7 celui des sacs de la Mule.

Second Exemple.

Aiant rencontré des pauvres & leur voulant donner à chacun 5 sols, j'ai trouvé que j'en avois un de trop peu. Et ainsi ne leur ayant donné qu'à chacun 4, il m'en est resté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avois-je de sols? LXVII.

Soit le nombre des pauvres appellé A.

Par l'hypothese

$5A - 1 = 4A + 6$.

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$5A = 4A + 7$.

Donc ost 4 A de part & d'autre

Donc il y avoit 7 pauvres. Et j'avois 34 sols.

TROISIE'ME EXEMPLE.

LXVIII. N'AIANT que des Carolus de 10 derniers & des piéces de 3 blancs de 15 derniers, faire 20 sols en 20 piéces.

Soient appellez le sol A.

Le Carolus $B = A - 2$ den.

La piéce de trois blancs $C = A + 3$ den.

Multipliant B par la difference de C à A, c'est à dire prenant 3 B; & C par la difference de B à A, c'est à dire prenant $2\,C$:

Je dis que $3\,B + 2\,C$ valent $5\,A$.

Car $3\,B = 3\,A - 6$ den.

Et $2\,C = 2\,A + 6$ den.

Or plus & moins valent zero. Donc, &c.

Or 4 fois 5 valent 20.

Donc 4 fois 3 B, c'est à dire $12\,B$, & 4 fois 2 C, c'est à dire $8\,C$ valent $20\,A$. Ce que l'on cherchoit.

Cette équation est le fondement d'une regle d'Arithmetique qu'on appelle la regle d'alliage.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

DE LA RAISON ET PROPORTION GEOMETRIQUES.

RIEN *n'a jamais été moins bien éclairci dans toute la Geometrie, que la nature de ce qu'on appelle* Raison : *&* *l'Auteur de ces Elemens n'a jamais été fort satisfait de ce qu'il en a dit dans la premiere Edition de ce Livre. Mais un Gentilhomme Flamand nommé M. de Nonancourt, qui a beaucoup de lumieres, non seulement dans ces sortes de Sciences, mais aussi dans la Philosophie & dans la Theologie, lui aiant fait voir un petit Traité Latin intitulé* Euclides Logisticus, seu de Ratione Euclidea; *il avoüe que cela lui a ouvert les yeux, & lui a fait* *concevoir des Notions beaucoup plus nettes touchant cette Matiere, qu'il n'en avoit auparavant: & c'est pourquoi on trouvera que ce second Livre & le troisiéme sont presque tout changez.*

PLAN GENERAL

DES PROPORTIONS.

ON peut comparer ensemble deux grandeurs en deux differentes manieres.

L'UNE est, en considerant de combien l'une surpasse l'autre quand elles sont inégales, ce qui s'appelle ***Difference*** : comme si je dis que 2 est la difference de 7 à 5.

L'AUTRE est, en considerant un autre rapport qui s'appelle *Raison*, que nous expliquerons plus bas.

QUE si deux grandeurs ont entr'elles ou même difference, ou même raison que deux autres, cela s'appelle ***Proportion*** ; mais quand c'est une égalité de difference, cela s'appelle ***Proportion Arithmetique.***

ET quand c'est une égalité de Raisons, ***Proportion Geometrique.***

MAIS parce qu'on n'a point d'égard dans la Geometrie à la Proportion Arithmetique, & que quand on parle absolument de Proportion on entend toûjours la ***Geometrique***, c'est à celle-là que nous nous arrêterons; & nous tâcherons d'expliquer plus clairement que l'on ne fait d'ordinaire ce que c'est que Raison, qui est le fondement de la Proportion Geometrique.

SECTION PREMIERE.

DE LA RAISON.

DEFINITIONS.

LA quantité relative d'une grandeur comparée à une autre, est ce qu'on appelle *Raison*.

LA quantité relative de 12 à 8, est la Raison de 12 à 8.

DE B à C, est la Raison de B à C.

LA ~~Raison~~ que l'on compare s'appelle *antecedent*; & celle avec qui on la compare, *consequent*. grandeur

Remarques pour mieux faire comprendre la nature de la ~~Raison~~ grandeur

I. QUAND on considere une grandeur seule, on n'y considere que sa grandeur absoluë : ainsi en comptant tous les Soldats d'une Armée de 10000 hommes, en y trouvant 10000, je dis que c'est une Armée de 10000 hommes: Mais si je compare cette Armée avec une autre de 100000 ou de 4000, la notion de sa grandeur change ; car je la trouve petite comparée avec la premiere, & grande comparée avec la seconde. Or c'est ce que j'appelle *Quantité relative*, en quoi consiste ce que les Geometres appellent *Raison*.

II. QUOI que toute Raison demande deux termes, neanmoins la Quantité relative en quoi la raison consiste, convient proprement à l'antecedent, & non pas au consequent ; comme encore que la Paternité suppose le Pere & le Fils, neanmoins elle ne convient qu'au Pere, & non au Fils; & la Filiation ne convient qu'au Fils, & non au Pere.

III. COMME la Raison est une quantité, quoi que relative, toutes les proprietez de la quantité lui conviennent ; c'est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison.

IV. Rien ne peut mieux faire comprendre ce que c'est que Raison, que les fractions ou nombres rompus, qui se marquent par deux chiffres, avec une ligne entre-deux, dont le plus haut, qui s'appelle *numerateur*, est comme l'antecedent; & le plus bas, qui s'appelle *dénominateur*, est comme le consequent: car les nombres entiers signifient une quantité absoluë, en ce que 3, par exemple, signifie trois unitez, 4 quatre unitez, &c. au lieu que dans les fractions le numerateur ne signifie que par rapport au dénominateur; de sorte que si de trois fractions qui ont toutes le nombre 2 pour numerateur, on en cache le dénominateur, on ne sçait ce que ce 2 veut dire; mais si on le découvre, & que ce soient $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{2}{7}$ dans la premiere il signifiera deux tiers, dans la seconde deux cinquiémes, dans la troisiéme deux septiémes; & il faut remarquer que plus ce dénominateur est un petit nombre, plus la fraction est grande, & au contraire; car au lieu que 3 est un moindre nombre que 5, & 5 que 7, deux tiers est plus que deux cinquiémes, & deux cinquiémes plus que deux septiémes; ce que nous dirons dans la suite étre la même chose dans les Raisons; celles qui ont un même antecedent & divers consequens étant d'autant plus grandes que leur consequent est plus petit.

Premiére Division.

V. Toute Raison est d'*égalité* ou d'*inégalité*. On appelle Raison d'*égalité*, quand l'antecedent est égal au consequent, comme la Raison de B à B, de 12 à 12, d'1 à 1; d'*inégalité*, quand l'antecedent est plus grand ou plus petit que le consequent, comme la Raison de 12 à 8, ou de 8 à 12.

Avertissement.

VI. *Il ne faut pas confondre la Raison d'égalité avec l'égalité des Raisons; car deux Raisons peuvent étre égales entr'elles, quoi que chacune soit une Raison d'inégalité.*

Seconde Division.

La Raison d'inégalité se divise encore en celle qu'on appelle de *nombre à nombre*, & celle qu'on appelle *Raison sourde*. VII.

On dit que deux grandeurs ont entr'elles une Raison de nombre à nombre, ou quand l'une est précisément contenuë tant de fois dans l'autre; comme la Raison du pied à la toise, la Raison de 4 à 12; ou au moins, quand quelques aliquotes de l'antecedent sont précisément un certain nombre de fois dans le consequent, comme la raison d'une aulne à une toise; parce que le poûce, qui est la 44.e partie d'une aulne, est 72 fois dans la toise.

Quand les grandeurs ont entr'elles une raison de nombre à nombre, on dit qu'elles sont *commensurables*; parce qu'elles ont quelque partie qui peut servir de commune mesure à l'une & à l'autre.

C'est ce qui convient à tous les nombres qui ont tous au moins l'unité pour mesure commune.

Et c'est aussi ce qui a fait que l'on appelle cette raison *de nombre à nombre*.

Et le plus court aussi est d'exprimer ces raisons par les moindres nombres qui en ont une semblable, comme de dire que l'aulne est à la toise comme 44 à 72; c'est à dire comme 11 à 18.

La Raison sourde, qui est opposée à celle-là, est quand deux grandeurs ont une certaine Raison entre elles, qui ne peut étre marquée par aucun nombre; parce que chacune aiant des parties aliquotes de plus petites en plus petites, à l'infini: Il ne peut neanmoins arriver qu'aucune, quelque petite qu'on la prenne, mesure justement l'autre grandeur, c'est à dire qu'elle y soit precisément; mais

mais il y aura toûjours quelque reſte plus petit que cette aliquote.

Cela paroît d'abord incroyable, & neanmoins il y a demonſtration qu'il y a des lignes qui ſont incommenſurables à d'autres lignes, comme le côté du quarré à la diagonale.

comparaison

DE LA COMP~~OSITI~~ON DES RAISONS.

VIII. Comme la Raiſon eſt une quantité ou grandeur, quoi que relative : tout ce qui convient à la quantité ou grandeur en general convient auſſi à la Raiſon.

Et ainſi comme deux grandeurs peuvent étre comparées enſemble, deux raiſons le peuvent étre auſſi; & alors, comme il y a quatre termes dans cette comparaiſon : le premier & le quatriéme, qui ſont l'antecedent de la premiere Raiſon & le conſequent de la deuxiéme, s'appellent *extrémes* ; & le deuxiéme & le troiſiéme qui ſont le conſequent de la premiere Raiſon & l'antecedent de la ſeconde, s'appellent *moyens*.

Que ſi conſiderant enſemble pluſieurs Raiſons, le conſequent de la precedente eſt toûjours le même que l'antecedent de la ſuivante : ces Raiſons peuvent étre appellées *continuës*.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette comparaiſon de Raiſons, eſt, que comme une grandeur comparée à une autre lui eſt égale ou inégale, & quand elle eſt inégale qu'elle eſt plus grande ou plus petite : Il faut auſſi qu'une Raiſon comparée à une autre lui ſoit égale ou inégale;& & quand elle eſt inégale qu'elle lui ſoit plus grande ou plus petite.

Et comme c'eſt dans cette comparaiſon de deux grandeurs que conſiſte la Raiſon d'égalité ou d'inégalité : il eſt clair encore, que deux Raiſons étant comparées enſemble, en ſorte que l'une ſoit l'antecedent & l'autre le conſequent de cette comparaiſon, elles ont entr'elles une nouvelle Raiſon, ou d'égalité ſi elles ſont égales, ou d'inégalité ſi elles ſont inégales.

Or quand c'eſt la Raiſon d'égalité qui eſt entre deux Raiſons, c'eſt à dire quand deux Raiſons ſont égales, cela s'appelle *Proportion*, ou *Proportion Geometrique :*

DEFINITION DE LA PROPORTION GEOMETRIQUE.

Ainsi ce qu'on entend par la *Proportion Geometrique*, ou par le mot de *Proportion* quand on n'y ajoûte rien, n'eſt autre choſe que l'égalité de deux Raiſons ; qui conſiſte en ce que la quantité relative d'un antecedent comparé à ſon conſequent, eſt égale à la quantité relative d'un autre antecedent comparé auſſi à ſon conſequent. IX.

La Proportion s'explique en diverſes manieres, c'eſt à dire qu'il y a diverſes façons de parler pour ſignifier que quatre grandeurs, comme B, C, F, G, ſont proportionnelles. On dit premierement que la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſiéme à la quatriéme ; que B eſt à C, comme F à G.

2. Que la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt égale à la Raiſon de la troiſiéme a la quatriéme.

3. Que la premiere a la même Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme ; & pour abreger on ſe ſert de quatre points : : entre les deux Raiſons B, C : : F, G.

DÉFINITION.

Nous avons déja dit que comparant enſemble deux Raiſons, l'antecedent de la premiere & le conſequent de la ſeconde s'appellent *extremes* ; & l'antecedent de la ſeconde & le conſequent de la premie- X.

re *les moyens*: Mais dans les Raisons égales les extremes & les moyens sont dits être reciproques les uns aux autres; c'est à dire que le premier & le quatriéme terme sont reciproques au deuxiéme & au troisiéme.

AVERTISSEMENT.

XI. NOUS *avons déja dit que la Raison étant une quantité, quoi que relative, comme deux grandeurs étant comparées l'une à l'autre font une Raison; on peut aussi comparer deux Raisons l'une à l'autre, comme la Raison B à X, à la Raison C à X, & considerer quelles Raisons elles ont entr'elles; & alors la premiere Raison (qui a son antecedent & son consequent) n'est que l'antecedent de cette nouvelle Raison que l'on cherche entre ces deux Raisons, & la seconde Raison en est le consequent; & que pour mieux marquer il semble alors à propos de mettre les consequens de ces Raisons que l'on compare au dessous de leurs antecedens, avec une petite ligne entre deux, comme on fait dans les Fractions en cette maniere:*

$$\frac{B}{X},\ \frac{C}{X}.$$

OR cela étant ainsi, ces deux Raisons considerées en cette maniere peuvent être les deux premiers termes d'une proportion, dont les deux derniers seront où deux grandeurs absoluës, comme si je dis, la Raison de B à X est à la Raison de C à X, comme B est à C:

$$\frac{B}{X},\ \frac{C}{X}\ ::\ B, C:$$

ou deux autres Raisons, comme si je dis, la Raison d'X à X est à la Raison de B à X, comme la Raison d'X à C, est la Raison de B à C.

X

$$\frac{X}{X},\ \frac{B}{X}\ ::\ \frac{X}{C},\ \frac{B}{C}.$$

PROPORTIONS,

OU RAISONS ÉGALES NATURELLEMENT CONNUES.

ON ne sçauroit mieux faire comprendre ce que c'est que proportion ou égalité de Raisons, que par des exemples de proportions naturellement connuës, qui serviront aussi de principes pour connoître celles qui ne se discernent pas si facilement. XII.

I.

TOUTES les Raisons d'égalité sont égales entr'elles; la Raison de B à B est égale à la Raison de C à C, la Raison d'1 à 1 est égale à la Raison de 3 à 3. XIII.

II.

LA Raison d'une grandeur à son multiple quelconque, est égale à la raison d'une autre grandeur à son équi-multiple. La Raison de B au triple de B, est égale à la Raison de C au triple de C. XIV.

La Raison de 2 au triple de 2 (qui est 6) est égale à la Raison de 5 au triple de 5 (qui est 15).

III.

LA Raison d'une grandeur à une autre grandeur est égale à la Raison de leur équimultiple. XV.

La Raison de B à C est égale à la Raison du triple de B au triple de C.

La Raison de 2 à 5 est égale à la Raison de 6 triple de 2 à 15 triple de 5.

IV.

LA Raison des multiples differents de la même grandeur est égale à la Raison des multiples d'une XVI.

B 7 autre

autre grandeur pareils aux premiers, chacun à chacun & dans le même ordre.

La Raiſon de 3 B à 5 B, eſt égale à la Raiſon de 3 C à 5 C.

V.

La Raiſon des multiples pareils de deux grandeurs, eſt égale à la Raiſon d'autres multiples pareils des mêmes grandeurs.

La Raiſon de 3 B à 3 C, eſt égale à la Raiſon de 5 B à 5 C.

Avertissement.

XVII. *Tout ce qu'on vient de dire des multiples ſe peut dire auſſi des aliquotes, n'étant que la même choſe ſous un autre nom ; car toute grandeur eſt multiple de ſes aliquotes, & aliquote de ſes multiples.*

Definition. Division.

XVIII. La Proportion eſt ou *diſcrete*, ou *continuë* : On l'appelle *diſcrete* quand le conſequent de la premiere Raiſon eſt different de l'antecedent de la ſeconde, comme dans tous les exemples qu'on a rapportés. B, C. :: F, G.

On l'appelle *continuë* quand la même grandeur qui eſt le conſequent de la premiere Raiſon eſt l'antecedent de la ſeconde : comme ſi je diſois B eſt à C, comme C, eſt à D. B. C :: C. D ; ce qui ſe peut auſſi marquer ainſi ∺ B. C. D.

Definition.

XIX. Cette proportion continuë s'appelle *Progreſſion*, quand y ayant pluſieurs raiſons égales de ſuite, le conſequent de la precedente eſt toûjours l'antecedent de la ſuivante, comme B eſt à C, comme C à D, comme D à F, comme F à G, &c. Ce qui ſe marque ainſi ∺ B. C. D. F. G.

I.

I. Axiôme.

La Raiſon d'un antecedent à un conſequent, a pour parties les Raiſons de châque partie de l'antecedent à ce même conſequent ; & cette raiſon eſt égale à toutes les raiſons partiales priſes enſemble de l'antecedent au même conſequent. Soit la grandeur T, diviſée en pluſieurs parties égales, ou inégales, comme M, P, Q ; ſi on compare T à quelque autre quantité comme O, enſorte que T ſoit l'antecedent, & O le conſequent : La raiſon de T à O, a pour parties les raiſons de M à O, de P à O, de Q à O, & leur eſt égale. XX.

$$\frac{T}{O} = \frac{M}{O} + \frac{P}{O} + \frac{Q}{O}.$$

Car T valant M + P + Q, il eſt viſible que $\frac{T}{O}$ eſt égale a $\frac{M+P+Q}{O}$

Remarquez que je dis que la Raiſon $\frac{T}{O}$ a pour parties les raiſons $\frac{M}{O}, \frac{P}{O}, \frac{Q}{O}$, & non pas qu'elle en eſt compoſée, ce qui ſignifie tout autre choſe, comme on verra dans la ſuite.

II. Axiôme.

La Raiſon d'un antecedent à un conſequent, eſt égale à la Raiſon d'un autre antecedent moindre que le premier au même conſequent, plus la Raiſon de la grandeur dont un antecedent ſurpaſſe l'autre au conſequent. Et ainſi la Raiſon du plus grand antecedent au conſequent eſt plus grande que la Raiſon du plus petit antecedent à ce même conſequent. XXI.

C'eſt une ſuite de l'Axiôme precedent.

Car la Raiſon du grand antecedent au conſequent, a pour parties la Raiſon du petit antecedent XXII.

au

au consequent plus la Raison de la quantité, dont le grand antecedent surpasse le plus petit, à ce même consequent, & elle leur est égale.

Cette quantité dont une grandeur en surpasse une autre, s'appelle la *difference* qui est entre ces deux grandeurs. Soit B plus grand que C, & la difference de B à C, soit appellée X: ensorte que $C + X$, soit égal à B; $\frac{B}{D}$ est égal à $\frac{C}{D} + \frac{X}{D}$.

III. Axiôme.

XXIII. La Raison de l'antecedent à une partie du consequent est plus grande que la raison du même antecedent à tout le consequent; & ainsi la raison d'un antecedent à un consequent est une plus grande raison que celle du même antecedent à un autre consequent plus grand que le premier.

La Raison de B à X partie de D est plus grande que la Raison de B à D; & de même si X est plus petit que Y, la Raison de B à X, sera plus grande que celle de B à Y.

IV. Axiôme.

XXIV. Les Raisons qui ont un même consequent sont entr'elles comme leurs antecedens, $\frac{B}{X} . \frac{C}{X} :: B. C.$

C'est une suite du 2.de Axiôme; car si deux antecedens étant comparez à un même consequent, la Raison du plus grand antecedent est plus grande que celle du plus petit: il faut que ces raisons soient entr'elles comme les antecedens.

V. Axiôme.

XXV. Les Raisons qui ont un même antecedent sont entr'elles comme leurs consequens dans un ordre reciproque ou renversé, c'est à dire que la premiere est

est à la seconde, comme le consequent de la seconde est au consequent de la premiere $\frac{x}{B}, \frac{x}{C} :: C, B.$

C'est la suite du troisiéme Axiôme; car si comparant le même antecedent à differens consequens, la Raison de cet antecedent à chaque consequent est plus grande quand le consequent est plus petit, & plus petite quand le consequent est plus grand: il est clair que ces raisons doivent être entr'elles comme les consequens dans un ordre renversé; puisque si le consequent de la premiere est plus grand que le consequent de la seconde: la premiere sera plus petite que la seconde, comme le consequent de la seconde est plus petit que le consequent de la premiere.

VI. Axiôme.

Si deux raisons sont égales à une même raison: elles sont égales entr'elles. XXVI.

B.C..
F.G.. M.N.

Donc B.C. :: F.G.

Et c'est la même chose que si deux raisons étant égales à deux autres raisons chacune à chacune, elles sont égales entr'elles; si les Raisons I & O étant supposées égales, la Raison A est égale à la Raison I, & la Raison E, égale à la Raison O: A & E seront égales entr'elles.

Corollaire.

Quand plusieurs proportions discretes considerées ensemble, sont telles que les deux derniers termes de la precedente sont toûjours les deux premiers termes de la suivante: elles peuvent être appellées *continuës* en leur maniere, ou *discretement continuës*; & alors il est clair que toutes ces raisons de ces diverses proportions sont égales, & qu'ainsi l'on XXVII.

l'on peut toûjours conclure que les deux premiers termes ſont entr'eux comme les deux derniers, ce qui ſera d'un grand abregement dans la ſuite. Exemples dans les nombres :

$$\frac{8}{12}.\frac{15}{21}.::\frac{2}{3}.\frac{5}{7}.::\frac{7}{3}.\frac{5}{2}.::\frac{7}{5}.\frac{3}{2}.$$

Donc $\frac{8}{12}.\frac{15}{21}.::\frac{7}{5}.\frac{3}{2}.$

VII. Axiôme.

XXVIII. Deux grandeurs ſont égales lors qu'elles ont même Raiſon à une même grandeur, ou qu'une même grandeur a même Raiſon à châcune.

Si B. S. :: D. S.
Ou que S. B. :: S. D.
Donc B eſt égal à D.

Que ſi ce ſont les grandeurs B & D qu'on ſuppoſe égales : elles auront même Raiſon à une même grandeur, & une même grandeur aura même Raiſon à châcune. Si B eſt égale à D: B. S. :: D. S. & S. B. :: S. D.

Le fondement de tout cela, eſt qu'il eſt clair qu'en matiere de Raiſon deux grandeurs égales & une même grandeur deux fois repetée font la même choſe.

VIII. Axiôme.

XXIX. Il peut y avoir trois ſortes d'égalitez en 4 termes qui font deux Raiſons.

1. L'égalité des antecedens, qui font le 1.er & le 3.e des ces 4 termes. 2. L'égalité des conſequens, qui font le 2.d & le 4.e 3. L'égalité des Raiſons mêmes. Et deux de ces égalitez étant données donnent celle qui reſte. Soient les 2 Raiſons $\frac{B}{S}$ & $\frac{D}{T}$.

Preuve du 1.er & 2.d cas. Suppoſé que le 1.er terme

me ſoit égal au 3.e & le 2.d au 4.e B à D & S à T; par ces hypotheſes, & le ſeptieme Axiôme, B. S :: D. S :: D. T; donc par le VI.e Axiôme B. S :: D. T.

Preuve du 1.er & 3.e cas. Suppoſé que $\frac{B}{S}$ ſoit égale à $\frac{D}{T}$ & B égal à D; par ces hypotheſes, & le VII.e Axiôme B. S :: D. T :: B. T donc par le VII.e Axiôme S eſt égal à T.

C'eſt la même choſe ſi on ſuppoſe que S eſt égal à T; on en conclura de la même ſorte que B ſera égal à D; ce qui fait le 2.d & 3.e cas.

Corollaire.

Il en eſt de même des Raiſons que des Grandeurs; XXX.
car 1. conſiderant enſemble 4 Raiſons, elles ſeront proportionnelles, ſi la 1.re eſt égale à la 3.e & la 2.de à la 4.e Ainſi parce que la Raiſon de 2 à 3, eſt égale à la Raiſon de 4 à 6, & la Raiſon de 5 à 7, égale à celle de 15 à 21: $\frac{2}{3}.\frac{5}{7}.::\frac{4}{6}.\frac{15}{21}.$

2. Suppoſant que ces 4 Raiſons ſont proportionnelles. Si la 1.re eſt égale à la 3.e la 2.de le ſera à la 4;e & reciproquement ſi la 2.de eſt ſuppoſée égale à la 4,e la 1.re le ſera à la 3.e

IX. Axiôme.

Quand on a deux proportions, les 4 Raiſons XXXI.
de ces deux proportions ſont proportionnelles. La 1.re Raiſon de la 1.re Proportion étant à la 1.re Raiſon de la 2.de Proportion, comme la 2.de Raiſon de la 1.re Proportion eſt à la 2.de Raiſon de la derniere. Si B. C. :: F. G. & M. N :: P. Q $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}.::\frac{F}{G}.\frac{P}{Q}.$

Car la 1.re Raiſon $\frac{B}{C}$ eſt égale à la 3.e $\frac{F}{G}$, par ce que ce ſont les deux Raiſons de la 1.re Proportion; & la 2.de eſt égale à la 4.e par la même Raiſon. Donc par le VIII.e Axiôme, il y a une nouvelle proportion entre ces 4 Raiſons.

X.

X. Axiôme.

XXXII. On ne change rien dans une proportion quand on ne fait qu'en tranſpoſer les raiſons ; car deux choſes égales demeureront toûjours égales de quelque maniere qu'on les diſpoſe. Si donc
B. C. :: F. G. je dis qu'auſſi
F. G. :: B. C.

I. Theoréme.

XXXIII. Deux Raiſons ſont égales quand toutes les Aliquotes pareilles de châque antecedent ſont également contenuës dans ſon conſequent.

Soient 4 grandeurs B, C, F, G, & les Aliquotes quelconques de B ſoient appellées X, & les pareilles de F ſoient appellées Y. 1. Je dis que B. C. :: F. G. ſi X & Y ſont également contenuës dans les conſequens C & G.

Mais cela peut étre entendu en deux manieres. La premiere eſt quand X eſt préciſement autant de fois dans C qu'Y eſt dans G, & alors il n'y a aucune difficulté, & il ſuffit méme d'avoir examiné une ſeule Aliquote pareille des antecedens ; car il eſt viſible que ſi X [$\frac{1}{10}$ de B] eſt ſept fois dans C, & Y [$\frac{1}{10}$ de F] 7 fois dans G. B. C. :: F. G. 10 X. 7 X. :: 10 Y. 7 Y.

L'autre maniere fait toute la difficulté ; c'eſt quand une Aliquote quelconque de B, que je nomme X, n'eſt jamais préciſement tant de fois dans C, mais toûjours avec quelque reſte ; car alors l'Aliquote quelconque pareille de F ne peut étre également contenuë dans G, que par ce qu'elle y ſera autant de fois que X dans C, mais toûjours avec quelque reſte ; comme ſi X $\frac{1}{10}$ de B eſt dans C 7 fois plus R, & Y $\frac{1}{10}$ de F eſt auſſi dans G ſept fois plus R : je dis que quand on peut ſçavoir que cela ſe trouvera gene-

generalement dans toutes les aliquotes pareilles des antecedens ; c'eſt à dire qu'elles ſeront toutes au moins en cette maniere également contenuës dans les conſequens : les Raiſons $\frac{B}{C}$ & $\frac{B}{G}$ ſeront égales. Je ne ſçai ſi on le peut mieux prouver qu'en cette maniere :

Si les Raiſons $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ n'étoient pas égales : dans cette ſuppoſition il faudroit que la premiere fuſt plus ou moins grande que la ſeconde ; & ſi elle étoit plus grande, en augmentant ſon conſequent de quelque choſe on la diminuëroit : & par là on la pourroit rendre égale à $\frac{F}{G}$; comme au contraire ; ſi elle étoit moins grande : on pourroit ajoûter quelque choſe au conſequent de la ſeconde, & par là rendant cette ſeconde moins grande, on pourroit encore faire que la premiere lui fuſt égale.

Or on ne ſçauroit augmenter C de quoi que ce ſoit, qu'on ne rende la Raiſon $\frac{B}{C}$ plus petite qu'il ne faut pour étre égale à $\frac{F}{G}$, ce que l'on peut prouver ainſi : ajoûtant Z à C, quand Z ne ſeroit que la milliéme partie de l'epaiſſeur d'un cheveux, je dis que la Raiſon $\frac{B}{C+Z}$ ſeroit plus petite qu'il ne faudroit pour étre égale à $\frac{F}{G}$; car ſi l'on prend l'Aliquote X plus petite que Z, il eſt manifeſte que X ſera dans C + Z une fois plus que dans C : de ſorte que ſi X eſt la $\frac{1}{10000}$ de B & qu'elle ſoit 8701 dans C, la méme X [priſe comme il a été dit plus petite que Z] ſera dans C + Z, 8702 + R, au lieu que Y qui eſt auſſi la $\frac{1}{10000}$ de F ne ſera dans G que 8701 + R.

Or il eſt clair que la Raiſon de 10000 X à 8702 X plus R eſt plus petite que la Raiſon de 10000 Y à 8701 Y + R.

Donc on ne peut rien ajoûter à C qu'on ne rende

rende $\frac{B}{C+Z}$ plus petite que $\frac{F}{G}$. Il eſt aiſé de voir que l'on prouvera de la même ſorte qu'on ne peut rien ajoûter à G que l'on ne rende la Raiſon $\frac{B}{C}$ plus grande que $\frac{F}{G}$.

Donc la Raiſon $\frac{B}{C}$ n'eſt ni plus ni moins grande que la Raiſon $\frac{F}{G}$.

Donc elle lui eſt égale.

II. Theoréme.

XXXIV. Si 4 grandeurs ſont proportionnelles : elles le ſeront encore en les renverſant ; c'eſt à dire en comparant le premier conſequent au premier antecedent, & le ſecond conſequent au 2 antecedent, le 2 terme au premier, le 4 au 3ᵉ, ce qui s'appelle *Permutando*. Si B. C. :: F. G : je dis que C. B. :: G. F ; car $\frac{C}{C} \cdot \frac{B}{C} :: \frac{G}{G} \cdot \frac{F}{G}$, par le Corollaire du 8.ᵉ Axiome, la ſeconde de ces Raiſons étant égale à la 4.ᵉ par l'hypotheſe, & la premiere & la 3.ᵉ étant des Raiſons d'égalité. Or les deux premieres Raiſons aiant même conſequent ſont comme leurs antecedens par le 4.ᵉ Axiome ; & il en eſt de même des deux dernieres, qui ont auſſi même conſequent. Donc C. B. :: G. F ; ce qu'il faloit demontrer.

Corollaire.

XXXV. Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en les prenant à rebours ; c'eſt à dire que la 4.ᵉ ſera à la 3.ᵉ comme la 2.ᵈᵉ à la 1.ʳᵉ ſi B. C. :: F. G : je dis que G. F. :: C. B.

Car par le precedent Theoréme, la 2.ᵈᵉ eſt à la 1.ʳᵉ comme la 4.ᵉ eſt à la 3.ᵉ C. B :: G. F. Donc par le X.ᵉ Axiôme en tranſpoſant les Raiſons, la 4.ᵉ ſera à la 3.ᵉ comme la 2.ᵈᵉ à la 1.ʳᵉ G. F :: C. B.

Autrement : Par l'hypotheſe, les Raiſons $\frac{F}{G}$ & $\frac{B}{C}$ ſont égales. Donc par le Coroll. du 8.ᵉ Axiôme $\frac{G}{G} \cdot \frac{F}{G} :: \frac{C}{C} \cdot \frac{B}{C}$, donc par le 4.ᵉ Axiôme G. F. :: C. B.

III. Theoréme.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en les prenant alternativement ; c'eſt à dire en comparant les antecedens enſemble, & les conſequens enſemble, le 1.ʳᵉ terme au 3.ᵉ, & le 2.ᵈ au 4.ᵉ, ce qui s'appelle *Alternando*. Si B. C. :: F. G. Je dis qu'*Alternando* B. F. :: C. G ; car $\frac{B}{C} \cdot \frac{F}{C} :: \frac{F}{G} \cdot \frac{F}{C}$, par le 8.ᵉ Axiôme & ſon Corollaire ; La premiere & la 3.ᵉ Raiſon étant égales par l'hypotheſe ; & la 2.ᵈᵉ & la 4.ᵉ étant la même. Or $\frac{B}{C} \cdot \frac{F}{C}$ :: B. F, par le 4.ᵉ Axiôme, & $\frac{F}{G} \cdot \frac{F}{C}$ :: C. G, par le v.ᵉ Axiôme. XXXVI.

Donc B. F. :: C. G. par le VI.ᵉ Axiôme ; ce qu'il faloit demôntrer.

Corollaire. XXXVII.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en tranſpoſant la premiere, & la 4ᵉ ; c'eſt à dire que la 4ᵉ. ſera à la ſeconde, comme la 3ᵉ. à la 1ʳᵉ. ſi B. C. :: F. G : je dis que G. C. :: F. B ; car par le precedent Theoréme, la 1.ʳᵉ eſt à la 3.ᵉ comme la 2.ᵈᵉ à la 4. B. F. :: C. G. Donc *Permutando*, la 3.ᵉ eſt à la 1.ʳᵉ comme la 4.ᵉ eſt à la 2.ᵈᵉ F. B :: G. C ; donc par le X.ᵉ Axiôme en tranſpoſant les Raiſons : la 4.ᵉ ſera à la 2.ᵈᵉ comme la 3.ᵉ à la 1.ʳᵉ G. C :: F. B.

Autrement : Par l'hypotheſe, les Raiſons $\frac{C}{G}$ & $\frac{B}{F}$. ſont égales. Donc par le Coroll. du 8.ᵉ Axiôme $\frac{G}{G} \cdot \frac{C}{G} :: \frac{F}{F} \cdot \frac{B}{F}$, donc par le 4.ᵉ Axiôme G. C :: F. B.

Huit

HUIT DISPOSITIONS.

Dans lesquelles 4 Grandeurs peuvent étre proportionnelles.

XXXVIII. IL s'ensuit deux choses de ce que dessus : 1. Que 4 grandeurs étant proportionnelles, elles le sont toûjours de quelque maniere qu'on les transporte, pourveu que les extrémes demeurent extrémes, & les moyens ; moyens ; ou que les extrémes deviennent moyens, & les moyens extrémes.

2. Qu'il y a huit differentes dispositions, ni plus ni moins, dans lesquelles 4 Grandeurs peuvent étre proportionnelles. Les voici en les marquant par premiere, seconde, troisiéme, & quatriéme, selon qu'elles auroient été disposées la 1.re fois :

Hypothese	1.2 :: 3.4.	Premiere disposition.
10 Axiôme	3.4 :: 1.2.	Equivalente.
2 Theoréme	2.1 :: 4.3.	Permutation.
10 Axiôme	4.3 :: 2.1.	Equivalente.
3 Theoréme	1.3 :: 2.4.	Alterne.
10 Axiôme	2.4 :: 1.3.	Equivalente.
2 Theoréme	3.1 :: 4.2.	Permutation d'Alterne.
10 Axiôme	4.2 :: 3.1.	Equivalente.

On peut encore prouver ces 8 dispositions en cette maniere : Ayant mis en quarré les 4 Grandeurs proportionnelles : ensorte que dans la premiere disposition, les antecedens soient au dessus des consequens, ainsi :

B F
C G

Elles seront toûjours proportionnelles en les prenant deux à deux en méme sens de quelque maniere que ce soit, pourveu que ce ne soit point de coin en coin. Mais.

1. De haut en bas, par l'Hypothese.
2. De bas en haut, *Permutando.*
3. De gauche à droite, *Alternando.*
4. De droite à gauche, *Permutando.* L'Alterne & châcune de ces dispositions est double, parce que l'on peut commencer par laquelle on voudra des deux raisons.

IV. THEORÉME.

DES RAISONS PROPORTIONNELLES.

LES deux Theorémes precedens sont vrais, des Raisons proportionnelles aussi-bien que des Grandeurs ; c'est à dire que si 4 Raisons sont proportionnelles, la 1re étant à la 2.d comme la 3.e à la 4.e, elles le seront *Permutando* & *Alternando* ; c'est à dire que la 2.de sera à la premiere comme la 4.e à la 3.e ; & que la premiere sera à la 3.e comme la 2.de à la 4.e On se contentera de prouver l'Alterne qui est de plus grand usage. Soient les 4 Raisons proportionnelles $\frac{2}{21}.\ \frac{3}{15} :: \frac{4}{7}.\ \frac{6}{5}$. qu'on appellera pour les marquer avec moins d'embarras a.e. :: i.o. Elles ne sont proportionnelles que parce que la Raison qui est entre les deux premieres Raisons [a & e] est égale à la Raison qui est entre les deux dernieres [i & o ;] donc $\frac{a}{e} = \frac{i}{o}$; donc comparant châcune de ces Raisons égales entr'elles, avec la Raison qui est entre la 3.e & la 2.de ; c'est à dire avec $\frac{i}{e}$; il est clair par le Corollaire du 8.e Axiome que $\frac{a}{e}.\ \frac{i}{e} :: \frac{i}{o}.\ \frac{i}{e}$. XXXIX.

Or les deux premieres de ces 4 nouvelles Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens a & i ; & les deux dernieres ayant le même antecedent, sont comme les consequens dans un ordre renversé ; c'est à dire comme e & o ; donc si A. E. :: I. O : A. I. :: E. O.

V. THEORÉME.

SI à 4 Grandeurs proportionnelles comme $\frac{B}{C}$. $\frac{B}{C}$. XL.

C. :: F. G. on en ajoûte deux quelconques, comme M & N : la raison de La 2.de à la 5.e est à la Raison de la 4.e à la 6.e; comme la Raison de la 1.e à la 5.e, est à la Raison de la 3. à la sixiéme $\frac{C}{M}\cdot\frac{G}{N}\cdot :: \frac{B}{M}\cdot\frac{F}{N}\cdot$

Car la 1.re & la 3.e de ces 4 Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens; c'est à dire comme C est à B. Et il en est de même de la 2.de & de la 4.e qui sont comme G à F. Or par l'Hypothese & le 2.d Theoréme C. B. :: G. F. Donc la premiere de ces Raisons est à la 3.e, comme la 2.de à la 4.e; donc *Alternando* la 1.re est à la 2.de, comme la 3.e à la 4e.

VI. Theoréme.

XLI. Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B. C. :: F. G, on en ajoûte deux autres quelconques comme M. & N: la Raison de la 2.de à la 5.e est à la Raison de la 6.e à la 3.e comme la Raison de la 1.re à la 5.e est à la Raison de la 6.e à la 4.e $\frac{C}{M}\cdot\frac{N}{F} :: \frac{B}{M}\cdot\frac{N}{G}\cdot$

Demonstration. La 1.re & la 3.e de ces 4 Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens, par le IV.e Axiôme; c'est à dire comme C. à B. Et la 2.de & la 4.e ayant même antecedent, sont comme les consequens dans un ordre renversé [par le V.e Axiôme,] c'est à dire comme G à F. Or par l'Hypothese & le 2.d Theoréme C. B. :: G. F; donc la 1.re de ces Raisons est à la 3.e comme la 2.de à la 4.e; donc *Alternando* la 1.re est à la 2.de comme la 3.e à la 4.e; ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

XLII. Dans l'une & l'autre de ces deux proportions de

de Raisons des deux Theorémes precedens, si l'on suppose que les deux premieres Raisons sont égales, les deux dernieres le sont aussi; c'est à dire pour 5.e Theoréme: Si C. M. :: G. N; B. M. :: F. N; & pour le VI.e Theoréme : Si C. M. :: N. F; B. M. :: N. G. C'est une suite évidente de ces deux Theorémes, mais comme on a accoutumé de proposer l'un & l'autre en d'autres termes, nous en ferons le VII.e & le VIII.e Theoréme.

VII. Theoréme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B. C. :: F. G. On en ajoûte deux autres comme M, N, qui soient telles que la 2.de soit à la 5.e comme la 4.e à la 6.e la 1.re sera à la 5.e comme la 3.e à la 6e. XLIII.

1.re Hypothese, B. C. :: F. G.
2.de Hypothese, C. M. :: G. N.

Consequence à prouver, B. M. :: F. N

Demonstration. Par la 1.re Hypothese & le 4.e Axiôme, ces 4 Raisons sont proportionnelles $\frac{B}{M}\cdot\frac{C}{M} :: \frac{F}{N}\cdot\frac{G}{N}$. Or par la 2.de Hypothese, la 2.de Raison & la 4.e [$\frac{C}{M}$ & $\frac{G}{N}$] sont égales, [car c'est ce que l'on suppose quand on dit que C. M. :: G. N.] Donc par le Corollaire du VIII.e Axiôme, la 1.re Raison & la 3.e [$\frac{B}{M}$ & $\frac{F}{N}$] sont égales, c'est à dire que B. M. :: F. N, ce qui est la consequence à prouver. Ce Theoréme, s'appelle *Æqualitas ordinata*.

VIII. Theoréme.

Si à 4 grandeurs proportionnelles comme B. C. :: F. G, on en ajoûte deux autres comme X & Y, qui soient telles que la 2.de soit à la 5.e comme la 6.e à la 3.e la premiere sera à la 5.e comme la 6.e à la 4.e XLIV.

1.^{re} Hypothese, B.C.::F.G.
2.^{de} Hypothese, C.X.::Y.F.
Consequence à prouver, B.X.::Y.G.

Demonstration. Par la 1.^{re} Hypothese, & le IV.^{e} V.^{e} & Axiôme, $\frac{B}{X}\,\frac{C}{X} :: \frac{Y}{G}\,\frac{Y}{F}$. Or par la 2.^{de} Hypothese, la seconde & la quatriéme Raison [$\frac{C}{X}$ & $\frac{Y}{F}$] sont égales, car c'est ce que l'on suppose quand on dit que C.X :: Y.F; donc par le Corollaire du VIII.^{e} Axiôme, la 1.^{re} Raison & la 3.^{e} [$\frac{B}{X}$ & $\frac{Y}{G}$] sont égales aussi, c'est à dire que B. X :: Y. G; ce qui est la consequence à prouver. Ce Theoréme s'appelle *Æqualitas perturbata*.

Avertissement.

XLV. On propose encore ce dernier Theoréme d'une autre maniere qui revient à la même chose, quoique cela paroisse fort different.

VIII. Theoréme,

Proposé d'une autre maniére.

XLVI. Y ayant 3 Grandeurs d'une part, & 3 de l'autre: Si la 1.^{re} d'une part est à la 2.^{de} comme la 2.^{de} de l'autre part est à la 3^{e}; & que la 2.^{de} d'une part soit à la 3.^{e} comme la 1.^{re} de l'autre part est à la 2de: la 1.^{re} d'une part sera à la 3e, comme la 1.^{re} de l'autre part sera à la 3^{e}.

Soient les Grandeurs 3 d'une part B, C, X, & 3 de l'autre Y, F, G,

1.^{re} Hypothese, B.C.::F.G.
2.^{de} Hypothese, C.X.::Y.F.
Consequence à pouvrer, B.X.::Y.G.

On voit clairement que ce sont les mêmes Hypotheses & la même consequence à prouver que dans le VIII^{e}. Theoréme, & qu'ainsi cela se prouvera

vera de la même sorte. Il faudra peut-estre mettre là les Reciproques.

IX. Theoréme.

Si 4. Grandeurs sont proportionnelles, elles le seront encore en comparant châque antecedent plus ou moins son consequent, avec son consequent; c'est à dire, que si la 1.^{re} est à la 2.^{de} comme la 3.^{e} est à la 4^{e}; la 1.^{re} plus ou moins la 2.^{de} sera à la 2.^{de} comme la 3.^{e} plus ou moins la 4.^{e} à la 4^{e}; ce qui s'appelle ordinairement *Componendo*, s'il y a plus; & *Dividendo* s'il y a moins, quoique peut-estre par abus, comme nous le ferons voir plus bas; & il faut remarquer que pour y avoir moins, chaque antecedent doit estre plus grand que son consequent. Il faut prouver que si B.C.::F.G. B plus ou moins C, est à C, comme F, plus ou moins G est à G; c'est à dire que B $\pm$ C.C::F $\pm$ G.G. Car $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ estant égales par l'hypothese, & $\frac{C}{C} = \frac{G}{G}$, parce que ce sont deux Raisons d'égalité: $\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ est égal á $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$. Or $\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ n'est autre chose que $\frac{B \pm C}{C}$; & $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$ n'est autre chose que $\frac{F \pm G}{G}$. Donc $\frac{B \pm C}{C}$ est égal à $\frac{F \pm G}{G}$; c'est à dire que la raison de B plus ou moins C à C, est égale à la Raison de F plus ou moins G à G; donc B $\pm$ C.C::F $\pm$ G.G; ce qu'il falloit demontrer. XLVII.

X. Theoréme.

Si 4 Grandeurs sont proportionnelles, & que cha- XLVIII.

châque antecedent ſoit plus grand que ſon conſequent : le 1.er antecedent eſt à la quantité dont il ſurpaſſe ſon conſequent, en même Raiſon que le ſecond antecedent eſt à la quantité dont il ſurpaſſe ſon conſequent. Cette quantité s'appelle la difference de l'antecedent d'avec ſon conſequent, comme nous avons déja vû. Soit B. C. : : F. G, & que châque antecedent ſoit plus grand que le conſequent. Je dis que B. B — C : : F. F — G. Pour le montrer, il ne faut que prouver que B — C. B : : F — G. F ; car ſi cela eſt, l'autre ſera vray *Permutando*. Or ce dernier eſt clair ; car la Raiſon de $\frac{B-C}{B}$ eſt la même choſe que $\frac{B}{B}$ moins $\frac{C}{B}$; & $\frac{F-G}{F}$ eſt la même choſe que la Raiſon $\frac{F}{F}$ moins $\frac{G}{F}$. Or $\frac{B}{B} = \frac{F}{F}$ & $\frac{C}{B} = \frac{G}{F}$; donc $\frac{B-C}{B} = \frac{F-G}{F}$; donc B — C. B : : F — G. F, & *Permutando* B. B — C. : : F. F — G ; ce qu'il falloit demontrer.

XI. Theoreme.

XLIX. Lors qu'on a deux proportions que je nommeray A & E : Si 3 termes de l'une ſont égaux à 3 termes de l'autre, châcun à châcun, & dans le même ordre [c'eſt à dire le 1.er au 1.er le 2.d au 2.d ; &c.] Les deux qui reſteront de part & d'autre ſeront auſſi égaux entr'eux.

Soit la proportion A. B. D. : : L. M.

& la proportion E. β. δ. : : λ. μ. Je dis que ſi le premier terme d'A eſt égal au 1.r terme d'E ; & le 2.d au 2.d ; & le 3.e au 3.e : les deux quatriémes le ſeront auſſi ; car par le 9.e Axiôme, les 2 premieres Raiſons d'A & d'E ſont entr'elles comme les deux dernieres.

Or les deux premieres ſont égales par le 8.e Axiôme, parce que par l'Hypotheſe, les antecedens ſont

ſont égaux, & leurs conſequens auſſi. Il faut donc auſſi que les deux dernieres Raiſons ſoient égales, c'eſt à dire que L. M. : : λ. μ. Or les deux antecedens de ces deux Raiſons qui ſont L & λ ſont égaux par l'Hypotheſe. Donc par le VIII.e Axiôme, les deux conſequens M & μ le ſont auſſi ; ce qu'il falloit demontrer.

On prouvera ſans peine la même choſe, ſi c'eſt l'égalité d'un autre terme d'A à un ſemblable d'E, comme du 2.d au 2.d qui ſoit ſuppoſé inconnu ; car alors l'égalité des deux dernieres Raiſons qui ſera manifeſte par l'Hypotheſe, prouvera celle des deux premieres ; & l'égalité des deux premieres dont les antecedens ſont égaux par l'Hypotheſe, prouvera l'égalité des deux conſequens qui ſeront le 2.d terme d'A, & le 2.d d'E.

I. Corollaire,

Ce theoréme ne laiſſe pas d'eſtre vray quand les 3 termes d'une proportion égaux châcun à châcun à 3 termes de l'autre, ne ſeroient pas dans le même ordre dans l'une & dans l'autre, pourvû que les deux moyens de l'une ſoient égaux, ou aux deux moyens de l'autre, ou aux 2 extremes ; car alors il ſera aiſé en tranſpoſant les termes de l'une, de faire que les termes égaux ſe repondent dans l'une & dans l'autre ſelon ce qui a été dit. L.

II Corollaire.

Si deux proportions A & E étoient continuës, les deux moyennes proportionnelles étant égales, l'un des extremes d'A, ne pourroit eſtre égal à l'un des extremes d'E, que l'autre extreme d'A ne fût égal à l'autre extreme d'E. LI.

XII. Theoréme.

Plusieurs Raiſons étant égales, tous les an- LII.

antecedens sont à tous les consequens, comme un des antecedens à son consequent. Comme deux Raisons estant égales, l'antecedent est à l'antecedent, comme le consequent au consequent; ainsi 4 Raisons [ou tant que l'on voudra] estant égales, le premier antecedent est au dernier antecedent, comme le 1.r consequent au dernier; & le 2.d antecedent au dernier antecedent, comme le 2.d consequent au dernier; & ainsi de suite jusques au dernier antecedent qui sera à soy-même, comme le dernier consequent à soy-même.

Donc les 4 Raisons de châcun des quatre antecedens au dernier antecedent, sont égales aux 4 Raisons de châcun des 4 consequens au dernier consequent, châcune à châcune; c'est à dire que si ces 4 Raisons égales, sont $\frac{B}{A}, \frac{C}{E}, \frac{D}{I}, \frac{F}{O}, \frac{B}{F}, \frac{C}{F}, \frac{D}{F}, \frac{F}{F}$, seront égales chacune à chacune à $\frac{A}{O}, \frac{E}{O}, \frac{I}{O}, \frac{O}{O}$

Or ces Raisons des 4 antecedens au dernier antecedent sont la méme chose que la Raison des 4 antecedens, joints avec le signe de plus au dernier antecedent, c'est à dire la méme chose que $\frac{B + C + D + F}{F}$

Et les 4 Raisons des 4 consequens au dernier consequent, sont la méme chose que l'unique Raison $\frac{A + E + I + O}{O}$

Donc B + C + D + F est à F, comme A + E + I + O est à O.

Donc *Alternando*, les 4 antecedens sont aux 4 consequens, comme F dernier antecedent est à O dernier consequent.

SE-

SECTION DEUXIE'ME.

Des Raisons tant d'égalité que d'inégalité qui peuvent étre entre diverses Raisons, quand les termes de l'une sont multipliables par ceux de l'autre.

Avertissement.

On croit ordinairement que les grandeurs de divers genre qu'on appelle Heterogenes, ne se peuvent pas multiplier. Cela ne me paroit pas vray, ou a besoin d'explication; car les nombres sont d'un autre genre que les autres grandeurs comme l'étenduë & le tems; & neantmoins il est clair que les nombres multiplient toutes sortes de grandeurs, & que c'est une veritable Multiplication, quand je dis 6 toises ou 6 heures; puisque c'est prendre une toise ou une heure autant de fois qu'il y a d'unitez dans 6, en quoy consiste la Multiplication. LIII.

De plus ce qui ne se peut multiplier par la nature, se peut multiplier par une fiction d'esprit, par laquelle la verité se découvre aussi certainement que par les Multiplications réelles; ainsi voulant sçavoir quel chemin fera en dix heures celuy qui a fait 24 lieuës en 8 heures: je multiplie par une fiction d'esprit 10 heures par 24 lieuës, ce qui me donne un produit imaginaire d heures & de lieuës de 240; qui estant divisé par 8 heures me donne 30 lieuës. On multiplie aussi par la même fiction d'esprit des surfaces par des surfaces, quoique cela donne pour produit une étenduë de 4 dimensions qui ne peut estre dans la nature, & neantmoins on ne laisse pas de découvrir beaucoup de veritez par ces sortes de multiplications.

Je sçay bien qu'on dit que c'est parce que ces produits

duits imaginaires se peuvent reduire en lignes qui auront même Raison entr' elles que ces produits; mais il n'y a guere d'apparence que la verité de ces sortes de preuves depende de ces lignes, qui sont visiblement étrangeres à ces demonstrations. Quoy qu'il en soit ne me voulant brouiller avec personne, châcun prendra ce que je diray des Raisons qui se trouvent entre diverses raisons qu'on ne connoit qu'en multipliant les termes de l'une par ceux de l'autre, selon l'opinion qu'il aura que les termes de certaines raisons, sont ou ne sont pas multipliables les uns par les autres; car ce n'est que dans cette supposition que tout ce que je m'en vais dire se doit entendre.

I. Lemme.

LIV. On a déja veu dans le Livre precedent que deux grandeurs ont été multipliées l'une par l'autre, quand l'unité est à l'une comme l'autre est au Produit, c'est à dire à ce qui s'est fait par cette Multiplication; Ainsi 3 multipliez par 4 donnent 12, parce que 1, 3. : : 4. 12; & un tiers multiplié par un quart donne un douziéme, parce que 1. $\frac{1}{3}$. : : $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. l'unité étant triple du tiers comme le quart est triple du douziéme; & de même generalement quand B & X estant multipliez donnent BX, il faut que I. X. : : B. BX.

II. Lemme.

LV. Il s'ensuit de là que toute Grandeur étant multipliée par un autre, la Grandeur simple est à soy-même multipliée comme l'unité est à l'autre Grandeur par laquelle elle a été multipliée, B. BX. : : I. X. Ce n'est que transposer les deux Raisons qui se doivent trouver en toute Multiplication.

III. Lemme.

Deux Grandeurs étant multipliées par une même Grandeur: si elles sont égales, leurs Produits seront égaux; & si les Produits sont égaux, elles seront égales. Soient B & D deux Grandeurs égales: Je dis que BX & DX sont égaux; car par le premier Lemme LXVI.

$$\text{I. X.} :: \begin{cases} \text{B. BX} \\ \text{D. DX} \end{cases}$$ donc B. BX : : D. DX. Par le VI.e Axiôme. Donc si les Grandeurs B & D sont égales, les Produits BX & DX le sont aussi par le VIII.e Axiôme; & si les Produits BX & DX sont égaux, les grandeurs B & D le sont aussi par le même VIII.e Axiôme.

IV. Lemme.

Lorsque deux Grandeurs étant multipliées l'une par l'autre font un Produit, & que 2 autres en font une autre, comme par exemple BS & DT: On y peut remarquer 3 sortes d'égalitez. La 1.re & la 2.de les égalitez de châcune des deux Grandeurs d'une part à châcune des Grandeurs de l'autre, de B à D & S à T. la 3.e l'égalité des deux Produits BS & DT; or deux de ces égalitez étant données donnent la 3e; c'est à dire que si châcune des deux Grandeurs d'une part est égale à châcune des deux Grandeurs de l'autre, les Produits sont égaux. LVII.

2. Et si ce sont les 2 Produits qui sont supposez égaux, & qu'une des Grandeurs d'une part, soit égale à une de l'autre part, les deux autres Grandeurs sont égales.

Preuve du premier cas. La double Hypothese de B égal à D, & d'S égale à T, fait voir par le 3.e Lemme que BS = DS = DT; donc BS = DT; ce qu'il falloit demontrer.

Preuve du 2.d cas. Par la double Hypotheſe de BS égal à D T, & de B égal à D, en ſe ſouvenant du 3.e Lemme, $BS = DT = BT$; donc $BS = BT$; donc par le 3.e Lemme $S = T$ ce qu'il falloit demontrer.

I. Proposition Generale.

LVIII. Si les deux termes d'une Raiſon ſont multipliez par une même grandeur, la Raiſon des termes ſimples eſt égale à celle des termes multipliez, B.C :: BM. CM, ou $\frac{B}{C} = \frac{BM}{CM}$

I. Demonstration.

Par le 2.d Lemme $\left.\begin{array}{l} B.\ BM. \\ C.\ CM. \end{array}\right\} :: I.\ M$; donc B. BM :: C. CM, donc *Alternando* B.C. :: BM. CM.

II. Demonstration.

Toutes les Aliquotes pareilles des antecedens B & B M ſont également contenuës dans les conſequens C & C M.

Car ſoit X, l'Aliquote quelconque de B, & ſi l'on veut la centiéme: 100 X ſeront la même choſe que B.

Donc par le 3.e Lemme ce ſera la même choſe de multiplier cent X par M que de multiplier B par M; donc B M & 100 fois X M ſont la même choſe; donc X & X M ſont les Aliquotes pareilles des antecedens B. & B M.

Supposé maintenant que X ſoit dans C, ou tant de fois ſans reſte, ou toûjours avec quelque reſte; qu'il y ſoit, par exemple 87 fois preciſement, ou 87 fois plus R.

Ce ſera la même choſe de multiplier C par M, que

que de multiplier par M, ou 87 fois X préciſement, [ce qui donne 87 X M,] ou 87 X + R [ce qui donne 87 X M + R M.] Donc C M eſt la même choſe que

Ou 87 X M,

Ou 87 X M + R M.

Comme donc il eſt clair par les proportions naturellement connuës, & par le 1.re Theor. que 100 X. 87 X :: 100 X M. 87 X M; ou 100 X. 87 X + R :: 100 X M. 87 X M + R M: il eſt clair auſſi que B [égal à 100 X] eſt à C [égal à 87 X ou à 87 X + R] comme B M [égal à 100 X M] eſt à C M [égal à 87 X M ou à 87 X M + R M; c'eſt a dire que B. C. :: B M. C M; ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

Quand des Grandeurs de pluſieurs dimenſions, & qui en ont autant l'une que l'autre, font une Raiſon: les mémes lettres qui ſe trouveront dans l'une & dans l'autre de ces Grandeurs, étant ôtées de part & d'autre une pour une, ce qui reſtera, donnera la même Raiſon en termes plus ſimples. Que s'il ne reſtoit rien, ces Raiſons ſeroient entr'elles comme 1 à 1. BM.CM :: B.C. BB.BC :: B.C. BCM. BCN :: M.N. DFG. DPG :: F.P. RST. TRS :: 1. 1. LIX.

Probleme.

LX. Ayant deux Raiſons quelconques, faire que demeurant les mêmes, elles ayent même conſequent? Il ne faut que multiplier les deux termes de châcune par le conſequent de l'autre.

Par là elles demeureront châcune de même qu'elles étoient auparavant, par la propoſition precedente; & elles auront pour conſequent commun les produis des deux conſequens, $\frac{B}{C} \cdot \frac{M}{N} :: \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{CN}$.

II. Proposition Generale.

Pour connoître la Raison que des raisons quelconques ont entr'elles.

LXI. Deux Raisons quelconques sont entr'elles, comme le Produit des extremes, [c'est à dire du premier antecedent par le 2.^{d} consequent] est au Produit des moyens, [c'est à dire du 2.^{d} antecedent par le premier consequent,] $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}. :: BN.\ CM.$ Car par le precedent Probleme, on reduit les deux Raisons données à n'avoir qu'un même consequent, en donnant pour antecedent à la premiere le Produit des extremes, & à la seconde le Produit des moyens, & à châcune pour consequent le Produit des consequens.

Donc par le 4.^{e} Axiôme n'aiant qu'un consequent, elles sont comme les antecedens, & par consequent comme le Produit des extremes qui est l'antecedent de la premiere, au Produit des moyens qui est l'antecedent de la seconde. $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}. :: \frac{BN}{CN}.\frac{CM}{CN}. :: BN.\ CM.$

I. Theoréme.

LXII. Deux Raisons quelconques sont entr'elles comme la Raison des antecedens à celle des consequens, $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}. :: \frac{B}{M}.\frac{C}{N}.$

Car cette nouvelle comparaison laissant les mêmes extremes B & N, ne fait que transposer les moyens C & M; donc ces deux nouvelles Raisons sont encore entr'elles comme le Produit des mêmes extremes au Produit des mêmes moyens.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{B}{C}.\ \frac{M}{N}.\\ \frac{B}{M}.\ \frac{C}{N}.\end{array}\right\} .. BN.\ CM.$$

II. Theo-

II. Theoréme.

Deux Raisons quelconques sont entr'elles, comme ces mêmes Raisons renversées prises dans un ordre renversé. LXIII.

J'appelle Raisons renversées quand de l'antecedent on en fait le consequent, & du consequent l'antecedent. Je dis donc que $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}. :: \frac{N}{M}.\frac{C}{B};$ car il faut prendre ces Raisons renversées dans un ordre renversé, afin que ce soit toujours les mêmes extremes & les mêmes moyens.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{B}{C}.\ \frac{M}{N}.\\ \frac{N}{M}.\ \frac{C}{B}.\end{array}\right\} .. BN.\ CM.$$

Avertissement.

Toutes les Raisons d'égalité étant égales, elles ont toutes même raison à quelque raison que ce soit, & ainsi on peut prendre celle que l'on veut à discretion, & les demonstrations pour l'ordinaire en sont plus sensibles, quand on prend celle du consequent au consequent de la Raison d'inégalité, avec laquelle on compare cette Raison d'égalité. LXIV.

III. Theoréne.

La Raison d'égalité est à une Raison quelconque d'inégalité, comme le consequent de la Raison d'inégalité est à son antecedent. LXV.

1.^{re} Demonstr. $\frac{X}{X}.\frac{B}{C}. :: XC.\ XB :: C.B.$

2.^{de} Demonstr. $\frac{C}{C}.\frac{B}{C}. :: C.B.$

Et toute Raison d'inégalité est à la Raison d'égalité, comme l'antecedent de la Raison d'inégalité est à son

son consequent. $\frac{B}{C}\cdot\frac{x}{x}$. : : BX. CX : : B. C.

Autrement $\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{C}$. : : B. C.

I. COROLLAIRE.

LXVI. LA Raison d'égalité est plus grande qu'aucune Raison de moindre inégalité, & plus petite qu'aucune Raison de plus grande inégalité : car elle est à châcune, comme le consequent de châcune est à son antecedent ; donc la Raison d'égalité est plus grande qu'aucune Raison de moindre inégalité.

On prouvera de la même sorte qu'elle est plus petite qu'aucune Raison de plus grande inégalité, parce que le consequent de toute Raison de plus grande inégalité est plus petit que son antecedent.

Cela se voit encore plus grossierement en prenant pour Raison d'égalité celle du consequent au consequent de la Raison avec laquelle on la compare ; car il est clair que la Raison de 4 à 4 est plus grande que la Raison de 3 à 4, parce qu'ayant même consequent celle d'égalité a un plus grand antecedent $\frac{4}{4}, \frac{3}{4}$; & il est clair aussi par le même principe que la Raison de 3 à 3 est plus petite que la Raison de 4 à 3. $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}$.

II. COROLLAIRE.

LXVII. LA Raison d'égalité est moyenne proportionnelle entre deux Raisons, dont l'une est l'inverse de l'autre, ou l'inverse d'une Raison égale à l'autre. $\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{C}$: : $\frac{B}{B}\cdot\frac{C}{B}$; que si $\frac{F}{G}$ est égale à $\frac{B}{C}$, $\frac{G}{F}$ sera aussi égale à $\frac{C}{B}$, & par consequent $\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{C}$: : $\frac{F}{F}, \frac{G}{F}$.

III. COROLLAIRE.

LXVIII. LA Raison de moindre inégalité est d'autant plus grande, & la raison de plus grande inégalité est d'autant plus petite que l'une & l'autre approche plus de la Raison d'égalité. J'en laisse à trouver la demonstration qui se tire sans peine du Theoréme precedent.

II. THORÉME.

SI les deux termes d'une Raison sont multipliez par deux nouvelles grandeurs, l'antecedent par l'une, & le consequent par l'autre: LXIX.

La Raison des termes simples, est à la Raison des termes multipliez, comme la Grandeur qui a multiplié le consequent, à celle qui a multiplié l'antecedent. $\frac{b}{c}\cdot\frac{bm}{cn}$: : BCN. BMC : : N. M.

COROLLAIRE.

LA Raison des Racines est à la Raison des Quarrez comme la derniere Racine est à la premiere. LXX.
$\frac{b}{c}\cdot\frac{bb}{cc}$: : C. B ; & la Raison des Quarrez est à celle des Racines, comme la premiere racine est à la derniere, $\frac{bb}{cc}\cdot\frac{b}{c}$: : B. C.

AVERTISSEMENT.

ON jugera sans peine par là de ce qu'est la Raison des Racines à la Raison des Cubes. $\frac{b}{c}\cdot\frac{bbb}{ccc}$. : : CC. BB. LXXI.

III. THEORÉME.

SI ayant deux Raisons quelconques, j'en fais une troisiéme qui ait pour antecedent le produit des antecedens des deux premieres, & pour consequent le produit de leurs consequens : châcune des premieres est à la troisiéme comme le consequent de l'autre est à son antecedent ; c'est à dire que la pre- LXXII.

premiere eſt à la troiſiéme, comme le conſequent de la ſeconde eſt à ſon antecedent ; & la ſeconde eſt à la troiſiéme comme le conſequent de la premiere eſt à ſon antecedent. Soient les deux Raiſons quelconques, $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$ & la troiſiéme $\frac{b}{c}\frac{m}{n}$; $\frac{b}{c} . \frac{bm}{cn} :: N.M$; & $\frac{m}{n} . \frac{bm}{cn} :: C.B.$

C'eſt la même choſe que le ſecond Theoréme propoſé autrement.

IV. Theoréme.

LXXIII. Si deux Raiſons ſont égales, le Produit des extremes eſt égal au Produit des moyens ; & ſi ces deux Produits ſont égaux, les Raiſons ſont égales. Cela ſe prouve ordinairement ainſi : Soient les deux Raiſons $\frac{b}{c}, \frac{f}{g}$: On compare le Produit des extremes BG avec le produit des conſequens CG, & le Produit des moyens avec le même Produit des conſequens CG, & on raiſonne ainſi :

$BG . CG :: B . C.$

& $CF . CG :: F . G.$

Donc ſi les Raiſons $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ ſont égales, les Raiſons $\frac{bg}{cg}, \frac{cf}{cg}$ ſeront égales auſſi ; & ces deux dernieres raiſons ayant un même conſequent, elles ne ſçauroient étre égales que leurs antecedens BG & CF ne ſoient égaux.

Or de ces deux antecedens, BG eſt le Produit des extremes, & CF le produit des moyens. Donc ſi les Raiſons $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ ſont égales, le Produit des extremes ſera égal au Produit des moyens.

Que ſi au contraire on ſuppoſe que BG & CF ſoient égaux, ils ne pourront avoir qu'une même Raiſon à un même conſequent CG, par le 7.e Axiôme ; donc les deux Raiſons $\frac{bg}{cg}, \frac{cf}{cg}$ ſont égales, & par conſequent les deux $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$, auſquelles les deux autres

tres ſont égales châcune à châcune, ſeront auſſi égales. Cette demonſtration eſt trés-ingenieuſe & tres-bonne, mais la nôtre eſt beaucoup plus courte & plus claire ; car par la ſeconde Propoſition generale, deux Raiſons quelconques ſont entr'elles, comme le Produit des extremes eſt au produit des moyens.

Donc ſi elles ſont égales, ces deux Produits ſont égaux ; & ſi ces deux Produits ſont égaux, elles ſont égales.

I. Corollaire.

Les 4 Termes d'une proportion ſont toûjours proportionnels en quelque façon qu'on les diſpoſe, LXXIV. pourveu que les extrémes demeurent toûjours extrêmes, & les moyens moyens ; ou que les deux extrémes deviennent moyens, & les deux moyens extrémes.

Car tant que cela ſera dans toutes ces differentes diſpoſitions, le produit des extrémes ſera toûjours égal au Produit des moyens, & par conſequent les 4 termes ainſi diſpoſez ſeront toûjours proportionnels.

II. Corollaire,

Le Produit des moyens [ou celui des extrémes LXXV. qui lui eſt égal) eſt moyen proportionnel entre le produit des antecedens & celui des conſequens ; c'eſt à dire que ſi

$B . C :: F . G$;

$BF . CF :: CF . CG$; car le produit des extremes BF CG eſt égal au produit des moyens CF CF. C F étant commun à l'un & à l'autre, & BG qui reſte du premier étant égal à l'autre CF du ſecond.

III. Corollaire.

Les Quarrez des deux termes de châque Raiſon, LXXVI. ſont

ſont entr'eux comme le produit des antecedens eſt au produit des conſequens. BB. CC :: BF. CG; car BBCG = CCBF.

CB étant commun à l'un & à l'autre, & BG du premier étant égal à CF du ſecond.

IV. Corollaire.

LXXVII. 4 Grandeurs étant proportionnelles, leurs Quarrez le ſont auſſi. Si B. C. :: F. G.

BB. CC. :: FF. GG; car BBGG = CCFF. le premier étant le Quarré de BG, & le ſecond de CF.

V. Corollaire.

LXXVIII. Quatre nombres étant proportionnels, le produit des quatre multipliez l'un par l'autre eſt neceſſairement un nombre quarré, qui a pour ſa racine le Produit des extrémes ou celui des moyens, qui eſt la même choſe; car le produit des quatre nombres proportionnels, eſt la même choſe que le produit des extrémes multiplié par le produit des moyens. 2. 3 :: 4. 6. 2 fois 6 (12) par 3 fois 4 (12) font 12 fois 12; c'eſt à dire 144; & c'eſt abſolument la même choſe que de dire, 2 fois 3 font 6, 4 fois 6 font 24, 6 fois 24 font 144.

VI. Corollaire.

LXXIX. On prouve aiſément par ce 4.e Theoréme, ce qui a été dit cy-deſſus, que quatre grandeurs étant proportionnelles, comme B. C :: F. G: ſi on en ajoûte 2 autres quelconques comme M & N, les quatre Raiſons ſuivantes ſont proportionnelles $\frac{c}{m} . \frac{n}{f} :: \frac{b}{m} . \frac{n}{g}$; car par la propoſition generale, les deux premieres Raiſons ſont entr'elles comme CF eſt à MN, & les deux dernieres comme BG eſt à MN. Or

Or par le Theoréme precedent CF = BG; donc CF. MN. :: BG. MN; donc $\frac{c}{m} . \frac{n}{f} :: \frac{b}{m} . \frac{n}{g}$; ce qu'il falloit demontrer.

V. Theoreme.

Si les deux moyens d'une proportion ſont égaux LXXX. aux deux moyens d'une autre proportion, & que l'un des extrémes de l'une ſoit égal à l'un des extrémes de l'autre: l'autre extréme ſera auſſi égal à l'autre extréme; & il n'importe ni que les deux moyens ſuppoſez égaux de part & d'autre ne ſoient pas placez de même dans ces deux proportions [comme ſi c'eſt le 1.er des moyens de la proportion A qui ſoit égal au 2.d des moyens de la proportion C, & le ſecond d'A au premier de C] ni que ce ſoit le 1.er des extrémes d'A qui ſoit ſuppoſé égal au dernier de C, les deux extrémes d'A & de C n'en ſeront pas moins égaux.

Demonſtr. Les deux moyens d'A eſtant égaux aux deux moyens de C: le produit des moyens d'A ſera égal au produit des moyens de C, par le 4.e Lemme. Or dans châque proportion le produit des moyens eſt égal au produit des extrémes.

Donc les produits des extrémes d'A & de C ſont égaux auſſi.

Or par le 4.e Lemme, ſuppoſé que l'un des extrémes d'A quel qu'il ſoit, ſoit égal à l'un des extrémes de C quel qu'il ſoit auſſi: l'autre extreme d'A, ſera égal à l'autre extreme de C.

Corollaire.

Si A & C étoient deux proportions continuës, LXXXI. les deux moyennes proportionnelles étant égales, l'un des extrémes d'A, ne pourroit étre égal à l'un des extrémes de C, que les deux autres extrémes d'A d'A & de C ne fuſſent auſſi égaux. Ce qui eſt prouvé dans ce Theoréme & ce Corollaire, l'a déja été plus haut d'une autre façon.

DES RECIPROQUES.

LXXXII. Deux Grandeurs ſont dites étre reciproques à deux autres, quand les unes ſont les extrémes d'une proportion, & que les autres en ſont les moyens. Ainſi dans la proportion B. C. :: F. G. B & G ſont reciproques à C & F ; & il eſt clair, par ce qui vient d'étre dit, que quand deux grandeurs ſont reciproques à deux autres, le produit des unes eſt égal au produit des autres. Que s'il n'y a que trois Grandeurs dans une proportion, parce qu'elle eſt continuë, celui du milieu qui ſert de conſequent à la premiere Raiſon, & d'antecedent à la ſeconde, eſt appellé *moyenne proportionnelle*, & alors le Quarré de cette Grandeur eſt égal au produit des autres Grandeurs. Si B. D. :: D. H : BH = DD.

VI. THEOREME.

LXXXIII. Si deux Grandeurs châcune de deux dimenſions, ſont égales : l'une des dimenſions de la premiere eſt à l'une des dimenſions de la ſeconde, comme l'autre dimenſion de la ſeconde eſt à l'autre dimenſion de la premiere. Si B G eſt égal à C F, B ſera à C comme F à G ; c'eſt une ſuitte manifeſte de ce qui vient d'étre dit.

VII. THEOREME.

LXXXIV. Si deux Grandeurs d'une part, & deux autres d'une autre, ſont châcune reciproques à deux autre Grandeurs, elles ſeront reciproques entr'elles Si B & G ſont reciproques à P & Q ; [c'eſt à dire ſi B. P. :: Q. G,] & que S & T ſoient auſſi reciproques à P & Q ; [c'eſt à dire ſi S. P. :: Q. T :] B & G ſeront auſſi reciproques à S & T ; [c'eſt à dire que B. S :: T. G.] Car le premier ne peut étre, que le produit B G ne ſoit égal au produit P Q ; & le ſecond ne peut étre, que le produit S T ne ſoit égal au même produit P Q, auquel le produit B G étoit égal. Donc les deux produits B G & S T ſont égaux entr'eux, parce qu'ils ſont châcun égal à un troiſiéme. Donc les Grandeurs B & G ſont reciproques aux Grandeurs S & T.

COROLLAIRE.

Quatre Grandeurs étant proportionnelles, ſi la 1.re eſt à une 5.e comme une 6.e eſt à la 4.e ; la 2.de ſera auſſi à la 5e, comme la 6.e à la 3.e ; car il eſt clair par l'Hypotheſe que la 1.re & la 4e. ſont reciproques à la 5.e & à la 6.e Or la 2.de & la 3.e ſont auſſi reciproques à la 1.re & à la 4.e : elles le ſont donc auſſi à la 5.e & à la 6.e LXXXV.

Soient les 4 proportionnelles B, C, F, G, & les deux autres P, Q.

Si B. C. :: F. G.
& B. P. :: Q. G.
C. P. :: Q. F.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TROISIE'ME.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

Où l'on fait voir aussi comment on peut faire sur les Raisons les quatre Operations communes, Ajoûter, Soustraire, Multiplier, Diviser.

I. *ON ne s'est point encore avisé, que je sçache, de faire sur les Raisons les 4 Operations communes Ajoûter, Soustraire, Multiplier & Diviser, que l'on fait sur les autres Grandeurs; cependant la maniere dont nous avons expliqué la nature de la Raison dans le Livre precedent, fait voir que cela se peut faire sans peine, & voicy comment:*

I. LEMME.

Pour l'Addition & la Soustraction.

Nous avons déja veû N 47. que quand deux Raisons ont le même consequent, la Raison qui a pour antecedent le premier antecedent plus ou moins le second, & pour consequent le consequent commun, est, ou la somme des deux Raisons, c'est à dire l'une plus l'autre, ou la difference de ces deux Raisons, c'est à dire la premiere moins la seconde. $\frac{B}{X}, \frac{D}{X}; \frac{B+D}{X}. \frac{B-D}{X}$ $\frac{5}{7}, \frac{3}{7};$ II.

$\frac{5+3}{7}, \frac{5-3}{7}.$ delà s'ensuit que

ADDITION.

III. POUR ajoûter ensemble deux Raisons quelconques, il ne faut que les reduire à un même consequent. La Raison des nouveaux antecedens joints par le signe de Plus au commun consequent, est la somme de ces deux Raisons données, ou l'une ajoûtée à l'autre.

$$\frac{BS}{DT}, \frac{BT}{DT}, \frac{DS}{DT}; \frac{BT+DS}{DT}$$

$$\frac{74}{59}, \frac{63}{45}, \frac{20}{45}; \frac{63+20}{45}.$$

Autrement; la Raison qui a pour antecedent le produit des extrémes, plus le produit des moyens, & pour consequent le produit des consequens, est la somme de ces deux Raisons données.

SOUSTRACTION.

IV. POUR soustraire une Raison quelconque d'une autre qui soit plus grande: Il faut de même les reduire à un même conſequent ; & alors la Raiſon du plus grand antecedent, moins le plus petit, au conſequent, eſt la difference de ces deux Raiſons, ou la plus grande moins la plus petite $\frac{b}{d}, \frac{s}{t}; \frac{bt}{dt}, \frac{ds}{dt}; \frac{bt-ds}{dt}. \frac{7}{5}, \frac{4}{9}; \frac{63-20}{45}$.

Autrement ; ajant mis la plus grande Raiſon la premiere, la Raiſon qui aura pour antecedent le produit des extremes moins le produit des moyens ; & pour conſequent le produit des conſequens, eſt la difference de ces deux Raiſons ou la plus grande moins la plus petite.

AVERTISSEMENT.

On voit par là que ce que les Geometres appellent Compoſition & Diviſion, quand ils diſent que quatre Grandeurs étant proportionnelles : Componendo *ou* Dividendo, *la 1.^re plus ou moins la 2.^de eſt à la 2.^de comme la 3.^e plus ou moins la 4.^e eſt à la 4.^e a dû être plûtoſt appellé Addition & Souſtraction, & qu'on a dû dire que cela ſe fait* addendo *ou* ſubtrahendo ; *& c'eſt ainſi que nous avons reſolu de l'appeller dans le reſte de ces Elemens.*

II. LEMME.

V. POUR *la Multiplication & la Diviſion.*

Comme dans les Grandeurs abſoluës, on a multiplié deux Grandeurs l'une par l'autre, quand l'unité eſt à l'une de ces Grandeurs, comme l'autre eſt à ce qui eſt né de cette Multiplication qu'on appelle le *Produit* ; & qu'on a diviſé une Grandeur par une autre, quand la Grandeur qui diviſe eſt à celle à diviſer, ce qu'eſt l'unité à ce qui eſt né de cette Diviſion qu'on appelle le *Quotient* :

Il faut auſſi que dans les Grandeurs relatives qui s'appellent *Raiſons*, on ait multiplié deux Raiſons l'une par l'autre, quand ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives eſt à l'une des Raiſons, comme l'autre eſt à la Raiſon qui eſt née de cette Multiplication ; Et

Et qu'on ait diviſé une Raiſon par une autre quand la Raiſon qui a dû diviſer eſt à celle à diviſer, comme eſt ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives à la Raiſon qui eſt née de cette Diviſion.

Or ce qui tient lieu d'unité dans les Grandeurs relatives, c'eſt à dire dans les Raiſons, ne peut étre autre choſe que la Raiſon d'égalité qui eſt celle où l'antecedent eſt égal au conſequent comme $\frac{6}{6}, \frac{1}{1}$. Cela eſt clair de ſoy-même, & ſe prouve encore par l'analogie des fractions qui ont un parfait rapport aux Raiſons comme on l'a déja ſouvent obſervé.

Car dans les fractions, celle dont le numerateur eſt le même nombre que le dénominateur [ce qui revient entierement à la raiſon d'égalité] eſt la même choſe que l'unité, deux moitiés $\frac{2}{2}$, trois tiers $\frac{3}{3}$, quatre quarts $\frac{4}{4}$ n'étant que l'unité diverſement exprimée.

Cela étant ſuppoſé, il eſt trés-facile de multiplier & de diviſer les Raiſons :

MULTIPLICATION DE DEUX RAISONS.

ON a multiplié deux Raiſons quand on a fait une Raiſon qui a pour antecedent le produit des antecedens & pour conſequent le produit des conſequens. Ayant les deux Raiſons $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, elles ſe trouveront multipliées par la Raiſon de $\frac{bm}{cn}$. VI.

Pour le prouver il ne faut que montrer que la Raiſon d'égalité eſt à la Raiſon $\frac{b}{c}$ comme la Raiſon $\frac{m}{n}$ eſt à la Raiſon $\frac{bm}{cn}$; c'eſt à dire que $\frac{c}{c} . \frac{b}{c} :: \frac{m}{n} . \frac{bm}{cn}$.

Ce

Ce qui eſt facile: Car par 11. 24. $\frac{c}{c}\,\frac{b}{c}$ :: c. b.

& par 11. 69. $\frac{m}{n}$. $\frac{bm}{cn}$ :: c. b.

donc $\frac{c}{c}$. $\frac{b}{c}$ :: $\frac{m}{n}$. $\frac{bm}{cn}$.

DIVISION D'UNE RAISON PAR UNE AUTRE.

ON a diviſé une Raiſon par une autre, quand ayant mis la premiere celle qui doit diviſer l'autre, on a fait une Raiſon qui a pour antecedent le produit des moyens, c'eſt à dire le produit du conſequent de la Raiſon qui tient lieu de diviſeur par l'antecedent de l'autre, & pour le conſequent le produit des extremes; ainſi $\frac{b}{c}$ a diviſé $\frac{m}{n}$, quand on a la Raiſon de $\frac{cm}{bn}$. Pour le prouver il faut demontrer que la Raiſon $\frac{b}{c}$ eſt à la Raiſon $\frac{m}{n}$ comme la Raiſon d'égalité eſt à la Raiſon de $\frac{cn}{bm}$, c'eſt à dire que $\frac{b}{c}$ $\frac{m}{n}$ :: $\frac{x}{x}$. $\frac{cm}{bn}$. Or cela eſt facile: car par 11. 61. $\frac{b}{c}$. $\frac{m}{n}$. :: bn. cm. Or par 11. 65. $\frac{x}{x}$. $\frac{cm}{bn}$ :: bn. cm. donc $\frac{b}{c}$. $\frac{m}{n}$. :: $\frac{x}{x}$. $\frac{cm}{bn}$.

PROBLEME.

VII. Ayant trois Raiſons quelconques, en trouver une quatriéme pour proportionnelle: Soient les trois Raiſons quelconques $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{f}$, $\frac{m}{n}$, les deux du milieu étant multipliées l'une par l'autre, ce qui fait $\frac{dm}{fn}$, ſi on diviſe cette nouvelle Raiſon par la premiere, ce qui donne $\frac{c}{b}\frac{d}{f}\frac{m}{n}$: cette derniere Raiſon eſt la quatriéme proportionnelle au regard des trois autres; c'eſt à dire que $\frac{b}{c}$. $\frac{d}{f}$. :: $\frac{m}{n}$ $\frac{cdm}{bfn}$. Car $\frac{b}{c}$. $\frac{d}{f}$. :: B F. C D. par 11. 61. & $\frac{m}{n}$. $\frac{cdm}{bfn}$ :: BF. CD par 11. 69.

OB-

OBSERVATION.

CE *que font ces quatre regles ſur les Raiſons égales.* L'addition de deux Raiſons égales fait une Raiſon double de châcune. Si B. C. :: F. G $\frac{bg + cf}{cg}$ eſt double de châcune de ces deux Raiſons. VIII.

La ſouſtraction de deux Raiſons égales donne zero pour l'antecedent, & par conſequent le réduit à rien.

$$\text{Si B. C. :: F. G. } \frac{BG - CF.}{CG} = \frac{o}{cg}.$$

Car BG = CF, donc l'un moins l'autre n'eſt rien.

La multiplication de deux Raiſons égales fait une Raiſon compoſée des deux, qui s'appelle Raiſon doublée, dont on va parler bien-toſt.

La diviſion d'une Raiſon par une autre qui luy eſt égale, donne une Raiſon d'égalité. Si $\frac{b}{c}$ eſt égale $\frac{f}{g}$: $\frac{b}{c}$ diviſant $\frac{f}{g}$ donne $\frac{cf}{bg}$, qui eſt une Raiſon d'égalité, parce que C F = BG.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

CE qui vient d'étre dit de la multiplication des Raiſons fait comprendre ſans peine ce que c'eſt que la Raiſon compoſée; ce qui n'a point encore éte bien expliqué par aucun Geometre. IX.

Car au lieu d'en donner une definition generale, ils ſe ſont contentez d'apporter l'exemple d'une Raiſon compoſée dans un cas particulier, comme ſi on n'eût pû avoir d'autre notion plus claire, plus diſtincte & plus univerſelle de la Raiſon compoſée.

„Lors, diſent-ils, qu'ayant deux grandeurs on „en prend une troiſiéme telle que l'on veut, & „que

„ que l'on compare la premiere des grandeurs données à cette troiſiéme, & cette troiſiéme à la ſeconde des données: la Raiſon des deux grandeurs données eſt composée de deux Raiſons, de la premiere grandeur à l'interposée & de l'interposée à la ſeconde; ainſi la Raiſon de B à D eſt composée des Raiſons de B à X & d'X à D.

Or il eſt auſſi ridicule de ne dire que cela pour expliquer la nature de la Raiſon composée, que ſi on ſe contentoit de dire pour définir la proportion Geometrique, que quand la premiere grandeur eſt double de la ſeconde, & la troiſiéme double de la quatriéme, cela s'appelle *proportion.*

Car comme cette définition de la proportion ſeroit vicieuſe, parce qu'elle ne comprendroit pas tout le défini: celle qu'ils donnent de la Raiſon composée ne l'eſt pas moins; parce que bien loin de convenir à toute Raiſon composée, ce n'eſt qu'un abregement dans un cas particulier de la maniere dont ſe forment les Raiſons composées, comme on le verra plus bas. Voicy donc en general ce que c'eſt que Raiſon composée:

DEFINITION DE LA RAISON COMPOSÉE.

I. LA composition des Raiſons n'eſt autre choſe que leur multiplication; & une Raiſon qui eſt née de la multiplication de deux ou pluſieurs Raiſons, eſt dite composée de ces deux ou pluſieurs Raiſons.

C'eſt pourquoi, ſuivant ce qu'on a dit de la multiplication, & y ajoûtant ſeulement les termes de Composante & de Composée, une Raiſon eſt composée de deux Raiſons quand la Raiſon dégalité eſt à l'une des composantes, comme l'autre composante eſt à la Raiſon composée.

PROPOSITION GENERALE.

OU

I. THEORÉME.

LA Raiſon qui a pour antecedent le produit de tous les antecedens de pluſieurs raiſons, & pour conſequent le produit de tous les conſequens, eſt composée de toutes ces Raiſons: ainſi la Raiſon de $\frac{b.mp}{c\,n\,q}$ eſt composée des trois Raiſons $\frac{b}{c}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$. XI.

On ne peut le demontrer qu'en commençant par deux Raiſons, & en faiſant voir d'abord que $\frac{bm}{cn}$ eſt composée des Raiſons $\frac{b}{c}$. $\frac{m}{n}$.

Or il ne faut pour cela que prouver que la Raiſon d'égalité eſt à $\frac{b}{c}$ comme $\frac{m}{n}$ eſt à $\frac{bm}{cn}$; ce qu'on a déja fait en expliquant la Multiplication.

Et quand cela eſt fait des deux premieres, on prouvera de la même ſorte que $\frac{b}{c}\frac{m}{n}\frac{p}{q}$ eſt composée de toutes les trois; en faiſant voir qu'elle eſt composée de $\frac{bm}{cn}$ [qui l'eſt des deux premieres] & de la la troiſiéme $\frac{p}{q}$. Car $\frac{x}{x}.\frac{bm}{cn}. :: cn.\ bm.$ par II. 65. & $\frac{p}{q}, \frac{bmp}{cnq} :: cn.\ bm.$ par II. 69. Donc $\frac{x}{x}.\frac{bm}{cn}. :: \frac{p}{q}.\frac{bmp}{cnq}$; & par conſequent $\frac{bmp}{cnq}$ eſt composée de $\frac{p}{q}$ & $\frac{bm}{cn}$, laquelle l'eſt de $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, & ainſi l'eſt de toutes les trois $\frac{b}{c}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$.

Suite importante de la vraye notion de la Raiſon composée.

II. THEORÉME.

LA veritable notion de la Raiſon composée étant une fois établie, qui eſt la Raiſon du produit des XII.

antecedens de deux ou pluſieurs Raiſons au produit de leurs conſequens, il s'enſuit de là une choſe fort remarquable; c'eſt que lors qu'il ſe rencontre dans les Raiſons compoſantes des antecedens égaux aux conſequens, il faut les ôter un pour un, avant que de former les produits des antecedens & des conſequens, qui doivent faire l'antecedent & le conſequent de la Raiſon compoſée, ſi on veut qu'elle ſoit réduite aux moindres termes qu'elle peut étre.

Que ſi ces antecedens & conſequens égaux étant ôtez, il ne reſtoit qu'un antecedent & un conſequent dans les Raiſons compoſantes, cét antecedent & ce conſequent feront toute la Raiſon compoſée; & s'il ne reſtoit rien, la Raiſon compoſée ſeroit d'un à un, parce que ce ſeroit une marque que le produit des antecedens ſeroit égal au produit des conſequens.

On verra mieux tout cela par des exemples.

RAISONS COMPOSANTES.	RAISONS COMPOSÉES.
XIII. $\frac{b}{d}\ \frac{c}{p}\ \frac{d}{r}\ \frac{p}{s}\ \frac{q}{b}.$	$\frac{cq}{rs}$
$\frac{m}{d}\ \frac{n}{s}\ \frac{s}{m}\ \frac{x}{n},$	$\frac{x}{d}$
$\frac{a}{o}\ \frac{e}{a}\ \frac{o}{e},$	$\frac{1}{1}$

La Raiſon de cela, eſt que quand on auroit mis toutes ces lettres ſemblables dans le produit des antecedens & dans celui des conſequens, il les en faudroit ôter pour avoir la Raiſon de ces produits reduite aux moindres termes qu'elle peut étre, ſelon ce qui a été dit cy deſſus. II. 59.

Il vaut donc mieux les retrancher d'abord comme inutiles, quand on ne veut qu'avoir la Raiſon de ces produits qui eſt la Raiſon compoſée.

On peut tirer delà divers Corollaires qui donneront une grande lumiere à toute cette matiere de la Raiſon compoſée.

I. Corollaire.

Quand une de ces Raiſons compoſantes; eſt une Raiſon d'égalité; il ne la faut que retrancher comme inutile à la Raiſon compoſée $\frac{x}{x}\frac{b}{c}\frac{m}{n}.\ \frac{bm}{cn}.$ XIV.

$\frac{x}{x}\ \frac{b}{c}.\ \frac{b}{c}.$

II. Corollaire.

Quand les deux Raiſons compoſantes ont la même grandeur pour leurs extrémes, la Raiſon compoſée a pour ſon antecedent l'antecedent de la ſeconde Raiſon, & pour ſon conſequent le conſequent de la premiere $\frac{x}{b}\frac{d}{x}.\ \frac{d}{b}.$ XV.

III. Corollaire.

Lors qu'au contraire les deux Raiſons ont la méme grandeur pour moyens [comme il arrive dans les Raiſons que nous avons dites ſe pouvoir appeller continuës,] la Raiſon compoſée a pour ſon antecedent l'antecedent de la 1.re Raiſon, & pour ſon conſequent le conſequent de la 2.de $\frac{b}{x}\frac{x}{d}.\ \frac{b}{d}.$ XVI.

IV. Corollaire.

Quand il y a de ſuitte pluſieurs de ces Raiſons continuës égales ou inégales; c'eſt à dire qui ſont telles que le conſequent de la precedente eſt toûjours l'antecedent de la ſuivante, la Raiſon du premier antecedent au dernier conſequent eſt compoſée XVII.

posée de toutes ces Raisons. $\frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{f}, \frac{f}{g}, \frac{g}{h}. \frac{b}{h}$.

V. Corollaire.

XVIII. Ce qui vient d'être dit, est la même chose que ce qu'on propose en cette maniere: Ayant plusieurs Grandeurs de suitte, la Raison de la premiere à la derniere est composée de toutes les Raisons continuës de toutes les Grandeurs, c'est à dire des Raisons de la 1.re à la 2.de & de la 2.de à la 3.e & de la 3.e à la 4.e jusqu'à la derniere: c'est la même chose que le 2.d Theoreme, & que le 3.e Corollaire s'il n'y a que trois Grandeurs; car ayant ces grandeurs *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, leurs Raisons continuës sont $\frac{b}{c} \frac{c}{d} \frac{d}{f} \frac{f}{g} \frac{g}{h}$. Donc par le 2.d Theoréme la Raison de b à h est composée de toutes ces Raisons; & s'il n'y a que trois Grandeurs *b*, *c*, *d*, la Raison de *b* à *d*, $\frac{b}{d}$, par le 3.e Corollaire est composée des deux Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{d}$.

VI. Corollaire.

XIX. Si entre deux Grandeurs données, on en interpose une ou plusieurs autres à discretion, la Raison des Grandeurs données sera composée de deux ou de plusieurs Raisons continuës que formeront ces Grandeurs données avec les interposées. Soient les données *b*, *d*, l'interposée à discretion *x*, ou si on en veut mettre plusieurs *x*, *y*, *z*; ce qu'on a dit de 3 Grandeurs ne peut pas n'être point vray de *b*, *x*, *d*.

VII. Corollaire.

XX. Deux Raisons étant égales, si on en renverse une en faisant l'antecedent du consequent, & le consequent de l'antecedent, la Raison composée de ces deux Raisons, dont l'une est renversée est une Raison d'égalité. J'en laisse à trouver la demonstration.

III. Theoréme.

Deux Raisons composées sont égales quand les Raisons composantes de l'une, sont égales châcune à châcune aux Raisons composantes de l'autre. XXI.

Toute raison composée est le 4.e terme d'une proportion, dont la Raison d'égalité fait le premier terme, & les deux Raisons composantes le 2.d & le 3.e; donc les Raisons d'égalité étant égales dans l'une & l'autre proportion: si les Raisons composantes d'une part sont égales aux Raisons composantes de l'autre part, les trois premiers termes de l'une sont égaux aux trois premiers termes de l'autre: & par consequent les deux Raisons composées qui en sont châcune le 4.e terme, seront égales par 11. 49.

IV. Theoréme.

Si les Raisons dont une raison est composée sont toutes-deux de moindre inégalité, la composée est moindre qu'aucune des composantes. Si elles sont toutes-deux de plus grande inégalité, la composée est plus grande qu'aucune des composantes. Si l'une est de moindre inégalité, & l'autre de plus grande inégalité, la composée sera plus petite que celle de plus grande inégalité, & plus grande que celle de moindre inégalité. Tout cela depend de deux principes: XXII.

L'un que toute raison composée est le 4.e terme d'une proportion dont la Raison d'égalité est le premier terme & les deux composantes, le 2.d & le 3.e terme. L'autre, que la Raison composante qui

qui fait le 3.^{e} terme de cette proportion eſt à la composée, comme le conſequent de celle qui en fait le 2.^{d} terme eſt à ſon antecedent par 11. 65, & 69. cydeſſus.

Donc quand l'une & l'autre compoſante eſt de moindre inégalité, le conſequent de châcune étant plus grand que ſon antecedent, elles ne pourront étre diſpoſées de ſorte que l'une & l'autre ne ſoit plus grande que la compoſée, $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} :: \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{12} :: 3.2.$ $\frac{1}{1} \cdot \frac{4}{5} :: \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{15} :: 5.4.$ Au contraire, par le même principe quand les deux compoſantes ſont de plus grande inégalité, le conſequent de châcune étant plus petit que ſon antecedent, châcune auſſi eſt plus petite que la compoſée. $\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} :: \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{8} :: 2, 3.$ $\frac{1}{1} \cdot \frac{9}{4} :: \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{18} :: 4, 5.$

Mais ſi l'une des compoſantes eſt de moindre inégalité, le conſequent en l'une étant plus grand que l'antecedent & moindre en l'autre: la compoſante de plus grande inégalité ſera plus grande que la compoſée, & celle de moindre inégalité plus petite que la compoſée. $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} :: \frac{7}{5} \cdot \frac{14}{15} :: 3. 2.$ $\frac{1}{1} \cdot \frac{7}{5} :: \frac{2}{3} \cdot \frac{14}{15} :: 5 \cdot 7.$

OBSERVATION SUR CE THEORÉME.

XXIII. ON voit clairement par ce qui vient d'étre demonſtré dans ce Theoréme que la compoſition des Raiſons n'en peut étre une Addition, mais en doit étre une Multiplication; car il eſt contre la nature de l'Addition que deux choſes ajoûtées enſemble faſſent un tout qui ſoit moindre que châcune: parce qu'il faudroit pour cela qu'un tout fuſt moindre que ſa partie; mais il en eſt tout autrement de la Multiplication, dans laquelle il ſe peut faire que deux choſes étant multipliées l'une par l'autre, il en naiſſe un produit qui ſoit moindre que châcune, & cela arrive toûjours quand les deux

deux choſes que l'on multiplie ſont moindres châcune que l'unité, comme quand on multiplie un tiers par un quart, ce qui fait un douziéme; & c'eſt ce qui fait encore voir la parfaite analogie des nombres aux raiſons; car il n'arrive jamais que la Raiſon compoſée ſoit plus petite qu'aucune des compoſantes, que quand châcune des compoſantes eſt de moindre inégalité, & qu'elle eſt par conſequent plus petite que la Raiſon d'égalité qui tient lieu d'unité dans les Raiſons.

Quand une Raiſon eſt compoſée de pluſieurs Raiſons égales, ſi c'eſt de deux, elle s'appelle doublée; de trois, triplée; de quatre, quadruplée, &c.

V. THEORÉME.

S'IL y a pluſieurs termes en proportion continuelle, c'eſt à dire que le premier ſoit au ſecond, XXIV.
comme le 2.^{d} au 3.^{e} & le 3.^{e} au 4.^{e} & le 4.^{e} au 5.^{e}: ce qui s'appelle Progreſſion Geometrique: la Raiſon d'un terme à l'autre, ſera ſimple, ou doublée, ou triplée, ou quadruplée, &c. ſelon que ces termes ſeront diſtans l'un de l'autre; car s'ils ſe ſuivent immediatement, leur Raiſon ſera ſimple, c'eſt à dire la même qui regne dans toute la Progreſſion.

S'il y a un terme entre-deux, qui eſt une moyenne proportionelle, leur Raiſon ſera doublée, c'eſt à dire compoſée de deux Raiſons ſimples, qui par l'hypotheſe ſont égales.

S'il y a deux termes entre-deux, c'eſt à dire deux moyennes proportionnelles, leur raiſon ſera triplée; s'il y en a trois, quadruplée; &c.

VI. THEORÉME.

LA Raiſon d'une grandeur de pluſieurs dimenſions à toute autre grandeur homogene d'autant de di- XXV.

dimensions, est composée de toutes les Raisons de châcune des dimensions d'une grandeur à châcune des dimensions de l'autre: ce n'est qu'une application de la definition de la Raison composée; car comparant châcune des dimensions d'une grandeur à châcune des dimensions de l'autre, on met tous les antecedens de ces Raisons dans une des grandeurs, & tous les consequens dans l'autre. Or une Grandeur de plusieurs dimensions est la même chose que le Produit de ces dimensions multipliées l'une par l'autre; & par consequent les grandeurs sont entr'elles, comme le produit de leurs dimensions, c'est à dire comme le Produit des antecedens des Raisons de châcune des dimensions de l'une à châcune des dimensions de l'autre au Produit des consequens de ces mêmes Raisons, ce qui est une Raison composée de ces Raisons par la définition même de la Raison composée.

I. Corollaire.

XXVI. Toute Grandeur plane est à une autre Grandeur plane en raison composée des deux raisons de châcun des côtez de l'une à châcun des côtez de l'autre, c'est la même chose que la precedente.

II. Corollaire.

XXVII. Toute Grandeur solide est à une autre Grandeur solide en raison composée des trois raisons de châcun des côtez de l'un à chacun des côtez de l'autre, c'est la même chose que la proposition generale.

III. Corollaire.

XXVIII. Les Grandeurs planes & solides ayant quelqu'une de leurs dimensions égale & l'autre inégale sont entr'elles comme les inégales. $bf.bg::f.g.$ $bfd.bfg::d.g.$ $bfd.bmn::fd.mn.$

IV. Co-

IV. Corollaire.

Les plans dont les deux dimensions ont même raison, châcune de l'un à châcune de l'autre, sont en raison doublée de cette même raison. Cela est clair par le premier Corollaire & la définition de la Raison doublée. XXIX.

V. Corollaire.

Les solides dont les trois dimensions ont même raison châcune de l'un à châcune de l'autre, sont en raison triplée de cette raison. Cela est encore clair par le second Corollaire, & la définition de la raison triplée. XXX.

VI. Corollaire.

Tous les Quarrez & les Cubes sont en raison, les uns doublée, & les autres triplée de la raison de leurs racines; car toutes les dimensions des Quarrez & des Cubes étant égales entr'elles, elles ne peuvent pas n'avoir pas châcune la même raison à châcune des dimensions des autres Quarrez & des autres Cubes. XXXI.

VII. Corollaire.

Si 4 Grandeurs sont proportionelles, leurs Quarrez & leurs Cubes le sont aussi. Si $b.c::f.g.$ $bb.cc::ff.gg.$ $bbb.ccc::fff.ggg$; car les Quarrez étant en raison doublée de leurs Racines, & leurs Cubes en raison triplée, les Raisons doublées & les triplées de Raisons égales doivent être égales par le 3.e Theoréme. XXXII.

VIII. Corollaire.

Le Produit de deux Grandeurs quelconques est moyen XXXIII.

moyen proportionnel entre les Quarrez de chaque Grandeur. Soient les Grandeurs *b* & *c*. *bb*. *bc* :: *bc*. *cc* ; car *bb*. *bc*. : : *b*. *c*. *cc* : : *b*. *c*.

C'eſt la même choſe que de dire que le Produit de la toute & d'une partie, eſt moyen proportionnel entre le Quarré de la toute & le Quarré de cette partie ; car il eſt viſible que ſi la toute eſt *t* & *m* une partie : *tt*. *tm*. : : *tm*. *mm*.

IX. Corollaire.

XXXIV. En toute Progreſſion Geometrique, les Quarrez de deux termes qui ſe ſuivent immediatement, ſont entr'eux comme deux termes, entre leſquels il y en à un d'interpoſé. Soient ÷÷ *b*. *c*. *d*. *f*. *g*. en Progreſſion Geometrique. Je dis que *bb*. *cc* : : *b*. *d* ou *cc*. *dd* : : *c*. *f* ; car la Raiſon de *b*. *d*. eſt doublée de celle de *b*. *c*. Or par le 6.e Corollaire, les Quarrez *bb* & *cc*, ſont auſſi en raiſon doublée de celle de *b*. *c*. Cela ſe peut prouver encore d'une autre ſorte. Si ÷÷ *b*. *c*. *d*. *f*. *bd* = *cc*. Or *bb*. *bd* : : *b*. *d* donc *bb*. *cc* : : *b*. *d*.

X. Corollaire.

XXXV. En toute Progreſſion Geometrique, les Cubes de deux termes qui ſe ſuivent immediatement, ſont entr'eux comme deux termes entre leſquels il y en a deux d'interpoſez ; car les Cubes ſont en raiſon triplée de la Raiſon de la Progreſſion, & les termes entre leſquels il y en a deux d'interpoſez, ſont auſſi en raiſon triplée de cette même raiſon. Cela ſe peut prouver auſſi par le 9.eme Corollaire ; car ſi ÷÷ *b*. *c*. *d*. *f*. *bb*. *cc* : : *c*. *f*. ; donc *bbf*. = *ccc*. Or *bbb*. *bbf* : : *b*. *f*. donc *bbb*. *ccc* : : *b*. *f*.

XI. Corollaire.

XXXVI. C'est par là qu'on a trouvé comment il s'y falloit

loit prendre pour doubler un Cube donné ; car ayant un Cube donné *bbb*. il faut prendre *f* double de *b*, & ſi on peut trouver deux moyennes continuëment proportionnelles entre *b* & *f*, comme ſeroient *c* & *d* : enſorte que ÷÷ *b*. *c*. *d*. *f* : le Cube de *c* premiere de ces moyennes proportionnelles ſera double du Cube de *b*.

VII. Theoréme. Definition.

Deux Grandeurs planes qui ſont telles que les deux dimenſions de l'une ſont les extremes d'une proportion dont les deux dimenſions de l'autre ſont les moyens, ou [ce qui eſt la même choſe] que l'une des dimenſions de la premiere ſoit à l'une des dimenſions de la ſeconde, comme l'autre dimenſion de la ſeconde eſt à l'autre dimenſion de la premiere, ſont appellées reciproques, & ſont toûjours égales. XXXVII.

Soient les plans *bg* & *cf*. Je dis que ſi *b* eſt à *c* comme *f* eſt à *g*, *b*. *c*. : : *f*. *g*. Ces deux plans ſont reciproques & égaux, *bg* = *cf* : Car par II. 72. le Produit des extrémes *bg*, qui eſt le premier de ces deux plans, eſt égal au Produit des moyens *cf*, qui eſt le ſecond de ces deux plans.

VIII. Theoréme.

Les Grandeurs planes égales ſont toûjours reciproques, c'eſt à dire les deux dimenſions de l'une ſont les extrémes de la proportion dont les deux dimenſions de l'autre ſont les moyens. Si *bg* eſt égal à *cf* : Je dis que *b*. *c* : : *f*. *g*. par II. 73. XXXVIII.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATRIE'ME.

DES GRANDEURS COMMENSURABLES ET INCOMMENSURABLES.

I. *Nous avons dit generalement qu'il y a deux sortes de raisons ; la raison de nombre à nombre, & la raison sourde ; & comme c'est par là que les grandeurs sont commensurables & incommensurables, la suite naturelle nous oblige de parler de ces sortes de Grandeurs.*

DEFINITION.

II. C'est la même chose de dire que deux grandeurs sont commensurables, & de dire qu'elles sont comme nombre à nombre.

Car

Car afin que b soit commensurable à c, il faut que quelque grandeur comme x soit précisément tant de fois dans b & précisément tant de fois dans c, comme si elle est 9 fois dans b & 10 fois dans c.

Donc b est la même chose que $9\,x$, & c la même chose que $10\,x$.

Or $9\,x.\ 10\,x :: 9.\ 10.$

Donc $b.\ \ c :: 9.\ 10.$

Donc b est à c comme nombre à nombre. Et delà il s'ensuit que c'est aussi la même chose de dire que deux grandeurs ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, & de dire qu'elles sont incommensurables, puisque si elles étoient commensurables elles seroient comme nombre à nombre.

SECTION PREMIERE.

Des Grandeurs commensurables ou des Raisons de nombre à nombre.

Tout ce qui a été dit dans les deux Livres precedens des Raisons en general, peut-être appliqué sans peine aux Raisons de nombre à nombre. Ce n'est donc pas ce que l'on va faire ici : ce seroit une repetition inutile. Mais on parlera seulement de ce qui convient specifiquement aux Raisons de nombre à nombre, & en quoi elles sont differentes des Raisons Sourdes. III.

I. Lemme.

Marquer les nombres par lettres.

On peut marquer les nombres par lettres comme les autres grandeurs : & alors il faut observer en faisant les quatre operations sur les nombres que l'on a marquez par lettres, tout ce qui a été dit dans le I. Livre de ces operations sur les grandeurs quelconques : D'où naissent plusieurs differences entre cette maniere de marquer les nombres IV.

par

par lettres, & celle de les marquer par chiffres.

1. Une seule lettre peut marquer quand on veut quelque grand nombre que ce soit ; au lieu qu'il faut beaucoup de caracteres pour marquer les grands nombres.

2. Les chiffres changent dans l'Addition, Soustraction, & Multiplication des nombres ; mais les lettres ne changent point : Car si b signifie 4, & a 5 : pour les adjoûter en chiffres je mettray 9, & par lettres je mettray $b + a$. Et pour les multiplier en chiffres je mettray 20, & par lettres je mettray $b\,a$: & c'est en cela qu'est le plus grand avantage des lettres ; car les multiplications s'y font sans peine, & laissent toûjours voir les nombres par lesquels on a multiplié ; au lieu que deux grands nombres sont difficiles à multiplier par chiffres, & on ne voit plus dans le produit les nombres dont il a été fait.

3. Le rang dans les chiffres fait tout ; car 29 & 92 sont deux nombres bien differens : mais il ne fait rien dans les lettres quand on les joint ensemble, ce qui marque une multiplication ; car il n'importe par où on commence la multiplication de deux nombres. C'est toûjours la même chose 5 fois 4, ou 4 fois 5 : & ainsi bcd, bdc, dbc marquent le même nombre.

4. Les chiffres signifient des nombres determinez : & un même caractere dans la même place des unitez, des dixaines, &c. ne peut signifier que la même chose. Mais les lettres signifient des nombres quelconques ; en observant neanmoins que dans une même operation la même lettre doit signifier le même nombre.

II. Lem-

II. Lemme.

Cette maniere de marquer les nombres par lettres, fait voir que les nombres peuvent étre considerez comme étant d'une dimension, ou de deux, ou de trois, ou de quatre, &c. V.

On considere un nombre comme étant d'une seule dimension, lors qu'on regarde simplement ce qu'il contient d'unitez & qu'on le marque par une seule lettre, soit qu'il ait besoin pour étre écrit en chiffre d'un seul ou de plusieurs caracteres. Ainsi 72 marqué par un s, est un nombre d'une seule dimension.

On le considere comme ayant deux dimensions, lors qu'il est exprimé par deux lettres qui marquent deux nombres, qui se multipliant l'un l'autre font le nombre total qu'on veut exprimer ; Ainsi b signifiant 2, & p 36 : $b\,p$ signifie deux fois 36, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 3 dimensions, lors qu'il est exprimé par 3 lettres, qui marquent 3 nombres, dont le 3.e multiplie le produit des deux premiers. Ainsi b signifiant 2, c 3 & m 12 : bcm signifie 2 fois 3 fois 12. c'est à dire, 6 fois 12 ; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 4. dimensions, lors qu'il est exprimé par 4 lettres qui marquent 4 nombres, dont le 3.e ayant multiplié le produit des deux premiers, le 4.e multiplie le produit des 3 autres. Ainsi b signifiant 2, c 3, & d 4 ; $bcdc$ signifie 2 fois 3 fois 4 fois 3 ; c'est à dire, 6 fois 4 fois 3 ou 24 fois 3 ; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant cinq dimensions, lors qu'il est exprimé par 5 lettres.

De 6, quand par 6.

De 7, quand par 7.

De 8, quand par 8, &c.

III. Lem-

III. Lemme.

VI. On voit assez que deux mêmes lettres, comme *b b* ou *c c*, doivent faire un nombre quarré ; & 3 mêmes lettres, comme *b b b*, un nombre cubique.

Mais il y a encore une autre observation à faire sur ces nombres. C'est qu'un nombre est reconnu pour quarré non seulement quand il est exprimé par deux mêmes lettres comme *b b*, mais aussi quand on partage en deux parts égales les lettres d'un nombre, en sorte que les mêmes lettres se trouvent en l'une & en l'autre partie. Ainsi *bbcc*, ou *bbccdd*, sont des nombres quarrez, parce que l'un se peut partager en *b c* & *b c*, & l'autre en *b c d* & *b c d*. Car on a déja veu qu'il n'importoit de rien en quelque maniere que les lettres fussent rangées.

Un nombre de même est cubique non seulement quand il est exprimé par les trois mêmes lettres comme *bbb*, mais aussi quand les lettres qui le marquent peuvent étre divisées en trois parts égales dont chacune contienne les mêmes lettres. Ainsi *bbbccc*, ou *bbbcccddd* sont deux nombres cubiques, parce que le premier se peut partager en *b c*, *b c* & *b c*, & l'autre en *b c d*, *b c d* & *b c d*.

Corollaire.

VII. Il s'ensuit delà sans autre preuve, que le produit de deux nombres quarrez est toûjours un nombre quarré qui a pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres quarrez. Ainsi *bb* en *c c* fait *b b c c*, qui a pour sa racine *b c*. Et que le produit de deux nombres cubiques est toûjours

jours un nombre cubique, qui a aussi pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres cubiques.

IV. Lemme.

Les exposans d'une raison de nombre à nombre sont necessairement ou deux nombres impairs, ou un nombre pair & un impair, mais ce ne peut étre deux pairs ; car deux pairs pouvant encore l'un & l'autre étre partagez par la moitié : cette raison n'auroit pas été reduite aux moindres termes qu'elle l'auroit pû étre, & cette division par la moitié fera enfin que ces deux pairs se reduiront ou à deux impairs comme la raison de 10 à 6 se reduit à la raison de 5 à 3, ou au moins à un pair & à un impair, comme la raison de 8 à 14 se reduit à la raison de 4 à 7. VIII.

V. Lemme.

Quoi que deux nombres n'ayent pas autant de dimensions l'un que l'autre, ils ne laissent pas de pouvoir étre comparez ensemble, parce que tous les nombres étant mesurez par l'unité ont toûjours raison l'un à l'autre. IX.

Neanmoins il est souvent utile de pouvoir faire que le nombre qui auroit moins de dimensions que l'autre, en ait autant demeurant le même, & cela est aisé.

Car reservant la lettre (*i*) pour marquer l'unité il ne faut qu'augmenter les lettres du nombre qui en a moins que l'autre, d'autant d'*i* qu'il est necessaire pour faire qu'il y ait autant de lettres à l'un qu'à l'autre. Ainsi ayant à comparer *b* avec *bx* ; ajoûtant un *i* à *b*, *b i* aura autant de dimensions que *b x*.

Et

Et neanmoins *b i* sera le même nombre que *b*, parce que l'unité multipliant un nombre ne le change point ; 4 fois un, ou une fois 4, étant la même chose que quatre.

Et quand on le multiplieroit 2, 3 & 4 fois par l'unité, ce seroit toûjours de même : comme il se voit en ce que l'unité prise une fois (ce qui peut être marqué par un seul *i*) est un nombre lineaire ; & multiplié par soi-même, ce qui peut être marqué par deux (*i i*) est un nombre quarré, quoi que ce soit toûjours un : & marquée par trois (*iii*) un nombre cubique : & par quatre (*iiii*) un nombre quarré de quarré : & ainsi à l'infini. D'où il s'ensuit que comme un seul (*i*) n'apporte aucun changement au nombre auquel il est ajoûté : deux, trois, quatre *i*, n'en apportent point aussi.

Cette observation sera de grand usage dans les Theorémes suivans.

VI. Lemme.

X. Il est bon pour distinguer plus facilement les nombres pairs des impairs de marquer les nombres pairs par des consones, & les impairs des par voyelles, reservant toûjours *i* pour l'unité : neantmoins quand on ne considere ni les pairs ni les impairs, les consonnes alors se prendront pour les nombres en general.

VII. Lemme.

XI. Outre cette maniere de marquer par lettres les nombres que l'on veut multiplier, on peut aussi en les marquant par les chiffres ordinaires, avoir presque les mêmes avantages, qui sont, 1. Que les nombres multiplians & multipliez paroissent toûjours. 2. Qu'on voit tout d'un coup de combien de dimensions est chaque nombre. 3. Que l'on voit sans peine les exposans de chaque raison de nombre à nombre.

Il ne faut pour cela que faire deux choses. La 1re est de mettre une virgule entre deux, ou trois, ou quatre, ou cinq nombres que l'on veut multiplier les uns par les autres, en se souvenant que cette virgule veut dire *fois*.

Ainsi 4, 5. voudra dire 4 fois 5. c'est à dire 20.

5, 12. 5 fois 12. c'est à dire 60.

5, 6, 7, 8. 5 fois 6 fois 7 fois huit, c. 30 fois 7 qui font 210, & 8 fois 210, ce qui fait 1680.

Les quarrez se mettront de même.

3, 3. Quarré de 3. 9.

4, 4. Quarré de 4. 16.

12, 12. Quarré de 12. 144.

36, 36. Quarré de 36. 1296.

Les Cubes de même.

4, 4, 4. Le Cube de 4. 64.

10, 10, 10. Le Cube de 10. 1000.

On peut aussi dans cette maniere faire les nombres d'autant de dimensions les uns que les autres, en multipliant par 1, c'est à dire par l'unité, ceux qui n'en ont pas tant, & mettant la virgule entre-deux. Ainsi si je veux comparer 4 à 4, 7. Je n'auray qu'à mettre 4, 1 & 4, 7. Ce qui signifiera 4 fois 1, & 4 fois 7. Ce qui peut être de grand usage dans les proportions.

L'autre invention qui n'est que pour les nombres quarrez, cubiques, quarrez de quarrez, &c. c'est de faire comme aux lettres, mettre au dessus un peu à côté un petit 2 pour les quarrez ; un 3 pour les cubes ; un 4 pour les quarrez de quarrez, &c.

Ainsi $8.^2$ marquera le quarré de 8. 64.

8^3. Le cube de 8. 512.

8^4. Le quarré de quarré de 8. 4096.

DEFINITIONS.

XII. Il y a quelques definitions qu'il faut sçavoir pour bien comprendre les raisons de nombre à nombre.

Un nombre est dit en diviser un autre, ou en être la mesure quand il y est précisement tant de fois.

Ainsi l'unité est la mesure de tous les nombres, & tous les nombres sont multiples de l'unité.

Le nombre 2 est la mesure de tous les nombres pairs, & tous les nombres pairs sont multiples de 2.

Mais il faut remarquer 1°. que chaque nombre est la mesure de soy-même, parce qu'il est une fois dans soy-même. Et ainsi tout nombre a au moins deux mesures, soy-même & l'unité; il n'y a que l'unité qui n'a que soy-même. 2°. Que toutes mesures sont doubles, si ce n'est dans les quarrez, où un nombre se multiplie soy-même; Car si 3 par exemple est le quart de 12, quatre en sera le tiers. Si 3 est la 12.me de 60, 12 en sera la 5.me

3°. On dit qu'un nombre est nombre premier, quand il n'a de mesure que l'unité & soy-même, (ce qui se sous-entend sans qu'on le dise.) Comme 2. 3. 5. 7. 11. 13, &c.

Hors le nombre 2 nul nombre pair ne peut être premier, parce que tous (hors 2) peuvent au moins être divisez par 2.

4°. Deux nombres sont premiers entr'eux, quand ils n'ont de mesure commune que l'unité.

Ils s'ensuit delà que deux nombres differens qui sont chacun premiers le sont entr'eux, comme 5. 7. 11. j'ay dit deux nombres differens; car deux mêmes nombres comme 5 & 5, quoi que chacun soit premier, ne le sont point entr'eux; Car outre

tre l'unité, étant chacun à soy-même sa mesure, ils ont encore cette mesure commune.

Deux nombres qui se suivent sont premiers entr'eux.

Deux impairs qui se suivent comme 7 & 9 le sont aussi.

Tous les quarrez sont premiers entr'eux, lors que leurs racines sont des nombres premiers, ou seulement premiers entr'eux, quoi que nul quarré ne puisse être nombre premier 9. 25. 49. 64. 81.

Deux nombres premiers entr'eux ne sçauroient tous deux être pairs; il faut qu'au moins l'un des deux soit impair; car deux pairs auroient le nombre 2 pour mesure commune.

La Notion des Raisons de nombre à nombre.

La raison de nombre à nombre est bien plus facile à concevoir que la raison des grandeurs en general, à cause que les nombres ont toûjours l'unité pour commune mesure, & qu'il y a des grandeurs qui n'ont aucune mesure commune. XIII.

Ainsi la raison de deux nombres ne consiste qu'en ce que l'un est tant de fois dans l'autre, si l'un est multiple de l'autre, comme 4 est 3 fois dans 12; ou que quelque aliquote de l'un est précisement tant de fois dans l'autre; ce qui est toûjours certain au moins de l'unité, comme 2 qui est le tiers de 6, est quatre fois dans 8; l'unité qui est le quart de quatre, est 7 fois dans 7.

Or delà il est aisé de comprendre qu'afin que la raison de deux nombres soit égale à la raison de deux autres, il faut que si le second est multiple du premier, le troisiéme soit autant de fois dans le quatriéme que le premier est dans le second; ou que si le premier n'a que quelqu'une de ses aliquotes qui soit tant de fois dans le second, une ali-

 quote

quote pareille du troisiéme soit autant de fois dans le quatriéme; c'est à dire que si le tiers du premier est cinq fois dans le second: il faut aussi que le tiers du troisiéme soit cinq fois dans le quatriéme: Quatre est 5 fois dans 20, comme 7 est 5 fois dans 35.

La moitié de 6 est 5 fois dans 15, comme la moitié de 8 est 5 fois dans 20.

Division Generale.

XIV. La plus generale division des raisons de nombre à nombre, est de dire que les unes sont premieres, & les autres non-premieres.

J'appelle premieres celles dont les termes sont premiers entr'eux, comme la raison de l'unité à tout nombre: la raison de 2 à tout nombre impair.

J'appelle non-premieres celles dont les termes ne sont pas des nombres premiers entr'eux, comme 8, 12; 15, 20; 45, 81.

Propositions Fondamentales.

XV. Deux raisons premieres étant differentes ne sçauroient être égales.

Chaque raison premiere peut être égale à une infinité de non premières.

Chaque raison non-premiere peut être reduite à une premiere qui lui sera égale.

Il faut prouver toutes ces trois propositions.

La premiere se prouve ainsi. Deux nombres premiers entr'eux n'ont de mesure commune que l'unité qui est l'aliquote qui prend sa denomination du nombre même, comme l'unité est une seiziéme de 16. Si je compare donc 16 à 25 qui sont deux nombres premiers entr'eux (quoi que nul ne soit premier:) la raison de 16 à 25 ne consiste qu'en ce qu'une 16.me de 16 est 25 fois dans 25. Or dans l'infinité des nombres, il n'y a que 16 & ses multiples, comme 2 fois 16, 3 fois 16, qui ait des seiziémes, & il n'y a aussi que 25 & ses multiples, comme 2, 25. 3, 25. en qui quelque nombre puisse être précisement 25 fois. Or deux nombres dont l'un seroit multiple de 16, & l'autre autant multiple de 25, ne seroient pas des nombres premiers entr'eux. Donc il est impossible que deux raisons premieres étant differentes soient égales.

Preuve de la deuxiéme Proposition.

Elle est claire par ce qui vient d'être dit; car deux nombres premiers entr'eux peuvent être chacun multipliés par un même nombre, & cela une infinité de fois: n'y ayant point de nombre qui ne puisse multiplier l'un & l'autre. Et alors (par II. 58) cette raison non-premiere sera égale à la premiere. XVI.

Preuve de la troisiéme Proposition.

Une raison non-premiere est celle qui est entre deux nombres non-premiers entr'eux. Or afin que deux nombres soient non-premiers entr'eux, il faut qu'ils ayent une commune mesure autre que l'unité, & que par consequent ils soient multiples d'un même nombre. Ils ont donc chacun deux dimensions, & en ont une commune. Ils peuvent donc être exprimés chacun par deux lettres, dont il y en aura une qui sera la même, ou par deux chiffres avec une virgule entre-deux, & il y aura de part & d'autre le même chiffre. Donc effaçant ou la même lettre, ou le même chiffre, ce qui restera sera en même raison par II. 58. & 59. XVII.

8. 12.
bd. ad } .. *b.a.*
2,4.3,4. } .. 2.3.

Mais il faut remarquer 2 choſes : La premiere, que quand l'un des nombres eſt multiple de l'autre, c'eſt le nombre même dont l'autre eſt multiple, qui eſt la meſure commune des deux nombres : de ſorte qu'il faut ou l'exprimer ou le concevoir comme étant multiplié par l'unité : 4 à 20 ; c'eſt à dire 4, 1. à 4, 5. De ſorte qu'effaçant 4 de part & d'autre, la reduction ſera 1. 5.

La deuxiéme, que toute raiſon d'un même nombre à ſoy-même ſe reduit à la raiſon de l'unité à l'unité ; car ils ont chacun deux meſures comme il à eſté dit, l'unité & ſoy-même, & chacune leur eſt commune, effaçant donc la plus grande de ces meſures qui ſont toutes deux communes, reſte l'unité de part & d'autre.

Si la premiere reduction ne donnoit pas des nombres premiers entr'eux, (ce qui arrive quand on ne prend pas le plus grand diviſeur commun,) il ne faudroit que recommencer, & il eſt indubitable que cela ſe reduiroit à la fin à une raiſon premiere, c'eſt à dire à une raiſon de deux nombres premiers entr'eux.

Corollaire.

XVIII. Les deux termes de la raiſon premiére à laquelle ſe reduit une raiſon non premiere s'appellent *les expoſans* de cette raiſon non-premiére.

Ainſi 2 & 3 ſont les *expoſans* de la raiſon de 8 à 12. 4 & 5, Les *expoſans* de la raiſon de 28 à 35.

Cela s'appelle autrement reduire une raiſon aux moindres termes qu'elle peut être. Et pour abreger, le mot de *reduire* ſignifiera tout cela. Ce qu'il faut bien remarquer.

Ceci

Ceci revient encore à cette maxime : Si un même nombre en diviſe deux autres, les quotiens ſont proportionnels à ces deux nombres ; car le même nombre 4 ayant diviſé 8 & 12, les quotiens ont été 2 & 3, qui ſont en même raiſon que 8 & 12.

I. Theoréme.

Deux raiſons égales ont neceſſairement les mêmes expoſans, & ce n'eſt qu'en cela qu'elles ſont égales. XIX.

Car il faut que deux raiſons que l'on compare, ou ſoient toutes deux premieres, ou toutes deux non-premieres, ou que l'une ſoit premiere, & l'autre non-premiere.

Or il vient d'être prouvé qu'elles ne ſçauroient être égales étant toutes deux premieres ſi elles ſont differentes : & que les non-premieres ſe peuvent reduire à une premiere. Il faut donc que les non-premieres pour être égales ſe puiſſent reduire à une ſeule & même premiere : ou s'il n'y en a qu'une de non-premiere, qu'elle ſe puiſſe reduire à la même premiere que celle qui l'eſt déja. Or c'eſt ce qu'on appelle avoir les mêmes *expoſans*, que de ne pouvoir être reduite qu'à une même & ſeule raiſon premiere. Donc il eſt impoſſible que deux raiſons égales n'ayent pas les mêmes *expoſans*.

II. Theoréme.

Deux raiſons de nombre à nombre étant égales, le produit des antecedens eſt au produit des conſequens comme deux nombres quarrez : ou, la raiſon du produit des antecedens au produit des conſequens à pour ſes expoſans des nombres quarrez. Car deux raiſons ne ſçauroient être égales, qu'elles n'ayent les mêmes expoſans par le Theoréme precedent, c'eſt à dire qu'étant reduites, el- XX.

les

les ne le soient à deux raisons premieres qui ont chacune le même antecedent & le même consequent. Donc le produit des antecedens sera la multiplication d'un nombre par soy-même, ce qui fait un nombre quarré, & de même du produit des consequens.

Deux raisons égales $bx.\ cx :: by.\ cy.$
reduites aux moindres termes $b.\ c :: b.\ c.$
Donc le produit des antecedens est $bb.$
& celui des consequens $cc.$

Exemple par les chiffres selon le septiéme Lemme.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3.
Exp. 4. 5 :: 4. 5.

Donc le produit des antecedens est 4 fois 4, c'est à dire le quarré de quatre.

Et le produit des consequens est 5 fois 5, c'est à dire le quarré de cinq.

III. Theoréme.

XXI. Trois raisons de nombre à nombre étant égales, la raison du produit des 3 antecedens au produit des 3 consequens a pour ses exposans des nombres cubiques.

C'est la même chose; car trois raisons ne sçauroient étre égales, qu'elles n'aient toutes trois les mêmes exposans, c'est à dire qu'étant reduites elles ne le soient à trois raisons, qui ne seront que la même, ayant toutes trois le même antecedent & le même consequent. Donc le produit des antecedens sera un cube, & le produit des consequens un autre cube.

$bx.\ cx :: by.\ cy :: bz.\ cz.$
$b.\ c :: b.\ c :: b.\ c.$

Donc le produit { des antecedens $bbb.$ / des consequens $ccc.$ }

C'est la même chose par les chiffres.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3 :: 4, 9. 5, 9.
4. 5 :: 4. 5 :: 4. 5.

Donc

Donc le produit des antecedens est 4, 4, 4, c'est à dire le cube de 4. Et le produit des consequens est 5, 5, 5, c'est à dire le cube de 5.

IV. Theoréme.

La raison doublée ou triplée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres quarrez si elle est doublée, & des nombres cubiques si elle est triplée. XXII.

Car une raison doublée n'est autre chose qu'une raison composée de deux raisons égales.

Or une raison composée de deux raisons n'est autre chose que la raison du produit des antecedens de ces deux raisons au produit des consequens par III. 10.

Donc une raison composée de deux raisons égales de nombre à nombre (ce qui est la même chose que la raison doublée d'une raison de nombre à nombre) n'est autre chose que la raison du produit des antecedens de 2 raisons égales de nombre à nombre au produit des consequens.

Or cette raison du produit des antecedens de deux raisons égales de nombre à nombre au produit des consequens, a pour ses exposans des nombres quarrez par le 2.[d] Theoréme.

Donc toute raison doublée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres quarrez.

On prouvera de la même sorte par le 3.[e] Theoreme que la raison triplée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres cubiques; parce qu'une raison triplée n'est autre chose qu'une raison composée de trois raisons égales. Donc, &c.

I. Corollaire.

Trois nombres étant continuëment propor- XXIII.
E 5 tionnels,

tionnels, ne peuvent être reduits aux moindres nombres qu'ils peuvent être, que les deux extrémes ne ſoient des nombres quarrez, & celui du milieu le produit de leurs racines.

Car le 1.^{er} de ces 3 nombres eſt au troiſiéme en raiſon doublée de la raiſon du 1.^{er} au 2.^{d} ou [ce qui eſt la même choſe] en raiſon composée de la raiſon du 1.^{er} au 2.^{d} & de celle du 2.^{d} au 3.^{e}. comme il a été prouvé III. 18. Donc par le 4.^{e} Theoréme la raiſon du 1.^{er} au 3.^{e}. doit avoir pour ſes expoſans des nombres quarrez. Or par III. 33. le produit des 2 racines eſt moyen proportionnel entre deux quarrez, & il eſt clair que deux nombres ne peuvent avoir qu'un ſeul nombre pour moyen proportionnel. Donc le produit des deux racines doit être ce ſecond terme.

II. COROLLAIRE.

XXIV. QUATRE grandeurs étant continuëment proportionnelles la raiſon de la 1.^{re} à la 4.^{e} a pour ſes expoſans des nombres cubiques.

C'eſt la même choſe; car (par III. 24.) la raiſon de la 1.^{re} à la 4.^{e} eſt une raiſon triplée. Or par le Theoréme precedent, toute raiſon triplée a pour ſes expoſans des nombres cubiques.

V. THEORÉME.

XXV. SI pluſieurs nombres ſont continuëment proportionnels (ce qui s'appelle Progreſſion Geometrique:) il faut neceſſairement qu'étant *reduits*, ils ſoient ou tous impairs, ou tous pairs hors l'un des extrémes, qui ſera ſeul neceſſairement impair. Car il eſt clair qu'ils ne peuvent pas être tous pairs, parce qu'ils ne ſeroient pas *reduits*.

Demonſtr. Ce qui fait que les nombres ſont proportionnels, c'eſt qu'il y a toûjours une même raiſon entre ceux qui ſe ſuivent immediatement. Et ainſi toutes ces raiſons étant égales n'ont que les mê-

mê-

mêmes expoſans, qui ſont, ou l'unité & quelque autre nombre que ce ſoit, quand la Progreſſion eſt multiple, ou deux autres nombres quand elle n'eſt pas multiple, leſquels deux nombres ſont neceſſairement ou tous deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair, par le 4.^{e} Lemme.

PREUVE DU PREMIER CAS.

DANS le premier cas, c'eſt à dire quand l'un des expoſants eſt l'unité, la verité du Theoréme eſt manifeſte; car le 2.^{d} expoſant ſera le 2.^{d} terme de la Progreſſion, & tous les autres en ſont les puiſſances, le 3.^{e} le quarré, le 4.^{e} le cube, le 5.^{e} le quarré de quarré, &c. D'où il s'enſuit que ſi ce 2.^{d} expoſant eſt un nombre impair, (toutes les puiſſances d'un nombre impair l'étant toûjours auſſi,) tous les termes de la Progreſſion ſont impairs. XXVI.

Exemple quand le deuxiéme terme eſt 5; (Il faut ſe ſouvenir que par $5.^2$ 5^3, &c. j'entens toûjours le quarré de 5. le cube de 5, &c.)

∺ 1. 5. 5^2. 5^3. 5^4, &c.
∺ 1. 5. 25. 125. 625, &c.

Que ſi le 2.^{d} expoſant eſt pair, comme il ſera le 2.^{d} terme de la Progreſſion, & que tous les autres termes ſeront ſes puiſſances: ils ſeront tous pairs (toute puiſſance d'un nombre pair l'étant toûjours auſſi.) Il n'y aura donc que l'unité qui ſera un nombre impair dans cette Progreſſion.

Exemple, ce ſecond expoſant étant 10.

∺ 1. 10. 10^2. 10^3. 10^4, &c.
∺ 1. 10. 100. 1000. 10000.

PREUVE DU DEUXIÉME CAS.

QUAND la Progreſſion n'eſt pas multiple, c'eſt XXVII.
à dire quand l'un des deux expoſans n'eſt pas l'unité, il faut toûjours qu'ils ſoient ou tous deux im-

impairs, ou l'un pair & l'autre impair, comme il a déja été dit. Or ce ſont alors les deux expoſans qui determinent tous les autres termes.

Car les deux extrémes doivent être la même puiſſance de chacun des deux expoſans; c'eſt à dire le quarré s'il n'y a que trois termes, le cube s'il y en a 4. le qq. s'il y en a 5. le qc. s'il y en a 6, & ainſi juſques à l'infiny. Et tous les autres termes doivent avoir autant de dimenſions que ces extrémes; c'eſt à dire en avoir 2 ſi ces extrêmes ſont des quarrez. 3, ſi ce ſont des cubes. 4, ſi ce ſont des qq. 5 ſi ce ſont des qc, &c. Mais il faut qu'une partie de leurs dimenſions ſoit d'un expoſant, & l'autre partie de l'autre expoſant.

Or de la s'enſuit tout ce qu'on avoit à prouver dans ce Theoréme; car 1. Quand les deux expoſans ſont impairs, toutes les multiplications qui ſont les extrémes & ceux d'entre-deux ſe font par impairs, & par conſequent ils doivent tous être impairs.

Exemples, les deux expoſans étant 3. & 5. (Il faut ſe ſouvenir qu'une virgule entre deux chiffres, ſignifie qu'ils ſe doivent multiplier l'un l'autre.)

∺ $3^2.\ 3,5.\ 5^2.$	9. 15. 25.
∺ $3^3.\ 3^2,5.\ 3,5^2.\ 5^3.$	27. 45. 75. 125.
∺ $3^4.\ 3^3,5.\ 3^2,\ 5^2.\ 3,5^3.\ 5^4.$	81. 135. 225. 375. 625.

2. Quand l'un des expoſans eſt pair & l'autre impair, l'un des extrémes ſera pair & l'autre impair. Mais tous ceux d'entre deux ſeront pairs, par ce qu'il y aura quelqu'une de leurs dimenſions qui ſera un nombre pair. Or toute multiplication où il entre un nombre pair, fait un nombre pair.

Exemples les deux expoſans étant 2 & 5.

∺ $2^2.\ 2,5.\ 5^2$	4. 10. 25.
∺ $2^3.\ 2^2,5.\ 2,\ 5^2.\ 5^3.$	8. 20. 50. 125.
∺ $2^4.\ 2^3,5.\ 2^2,5^2.\ 2,5^3.\ 5^4.$	16. 40. 100. 250. 625.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Ces deux cas de la Progreſſion multiple & de la non multiple ne ſont differens qu'en apparence. Le 1.er ſe devant concevoir comme étant virtuellement ſemblable au ſecond; Car l'unité qui en eſt le premier terme doit être conceuë comme quarré quand il y a trois termes, comme cube quand il y en a 4, comme quarré de quarré quand il y en a 5, & ainſi de ſuite. Et tous les autres termes doivent être conceus comme ayant autant de dimenſions qu'en a le dernier terme de la Progreſſion: ce qui ſe fait par le moyen des unitez que l'on met pour autant de dimenſions qui leur manquent. Cela ſe comprendra mieux par des exemples. Soit i pris pour l'unité, & x pour l'autre expoſant quelconque pair ou impair. Voici comme ces Progreſſions *multiples doivent être conceuës, pour être ſemblables aux non multiples.* XXVIII.

∺ ii. ix. xx.
∺ iii. iix ixx. xxx.
∺ iiii. iiix. iixx. ixxx. xxxx.

SECTION SECONDE.

Des Grandeurs incommenſurables ou des Raiſons Sourdes.

NOUS avons déja dit, que ce qui fait que des Grandeurs ſont appellées incommenſurables (ce qui eſt la même choſe que n'avoir entr'elle qu'une raiſon ſourde,) eſt qu'ayant chacune une infinité de meſures de plus petites en plus petites, nulle des meſures de l'une ne peut-être la meſure de l'autre. XXIX.

Cela paroît incomprehenſible, & l'eſt en effet; parce que ce qui eſt cauſe de cela, ne peut être que

 la

la divisibilité de la matiere à l'infini. Or il est clair que tout ce qui tient de l'infinité, ne sçauroit être compris par un esprit fini tel qu'est celui de tous les hommes.

Il ne faut donc pas s'imaginer que l'on puisse avoir des notions aussi claires des raisons sourdes, qu'on en a des raisons de nombre à nombre : ni qu'on puisse prouver positivement que deux grandeurs sont incommensurables ; on ne le peut certainement, & tout ce que l'on sçauroit faire de mieux, est de le faire negativement ; c'est à dire en montrant qu'elles ne sont point entr'elles comme nombre à nombre : par où on est tres-convaincu que la chose est, quoi qu'on ne penetre pas comment cela peut être. Tout se reduit donc à faire voir par les proprietez essentielles des raisons de nombre à nombre que nous venons d'établir, quelles peuvent être les grandeurs qui ne sont point entr'elles comme nombre à nombre, & qui par consequent sont incommensurables, parce que les proprietez des raisons de nombre à nombre ne pourroient convenir à la raison qu'elles auroient entr'elles. C'est pourquoi il faut bien avoir dans l'esprit les definitions suivantes.

DEFINITIONS.

XXX. 1. Deux grandeurs sont incommensurables, quand elles ne sont point entr'elles comme nombre à nombre, ou que la raison qu'elles ont entr'elles n'est point une raison de nombre à nombre.

2. Une raison est sourde quand on peut prouver qu'elle n'a point ce qui convient necessairement aux raisons de nombre à nombre.

3. Chacune des deux raisons égales dont est composée la raison qu'on appelle *doublée*, ou des trois égales dont est composée la raison qu'on appelle *triplée*, soit appellée la raison simple d'une raison doublée ou triplée.

4. Deux

4. Deux grandeurs peuvent être incommensurables, que leurs quarrez & leurs cubes ne le sont pas. Et on dit alors, qu'elles sont incommensurables en elles-mêmes, ou en longueur, ou lineairement, mais qu'elles sont commensurables en puissance. Et il faut remarquer que le quarré est la puissance qui s'appelle simplement puissance, le cube la 2^de^, le quarré de quarré la 3^e^, & ainsi à l'infiny. Et que neanmoins quand on les marque par un petit chiffre au dessus & un peu à côté d'une lettre, ou d'un plus grand chiffre, 2 signifie le quarré, 3 le cube, 4 le quarré de quarré, comme $6.^2\ 6.^3\ 6.^4$ &c. $8.^2\ 8.^3\ 8.^4$ &c.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES INCOMMENSURABLES.

Deux grandeurs sont incommensurables (quoi que non en puissance, ou 1.^ere^ ou 2.^de^) quand la Raison qu'elles ont entr'elles est la raison simple, ou d'une raison doublée, qui a pour ses exposans d'autres nombres que deux nombres quarrez, ou d'une raison triplée qui a pour ses exposans d'autres nombres que deux cubiques. XXXI.

C'est une suite necessaire de ce qui a été prouvé ci-dessus, qu'une raison composée de deux raisons égales de nombre à nombre doit avoir necessairement pour ses exposans des nombres quarrez ; c'est à dire que les deux termes de cette raison doublée doivent être necessairement deux nombres quarrez, comme 1 & 4. 4 & 9. 16 & 25. Et qu'il ne suffit pas que l'un d'eux soit quarré, mais qu'ils le doivent être tous-deux.

Donc toute raison qui a pour ses exposans d'autres nombres que deux nombres quarrez ne sçauroit être composée de deux raisons égales de nombre à nombre : Elle ne le peut donc être que de deux raisons sourdes. Donc les deux grandeurs entre

entre lesquelles est cette raison qui ne sçauroit être de nombre à nombre, sont incommensurables par la 1.re definition S. 30. & par 2. S.

Il n'y a rien de plus facile que d'appliquer tout cela à la raison simple d'une raison triplée, &c

Mais on voit bien aussi que ces grandeurs sont commensurables en puissance ou 1.ere ou 2.de car c'est ce que l'on suppose, que leurs quarrez ou leurs cubes sont comme nombre à nombre, mais non comme deux nombres ou quarrez ou cubiques.

I. Corollaire.

XXXII. Deux quarrez qui sont entr'eux comme deux nombres, & non comme deux nombres quarrez, ont leurs racines incommensurables.

Et deux Cubes de même ont leurs racines incommensurables, si ces Cubes sont entr'eux comme deux nombres qui ne sont pas tous deux cubiques.

C'est la proposition même; car par III. 39. deux quarrez sont entr'eux en raison doublée de leurs racines, & deux cubes en raison triplée. Donc si les quarrez sont entr'eux comme 2 à 1. ou comme 4 à 3: la raison des racines sera la raison simple d'une raison doublée, qui n'aura pas pour ses exposans deux nombres quarrez. Donc ce sera une raison sourde. Donc ces deux racines seront incommensurables: Et on voit assez qu'il en sera de même des racines des cubes.

II. Corollaire.

XXXIII. Quand trois grandeurs sont continuëment proportionnelles: Si la 1.re est à la derniere comme deux nombres qui ne soient pas tous deux quarrez, comme si la 1.re est à la derniere comme 2 à 1, ou comme 3 à 2: la seconde sera incommensurable à la premiere & à la derniere, c'est à dire que la raison de la 1.ere à la seconde sera une raison sourde, aussi bien que celle qui lui est égale de la 2.de à la 3.e Mais cette 2.de sera commensurable en puissance à chacune des deux autres; car (par III. 19.) la raison de la 1.re à la 3.e est composée des 2 raisons égales de la 1.re à la 2.de & de la 2.de à la 3.e Donc si ces deux raisons étoient de nombre à nombre, la raison de la 1.re à la 3.e qui en est composée, auroit eu pour ses exposans deux nombres quarrez. Or elles ne les a pas par l'hypothese. Elles sont donc sourdes: & par consequent la 2.de de ces 3 grandeurs est incommensurable tant à la 1.ere qu'à la 3.e

Mais elle leur est commensurable en puissance; car (par III. 34.) le quarré de la 1.ere est au quarré de la 2.de, comme la 1.ere à la 3.eme & le quarré de la 2.de au quarré de la 3.e est de même comme la 1.re à la 3.e

III. Corollaire.

Lors que 4 grandeurs sont continuëment proportionnelles, si la 1.re est à la 4.e comme deux nombres qui ne soient pas tous deux cubiques: Chaque grandeur est incommensurable à celle qui la suit, en longueur & en 1.ere puissance, & seulement commensurable en 2.de puissance. XXXIV.

C'est la même demonstration que la precedente; Car d'une part (par III. 18.) la raison de la 1.re à la 4.e doit être composée des 3 raisons égales de la 1.re à la 2.de, de la 2.de à la 3.e & de la 3.e à la 4.e Donc c'est une raison triplée, qui par l'hypothese a d'autres nombres pour ses exposans que des nombres cubiques. Donc par la proposition, chacune de ces raisons est sourde. Donc les grandeurs qui ont entr'elles cette raison sourde sont incommensurables.

D'autre

D'autre part (par III. 34.) les cubes de deux de ces grandeurs qui ſe ſuivent ſont en même raiſon que la 1.re à la 4.e Or par l'hypotheſe, la raiſon de la 1.re à la 4.e eſt une raiſon de nombre à nombre (quoi que ce ne ſoit pas celle qui eſt entre deux nombres cubiques.) Donc ces grandeurs qui ſe ſuivent ſont commenſurables en 2.de puiſſance.

IV. Corollaire.

XXXV. Si 3 grandeurs ſont telles, que d'une part le quarré de la plus grande ſoit égal aux quarrez des deux autres, & que de l'autre la plus petite des trois ſoit une aliquote de la plus grande, c'eſt à dire qu'elle ſoit à la plus grande comme l'unité à quelque nombre: celle qui eſt entre-deux ſera incommenſurable à l'une & à l'autre, & elle leur ſera ſeulement commenſurable en puiſſance.

Soient les trois grandeurs *b. d. i.* Et que *b* ſoit à *i* comme 3 à 1. Leurs quarrez ſeront comme 9. à 1. Donc par l'hypotheſe du plus grand quarré égal aux deux autres:

bb. dd. :: 9. 8.
Et *dd. ii.* :: 8. 1.

Donc par le 1.er Corollaire, *b* & *d* ſont incommenſurables, & *d.* & 1. le ſont auſſi. Mais on voit aſſez que *d.* eſt commenſurable en puiſſance à l'une & à l'autre.

V. Corollaire.

XXXVI. Si trois Grandeurs ſont d'une part continuëment proportionnelles, & que de l'autre la plus grande ſoit égale aux deux autres: elles ſont abſolument incommenſurables entr'elles.

Car ſi elles étoient comme trois nombres, il faudroit par le 4.e Lemme, & le 5.e Theoréme qu'elles fuſſent ou comme trois impairs, ou comme un impair & deux pairs, ou comme deux pairs & un

un

un impair; c'eſt à dire en l'une de ces 3 manieres, en marquant les impairs par des voyelles, & les pairs par des conſonnes, & en commançant par la plus grande,

a. e. o.
a. b. c.
b. c. e.

Or la 2.de hypotheſe fait que tous ces 3 cas ſont impoſſibles; car cette 2.de hypotheſe eſt que la 1.re doit étre égale aux 2 dernieres, ce qui ne peut étre dans aucun des trois cas: la 1.re dans les deux premiers cas étant un impair, & les deux dernieres un pair; & dans le 3.e cas étant un pair, & les deux dernieres faiſant un impair.

Avertissement important.

De tout ce qui vient d'étre dit dans la 1.re ſection XXXVII.
des raiſons de nombre à nombre, & dans cette 2.de des raiſons ſourdes, on voit aiſément que la maniere dont les premieres ſont égales, eſt tres-differente de celle dont le ſont ces dernieres; car il paroît par les propoſitions fondamentales de la 1.re ſection S. 15. Que deux raiſons de nombre à nombre ne ſont égales, que par ce qu'elles ont les mêmes expoſans, & qu'ainſi étant reduites, elles ne ſont toutes deux qu'une ſeule & même raiſon. 8 eſt à 12, comme 100 eſt à 150. par ce que la raiſon de 8 à 12, eſt la raiſon de 2 à 3, & que la raiſon de 100 à 150, eſt auſſi la raiſon de 2 à 3.

Mais il n'en eſt pas de même des raiſons ſourdes; car on ne peut point dire qu'elles ayent les mêmes expoſans. Elles ne ſeroient plus ſourdes ſi cela étoit. Ce n'eſt donc point de là qu'on doit prendre leur égalité, mais comme il a été prouvé dans le 1.er Theoréme du 2.d Livre, de ce que toutes les aliquotes pareilles des deux antecedens ſont également contenuës dans les conſequens, quoi que nulle aliquote du 1.er antecedent ne ſoit préciſe-

ment

ment tant de fois dans son consequent, ni aussi l'aliquote pareille du 2.d antecedent dans le 2.d consequent; mais que ce soit toûjours au regard de l'un & de l'autre avec quelque reste.

Et c'est pourquoi dans les raisons de nombre à nombre, quand une seule aliquote pareille de chaque antecedent, par exemple un tiers, est également contenu dans chaque consequent, c'est à dire autant de fois dans l'un que dans l'autre, on n'a point besoin apres cela d'examiner d'autres aliquotes. Mais dans deux raisons sourdes, pour être assuré qu'elles sont égales, il faut avoir comme examiné toutes les aliquotes pareilles de l'un & de l'autre antecedent quoi qu'infinies, & être assuré que nulle du 1.er ne pourra être dans son consequent avec quelque reste, que la pareille du 2.d antecedent ne soit autant de fois dans son consequent, quoi qu'avec aussi quelque reste, comme nous le demontrerons des lignes dans le 10.e Livre. Et ainsi l'on ne peut point dire à proprement parler que 2 raisons sourdes égales (sur tout quand leurs termes sont absolument incommensurables, tant lineairement qu'en puissance) se puissent reduire à une seule & même raison premiere; puisque l'on ne peut dire ni quelle des deux tiendroit lieu de premiere, ni qu'il y en ait une troisiéme qui soit plûtôt *raison premiere* que ces deux-là, à laquelle il les faille reduire pour les comprendre plus facilement; car assurement cela est impossible.

C'est pourquoi il faut prendre bien garde à ne pas étendre aux raisons entre deux étenduës, ce que nous avons dit dans les propositions fondamentales de la 1.re section: Que deux differentes raisons premieres ne pouvoient être égales; car on ne l'a dit que des raisons de nombre à nombre, & cela n'a point de lieu dans les raisons sourdes entre deux étenduës.

Et c'est ce qui me fait croire que ceux qui se servent

vent de la consideration des exposans, qu'ils supposent être les mêmes dans toutes les raisons égales, pour expliquer les proprietez des proportions en general, que nous avons demontrées par une autre voye dans le commencement du 2.d Livre, font le même sophisme que celui qui ayant à expliquer la nature du genre, le feroit par ce qui ne convient qu'à une de ses especes, qui est un sophisme assez ordinaire, mais qui n'en est pas moins sophisme; car c'est ainsi par exemple qu'on explique les actions des bêtes par des pensées & des volontez qui ne conviennent qu'à l'homme, & qu'on le fait même au regard des choses inanimées: presque tout le monde s'imaginant que les pierres vont au centre de la terre, comme à un lieu de repos, par une inclination qui a quelque rapport à celle qui nous fait desirer ce que nous regardons comme nôtre bien.

AVERTISSEMENT.

Tout ce qui suit jusques à la fin de ce Livre ne sont que des pensées détachées que l'on peut passer, mais où je croi neanmoins que l'on trouvera assez de choses nouvelles, ou demontrées d'une nouvelle maniere.

SECTION TROISIE'ME.

Reflexions sur les nombres quarrez, & divers moyens de trouver les sommes de plusieurs nombres rangez en de certains ordres. XXXVIII.

De la difference entre deux quarrez.

Deux quarrez quelconques ont pour leur difference le produit de la somme de leurs racines, par la difference des mêmes racines.

Soient les deux quarrez *bb.* & *cc.*

Leur

Leur difference sera $bb - cc$.

Or la somme des racines est $b + c$; & leur difference est $b - c$.

Et le produit de l'un par l'autre donne $bb - cc$; ce qui est la difference des quarrez.

Exemple dans les nombres.

Ayant les deux quarrez 12, 12 (144) & 9, 9 (81.)

Je veux sçavoir tout d'un coup leur difference: Je prens la somme des racines qui est $12 + 9$ (21.)
Et leur difference $12 - 9$ (3.).
3, 21 donne 63 qui est justement la difference de 144 à 81.

COROLLAIRE.

XXXIX. QUAND les Racines de deux quarrez ne different que d'une unité, leur difference est simplement la somme des racines; car on ne fait rien davantage en la multipliant par l'unité.

Ainsi la difference entre 10, 10 (100) & 9, 9 (81) est 19 la somme des racines 10 & 9.

I. PROBLÉME.

XL. TROUVER des quarrez qui ayent entr'eux une difference donnée.

Soit b la difference donnée; l'ayant divisée par celui qu'il me plaira de ses diviseurs, & appellant d ce diviseur & q le quotient, il est clair que dq est égal à b, & qu'ainsi ces deux quarrez auront b pour leur difference s'ils ont dq.

Or ils auront dq, si je donne au premier pour sa racine $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q$.
Et au 2.d pour la sienne $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$. (remarquez qu'il faut mettre pour le premier de d ou de q, celui qui sera le plus grand.)

Ca-

Car le quarré du 1.er sera $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{2}dq$; (car deux quarts font une moitié.)

Et le quarré du 2.d sera $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{2}dq$.

Donc la difference entre ces quarrez sera deux moitiez de dq; c'est à dire dq qui est égal à b.

Exemple dans les nombres: Soit 80 la difference donnée. Je la divise par 20 & le quotient sera 4.

Donc la moitié de 20 (10) & la moitié de 4 (2) donneront les racines de ces deux quarrez; sçavoir $10 + 2$ (12)
& $10 - 2$ (8)
Car le quarré du 1er sera $100 + 4 + 2, 2, 10$ (40)
Et le quarré du 2.d sera $100 + 4 - 40$.
Donc leur difference est 80. qui est en effet la difference du quarré de 12 (144) au quarré de 8 (64.)

COROLLAIRE.

QUAND la moitié de l'un des deux du diviseur ou du quotient, seroit un nombre rompu, la même chose se rencontreroit. XLI.

Exemple: Soit la difference donnée 60, qui étant divisé par 12 donne 5. Je dis que le quarré de 6 plus $2\frac{1}{2}$ ($8\frac{1}{2}$) & de 6 moins $2\frac{1}{2}$ ($3\frac{1}{2}$) auront 60 pour leur difference.

Car le quarré de $8\frac{1}{2}$ est $72\frac{1}{4}$ & celui de $3\frac{1}{2}$ est $12\frac{1}{4}$ qui ont visiblement 60 pour leur difference.

On pourroit mêmes prendre l'unité pour diviseur (ce qui donneroit 60 pour quotient,) & ce seroit la même chose.

Car le quarré de $30 + \frac{1}{2}$ est $900 + \frac{1}{4} + 30$.
Et celui de $30 - \frac{1}{2}$ est $900 + \frac{1}{4} - 30$.
Donc ces deux quarrez ont 60 pour leur differen-
ce;

ce ; car le premier eſt $930 + \frac{1}{4}$, & le dernier $870 + \frac{1}{4}$.

II. PROBLEME.

XLII. TROUVER tous les nombres dont le quarré eſt égal à deux quarrez.

Tout nombre composé de deux quarrez, comme $4 + 1$ (5) $9 + 4$ (13) $16 + 1$ (17) $16 + 9$ (25) a ſon quarré égal à deux quarrez. Et il n'y a que ces nombres là, ou leurs multiples, qui ayent cette proprieté.

Soit un nombre quelconque composé de 2 quarrez comme $bb + cc$. Il eſt impoſſible que ſon quarré ne ſoit pas égal au quarré du nombre $bb - cc$, & à celui du nombre $2.\, bc$. C'eſt à dire qui ſera le double du produit des deux racines.

Car $bb + cc$ a pour ſon quarré $b^4 + c.^4 + 2\, bb\, cc$.

Et $bb - cc$ a pour ſon quarré $b^4 + c^4 - 2\, bb\, cc$.

Donc leur difference eſt $4\, bb\, cc$, qui eſt certainement un quarré qui a pour ſa racine, $2\, b\, c$. Donc ce quarré là, plus celui qui a pour ſa racine $bb - cc$, doivent être égaux à celui dont la racine eſt $bb + cc$.

Donc il eſt impoſſible qu'un nombre composé de deux quarrez n'ait pas ſon quarré égal à deux quarrez.

Exemple dans les nombres. 29 eſt composé de deux quarrez, de 25 & de 4. Je dis donc que ſon quarré ſera égal au quarré de $25 - 4$ (21,) & à celui de 2, 2, 5 ; c'eſt à dire de 20.

Car $25 + 4$ a pour ſon quarré $625 + 16 + 2$, 4, 25. (200.)

Et $25 - 4$ a pour ſon quarré $625 + 16 - 200$.

Donc

Donc leur difference eſt 400 qui eſt le quarré de 20.

Et en effet le 1.er de ces quarrez ſera 841.
Le ſecond 441.
Et le troiſiéme 400.

I. COROLLAIRE.

TOUT nombre quarré plus 1 fait un nombre, dont le quarré eſt égal à deux quarrez, comme $16 + 1$. $36 + 1$. Mais alors le ſecond quarré ayant pour ſa racine ce quarré primitif moins un, le troiſiéme eſt quatre fois ce même quarré, & a pour ſa racine deux fois la racine de ce quarré que j'ay appellé primitif. XLIII.

Exemple. $36 + 1$. a pour ſon quarré 36, 36 (1296) $+ 1 + 2$, 36 (72.)

Et $36 - 1$ a pour ſon quarré 36, 36 (1296) $+ 1 - 2$, 36 (72.)

Donc leur difference eſt 4, 36. (144) dont la racine eſt 2, 6 (12.)

II. COROLLAIRE.

LA plus grande moitié d'un quarré impair a ſon quarré égal à deux quarrez ; ſçavoir au quarré de la plus petite moitié, & au quarré impair dont cette premiere racine eſt la plus grande moitié. XLIV.

Preuve generale. Soit hh un quarré impair, ſoit m ſa plus grande moitié & n la plus petite ; (je les appelle ainſi, parce que je ſuppoſe qu'elles ne different que d'une unité) $m = n + 1$. Donc $m + n$ étant égal à hh, $n + n + 1$, ou $2\, n + 1$, ſeront auſſi égales à hh.

Et le quarré de $n + 1$ ſera la même choſe que mm.

Or $n + 1$ a pour ſon quarré $nn + 1 + 2\, n$.

Et $2\, n + 1 = hh$.

Donc

Donc $mm = nn + bb$; ce qu'il falloit demontrer.

Exemple dans les nombres.

Le quarré de 25 a 13 pour sa plus grande partie, & 12 pour la plus petite.

Donc le quarré de $12 + 1$ est la même chose que le quarré de 13.

Or $12 + 1$ a pour son quarré 12, 12, (144) $+ 1 + 24$.

Et $24 + 1$, est 25. Donc $144 + 25 = 169$ quarré de 13.

AVERTISSEMENT.

XLV. *On dira peut-être qu'il n'est donc pas vrai qu'il n'y ait que les nombres composez de deux quarrez ou leurs multiples, qui ayent leur quarré égal à deux quarrez.*

Je nie la conséquence ; car il n'y a point de plus grande moitié de quarré impair qui ne soit composée de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la plus grande moitié de la racine de ce quarré impair & de la plus petite. Exemple : 25 quarré de 5 a 13 pour sa plus grande moitié, & 5 sa racine a 3 pour sa plus gande moitié, & 2 pour la plus petite. Je dis donc que 13 sera composé du quarré de 3 qui est 9, & du quarré de 2 qui est 4. Et voicy la raison pourquoi il faut necessairement que cela soit ainsi : c'est que le quarré de 5 est la même chose que le quarré de $3 + 2$, qui est $9 + 4 + 2, 6$ (12.) Et n'y ayant que l'unité de difference entre 3 & 2 : les deux quarrez de 3 & 2 ne sçauroient aussi être differens du double du produit des deux racines que d'une unité. C'est pourquoi les deux quarrez 9 & 4 seront toûjours la plus grande moitié du quarré de 5, & 2, 6 sa plus petite moitié.

III. Co-

III. COROLLAIRE.

Le double d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composé de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la somme des racines des deux premiers quarrez, & du quarré de leur difference. XLVI.

Soient bb & cc les 2 quarrez dont est composé le 1.er nombre. Je dis que le double de ce nombre là sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $b + c$, & l'autre $b - c$.

Car $b + c$ a pour son quarré $bb + cc + 2bc$.

Et $b - c$ a pour le sien $bb + cc - 2bc$.

Or $2bc$ étant par + & par — se reduit à zero. Reste donc $2bb$ & $2cc$ qui font le double de $bb + cc$.

Exemple dans les nombres. Le double de $25 + 4$ est 58.

Les racines de ces premiers quarrez sont 5 & 2.

Or $5 + 2$ a pour son quarré $25 + 4 + 2$, 10 (20,) ce qui fait en tout 49.

Et $5 - 2$ a pour son quarré $25 + 4 - 20$ ce qui fait 9. Donc le tout fait $49 + 9$, ce qui fait 58 double de 29.

IV. COROLLAIRE.

La moitié d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composée de deux quarrez, sçavoir du quarré de la moitié de la somme des racines, & du quarré de la moitié de leur difference. XLVII.

Soient les deux quarrez bb & cc. Je dis que $\frac{1}{2} bb + \frac{1}{2} cc$, sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$, ce qui fait pour quarré $\frac{1}{4} bb + \frac{1}{4} cc + \frac{1}{2} bc$.

Et l'autre aura pour sa racine $\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c$, ce qui fait $\frac{1}{4} bb + \frac{1}{4} cc - \frac{1}{2} bc$.

Or

Or ces deux quarrez ensemble tout compté & tout rabbatu font $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$, & par consequent la moitié du nombre composé de *bb* & *cc*.

Exemple dans les nombres. 208 est composé des quarrez 144 & 64. La somme de leurs racines est 12 + 8, dont la moitié est 10, & leur difference 4, dont la moitié est 2; donc le quarré de 10 (100) plus celui de 2 (4) doit être comme il est aussi la moitié de 208.

PROBLEMES.

Pour trouver les sommes de plusieurs nombres mis dans une certaine suite.

I. PROBLEME.

XLVIII. TROUVER la somme d'une Progression Arithmetique quelque grande qu'elle soit, pourveu qu'on en connoisse le premier & le dernier terme, & le nombre des termes.

Il ne faudra qu'ajoûter le 1.er & le dernier, & multiplier ce nombre composé du 1.er & du dernier par la moitié du nombre des termes, ou le nombre des termes entier par la moitié de ce que font le premier & le dernier.

Exemple. Cent pierres étant arrangées de toise en toise, si un homme s'oblige à les ramasser toutes l'une apres l'autre, & les mettre en un tas à une toise prés de la premiere: combien fera-t'il de toises de chemin? Il en fera deux pour la 1.re pierre, 4 pour la 2de, & 200 pour la derniere. Ce sera donc une Progression Arithmetique de 100 termes, dont le premier & le dernier feront 202. Il faut donc multiplier ou 50 par 202, ou 100 par 101, ce qui fera 10100; c'est à dire 12120 pas Geometriques; ce qui fait plus de 4 lieuës.

II. PROBLEME.

TROUVER la somme d'une Progression Geometrique, supposant qu'elle va en augmentant comme c'est le plus ordinaire, & qu'ainsi l'antecedent de chaque raison est plus petit que son consequent. XLIX.

Soit la somme de tous les termes appellée S.

Le premier terme a, le 2.d b, & le dernier ω, & les exposans de la raison qui regne par toute la Progression n & m; c'est à dire que deux termes qui se suivent immediatement sont entr'eux comme n est à m, ou comme a est à b, si la premiere raison est déja dans les moindres termes qu'elle peut-être.

Or tous les termes étant antecedens, hors le dernier qui n'est que consequent, & tous consequens, hors le premier qui n'est qu'antecedent: Tous les antecedens se pourront nommer $S - \omega$. Et tous les consequens $S - a$.

Cela supposé, je dis que le dernier moins le 1er, (c'est à dire $\omega - a$) est à toute la somme moins le dernier, (c'est à dire à $S - \omega$) comme $m - n$, est à n, ou comme $b - a$ est à a. Et en voici la raison:

Par ce qui a été dit II. 52. dans une Progression Geometrique tous les antecedens sont à tous les consequens, comme un antecedent est à un consequent.

Donc *permutando*, tous les consequens sont à tous les antecedens comme un consequent est à un antecedent.

Donc *dividendo*, tous les consequens moins tous les antecedens sont à tous les antecedens, comme un consequent moins son antecedent est à son antecedent.

Or quand je dis, *tous les consequens moins tous les antecedens*, c'est comme si je disois le dernier terme moins le premier ($\omega - a$;) car tous les termes étant consequens hors le premier, je les mets tous par *plus*, hors le premier, quand je dis, *tous les consequens :* & étant tous antecedens hors le dernier, je les mets tous par *moins* hors le dernier, quand je dis *moins tous les antecedens.* Ils sont donc tous, hors le premier & le dernier, par *plus* & par *moins*, & par consequent se reduisent à rien. Et il n'y a que le dernier qui ne soit que par *plus*, & le premier qui ne soit que par *moins*. Donc cela se reduit au dernier moins le premier ($\omega - a$.)

Donc quand la Progression est ascendante, le dernier terme moins le 1.er est à tous les termes moins le dernier, comme le 2.d terme moins le premier est au premier.

En voici la preuve par la Specieuse:

$S - a. \; S - \omega. :: b. \; a.$

Donc *dividendo* $S - a - S + \omega. \; S - \omega :: b - a. \; a.$

Or dans le premier terme de cette proportion S étant par *plus* & par *moins* se reduit à rien. Reste donc ω par *plus* & a par *moins*. Donc cela ne veut dire qu'$\omega - a$.

Mais si la Progression étoit descendante, chaque antecedent étant plus grand que son consequent, il ne faudroit que changer & dire:

Que le 1.er terme moins le dernier seroit à tous les termes moins le premier, comme un antecedent moins son consequent est à son consequent, $a - \omega. \; S - a :: n - m. \; m.$

I. Co-

I. COROLLAIRE.

ON pourra prouver facilement par là que si on prend d'un tout une dixiéme, & une dixiéme de cette dixiéme, c'est à dire $\frac{1}{100}$; & une dixiéme de cette centiéme, c'est à dire $\frac{1}{1000}$, & ainsi jusques à l'infiny : toutes ces dixiémes de dixiémes prises à l'infiny ne feront que $\frac{1}{9}$ du tout; & les neuviémes de neuviémes prises de la même sorte $\frac{1}{8}$; & les huitiémes de huitiémes $\frac{1}{7}$; & ainsi en diminuant toûjours les denominateurs d'un, les quars un tiers, les tiers une moitié, & les moitiés le tout. I.

Il ne faut pour cela que faire une Progression Geometrique en cette maniere : $1. \frac{1}{10}. \frac{1}{100}. \frac{1}{1000}.$ & ainsi à l'infiny.

Donc, par ce qui vient d'être dit, 1 moins le dernier terme (qui se reduit à zero, la progression allant à l'infiny, de sorte qu'on le doit prendre simplement pour 1,) est à tous les termes de la Progression moins un, c'est à dire à toute cette infinité de dixiémes de 10.mes comme $1 - \frac{1}{10}$ est à $\frac{1}{10}$, c'est à dire comme $\frac{9}{10}$ est à $\frac{1}{10}$, & par consequent comme 9 à 1. Donc toute cette infinité de dixiémes de 10.mes n'est au tout que comme 1 à 9. Donc elles ne sont que la 9.e partie du tout; ce qu'il falloit demontrer.

II. COROLLAIRE.

ON voit par là la solution du sophisme des anciens contre le mouvement. II.

Supposant, disoient-ils, qu'Achille aille 10 fois plus vite qu'une tortuë, si la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achille ne l'attrapera; car tandis

 qu'Achille

qu'Achille fera la 1.re lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de la 2.de lieuë; & tandis qu'Achille fera la $\frac{1}{10}$ de la 2.de lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de cette $\frac{1}{10}$, & ainſi à l'infini.

Tout cela ſuppoſe que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini faſſent une eſpace infini, au lieu qu'elles ne font toutes enſemble qu'$\frac{1}{9}$ de lieuë, ſelon le Theoréme precedent.

Et c'eſt pourquoi Achille doit attraper la tortuë à la premiere $\frac{1}{9}$ de la 2.de lieuë. Car allant 10 fois plus vîte que la tortuë, il doit avoir fait dix fois autant de chemin dans le même temps.

Donc pendant que la tortuë parcourra une $\frac{1}{9}$ de lieuë, Achille en doit parcourir $\frac{10}{9}$, ce qui fait juſtement la premiere lieuë compoſée de $\frac{9}{9}$, plus $\frac{1}{9}$ de la ſeconde lieuë.

III. Corollaire.

LII. Si une horloge a deux aiguilles, l'une des heures, qui fait ſon tour en 12 heures, & l'autre des minutes, qui fait le même tour en une heure, marquer tous les points auſquels ces deux aiguilles ſe rencontreront?

Ce ſera à ces heures-ici: $1+\frac{1}{11}$. $2+\frac{2}{11}$. $3+\frac{3}{11}$. $4+\frac{4}{11}$. $5+\frac{5}{11}$. $6+\frac{6}{11}$. $7+\frac{7}{11}$. $8+\frac{8}{11}$. $9+\frac{9}{11}$. $10+\frac{10}{11}$. $11+\frac{11}{11}$. C'eſt à dire 12 heures.

La preuve en eſt aiſée à deviner par celle du premier Corollaire.

III. Pro-

III. Probleme.

Trouver la ſuite des nombres triangulaires, pyramidaux & plus que pyramidaux. LIII.

Pour bien comprendre cecy, il faut remarquer qu'on peut diſpoſer les nombres en pluſieurs bandes, qui ſeront telles que chaque nombre d'une bande ſera égal à tous ceux de la bande precedente incluſivement juſques à celui-là; c'eſt à dire, par exemple, que le 2.d de la troiſiéme bande ſera égal aux deux premiers de la 2,de le 3.e aux trois premiers, le 4 aux quatre premiers, & ainſi de ſuite juſqu'à l'infini.

On le comprendra mieux par l'exemple de 6 bandes que je ne continuërai que juſques à 9 termes.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495
6	1	6	21	56	126	252	46:	792	1287

La premiere bande n'eſt que d'unitez.

La deuxiéme des nombres ordinaires, dont on voit aſſez que chacun comprend autant d'unitez qu'il y a eu de termes dans la premiere bande juſques à ce terme de la 2.de

La

La troisiéme est des nombres qu'on appelle Triangulaires, parce qu'ils se peuvent disposer en triangle.

La quatriéme de ceux qu'on appelle Pyramidaux.

La cinquiéme des seconds-Pyramidaux. Je ne sçai si on leur a donné un autre nom.

La sixiéme des troisiémes Pyramidaux. Et cela se peut continuer jusques à l'infiny.

Il s'agit donc de trouver la somme de tant de nombres que l'on voudra à commencer toûjours par l'unité dans chacune de ces bandes, par exemple la somme des dix premiers termes de la troisiéme bande, ou de la quatriéme, ou de la cinquiéme. Et il faut remarquer que c'est la même chose de trouver la somme des dix premiers termes de la troisiéme bande, c'est à dire des dix premiers nombres triangulaires, que de trouver le dixiéme nombre pyramidal.

Voilà une regle generale pour cela que je tiens d'un fort habile homme. Je la pourrois proposer generalement : mais j'aime mieux l'appliquer tout d'un coup à un exemple particulier par lequel on jugera sans peine de tous les autres.

Je veux chercher la somme des 10 premiers termes de quelque bande que ce soit. Je mets 10, & puis 11, & puis 12, &c. comme des nombres qui se doivent multiplier les uns les autres, selon la bande dont on veut sçavoir la somme des dix premiers termes : & je mets 1, 2, 3, &c. au dessous de chacun de ces nombres, en cette maniere :

10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	&c.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	&c.

Les nombres de dessous sont pour diviser les produits des nombres de dessus ; car si j'ai besoin de multiplier les 3 premiers nombres les uns par les autres, je les diviserai par le produit des 3 de dessous, qui ne font que 6, parce que l'unité ne change rien en divisant.

Cela supposé, si je veux avoir la somme de dix termes de la 1.re bande, je ne prens que le premier chiffre d'enhaut qui marque que c'est de dix termes, dont je veux avoir la somme. Et ce nombre me la donne sans qu'il soit divisé, parce que l'unité qui est au dessous ne divise point.

Mais si je veux avoir la somme de dix termes de la 2.de bande, je multiplie les deux premiers nombres de dessus ; c'est à dire 10 par 11, ce qui fait 110, & les divise par les deux de dessous ; c'est à dire par une fois 2, ce qui donne 55. Mais pour faire cela plus facilement, avant que de faire la multiplication je divise par 2 l'un des deux chiffres qui le peut étre, & je multiplie l'autre nombre par sa moitié, c'est à dire 11 par 5 ; ce qui donne encore 55.

Si je veux avoir la somme de dix termes de la 3.e bande, je me sers pour cela des trois premiers chiffres d'enhaut, & je commence par diviser ou 10 par 2 & 12 par 3, ou tout d'un coup 12 par 6 ; (car cela revient au même,) & je multiplie les uns par les autres 5, 11, 4, ou 10, 11, 2, ce qui donnera 220, qui sont la somme des dix premiers chiffres de la 3.e bande.

Pour la 4.e bande, je me sers des 4 chiffres d'enhaut, les ayant auparavant divisez par ceux d'embas, sçavoir 10 par 2, & 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à 1, qui ne fera rien dans la multiplication des chiffres d'enhaut, & ainsi ils se reduiront à 5, 11, 13, ce qui fait 715.

Pour la 5.e bande, on en fera autant des 5 chiffres d'enhaut, on les divisera autant que l'on pourra par ceux d'embas en cette maniere : 14 par 2, ce qui donnera 7 ; 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à rien au regard de la multiplication à faire ; & 10 par 5, ce qui donnera 2. Et ainsi ces 5 nombres ne seront plus que 2, 11, 13, 7, ce qui fait 2002.

Je n'en dirai pas davantage. On voit assez comment cela se doit faire pour toutes les bandes suivantes, & pour toute autre quantité de termes dont on voudra sçavoir la somme, comme la somme des 100 premiers termes de quelque bande que ce soit; car laissant toûjours en bas 1, 2, 3, &c. ce qui est invariable pour diviser les nombres d'enhaut: il faudra mettre pour ces nombres d'enhaut 100, 101, 102. 103, &c.

Mais j'avouë franchement que je ne sçay la raison de cela que pour la 2.de & la 3.e bande, & non pour les autres.

Observations sur les nombres Triangulaires.

XIV. J'AY déja dit qu'on appelloit Triangulaires les nombres de la 3.e bande. Or comme je pretens m'en servir pour trouver avec beaucoup de facilité la somme des quarrez & des cubes : j'ay besoin d'en remarquer quelques proprietez.

La 1.re est que deux nombres triangulaires qui se suivent immediatement font, pris ensemble, le quarré du nombre qui répond au plus grand des deux. On le verra par la table & en voici la raison :

Je dis donc que le nombre Triangulaire de 9 & celui de 10, doivent faire ensemble le quarré de 10 qui est 100. Car pour avoir le nombre triangulaire de 9, il faut multiplier 9 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 9; & pour avoir celui de 10, il faut multiplier 11 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 11. Or 9 & 11 faisant 20, il est visible que ces deux multiplications ensemble font 5, 20; c'est à dire 100.

Autrement 5, 10 — 1 font 50 — 5.
Et 5, 10 + 1 font 50 + 5.

Or

Or cela fait ensemble 2, 50, c'est à dire 100.

Autre exemple. Le nombre Triangulaire de 8 est 4, 9.

Et celui de 9 est 5, 9;

Ce qui fait ensemble 9, 9 ou 81.

La 2.de proprieté est que deux nombres Triangulaires qui se suivent ont pour leur difference le nombre naturel qui répond au plus grand.

Et il faut bien que cela soit ainsi; car le 9.me nombre Triangulaire est la somme des 9 premiers nombres, & le 10.e la somme des 10 premiers qui par consequent ne peut differer de l'autre, que parce qu'elle a 10 de plus.

On peut encore remarquer une 3.e proprieté de ces nombres Triangulaires, qui est assez surprenante, quoi qu'elle ne soit pas de grand usage. C'est que tout nombre quarré impair, moins 1, se pouvant diviser par 8, pour trouver combien 8 y sera de fois, il ne faut que prendre le nombre triangulaire de la plus petite moitié de la racine de ce quarré impair. Exemple; 8 est 45 fois dans le quarré de 19, parce que le nombre triangulaire de 9 (qui est la plus petite moitié de 19) est 45. Et 8 est 120 fois dans le quarré de 31, parce que 120 est le nombre Triangulaire de 15, qui est la plus petite moitié de 31.

De la premiere proprieté il s'ensuit que toute quantité de nombres quarrez pris de suite, (ce qui se suppose toûjours) contient deux fois la même quantité des nombres Triangulaires moins le dernier qu'elle ne contient qu'une fois. Car chaque nombre Triangulaire entre deux fois dans la composition d'un quarré, hors le dernier qui n'y entre qu'une fois: 1. dans le 1er, qui est aussi 1. Et dans le 2.d qui est 1 + 3; & 3 qui est entré dans le 2.d quarré, qui est 4, entre avec 6 dans le 3.e qui est 9; & 6 avec 10 dans le 4e. qui est 16; & 10 avec 15 dans le 5.e qui est 25; & 15 avec 21 dans le 6.e qui est 36.

 On

On voit donc que si on en demeure-là, il n'y aura que 21, sixiéme nombre Triangulaire, qui n'entrera qu'une fois dans l'un des 6 premiers quarrez; & par consequent tous les autres y entrant deux fois, il est donc clair que la somme des 6 quarrez plus 21, doit être égale au double de la somme des 6 premiers nombres triangulaires.

IV. PROBLEME.

LV. TROUVER la somme de tant de nombres quarrez de suite que l'on voudra, c'est à dire des 10 premiers, des 20, des 100, &c.

On n'a, selon ce qui vient d'être dit, qu'à avoir la somme d'autant de nombres Triangulaires; c'est à dire de ceux de la 3.e bande, la doubler, & puis en ôter le dernier des nombres Triangulaires dont a trouvé la somme.

Le 10.e nombre Triangulaire est 55. La somme des 10 premiers est 220, comme on l'a déja fait voir. Le double est 440, d'où ôtant 55, on aura 385 pour la somme des 10 premiers quarrez.

Autrement. Faites comme si vous vouliez avoir la somme des 10 premiers nombres Triangulaires, en mettant au dessous 1, 2, 3, ou seulement 2, 3, car l'1 ne sert que pour l'analogie, & au dessus 10, 11; mais au lieu du troisiéme qui est 12, mettez la somme des deux premiers qui est 21, ainsi :

$$\frac{10,\ 11,\ 21.}{2,\ 3.}$$

Puis ayant divisé 10 par 2, ce qui donne 5, & 21 par 3, ce qui donne 7: multipliez les uns par les autres 5, 11, 7, ce qui donnera 55, 7; cela fait 385.

Cette derniere façon revient à l'autre; car il faut remarquer que si au lieu de prendre pour troisiéme nombre le premier plus 2, on prend le double du 1.er plus 1: il se trouve toûjours que ce der-

dernier, plus 3, est double de celui dont on se sert pour trouver la somme des Triangulaires: d'où il arrive que divisant l'un & l'autre par 3, celui dont on se sert pour les quarrez, plus 1, est double de l'autre. 21 plus 3 est double de 12; & le tiers de 21 étant 7: 7 + 1 est double de 4 qui est le tiers de 12.

V. PROBLEME.

LVI. TROUVER la somme de tant de Cubes que l'on voudra en les prenant de suite, c'est à dire des 10 premiers, des 20 premiers, &c.

Le quarré du nombre triangulaire qui répond au nombre des Cubes dont on veut avoir la somme est la somme des Cubes: c'est à dire que si on veut avoir la somme des 10 premiers Cubes, il ne faut que trouver le 10.e nombre Triangulaire qui est 55, & son quarré qui est 3025 sera le nombre des Cubes.

On le peut prouver en deux manieres, l'une plus subtile, & l'autre plus naturelle. La 1.re dépend des deux proprietez des nombres triangulaires.

Car par la 1re, deux triangulaires qui se suivent font ensemble le quarré du nombre qui répond au plus grand; c'est à dire que le 5.e qui est 15, & le 6.e qui est 21, font ensemble le quarré de 6 qui est 36.

Et par la seconde ces deux mêmes Triangulaires ont 6 pour leur difference. D'où il s'ensuit que les prenant pour racines de deux quarrez: ces quarrez auront pour leur difference la somme de ces deux racines, qui est 36, multipliée par leur difference, qui est 6; c'est à dire qu'ils auront pour leur difference le cube de 6.

Or pour voir plus facilement ce qui suit delà, nous marquerons chaque nombre triangulaire par un un accent circonflexe que nous metrons au dessus du nombre qui marque sa place; c'est à dire que 6 sera le sixiéme nombre Triangulaire qui est 21; 5 le cinquiéme qui est 15, & ainsi des autres.

Et pour marquer le quarré de chacun nous mettrons seulement 6^2. 5^2. Et les Cubes des nombres ordinaires 6^3. 5^3. 4^3, &c. Cela étant:

$$6^2 = \begin{cases} 6^3 \\ 5^2 = \end{cases} \begin{cases} 5^3 \\ 4^2 = \end{cases} \begin{cases} 4^3 \\ 3^2 = \end{cases} \begin{cases} 3^3 \\ 2^2 = \end{cases} \begin{cases} 2^3 \\ 1 = \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

D'où il s'ensuit que laissant là les quarrés des autres nombres Triangulaires, parce que l'on a leurs équivalens, le seul quarré du sixiéme nombre, qui est 441, est égal à la somme des six premiers nombres cubes.

L'autre raison est plus simple, & on la peut exprimer ainsi: La somme de tant de nombre cubiques de suite que l'on voudra, est le produit de la somme de toutes les racines multipliée par cette même somme de racines; car prenant, comme il le faut, ces nombres cubiques d'ordre, leurs racines seront toûjours autant de nombres naturels que l'on prendra de Cubes dont on voudra sçavoir la somme.

Soient donc tant de nombres naturels que l'on voudra en commençant par 1.

Les multipliant par autant   1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
d'autres tous les mêmes: 1. 2. 3. 4. 5, 6. &c.

Il se fera autant de multiplications partiales, que sera le quarré des termes que l'on prendra; c'est à dire que si on n'en prend que 5, il y aura 25 multiplications partiales. Si 6, il y en aura 36, &c.

Mais il faut remarquer 1. Que de ces multiplications partiales, les directes comme 2, 2. 3, 3. sont toûjours simples, & que celles qui se font en croix, comme 2, 3; 3, 5, &c. sont toûjours doubles.

En

En second lieu, que c'est la même chose de multiplier 6 par 2 + 4 que de le multiplier separement par 2, en disant 2, 6. & par 4 en disant 4, 6. Il faut seulement remarquer que la multiplication de 2 + 4 par 6, comprend deux des 36 multiplications partiales que doit avoir la multiplication des 6 premiers nombres par eux-mêmes: & qu'y ajoûtant *bis* cela en fait 4.

Cela supposé, voicy comme ces 36 Multiplications partiales feront les 6 premiers Cubes.

Denomb. des Mult. partiales.		Mult. partiales.			Cubes.
1		1, 1	1	1	1
3	1	2, 2	4	2, 4.	8
	2	1, 2 *bis*	4		
5	1	3, 3	9	3, 9.	27
	4	1 + 2, 3 *bis*	2, 9		
7	1	4, 4	16	4, 16.	64
	4	1 + 3, 4 *bis*	2, 16		
	2	2, 4 *bis*	16		
9	1	5, 5	25	5, 25.	125
	4	1 + 4, 5 *bis*	2, 25		
	4	2 + 3, 5 *bis*	2, 25		
11	1	6, 6	36	6, 36.	216
	4	1 + 5, 6 *bis*	2, 36		
	4	2 + 4, 6 *bis*	2, 36		
	2	3, 6 *bis*	36		
Somme 36.					

On voit par là, que le premier nombre multiplié par soy-même ne donne qu'une multiplication qui fait un premier nombre cube.

Que les deux premiers 1. 2. multipliez aussi par eux-mêmes, (ce qui se doit toûjours sous-entendre sans qu'il soit besoin de l'exprimer,) en donnent

nent 4, dont une étant déja prise, les trois autres donnent 8, second nombre cube.

Que les trois premiers 1. 2. 3. en donnent 9, dont 4 étant prises, qui ont donné les deux premiers cubes, les cinq qui restent donnent le 3.e 27.

Que les quatre 1. 2. 3. 4. en donnent 16, dont 9 étant déja prises, qui ont donné les trois premiers cubes; les 7 qui restent donnent le 4. 64.

Que les cinq 1. 2. 3. 4. 5. en donnent 25, dont 16 étant déja prises, qui ont donné les 4 premiers cubes, les 9 qui restent donnent le 5.e 125.

Que les six 1. 2. 3. 4. 5. 6. en donnent 36, dont 25 étant déja prises, qui ont donné les cinq premiers cubes, les 11 qui restent donnent le 6.e 216.

Et on voit sans peine que cela doit aller jusqu'à l'infiny.

Mais pour éviter l'embarras & la longueur de ces multiplications partiales, (ce qui n'a servi qu'à la preuve:) Il ne faut que prendre la somme de toutes ces racines, (c'est à dire de tant que l'on voudra de nombres naturels,) & la multiplier par elle-même; car il est visible que c'est la même chose de multiplier 3 par 3, que de multiplier 1 + 2 par 1 + 2.

Or la somme de ces nombres naturels est ce qu'on appelle nombre triangulaire; car 6 par exemple, est le nombre triangulaire de 3, parce que 1 + 2 + 3 font 6. Donc en multipliant le dixiéme nombre triangulaire qui est 55 par soy-même, on aura la somme des dix premiers cubes.

Or rien n'est plus facile que de trouver le nombre triangulaire de tel nombre que l'on veut; car si c'est un nombre impair, il ne faut que le multiplier par sa plus grande moitié: 5. 3, 5. 7. 4, 7. 9. 5, 9. 11. 6, 11. Et

Et si c'est un nombre pair, il ne faut que prendre sa moitié & multiplier par là ce nombre plus un. 6. 3, 7. 8. 4, 9. 10. 5, 11. 12. 6, 13. 14. 7, 15.

Comment il se faut conduire pour resoudre tous les Problemes semblables à ceux de la mule & de l'asnesse, des deux vases qui ont un même couvercle, &c.

PREPARATION.

Il faut écrire les hypotheses en donnant des noms aux quantitez inconnuës. Exemple, *Mule, Asnesse.*

Le nombre des sacs que porte la mule soit appellé A; & celui que porte l'asnesse B.

HYPOTHESES.

LVII.

1.re Hyp. $A - 3 = B + 3$ — Si la mule donne à l'asnesse trois de ses sacs, ils en auront autant l'une que l'autre.

2.de Hyp. $A + 1 = 3B - 3$ — Si l'asnesse donne à la mule l'un de ses sacs, la mule en portera 3 fois autant que l'asnesse.

Ayant ces Hypotheses, il faut trouver les équivalens; c'est à dire l'équivalent d'A par B plus ou moins ce qu'il faut, & l'équivalent de B par A plus ou moins ce qu'il faut.

Pour trouver les équivalens d'une Hypothese: il faut ôter d'un membre les chiffres & laisser la lettre seule, & transporter les chiffres dans l'autre membre, en changeant le signe. Exemple:

EQUI-

EQUIVALENS.

Par la 1.re Hyp. $\left\{\begin{array}{l} A = B + 6. \\ B = A - 6. \end{array}\right.$

Par la 2.de Hyp. $\left\{\begin{array}{l} A = 3B - 4. \\ 3B = A + 4. \end{array}\right.$

Ayant ces équivalens, on resout sans peine les Problemes. Il ne faut pour cela que reprendre les Hypotheses: & si on veut resoudre le Probleme par la premiere, il faut se servir des équivalens de la seconde; & au contraire si on le veut resoudre par la seconde Hypothese, il faut se servir des équivalens de la premiere; & par là, on fera que dans l'équation de chaque hypothese il n'y ait que les mêmes lettres dans l'un & dans l'autre membre.

I. PROBLEME. HYPOTHESES.

LVIII. $\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array}\left\{\begin{array}{l} A - 3 = B + 3. \\ A + 1 = 3B - 3. \end{array}\right.$

EQUIVALENS.

Par la 1.re Hyp. $\left\{\begin{array}{l} A = B + 6. \\ B = A - 6. \end{array}\right.$

Par la 2de Hyp. $\left\{\begin{array}{l} A = 3B - 4. \\ 3B = A + 4. \end{array}\right.$

I. Solution par la 1.re Hypothese en reduisant tout en B.

1.re Hypothese $\left\{ A - 3 = B + 3. \right.$
Equivalent de la 2.de $\left\{ A = 3B - 4. \right.$

Je puis donc mettre au lieu d'A, 3 B — 4; donc mettant dans le second membre l'équation 7 qui est par moins dans le premier,

3B

$3B = B + 10.$
Donc $2B = 10.$
Donc $B = 5.$

II. Solution par la 2.de Hypothese en reduisant le tout en B.

2.de Hypothese $\left\{ A + 1 = 3B - 3. \right.$
1. Eq. de la 1.re Hyp. $\left\{ A = B + 6. \right.$
Mettant donc B + 6 au lieu d'A,
$B + 7 = 3B - 3.$
Donc $B + 10 = 3B.$
Donc $10 = 2B.$
Donc $5 = B.$

III. Solution par la 2. Hypothese en reduisant tout en A.

2.de Hypothese. $\left\{ A + 1 = 3B - 3. \right.$
1.d Equiv. de la 1.re $\left\{ B = A - 6. \right.$
Donc mettant au lieu de 3 B, trois fois A — 6, qui font 3 A — 18:
$A + 1 = 3A - 18 - 3$, [c'est à dire — 21;] & transportant 21 dans le premier membre en changeant le signe:
$A + 22 = 3A.$
Donc $22 = 2A.$
Donc $11 = A.$
Donc A est 11 & B 5;
C'est à dire que la mule avoit 11 sacs, & l'asnesse 5.

II. PROBLEME.

Hypotheses $\begin{array}{r} 1.^{re} \\ 2.^{de} \end{array}\left\{\begin{array}{l} A - 9 = B + 9. \\ A + 3 = 3B - 9. \end{array}\right.$ LIX.
Equivalens de la 1.re Hypoth. $\left\{\begin{array}{l} A = B + 18. \\ B = A - 18. \end{array}\right.$

Equiv.

Equivalens de la 2.de $\begin{cases} A = 3B - 12. \\ 3B = A + 12. \end{cases}$

I. Solution par la 1re Hypothese en reduisant tout en B.

1.re Hypothese $\begin{cases} A - 9 = B + 9. \end{cases}$
1.er Equiv. de la 2.de $\begin{cases} A = 3B - 12. \end{cases}$
$3B - 12 - 9$, [c'est à dire $- 21 = B + 9$.
Donc $3B = B + 30$.
Donc $2B = 30$.
Donc $B = 15$.

II. Solution par la 2.de Hypothese en reduisant tout en A.

2.de Hypothese. $\begin{cases} A + 3 = 3B - 9. \end{cases}$
2.d Equiv. de la 1.re $\begin{cases} B = A - 18. \end{cases}$
$A + 3 = 3A - 63$.
Donc $A + 66 = 3A$.
Donc $66 = 2A$.
Donc $33 = A$. C'est à dire que A est 33 & B est 15.

III. Solution par la 2.de Hypothese en reduisant tout en B.

$3B - 9 = B + 21$.
Donc $3B = B + 30$.
Donc $2B = 30$.
Donc $B = 15$.

III. PROBLEME.

LX. Hypotheses 1.re $\begin{cases} A + 2000 = 4B. \end{cases}$
2.de $\begin{cases} B + 1000 = \frac{1}{2}A. \end{cases}$
Equiv. de la 1.re $\begin{cases} A = 4B - 2000. \end{cases}$
de la 2.de $\begin{cases} B = \frac{1}{2}A - 1000. \end{cases}$

I. So-

I. Solution par la 1ere Hypothese.

$A + 2000 = 2A - 4000$.
Donc $A + 6000 = 2A$.
Donc $6000 = A$.

II. Solution par la 2.de Hypothese.

$B + 1000 = 2B - 1000$.
Donc $B + 2000 = 2B$.
Donc $2000 = B$.

III. Solution par la 1.re Hypothese.

$A + 2000 = 4B$.
Donc $\frac{1}{4}A + 500 = B$.
Or $B = \frac{1}{2}A - 1000$.
Donc $\frac{1}{4}A + 500 = \frac{1}{2}A - 1000$.
Donc $\frac{1}{4}A + 1500 = \frac{1}{2}A$.
Donc $1500 = \frac{1}{4}A$.
Donc $6000 = A$.

IV. PROBLEME.

Hypothese 1.re $\begin{cases} A + 3000 = 3B. \end{cases}$ LXI.
2.de $\begin{cases} B + 1000 = \frac{1}{2}A. \end{cases}$
Equiv. de la 1.re $\begin{cases} A = 3B - 3000. \end{cases}$
de la 2de $\begin{cases} B = \frac{1}{2}A - 1000. \end{cases}$

I. Solution par la 1.re Hypothese.

$A + 3000 = A\frac{1}{2} - 3000$.
Donc $A + 6000 = A\frac{1}{2}$.
Donc $6000 = \frac{1}{2}A$.
Donc $12000 = A$.

II. Solution par la 2.de Hypothese.

$B + 1000 = B\frac{1}{2} - 1500$.
Donc $B + 2500 = B\frac{1}{2}$.
Donc $2500 = \frac{1}{2}B$.
Donc $5000 = B$.

V. PRO-

V. PROBLÉME.

LXII. Hypothse 1.re $\left\{ A + 3000 = 9\,B. \right.$
Hypothese 2.de $\left\{ B + 5000 = \frac{1}{3}\,A. \right.$
Equiv. de la 1.re $\left\{ A = 9\,B - 3000. \right.$
Equiv. de la 2.de $\left\{ B = \frac{1}{2}\,A - 5000. \right.$

I. Solution par la 1.re Hypothese.

$A + 3000 = 3\,A - 45000.$
Donc $A + 48000 = 3\,A.$
Donc $48000 = 2\,A.$
Donc $24000 = A$

II. Solution par la 2.de Hypothese.

$B + 5000 = 3\,B - 1000,$
Donc $B + 6000 = 3\,B.$
Donc $6000 = 2\,B.$
Donc $3000 = B.$

VI. PROBLÉME.

LXIII. Hypothese 1.re $\left\{ A - 25 = B + 25. \right.$
Hypothese 2.e $\left\{ A + 25 = 2\,B - 50. \right.$
Equiv. de la 1.re $\left\{ \begin{array}{l} A = B + 50. \\ B = A - 50. \end{array} \right.$
Equiv. de la 2.d $\left\{ \begin{array}{l} A = 2\,B - 75. \\ B = \frac{1}{2}\,A + 37\frac{1}{2}. \end{array} \right.$

I. Solution par la 1.re Hypothese.

$B + 25 = 2\,B - 100.$
Donc $B + 125 = 2\,B.$
Donc $125 = B.$

II. Solution par la 2de Hypothese.

$A + 25 = 2\,A - 150.$
Donc $A + 175 = 2\,A.$
Donc $175 = A.$

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE CINQUIE'ME.

DE L'E'TENDUË.

DE LA LIGNE DROITE ET CIRCULAIRE.

DES DROITES, PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES.

DEFINITIONS.

NOus *avons parlé jusques icy de la grandeur en general: il faut maintenant descendre à ses especes.* I.

TOUTE grandeur est continuë, comme est l'étenduë, le tems, le mouvement: ou non continuë, comme le nombre.

La continuë eſt ou ſucceſſive, comme le tems, le mouvement.

Ou permanente, qui s'appelle generalement *eſpace* ou *étenduë*.

Mais elle ſe conſidere ou ſelon toutes ſes trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur, & alors elle s'appelle *corps* ou *ſolide*.

Ou ſelon deux ſeulement, longueur & largeur, & alors elle s'appelle *ſurface* ou *ſuperficie*, qui eſt ou plate, qui s'appelle *plan*, ou non plate, qui s'appelle *ſurface courbe*.

Ou ſelon une ſeulement, qui eſt la longueur, & alors elle s'appelle *ligne*, qui eſt ou droite ou courbe.

L'extrémité de la ligne s'appelle *point*, qui doit être conceu indiviſible. Car s'il pouvoit être partagé en deux, l'une de ces moitiez ne ſeroit pas à l'extrémité de la ligne.

Et par la même raiſon la ligne qui eſt indiviſible ſelon la largeur, parce qu'elle eſt conſiderée comme n'en ayant point, eſt l'extrémité de la ſurface.

Et la ſurface qui eſt auſſi indiviſible ſelon la profondeur, eſt l'extrémité du corps.

Premier Avertissement.

II. Les *idées d'une ſurface plate & d'une ligne droite ſont ſi ſimples, qu'on ne feroit qu'embroüiller ces termes en les voulant definir. On peut ſeulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.*

Second Avertissement.

III. Quoi *qu'il n'y ait point au monde d'étenduë qui n'ait que longueur & largeur ſans profondeur, ou longueur ſans largeur ni profondeur, & encore moins de point qui n'ait ni longueur, ni largeur, ni profondeur: ce que diſent les Geometres des ſurfaces, des lignes & des points ne laiſſe pas d'être vray; parce qu'il ſuffit pour cela que dans un corps qui eſt veritablement long, large, & profond, je puiſſe n'en conſiderer que la longueur & la largeur, ſans faire attention à la profondeur, ou mêmes la longueur ſeule ſans m'arreſter ni à la largeur, ni à la profondeur. Ainſi pour meſurer un champ, je ne m'amuſe pas à creuſer pour ſçavoir ſi la terre y eſt bien profonde, mais je regarde ſeulement combien il eſt long & large: Et pour ſçavoir combien il y a de Paris à Orleans, je ne meſure pas la largeur des chemins, mais ſeulement la longueur. Et de même ce qu'on appelle* Point *n'eſt que la ligne même, entant qu'on n'y conſidere que la negation d'une plus longue étenduë.*

Troisiéme Avertissement.

On *doit commencer par la ligne comme par la plus ſimple étenduë: & de plus pour en rendre la conſideration plus facile, lors que l'on compare pluſieurs lignes enſemble, on les ſuppoſe toûjours dans ces premiers élemens comme étant poſées ou décrites ſur un même plan, c'eſt à dire ſur une même, ſuperficie plate; ce qu'il ſuffit d'avoir dit une fois pour toutes.* IV.

PREMIERE SECTION.

De la Ligne droite.

Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en eſt trés claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même choſe par ce mot. Mais il eſt bon de remarquer ce que nous concevons naturellement être renfermé dans cette V.

cette idée, ce que l'on pourra prendre si l'on veut pour sa definition.

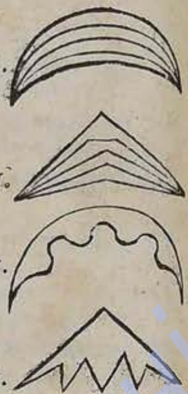
La ligne droite est la plus courte étenduë entre deux points.

Et celle qui approche plus de la droite, est aussi la plus courte: ce qui a donné occasion a Archimede d'établir ce principe ou Axiome:

Premier Axiome.

VI. Si deux lignes sur le même plan ont les extremitez communes & sont courbes ou creuses vers la même part, celle qui est contenuë est plus courte que celle qui la contient. J'ay dit courbes ou creuses, car cela n'est pas seulement vrai des lignes courbes comme dans la 1.re figure mais aussi des droites comme dans la 2.de lors que deux ou plusieurs lignes droites se joignant font un creux. Car alors deux ou plusieurs lignes droites sont considerées comme une seule ligne courbe qui seroit creuse vers ce côte-là.

I. II. III. IV.



Mais il faut bien remarquer ces mots, (vers la même part) car cela ne seroit pas vray, si la même ligne courbe étoit creuse vers differens côtez comme dans la 3.e figure: ou si diverses lignes droites considerées comme une seule ligne faisoient aussi des creux de differens côtez comme dans la 4e. figure; car alors la contenante pourroit être plus courte que la contenuë.

Second Axiome ou Demande.

VII. Ayant deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Et

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par consequent est l'unique & naturelle mesure de la distance entre ces deux points. L'instrument dont on se sert pour cela s'appelle *regle.*

Troisiéme Axiome ou Demande.

La simplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une posée on la peut prolonger de part & d'autre jusques à l'infini, c'est à dire tant que l'on veut. VIII.

D'où il s'ensuit que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoissant deux points dans une ligne droite, nous la connoissons toute.

Ou, que deux points étant donnez de position, toute la ligne droite est donnée.

Quatriéme Axiome.

Si une ligne droite est immediatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes, pourveu que l'une & l'autre soit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne seront proprement qu'une même ligne. IX.

Cinquiéme Axiome.

Deux lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point. X.

Sixiéme Axiome.

Deux lignes droites qui étant prolongées vers un même côté s'approchent peu à peu, se couperont à la fin. XI.

Euclide prend cette proposition pour un principe & avec raison; car elle a assez de clarté pour s'en con-

contenter, & ce seroit perdre le temps inutilement que de se rompre la teste pour la prouver par un long circuit.

SECONDE SECTION.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

DEFINITIONS.

XII. LA ligne que décrit sur un plan l'une des extrémitez d'une ligne droite, son autre extrémité demeurant immobile, s'appelle *circulaire*, ou *circonference.*

XIII. ET l'espace que décrit toute la ligne s'apelle *cercle.*

XIV. LE point immobile, *centre*, qui ne peut pas n'être point également distant de chaque point de la circonference, puisque c'est toûjours la même ligne qui a fait cette distance.

XV. ET ainsi il est bien clair que toutes les lignes du centre à la circonference sont égales.

XVI. CES lignes s'appellent *rayons* ou *demydiametres.*

XVII. LES lignes menées d'un point de la circonference à un autre s'appellent *cordes.*

XVIII. SI elles passent par le centre, elles s'appellent *diametres*, & elles coupent le cercle & la circonference en deux parties égales, qui s'appellent *demycercles* & *demycirconferences.*

XIX. LA partie de la circonference qui se trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle *arc.* Mais lors que cette corde est moindre qu'un diametre, il y a deux portions de circonference qui se terminent aux extremitez de cette corde: l'une plus grande que la demycirconference, & l'autre plus petite. Or quand on parle de l'arc d'une corde, si on n'ajoûte autre chose, on entend celui qui n'est pas plus grand que la demycirconference; ce qui soit bien remarqué.

TOUTE circonference se conçoit divisée en 360 parties égales qui s'appellent *degrez*. XX.

CHAQUE degré en 60 minutes premieres qu'on appelle simplement *minutes*: Chaque minute en 60 *secondes*, & chaque seconde en 60 *troisiémes*; & ainsi à l'infini. XXI.

PREMIER AXIOME OU DEMANDE.

ON demande qu'ayant un intervalle donné, on puisse décrire une circonference de cét intervalle. Ce qu'on ne peut douter être possible, puis qu'il ne faut pour cela que concevoir que la ligne qui joindra les deux points de cét intervalle se remuë, l'une de ses extremitez demeurant immobile. XXII.

La machine la plus ordinaire dont on se sert pour la décrire sur le papier s'appelle, *compas*, qui a deux jambes, lesquelles étant ouvertes plus ou moins selon l'intervalle donné, l'une demeurant immobile, l'autre décrit la circonference.

SECOND AXIÔME OU DEMANDE.

OR comme il faut supposer dans cette operation que les deux jambes du compas gardent toûjours la même distance entr'elles, il n'est rien de plus facile aprés avoir mesuré la longueur d'une ligne donnée par l'ouverture du compas, que de se servir de cette même ouverture pour décrire ailleurs une ligne égale à celle-là, ou de retrancher d'une autre ligne une portion qui soit égale à cette premiére. C'est pourquoi on peut hardiment mettre ce Probléme entre les demandes qui n'ont pas besoin d'être prouvées: XXIII.

Décrire une ligne égale à une ligne donnée, soit par le retranchement d'une autre ligne, soit par-tout ailleurs.

Troisiéme Axiome.

XXIV. La maniere dont l'on conçoit que se forme la ligne circulaire est si simple, qu'il est impossible de concevoir qu'elle ne soit pas par-tout dans une entiere uniformité. Et de là il s'ensuit que les Theorémes suivans sont naturellement connus :

Les circonferences qui sont décrites d'un égal intervalle sont égales.

Et celles qui sont décrites d'un plus petit intervalle sont plus petites.

Et d'un plus grand sont plus grandes.

Quatrieme Axiome.

XXV. Les degrez de circonferences égales sont égaux, puis que ce sont aliquotes pareilles de grandeurs égales. Et par la même raison les degrez d'une petite circonference sont plus petits que les degrez d'une plus grande.

Cinquiéme Axiome.

XXVI. Dans un même cercle les cordes qui soûtiennent des arcs égaux sont égales, & les arcs qui sont soûtenus par des cordes égales sont égaux. C'est une suite évidemment necessaire de l'entiere uniformité de la circonference. Il ne faut que de l'attention pour en appercevoir la certitude.

Il en est de même dans deux cercles égaux que dans le même cercle.

Sixie-

Sixiéme Axiome.

Toutes les lignes tirées du centre qui sont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle : que si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors ; si égales, dans la circonference même. XXVII.

Septiéme Axiome.

Lors qu'on a d'une ligne l'une des extremitez donnée de position, & sa longueur, son autre extremité doit être dans la circonference du cercle décrit par un intervalle de cette longueur donnée. XXVIII.

TROISIE'ME SECTION.

DES LIGNES DROITES PERPENDICULAIRES.

Definitions.

Nous avons déja dit qu'une ligne droite n'en peut couper une autre droite qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire en deux manieres. XXIX.

La premiere, est en ne penchant point plus vers un côté de la ligne coupée, que vers l'autre.

Et alors elles sont dites se couper *perpendiculairement*, & être *perpendiculaires* l'une à l'autre.

La seconde, en penchant plus vers un côté que vers l'autre, & alors elles sont dites se couper *obliquement*, & être *obliques* l'une au regard de l'autre.

Mais il ne faut pas confondre l'obliquité qui convient à une ligne droite par rapport à une autre ligne, avec la curvité qui convient à la ligne par sa nature même, & constituë une espece de ligne opposée à la ligne droite.

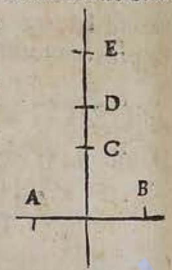
G 5 Aver-

AVERTISSEMENT.

XXX. QUOI *que deux lignes qui se coupent, se coupent & soient coupées mutuellement : neanmoins afin qu'on ne les confonde pas, nous appellerons l'une* coupée *& l'autre* coupante.

DEFINITION PLUS EXACTE DE LA PERPENDICULAIRE.

XXXI. POUR former une notion plus distincte de deux lignes perpendiculaires, on les peut définir en cette sorte :



LORS que deux points de la ligne coupée étant pris également distans de l'un des points de la ligne coupante, tout autre point de la ligne coupante se trouvera aussi être également distant de ces deux points de la ligne coupée la ligne coupante est perpendiculaire à la coupée, étant bien clair qu'elle ne peut alors incliner plus d'un côté que de l'autre.

AXIOME.

XXXII. POUR montrer que tous les points de la ligne coupante sont également distans de deux de la ligne coupée, il suffit d'en avoir deux dans la ligne coupante dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Car de là il s'ensuivra que tous les autres le seront aussi.

JE *prétens que la seule consideration de la nature de la ligne droite fait voir la verité de cette proposition, & que sans cela il est impossible de garder dans la Geometrie l'ordre naturel des choses.*

Car

Car 1. puisque la position de la ligne droite ne dépend que de deux points, & qu'en ayant donné deux points elle est toute donnée, c'est à dire que la position de tous les autres points est determinée : il est visible que la position de ces deux points de la ligne coupante, dont on suppose que chacun est également distant de deux points de la ligne coupée, détermine tous les autres à en être aussi également distans.

2. S'il y en avoit quelqu'un qui approchât plus de l'un des points que de l'autre, la ligne seroit necessairement courbée de ce côté-là.

3. Il n'y auroit point de raison pourquoy il s'approcheroit plûtost d'un côté que de l'autre, ny pourquoy il s'approcheroit de tant, plûtost que de tant. Car la position de ces deux points donnez qui determine tous les autres points de la ligne, ne les peut determiner qu'à une égalité de distance, puis qu'ils n'ont pour eux mêmes que cette determination-là.

4. Tous les Geometres semblent assez convenir de l'évidence de cette proposition, puisque dans la solution de tous les problemes qui regardent les perpendiculaires, ils ne font autre chose que chercher deux points dans la ligne coupante, dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Et ainsi quelque circuit qu'ils cherchent pour montrer que leur probleme est resolu par là : il est clair neanmoins que dans la nature des choses ce n'est que cela seul qui l'a resolu.

5. Quoy qu'il en soit, je soûtiens que quiconque voudra agir de bonne foy reconnoîtra que considerant les choses avec attention, il lui est impossible de concevoir que cela puisse être autrement : & qu'il repugne à l'idée que nous avons naturellement de la ligne droite, que deux de ses points étant posez directement, comme nous avons dit, sur une autre ligne : quelqu'un des autres s'écarte ou à droit ou à gauche, & s'approche ainsi plus prés de l'un des côtez de la ligne.

G 6 *Or*

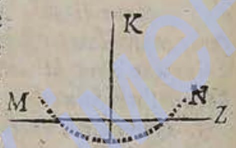
Or il me semble trés inutile de chercher bien loin & par de longs détours des preuves d'une chose dont il nous est impossible de douter, pour peu que nous y veuillions faire attention.

6. Ce qui doit faire rejetter le scrupule qu'on pourroit avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même, c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses, & employer des triangles pour demontrer les proprietez des lignes; c'est à dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la veritable methode.

Soit donc de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen trés facile de demontrer les Problemes suivans sans se servir des triangles, comme fait Euclide.

PREMIER PROBLEME.

XXXIII. D'un point donné hors une ligne donnée tirer une perpendiculaire sur cette ligne : on suppose que cette ligne soit prolongée s'il en est besoin, & que le point donné ne se puisse pas rencontrer dans la ligne prolongée, car alors il ne seroit pas proprement hors cette ligne.



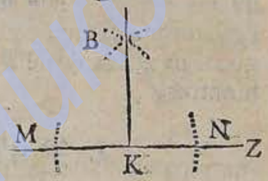
Soit le point K, & la lign, Z. De K pris pour centre e décrire un cercle qui coupe Z, & par consequent y marque deux points comme M & N, également distans de K, puisque M K, & N K seront rayons du même cercle. Cela fait, décrivant deux cercles égaux d'*m* & d'*n* qui s'entrecoupent par tout ailleurs qu'en K, comme en B : la ligne qui joindra B & K sera perpendiculaire à la ligne Z, ce qu'il falloit faire. Car K & B sont chacun également distans de deux points de Z, *m* & *n*, & par

con-

consequent tous les autres en seront aussi également distans par la precedente, & ainsi la ligne sera perpendiculaire par la definition.

SECOND PROBLEME.

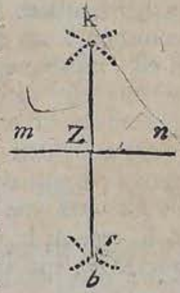
D'un point donné dans une ligne élever une XXXIV.
perpendiculaire. Soit le point K dans la ligne Z, qui étant pris pour centre, le cercle que l'on décrira de ce centre coupera la ligne Z, prolongée s'il en est besoin, en deux points comme M & N, qui seront également distans de K. Donc l'intersection de deux cercles égaux qui auront M & N pour centres donnera le point B, auquel il faudra mener la ligne du point K pour faire la perpendiculaire que l'on cherche.



C'est la même preuve que du Probleme precedent ; car K & B seront chacun également distans d'M & N.

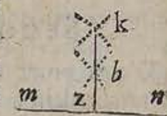
TROISIÉME PROBLÉME.

Couper une ligne donnée en deux parties XXXV.
égales. Soit la ligne donnée *m n*. En tirant des deux extremitez *m* & *n*, prises pour centres, deux cercles égaux qui s'entrecoupent en deux points comme k & *b* : ou tirant des mêmes centres deux arcs de cercles égaux qui s'entrecoupent en un point comme en *k*, & deux autres arcs de cercles égaux ou inégaux aux premiers, mais égaux entr'eux, qui s'en-



 tre-

trecoupent aussi en un autre point comme en *b*: la ligne *k b* prolongée autant qu'il sera besoin coupera la ligne *m n* en deux parties égales. Car si le point de la section est z : comme il est dans la ligne *b k*, qui est perpendiculaire à la ligne *m n*, parce que *b* & *k* sont également distans d'*m* & *n* : *z* aussi en sera également distant, & par consequent *m z* sera égale à *z n*. Ce qu'il falloit démontrer.



I. Theoréme.

XXXVI. La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qui puissent estre menées d'un point à une ligne.

Soit le point K & la ligne Z, sur laquelle ayant mené de K la perpendiculaire K *b*, & l'ayant prolongée jusques en *c*, en faisant *b c* égale à K *b* : si on tire de K d'autres lignes sur la ligne *z*, comme en *m* & *n*, je dis que K *b* est plus courte que K *m*, ou K *n*. Car ayant tiré les lignes *m c* & *n c*, je dis que K *m* est égale à *m c*, & K *n* à *n c*; puisque la ligne *z* étant perpendiculaire à la ligne K *c*, le point *b* qui est commun à ces deux lignes ne peut étre, comme il est, également distant de K & de *c*, que les autres points comme *m* & *n* ne soient aussi chacun également distans de K & de *c*.

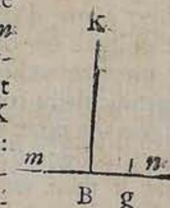
Or cela étant, il est clair que la ligne K *b c* étant droite est plus courte que les lignes K *m c*, qui ne font pas une ligne droite; & par consequent K *b*, qui est la moitié de K *b c*, est plus courte que K *m*, qui est la moitié de K *m c*.

II. Theo-

II. Theoréme.

On ne peut élever du même point d'une ligne plus d'une perpendiculaire, ni en mener plus d'une d'un point à une ligne. Le premier est clair de soi-même; car ayant élevé du milieu de la ligne *m n* la perpendiculaire *b* K, il est visible que si on en vouloit élever une autre du même point *b*, on ne la pourroit tirer que plus vers un côté que vers l'autre, ce qui est directement contraire à la notion de perpendiculaire. XXXVII.

La 2.de partie est encore trés manifeste, & se peut neanmoins prouver de cette sorte : Soit menée de K sur *m n* la perpendiculaire K B, en sorte que B soit également distant d'*m* & *n*, dont par consequent K doit être aussi également distant : si on menoit de K une autre perpendiculaire à un autre point comme à *g*, il faudroit que *g* fût également distant d'*m* & d'*n*, puisque k qui seroit un des points de cette ligne en est également distant. Or cela est impossible, puisque si *g* étoit entre B & *m*, il seroit plus prés d'*m* que d'*n*; & s'il étoit entre B & *n*, il seroit plus prés d'*n* que d'*m*.



I. Corollaire.

La perpendiculaire est la mesure de la distance d'un point hors d'une ligne à cette ligne, & de la ligne à ce point. XXXVIII.

Car étant unique & la plus courte de toutes les lignes qui peuvent étre menées d'un point à une ligne,

ligne, on n'en pourroit prendre aucune autre qui fût si propre à mesurer cette distance.

II. Corollaire.

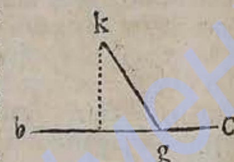
XXXIX. Deux differentes lignes étant perpendiculaires à une même ligne, il est impossible qu'elles se rencontrent, quoi que prolongées à l'infini.

Car si elles se rencontroient, elles auroient un point commun, & ainsi il y auroit deux lignes menées d'un même point qui seroient perpendiculaires à une même ligne, ce qu'on a fait voir être impossible, 37. *Sup.*

III. Corollaire.

XL. Lors que d'un point hors une ligne on a tiré une oblique sur cette ligne, si du même point on tire une perpendiculaire sur la même ligne, cette perpendiculaire tombera du côté que l'oblique est inclinée sur cette ligne.

Soit la ligne *b* C, & le point k dont ait été tirée l'oblique k g, qui soit inclinée vers *b*: je dis qu'il est clair par ce qui a été dit de la perpendiculaire, que si du même point k on en tire une sur *b* C, elle tombera entre *b* & *g*, & non pas entre g & C; car il est visible que si elle tomboit entre g & C, tant s'en faut qu'elle fût perpendiculaire, qu'elle seroit encore plus oblique que k g.



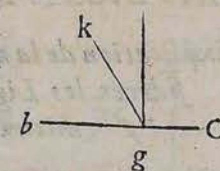
De plus ayant pris dans la ligne *b* C deux points également distans de k, comme pourroient être *b* & C: le point où tombera la perpendiculaire doit être également distant de ces deux points *b* C, (32.S.) & au contraire celui où tombe l'oblique

que doit être plus éloigné du point vers lequel elle est inclinée; & par consequent la perpendiculaire doit tomber du côté vers lequel cette ligne est inclinée.

IV. Corollaire.

Si d'un point où une oblique coupe une ligne on veut élever une perpendiculaire sur cette ligne, elle s'élevera du côté vers lequel cette oblique n'est pas inclinée. XLI.

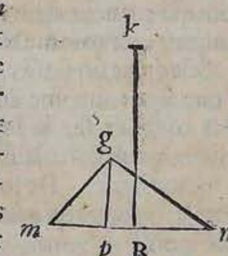
Soit la ligne *b* C coupée par l'oblique *k g* inclinée vers *b*. Si du point *g* on veut élever une perpendiculaire sur *b* C, elle s'élevera du côté de C, & non du côté de *b*; c'est à dire qu'elle se trouvera entre les lignes *k g* & *g c*, & non pas entre *k g* & *g b*. Car il est visible que si elle se trouvoit entre *k g* & *g b*, elle seroit encore plus inclinée que *k g*.



III. Theoréme.

La perpendiculaire indefinie qui coupe par la moitié la distance de deux points comprend tous les points du même plan, dont chacun peut être également distant de ces deux points. XLII.

Soient les points *m* & *n* joints par la ligne *m n*, & la perpendiculaire indefinie *k*B, qui la coupe par la moitié au point B. Il est clair que tous les points de la ligne *k* B sont également distans d'*m* & d'*n*. Mais je dis de plus, qu'il n'y en peut avoir aucun autre hors cette ligne qui



qui en soit également distant. Car il faudra qu'il soit à l'un des côtez comme seroit *g*, d'où tirant une perpendiculaire sur *m n* (par 33. S.) elle la coupera en un autre point que B, comme seroit *p*. Or si *g* étoit également distant d'*m* & d'*n*, il faudroit que *p*, qui seroit un point de la perpendiculaire, en fut aussi également distant, ce qui est visiblement impossible, comme on l'a déja veu.

QUATRIE'ME SECTION.

DES LIGNES DROITES OBLIQUES.

Explication de la maniere dont on doit considerer les Lignes obliques pour les mieux comprendre.

XLIII. Nous avons déja dit que lors qu'une ligne droite en coupe une autre en penchant plus d'un côté que de l'autre, elle s'appelle oblique au regard de cette ligne qu'elle coupe obliquement.

Mais pour mieux juger de la grandeur de ces obliques en les comparant les unes aux autres, il est bon de ne les considerer que selon le côté selon lequel elles approchent plus de la ligne qu'elles coupent, qui est aussi la façon la plus naturelle de considerer ces lignes.

De plus, nous ne regarderons les obliques que comme menées d'un certain point à la ligne qu'elles coupent, & comme terminées à cette ligne.

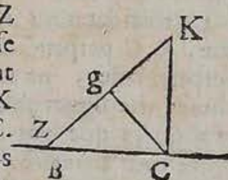
Cela étant supposé, ce que j'entens par l'obliquité d'une ligne sur une autre, est que cette ligne soit plus couchée sur la ligne qu'elle coupe, que ne seroit la perpendiculaire menée du même point sur la même ligne. De sorte que c'est toûjours par rapport à cette perpendiculaire que je considere cette obliquité.

Mais

Mais ce rapport renferme deux choses. 1. La distance du point qui est commun à l'oblique & à la perpendiculaire d'avec le point de la ligne où la perpendiculaire tombe, qui est la même chose que la longueur de cette perpendiculaire.

2. La distance du point où l'oblique tombe d'avec celui où tombe la perpendiculaire, que j'appelle l'éloignement du perpendicule.

A quoi il faut ajoûter la distance du point d'où l'oblique est menée d'avec celui où elle coupe la ligne au regard de laquelle elle est appellée oblique: qui est la même chose que la longueur de cette oblique.

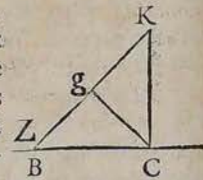


Soit par exemple la ligne Z indefinie, sur laquelle on fasse descendre du point K au point B l'oblique K B, & que de K on tire la perpendiculaire K C. Les trois distances dont nous venons de parler sont trois lignes; dont deux (sçavoir la perpendiculaire K C, & l'éloignement du perpendicule B C) se coupent perpendiculairement, & la troisiéme, qui est l'oblique K B, rencontre obliquement l'une & l'autre.

Et ainsi cette oblique peut être considerée tantôt comme l'oblique de l'une, tantôt comme l'oblique de l'autre. Mais alors il faudra changer alternativement aux deux autres lignes les noms de perpendiculaire & d'éloignement du perpendicule. Car si je considere K B comme oblique sur B C: K C est la perpendiculaire, & B C l'éloignement du perpendicule. Et au contraire si je considere K B comme oblique sur K C: B C sera la perpendiculaire, & K C l'éloignement du perpendicule.

On pourroit aussi considerer B C & K C comme obliques sur K B, (car comme les lignes sont mu-

mutuellement perpendiculaires, elles ſont auſſi mutuellement obliques.) Mais pour ſuivre nôtre methode, il faudroit alors mener une perpendiculaire du point C à la ligne K B, comme ſeroit C g. Et ainſi en conſiderant B C comme oblique ſur la ligne B K, la perpendiculaire ſeroit C g, & l'éloignement du perpendicule ſeroit g B. Mais à moins que de faire cela, K B ſeule eſt conſiderée comme oblique, tantôt au regard de l'une, tantôt au regard de l'autre.



La conſideration de ces trois lignes, K B oblique, K C perpendiculaire, B C éloignement du perpendicule, nous fera comprendre pluſieurs choſes des lignes obliques qui n'ont pû encore être expliquées que par des triangles, ce qui eſt un ordre tout renverſé. Et nous verrons d'une part que dans la comparaiſon des obliques l'égalité en deux de ces lignes donne l'égalité dans la troiſiéme; & nous examinerons de l'autre quand il n'y a égalité que dans une, quelle eſt l'inégalité des deux autres.

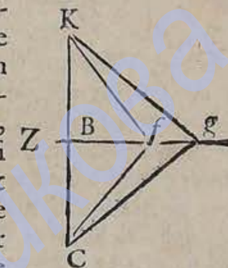
PROPOSITION FONDAMENTALE

DE LA MESURE DES LIGNES OBLIQUES.

XLIV. Les lignes obliques menées du même point à une même ligne ſont plus longues, plus elles ſont éloignées du perpendicule.

Soient du point K menées ſur la ligne Z la perpendiculaire K B, & les obliques K f & K g. Et ſoit prolongée K B juſques en C, en ſorte que B C ſoit égale à K B. Et ſoient auſſi menées les lignes

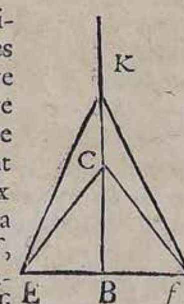
lignes f C & g C: je dis premierement que Z étant perpendiculaire à K B, comme le point B, qui eſt commun à l'une & à l'autre eſt également diſtant de K & de C, les points f & g ſont auſſi également diſtans de K & de C. Donc K f eſt égale à f C, & K g à g C. Or par la maxime d'Archimede K f C eſt plus courte que K g C. Donc K f, qui eſt la moitié de K f C, eſt plus courte que K g, qui eſt la moitié de K g C. Ce qu'il falloit demontrer.



COROLLAIRE.

Il eſt viſible que ce n'eſt que la même choſe ſi l'on dit que de toutes les obliques qui ſeront menées au même point d'une même ligne de divers points d'une perpendiculaire à cette ligne pris du même côté, celles qui ſont menées des points plus proches de la ligne où tombe l'oblique ſont les plus courtes. XLV.

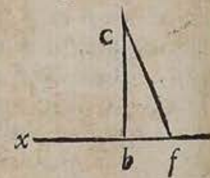
Car il ne faudra alors que tirer d'autres lignes des mêmes points de cette perpendiculaire vers un même point de l'autre côté de la ligne qui coupe cette perpendiculaire également diſtant de cette perpendiculaire. Si je veux montrer, par exemple, que la ligne K f eſt plus longue que C f, je n'ay qu'à prendre le point E autant diſtant de B, qu'f eſt auſſi diſtant de B, & tirer les lignes K E & C E, & faire enſuite la demonſtration precedente.



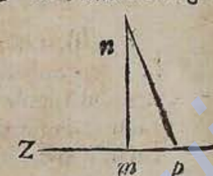
AVER-

AVERTISSEMENT.

XLVI. C'EST *la même chose pour juger de la grandeur de deux lignes obliques de les considerer comme menées du même point sur une même ligne, ou comme menées de deux points differens sur la même ligne, ou deux differentes lignes : pourveu que l'on suppose que chaque point est également distant de la ligne à laquelle on mene l'oblique. Car il est visible qu'il n'y a que cette distance qui y fasse quelque chose.*



Il est vrai qu'il faut supposer pour cela que si l'on a d'une part la ligne x, *&* *de l'autre la ligne* Z, *& qu'on éleve d'un point de chacune, comme de* b *&* *d'*m, *une perpendiculaire, & que dans chaque perpendiculaire on prenne un point comme* c *&* n, *qui soit de part & d'autre également distant du point de la section* b *&* m ; *& qu'on prenne aussi dans chaque coupée* x *&* Z *un point comme* f *&* p, *également distant de part & d'autre du même point de la section* b *&* m : *les obliques* c f *&* n p *sont égales.*



Mais la verité de cette supposition est naturellement connuë, & si on la peut contester de paroles, comme les Pyrrhoniens ont fait voir qu'il n'y a rien qu'on ne puisse contester en cette maniere : il est certain au moins qu'il est impossible à tout esprit raisonnable d'en avoir interieurement le moindre doute, ce qui est la plus grande certitude qu'on doive desirer dans les sciences.

Neanmoins si on en veut être convaincu par une preuve

preuve grossiere & materielle, on peut se servir de celle dont Euclide prouve que deux angles étant égaux, & ayant les côtez égaux aux côtez, la baze est égale à la baze ; qui est qu'il fait mettre ces angles l'un sur l'autre, en sorte que les extrémitez des côtez se trouvent ensemble ; d'où il conclud que les bazes sont aussi couchées l'une sur l'autre, ce qu'on appelle en Latin congruere, *& par consequent égales. Car on peut de mêmes icy s'imaginer que la ligne* z *est couchée sur la ligne* x, *en sorte que le point* m *est immediatement sur le point* b, *& la perpendiculaire sur la perpendiculaire : D'où il arrivera necessairement que le point* n *sera sur le point* c, *& le point* p *sur le point* f, *& qu'ainsi les obliques* n p *&* c f *seront couchées l'une sur l'autre, & ainsi entierement égales.*

Voilà ce qui peut satisfaire ceux qui aiment mieux se servir dans la connoissance des choses de leur imagination que de leur intelligence : ce que je trouve fort mauvais, parce que l'Esprit se rend par là incapable de bien comprendre les choses spirituelles, s'accoûtumant à ne recevoir pour vray que ce qu'il peut concevoir par des phantômes & des images corporelles : au lieu qu'il y a beaucoup de choses que nous sçavons trés certainement, sans que nous les puissions concevoir par l'imagination ; comme quand je dis, Je pense, donc je suis : *nul phantôme ou image corporelle ne me peut servir à me faire concevoir ce que j'entens par ces mots,* je pense, je suis.

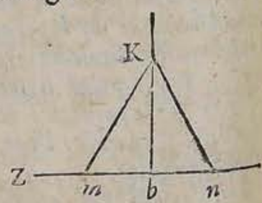
EGALITÉ DANS LES LIGNES OBLIQUES.

CETTE seule proposition avec son corollaire & l'avertissement nous donne moyen de prouver facilement plusieurs theorémes touchant les lignes obliques. Et voici premiérement ceux de l'égalité : XLVII.

I. THEO-

I. THEORÉME.

XLVIII. DES trois lignes que nous avons dit se devoir considerer dans les lignes obliques, la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, & l'oblique même : deux ne peuvent être égales que la troisiéme ne le soit aussi. Ainsi 1. s'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques sont égales.



Soient du point K de la ligne K *b*, qui coupe perpendiculairement la ligne Z en *b*, menées les deux obliques K *m* & K *n*. La perpendiculaire étant la même, & par consequent égale à soi-même : si *b m*, qui est l'éloignement du perpendicule de l'oblique K *m*, est égal à *b n*, qui est l'éloignement du perpendicule de l'oblique K *n* : K *m* & K *n* seront égales. Car les points *m* & *n* ne peuvent être également dinstans de *b*, l'un des points de la perpendiculaire K *b*, qu'ils ne soient aussi également distans de tout autre point de cette perpendiculaire, & par consequent de K. Donc K *m* est égale à K *n*.

I. COROLLAIRE.

XLIX. ON ne peut mener d'un point à une ligne que deux lignes égales. Car on n'en peut mener qu'une seule perpendiculaire. Et pour les obliques, elles ne peuvent être égales que les deux points où elles coupent cette ligne ne soient également distans du point où tombe la perpendiculaire. Or il ne peut y avoir que deux points, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, qui soient également distans de ce point. Car

Car tout autre en sera, ou plus proche ou plus éloigné, comme il est évident. Donc, &c.

II. COROLLAIRE.

Il est impossible qu'un même point soit également distant de trois points d'une ligne droite. L.

C'est la même chose que la precedente differemment énoncée.

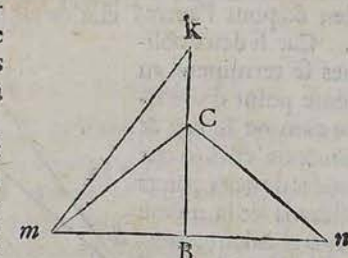
II. THEORÉME.

S'IL y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule. LI.

Soit fait comme devant. Si K *m* est égale à K *n*, B *m* sera égale à B *n*. Car si *m* étoit plus éloignée de B que n'est *n*, l'oblique K *m* seroit plus éloignée de la perpendiculaire, & par consequent plus longue par la proposition principale ; ce qui est contre l'Hypothese.

III. THEORÉME.

S'IL y a égalité dans l'oblique & dans l'éloignement du perpendicule, il y en a dans la perpendiculaire. LII.



Car si la perpendiculaire de l'une étoit plus grande que la perpendiculaire de l'autre, c'est comme si des deux obliques qui se terminent en *m* & *n* l'une descendoit du point k de la perpendiculaire k B, & l'autre du point C plus bas que k de cette même me perpendiculaire k B, de ſorte que l'une ſeroit k *m*, & l'autre c *n*.

Or ſi cela étoit, c *n* ſeroit plus petite que k *m*, par 44. & 45. *ſup.* ce qui eſt contre l'hypotheſe.

IV. Theoréme.

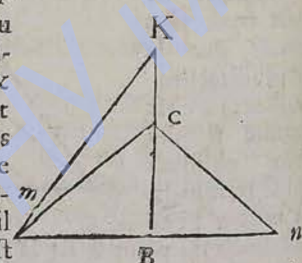
LIII. Quand il n'y a égalité donnée que dans l'une de ces trois lignes, voici ce qui eſt des deux autres:

1. S'il n'y a égalité que dans la perpendiculaire, le plus grand éloignement du perpendicule donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique donne le plus grand éloignement du perpendicule. C'eſt ce qui a été prouvé dans la propoſition principale.

V. Theoréme.

LIV. 2. S'il n'y a égalité que dans l'éloignement du perpendicule, la plus grande perpendiculaire donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique la plus grande perpendiculaire; & alors la plus grande oblique eſt la moins oblique.

Il y a deux parties, dont la premiere a été prouvée par le Corollaire de la propoſition fondamentale; & pour l'autre, elle en eſt une ſuite évidente. Car ſi deux obliques ſe terminent au même point d'une ligne comme K *m*, & c *m*, & qu'elles ſoient menées de deux points differens de la même perpendiculaire, comme de K & de c: il eſt clair que c *m* eſt plus couchée ſur *m* B que k *m*. Or c'eſt la même choſe,

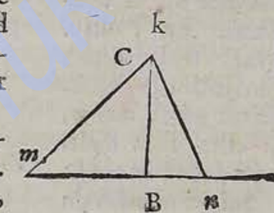


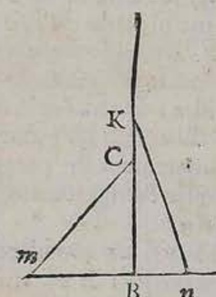
choſe, ſi ayant pris *n* autant diſtant de B que l'eſt *m*, on tire c *n* au lieu de c *m*.

VI. Theoréme.

S'il n'y a égalité que dans la longueur des obliques, le plus grand éloignement du perpendicule donnera une moindre perpendiculaire, & une moindre perpendiculaire donnera un plus grand éloignement du perpendicule. Cela eſt clair par les Theorémes precedens. LV.

Car ſoit la perpendiculaire k B ſur la ligne *m n*. Si on tire l'oblique C *m*, & qu'on prenne un autre point plus prés de B, comme *n*: il eſt viſible que C *n* ſeroit plus courte que C *m* par le 4.e Theoréme; & par conſequent afin qu'on méne à *n* de quelque point de la ligne K B une oblique égale à C *m*, il faudra la tirer d'un point plus éloigné de B que n'eſt C, comme de K.



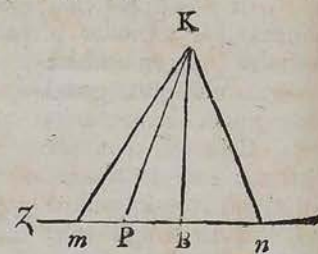


Avertissement.

Je ne dis rien de la diverſe obliquité que la même ligne a ſur les deux lignes qui peuvent être reciproquement conſiderées comme ſa perpendiculaire & ſon éloignement du perpendicule, comme C m ſur B C & ſur B m: car cela eſt trop facile à juger par ce qui eſt dit. LVI.

VII. Theoréme.

LVII. Lors que deux lignes obliques sont menées d'un même point sur une même ligne, la distance des deux points de section est égale à la distance du perpendicule de l'une plus ou moins la distance du perpendicule de l'autre. *Plus*, si les lignes sont inclinées de different côté; *moins*, si elles sont inclinées du même côté.



Soient menées du point K sur la ligne *Z* les deux obliques K*m* & K*n*, inclinées de different côté, & une autre comme K*P*, inclinée du même côté que K*m*. Il est visible que la perpendiculaire KB se trouvera entre K*m* & K*n*, mais au delà de K*m* & de K*P*: & ainsi la distance entre les points de section *m* & *n* sera égale à l'éloignement du perpendicule de K*m*, qui est *m* B, plus l'éloignement du perpendicule de K*n*, qui est B*n*.

Mais si on considere K*m*, & K*P*, inclinées du même côté: il est visible que la distance d'*m* & *P*, points de section de ces deux obliques, est moindre que l'éloignement du perpendicule de K*m*, qui est *m*B, de la longueur de *P*B, qui est l'éloignement du perpendicule de l'autre oblique K*P*.

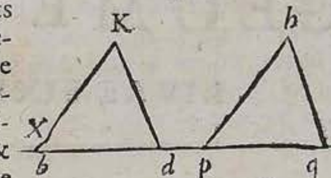
VIII. Theoréme.

LVIII. Deux lignes obliques inégales entr'elles & inclinées de different côté étant menées du même point sur la même ligne: & deux autres obliques, dont chacune est égale à chacune des deux premieres, étant aussi menées d'un autre point sur une même

même ligne, & y étant aussi inclinées de different côté: si la distance des points de section des deux premieres obliques est égale à la distance des points de section des deux dernieres, les deux points dont elles sont menées sont également distans de la ligne à laquelle elles sont menées.

Soient sur la ligne *X* menées du point K les deux obliques K*b* & K*d*, & du point *h* deux autres obliques *hp* & *hq*, ensorte que K*b* soit égale à *hp*, & K*d* à *hq*, & que les points *b* & *d* soient autant distans que le sont *p* & *q*; je dis que les points K & *h* sont également distans de la ligne X; ou, ce qui est la même chose, que les perpendiculaires menées de ces deux points sont égales.

Car la distance des points *b* & *d* ne peut être égale à la distance des points *p* & *q*, que les éloignemens du perpendicule de K*b* & K*d* pris ensemble ne soient égaux à ceux de *hp* & *hq* pris ensemble: ce qui ne seroit pas si K étoit plus éloigné d'*X* que *h*. Car alors K*b* étant égale à *hp* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que ne l'auroit *hp*, puis qu'elle descendroit d'un point plus éloigné que ne descend *hp*, (par 55 *sup.*) de mêmes K*d* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que *hq*; Et ainsi les deux éloignemens du perpendicule de K*b* & de K*d* pris ensemble seroient plus petits que ceux de *hp* & *hq* pris ensemble.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SIXIE'ME.

DES LIGNES PARALLE'LES.

I. *APRES avoir parlé des lignes droites qui se rencontrent, soit perpendiculairement, soit obliquement, on peut considerer dans les lignes une autre proprieté toute opposée, qui est de ne se rencontrer jamais, & d'être toûjours également distantes l'une de l'autre, & c'est ce qu'on appelle des lignes paralleles.*

DEUX NOTIONS DES LIGNES PARALLELES,

L'UNE NEGATIVE ET L'AUTRE POSITIVE.

MAIS ces lignes peuvent être considerées selon deux notions differentes, l'une negative & l'autre positive. II.

La negative est de ne se rencontrer jamais, quoique prolongées à l'infini.

La positive, d'être toûjours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points de chacune sont également distans de l'autre; c'est à dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, sont égales. Et il est bien clair que la notion negative est une suite necessaire de la positive, ne se pouvant pas faire que deux lignes se rencontrent si elles demeurent toûjours également distantes l'une de l'autre.

C'est pourquoi c'est avoir tout fait que d'avoir trouvé des marques certaines par lesquelles on puisse reconnoître que deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire qu'elles soient tellement disposées, que les points de chacune soient également distans de l'autre; ce qui suppose toûjours qu'elles soient prolongées autant qu'il est necessaire, afin que des points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur l'autre.

C'est ce que nous trouverons facilement aprés avoir établi quelques Lemmes.

AVERTISSEMENT
POUR LES LEMMES SUIVANS.

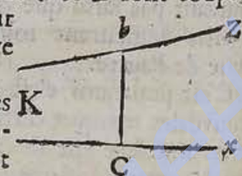
III. LORS *que dans les Lemmes suivans je compare diverses lignes qui coupent les deux mêmes, je suppose toûjours deux choses:*

L'une, que ces coupées, dont l'une sera toûjours nommée x *& l'autre* z, *ou ne se joignent point, ou se joignent simplement sans se traverser: c'est à dire qu'on les considere toûjours comme n'ayant point changé de côté l'une au regard de l'autre.*

L'autre, que ces coupantes soient enfermées entre les coupées, & c'est aussi ce que j'entens dans tout ce Livre quand je parle des lignes entre paralleles.

I. LEMME.

IV. QUAND les deux lignes x & Z sont coupées par b C perpendiculaire sur x & oblique sur Z, il arrive trois choses:



1. Que toutes les autres lignes menées de Z perpendiculairement sur x, sont obliques sur Z.

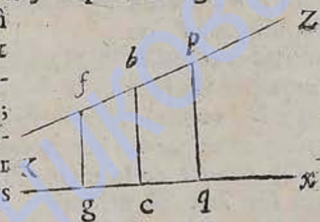
2. Qu'elles sont inclinées sur Z du même côté que C b l'est aussi sur Z, lequel côté j'appellerai K.

3. Que les perpendiculaires sur Z sont obliques sur x, & inclinées sur x du même côté que C b l'est sur Z, c'est à dire vers K.

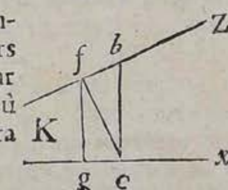
Les deux premieres parties se prouvent ensemble, & la preuve de ces deux premieres emporte celle de la 3.e

PREUVE DES DEUX PREMIERES PARTIES.

Soient pris deux points f & p sur la ligne Z, aux deux côtez de b, d'où soient menées $f\,g$ & $p\,q$ perpendiculairement sur la ligne x; il faut prouver qu'elles seront obliques sur Z, & inclinées vers K.



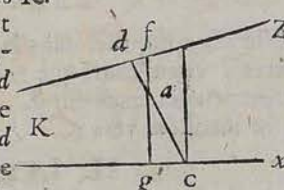
Soit tirée de c une perpendiculaire sur Z; elle sera vers K, & non pas vers p, par V. 40. Et ainsi le point où cette perpendiculaire tombera sur Z sera



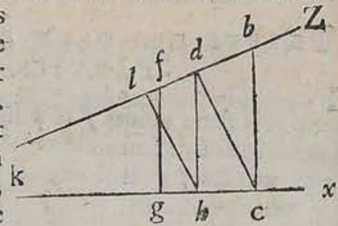
ou le même point que f.
ou au delà de f.
ou entre f & b.

1.er Cas. Si c'est le même point que f: $c\,f$ étant perpendiculaire sur la ligne Z, $g\,f$ sera oblique sur Z, & inclinée vers K.

2.d CAS. Si ce point est au delà d'f, comme en d, alors $c\,d$ coupera $f\,g$. Que ce soit en a. Donc $a\,d$ étant perpendiculaire sur Z, $a\,f$ (qui est la même chose que $g\,f$) sera oblique sur Z, & inclinée vers $a\,d$, & par consequent vers K.

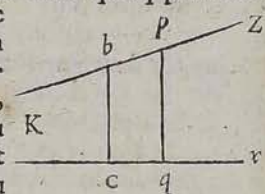


3.e CAS. Si d est entre f & b: de d menant $d\,h$ perpendiculaire sur x, & de h, $h\,l$ perpendiculaire sur Z; si $h\,l$ se termine ou à f, ou au delà de f, on prouvera de la même sorte que dans le premier & dans le second Cas, que *g f* est oblique sur Z, & inclinée vers k.



Et si *h l* n'alloit pas jusques à *f*, on tireroit encore d'*l*, *l m* perpendiculaire sur *x* & d'*m* une perpendiculaire sur Z, jusques à ce qu'il y en ait une qui se termine à *f*, ou au de là d'*f*.

On prouve de la même sorte que *q p* est oblique sur Z, & inclinée vers K ; excepté qu'on élevera de *b* une perpendiculaire sur la ligne Z, qui coupera la ligne *x* au delà de c, par V. 41. Et ainsi tombera ou à *q*. ou au delà de *q*. ou entre c & *q*.



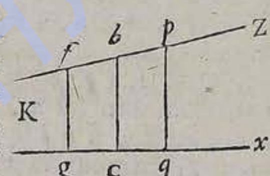
Ainsi en l'une ou l'autre de ces trois manieres ; on prouvera que *p q* est oblique & inclinée vers K, comme on l'a prouvé d'*f g*.

Preuve de la troisiéme Partie.

Elle est comprise dans la preuve des deux premieres, étant clair que toutes les lignes qui ont été perpendiculaires sur Z, ont été obliques sur *x*, & inclinées vers K.

II. Lemme.

V. Si les lignes *x* & Z sont coupées par *b c*, perpendiculaire sur *x*, & oblique sur Z, & inclinée vers K : toutes les lignes menées des points de Z perpendiculaire-



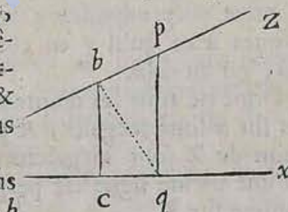
ment

ment sur *x*, seront inégales ; & les plus courtes seront celles qui seront vers K, c'est à dire vers le côté ou la ligne *b c* est inclinée.

Il suffira de prouver que *b c* étant plus vers K que *p q*, sera necessairement plus courte que *p q*.

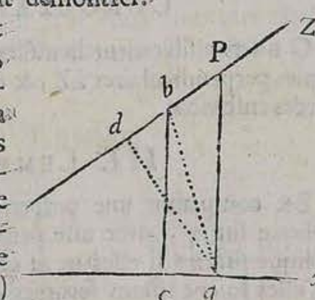
Soit menée de *q*, une perpendiculaire sur Z ; le point où cette perpendiculaire tombera, sera.
ou le même point que *b*.
ou au delà du point *b*.
ou entre *b* & *p*.

1.er Cas. Si c'est le même point que *b* : *b c* étant perpendiculaire sur *x*, & *b q* oblique, *b c* sera plus courte que *b q*, (V. 36.) Or par la même raison *q b* étant perpendiculaire sur Z, & *p q* oblique, *q b* est plus courte que *q p*.



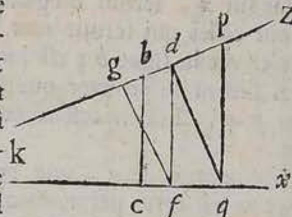
Donc si *b c* est plus courte que *q b*, & *q b* plus courte que *p q* : *b c* doit être plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.

2.d Cas. Si ce point est au delà de *b*, comme en *d* : en tirant *q b*, *q b* sera oblique, mais plus proche de la perpendiculaire *q d*, que *p q*, & par consequent plus courte que *p q*. (V. 44.) Or *b c* est plus courte que *q b*, (V. 36) Donc *b c* est à plus forte raison plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.



3.e Cas. Si *d* se trouve entre *b* & *p* : de *d* on tire-

 ra



ra *d f* perpendiculaire ſur *x*; & d'*f*, *f g* perpendiculaire ſur Z, & *g* ſe trouvant ou au point *b*, ou au delà du point *b*, on prouvera comme dans le premier & le ſecond cas que *b* c eſt plus courte que *d f*, laquelle par le premier cas eſt plus courte que *p q*, & par conſequent *b* c eſt plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.

Que ſi *f g* n'alloit pas juſques à *b*, on tireroit d'autres perpendiculaires ſur *x*, & puis ſur Z, juſques à ce qu'il y en eût une qui allât juſques à *b*, ou au delà.

Donc de tous les points de Z les perpendiculaires ſur *x* ſont inégales, & par conſequent tous les point de Z ſont inégalement diſtans de *x*, lors qu'une même ligne eſt perpendiculaire ſur *x*, & oblique ſur Z.

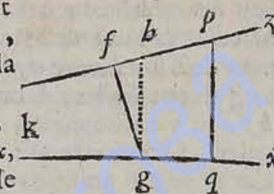
Corollaire.

VI. C'est viſiblement la même choſe de toutes les lignes perpendiculaires à Z, & obliques ſur *x*, comparées enſemble.

III. Lemme.

VII. En comparant une perpendiculaire ſur *x*, & oblique ſur *z*, avec une perpendiculaire ſur *z* & oblique ſur *x*: ſi elles ne ſe croiſent point, mais qu'elles ſoient toutes ſeparées, elles ſont neceſſairement inégales, & la plus courte eſt celle qui eſt plus vers le côté vers lequel elles ſont inclinées.

Soient *fg* perpendiculaire ſur *z*, & oblique ſur *x*, & *p q* perpendiculaire ſur *x*, & oblique ſur *z*, & que



que leur inclination ſoit vers k; je dis que *f g*, qui eſt plus vers k, eſt la plus courte.

Car en élevant de *g*, *g b* perpendiculaire ſur *x*, & oblique ſur *z*: par le Lemme precedent *g b* ſera plus courte que *p q*; or *g f* étant perpendiculaire ſur *z*, elle eſt plus courte que *g b*, qui eſt oblique ſur la même *z*; & par conſequent *f g* eſt plus courte que *p q*.

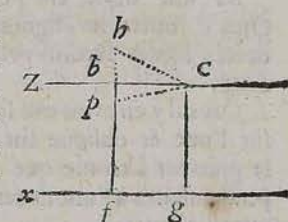
IV. Lemme.

Deux lignes enfermées ne ſe croiſant point, ne ſçauroient être égales, & être chacune perpendiculaire ſur quelqu'une des enfermantes, qu'elles ne le ſoient ſur toutes les deux. VIII.

Car ſi l'une étoit perpendiculaire ſur *x*, & oblique ſur *z*, elle ſeroit inégale à l'autre, ou par le ſecond Lemme, ſi l'autre étoit auſſi perpendiculaire ſur *x*: ou par le troiſiéme, ſi l'autre étoit perpendiculaire ſur Z. Il faut donc pour être égales qu'elles ſoient perpendiculaires ſur l'une & ſur l'autre des enfermantes.

V. Lemme.

Si une ligne enfermée eſt perpendiculaire à l'une & à l'autre des enfermantes, toutes les lignes menées de quelque point que ce ſoit d'une enfermante perpendiculairement ſur l'autre ſeront égales à cette enfermée, & par conſequent entr'elles. IX.



Soit bf enfermée entre les lignes z & x, & perpendiculaire à l'une & à l'autre : & de c point quelconque de Z soit menée cg perpendiculaire sur x ; bf & cg seront égales, si on ne peut rien retrancher de bf, ni y rien ajoûter, que bf & cg ne soient inégales. Or cela est ainsi.

Car si de p, point quelconque au dessous de b dans bf, on tire pc, cette ligne pc coupera obliquement bf, puisque par l'hypothese cb (partie de Z) coupe perpendiculairement bf, & que d'un même point on ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire à la même ligne.

Donc par le second Lemme pf (c'est à dire bf retranchée de quelque chose) & cg sont inégales.

Ce sera la même chose si on allongeoit bf de quoi que ce fût. Car si du point h au dessus de b, bf étant prolongée, on tiroit hc, cette ligne par la même raison couperoit obliquement bf prolongée.

Donc par le second Lemme bf prolongée seroit encore inégale à cg.

Donc on ne sçauroit rien retrancher de bf, ni y rien ajoûter, que bf & cg ne soient inégales.

Donc elles sont égales.

VI. Lemme.

x. Si une ligne est perpendiculaire à deux lignes, toutes les lignes perpendiculaires à l'une de ces lignes seront perpendiculaires à toutes les deux.

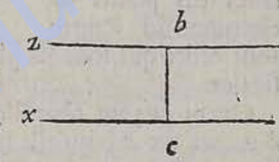
Car s'il y en avoit une seule qui fût perpendiculaire sur l'une & oblique sur l'autre, il s'ensuivroit par le premier Lemme que toutes les autres lignes perpendiculaires à l'une de ces deux lignes seroient obliques sur l'autre.

Donc s'il y en a une seule qui soit perpendiculaire à

à toutes les deux, il faudra necessairement que toutes celles qui sont perpendiculaires à l'une des deux enfermantes le soient à toutes les deux, & par consequent qu'elles soient toutes égales par le Lemme precedent.

VII. Lemme.

Deux lignes ne se traversant point, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, ou tous inégalement distans. Car menans d'un point de z, bc perpendiculaire sur x : si bc est aussi perpendiculaire sur z, de quelque point de z qu'on mene des perpendiculaires sur x elles seront égales à bc par le 5e. Lemme ; & ce sera la même chose de quelque point d'x qu'on mene des perpendiculaires sur z. xi.



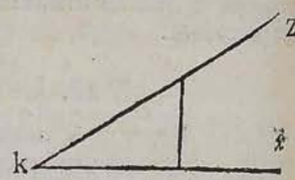
Que si au contraire bc est oblique sur z, toutes les perpendiculaires des points de z sur x seront inégales, (5. *sup.*) & par consequent tous les points de z inégalement distans d'x. Et il en sera de même des perpendiculaires sur z menées des points d'x, qui par la même raison seront toutes inégales entr'elles. Et par consequent aussi tous les points d'x seront inégalement distans de z.

Mais remarquez que je ne dis pas qu'un point d'x ne puisse être aussi distant de z qu'un point de z est distant d'x, mais seulement que tous les points d'x sont inégalement distans de z, & tous les points de z inégalement distans d'x.

VIII. Lem-

VIII. Lemme.

XII. Si deux lignes menées d'un même point sont inclinées l'une sur l'autre, tous les points de chacune sont inégalement distans de l'autre, & les plus courtes perpendiculaires des points de chacune sur l'autre sont celles qui sont les plus proches du point de la section.



Car on ne peut tirer d'un point de Z une perpendiculaire sur *x*, qu'elle ne soit oblique sur Z, par V. 27. Dont tout le reste suit par le second Lemme.

TROIS PROPOSITIONS FONDAMENTALES DES PARALLELES.

Ces Lemmes donnent trois marques certaines pour reconnoître si deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire si tous les points de chacune sont également distans de l'autre; ce qui fera les trois Propositions suivantes.

I. Proposition.

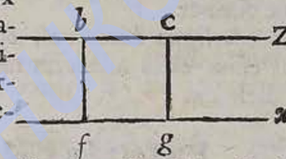
XIII. Si deux lignes sont coupées par une ligne perpendiculaire à l'une & à l'autre, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles. 5. & 6e. Lemmes.

II. Pro-

II. Proposition.

Si deux points d'une ligne sont également distans d'une autre ligne, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles 4. & 5e. Lemmes. XIV.

Soient *b* & c deux points de la ligne Z également distans de la ligne *x*; *bf* & c g perpendiculaires sur *x* seront égales.



Donc elles seront aussi perpendiculaires sur Z, par le 4e. Lemme.

Donc toutes les autres lignes menées des points de Z perpendiculairement sur *x* seront aussi perpendiculaires sur Z, & égales à ces deux-là (par le 6e. Lemme.) Et il en sera de même de celles qu'on menera des points d'*x* perpendiculairement sur Z.

III. Proposition.

Deux lignes ne se croisant point & étant enfermées entre deux lignes, ne sçauroient être égales & être perpendiculaires, l'une sur une des enfermantes & l'autre sur l'autre, qu'elles ne le soient chacune sur toutes les deux (par le 4e. Lemme,) & que par consequent ces lignes enfermantes ne soient paralleles (par le 6e. Lemme.) XV.

I. Corollaire.

Toutes les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales: car c'est cela même qui les rend paralleles. XVI.

II. Corollaire.

Les obliques entre paralleles sont plus longues XVII.
que

que les perpendiculaires. Car chaque oblique est plus longue que sa perpendiculaire, (V. 36.) & toutes les perpendiculaires sont égales.

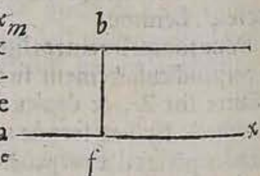
PROBLEME.

XVIII. MENER par un point donné une parellele à une ligne donnée.

Soit la ligne donnée *x*, & le point donné *b*; on peut en diverses manieres mener par le point *b* une parallele à *x*.

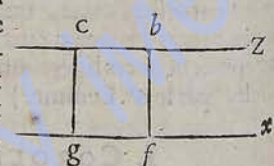
PREMIÉRE MANIERE.

Du point *b* mener sur *x* la perpendiculaire *bf*; & mener par *b* une perpendiculaire sur *b f*, comme peut être *m b*, elle sera parallele à *x* (par la 1.re proposition.)



SECONDE MANIERE.

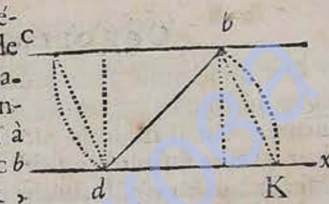
Ayant mené de *b* sur *x* la perpendiculaire *b f*, en élever une autre d'un autre point quelconque d'*x*, comme *g c*: la prenant égale à *b f*, & joignant les points c & *b*, c *b* sera parallele à *x*, par la 2.de proposition.



TROISIÉME MANIERE PLUS COURTE ET PLUS FACILE.

Du point *b* tirer sur *x* une oblique quelconque, comme *b d*. Du centre *d*, intervalle *d b*, d'écrire l'arc *b* K, qui coupe *x* en K. Puis du centre *b*,

intervalle *b d*, décrire une portion de circonference dans laquelle on puisse prendre l'arc *d* c, égal à l'arc *b* K; la ligne c *b* sera parallele à *d* K, c'est à dire à *x*.



Car les deux arcs *b* K, & *d* c, étant égaux & de cercles égaux, les cordes de ces arcs seront égales.

De plus *b* c, & *d* K, sont égales aussi, parce que ce sont rayons de cercles égaux.

Donc *d b* étant égale à elle même, les trois lignes d'une part *d b*, *d* c, c *b*, & les trois de l'autre *b d*, *b* K, *d* K sont égales chacune à chacune.

Donc le point *d* est autant éloigné de la ligne c *b*, que le point *b* de la ligne *d* K, par V. 58.

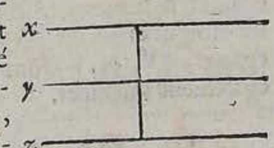
Donc les perpendiculaires de *d* sur c *b*, & de *b* sur *d* K, sont égales.

Donc c *b* & *d* K sont paralleles par la 3.e proposition.

I. THEORÉME.

DEUX lignes ne sçauroient être paralleles à une troisiéme, qu'elles ne le soient entr'elles. XIX.

Si *x* & *z* sont chacune parallele à *y*, elles le sont entr'elles. Car soit élevé d'un point d'*x* une perpendiculaire qui coupe *y* & *z*, elle coupera perpendiculairement *y*, parce que *x* & *y* sont paralleles. Et étant perpendiculaire sur *y*, elle le sera aussi sur *z*, parce qu'*y* & *z* sont paralleles.



Donc *x* & *z* auront une même perpendiculaire. Donc elles seront paralleles, (13. *Sup.*)

COROL-

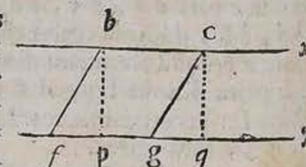
COROLLAIRE.

XX. On ne ſçauroit faire paſſer par le même point deux differentes lignes qui ſoient paralleles à une même. Car il faudroit par le Theoréme precedent qu'elles fuſſent paralleles entr'elles, ce qui eſt abſurde, puis qu'elles auroient un point commun, & qu'il eſt de l'eſſence des paralleles de ne ſe rencontrer jamais.

II. THEORÉME.

XXI. Les également inclinées entre les mêmes paralleles ſont égales, & les égales ſont également inclinées.

Soient les paralleles x & y. Soient bf & cg également inclinées entre ces paralleles. Soient menées de b & de c les perpendiculaires bp & cq ; ces perpendiculaires ſont égales. Donc afin que bf & cg ſoient également inclinées, il faut que les éloignemens du perpendicule fp & gq ſoient égaux : or cela étant, les obliques ſont égales par V. 48.



Et par la même raiſon les obliques bf & cg étant égales, & les perpendiculaires bp & cq égales auſſi, les éloignemens du perpendicule fp & gq ſeront égaux, (V. 51.) Donc ces obliques égales ſeront également inclinées.

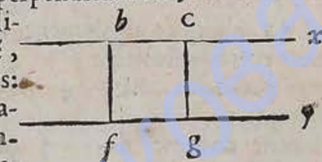
III. THEORÉME.

XXII. Les plus inclinées entre les mêmes paralleles ſont les plus longues, & les plus longues ſont les plus inclinées ; cela ſe prouve de la même ſorte par V. 53.

IV. Theo-

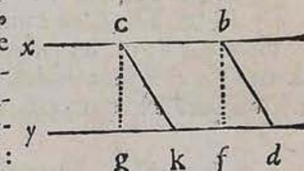
IV. THEORÉME.

Lors que deux perpendiculaires, ou deux obliques également inclinées du même côté, coupent des paralleles : les portions de ces paralleles compriſes entre ces lignes ſont égales. XXIII.

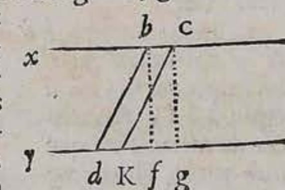


1. Cela eſt clair pour les perpendiculaires. Car bc & fg ſont chacune perpendiculaire aux deux bf & cg, & par conſequent égales par le cinquiéme Lemme.

2. Si ces deux coupantes ſont également obliques du même côté, comme bd & ck ; je dis que bc & dk ſe trouveront auſſi être égales. Car tirant les perpendiculaires bf & cg : par le premier cas bc eſt égale à fg.



Or df eſt égale à kg, parce que ces obliques ſont ſuppoſées également inclinées. Donc ajoûtant fk à l'une & à l'autre, dk ſera égale à fg. Donc dk eſt égale à bc, qui eſt égale à fg. Et il n'importe que les lignes fuſſent ſi proches que les éloignemens du perpendicule entreroient l'un dans l'autre, comme en cette figure.

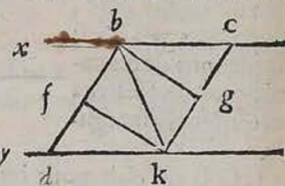


Car $bc = fg$.
Et $df = kg$.
Donc ôtant kf de l'un & de l'autre,
$dk = fg$, & par conſequent à bc.

V. Theo-

V. Theoréme.

XXIV. Les obliques également inclinées du même côté entre paralleles sont paralleles elles-mêmes.



Soient comme devant $b\,d$ & c k également inclinées entre les y paralleles x & y. Soit menée l'oblique bk.

$bd = kc$. Par l'Hypothese & le 2.^{d} Theoréme.

$dk = cb$. Par le Theoréme precedent.

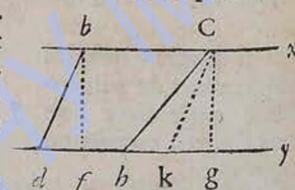
$bk = kb$. C'est à dire à soi-même.

Donc par V. 58. les perpendiculaires de k sur bd & de b sur c k sont égales. Donc les lignes bd & c k sont paralleles par 15. S.

VI. Theoréme.

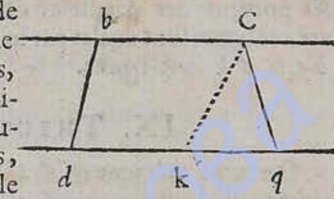
XXV. Les inégales entre paralleles, quoi qu'inclinées du même côté, ne peuvent être paralleles, non plus que les égales qui sont inclinées de divers côtez. Car

1. Supposons que $b\,d$ & $c\,h$ entre les paralleles x & y soient inégales. Soit tirée de C, C k égale à $b\,d$, & inclinée du même côté que $b\,d$; par le Theoréme précedent $b\,d$ & C k sont paralleles. Donc $b\,d$ & C h ne peuvent pas être paralleles, par 20. S.



2. On

2. On prouvera de la même sorte que $b\,d$ & C q étant égales, mais inclinées de divers côtez, ne sçauroient être paralleles, parce que C k égale aussi à $b\,d$, mais inclinée du même côté, lui est parallele.



VII. Theoréme.

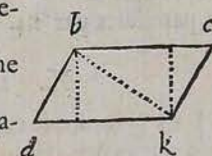
Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont égales elles sont paralleles. XXVI.

Soient les quatre lignes b C, dk, $b\,d$, Ck; ayant tiré l'oblique bk;

$dk = bc$. Par l'Hypothese.

$bd = ck$. Par la même Hypothese.

$bk = kb$. C'est à dire égale à soi-même.



Donc par V. 58. les perpendiculaires de b sur d k, & de k sur bc, sont égales. Donc $b\,c$ & $d\,k$ sont paralleles par 15. S.

VIII. Theoréme.

Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont paralleles elles sont égales. XXVII.

Soit fait comme auparavant; bc & dk sont paralleles. Donc $b\,d$ & $c\,k$ qui sont entre ces paralleles ne sçauroient être elles-mêmes paralleles qu'elles ne soient égales & inclinées du même côté par le sixiéme Theoréme. Donc elles sont égales.

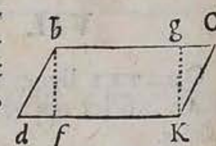
Mais étant égales & inclinées du même côté, les

les portions des paralleles qui sont comprises entre ces lignes sont égales par le 4.e Theoréme. Donc *b c* & *d k* sont égales.

IX. Theoréme.

XXVIII. Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si deux des opposées sont paralleles & égales, les deux autres opposées sont aussi paralleles & égales.

Si *b* C & *d* K sont paralleles & égales; donc les perpendiculaires *b f* & K *g* sont égales, & *b g* égale à *f* K, par 23. *Sup.*



Donc *d f* égale à *g* C. I. 19.
Donc *b d* & K C sont égales, par V. 48.
Et paralleles par 24. & 26. *Sup.*

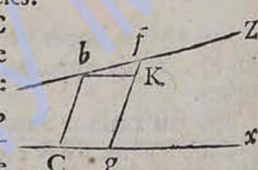
X. Theoréme.

XXIX. Les lignes qui enferment des paralleles égales, sont paralleles elles-mêmes. On le prouve de la même sorte.

Corollaire.

XXX. Les lignes qui enferment des paralleles inégales ne sçauroient être paralleles.

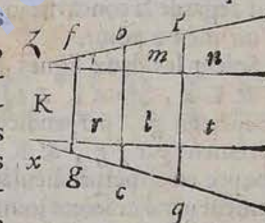
Car si les paralleles *b* C & *f g*, enfermées entre *x* & Z, étoient inégales: prenant *g* K égale à *b* C, la ligne *b* K par le Theoréme precedent est parallele à *x*. Donc *x* n'est pas parallele à Z, par [illegible]. *sup.*



XI. Theoréme.

Quand une ligne en coupe deux oblique- XXXI.
ment, & qu'elle est inclinée sur chacune du même côté, toutes les paralleles à cette coupante enfermées entre ces deux mêmes lignes sont inégales: & les plus courtes sont celles qui sont vers le côté vers lequel cette premiere coupante étoit inclinée.

Soient *x* & *Z*, coupées l'une & l'autre obliquement par *b c*, inclinée vers K; je dis que *f g* & *p q*, paralleles à *b c*, & enfermées aussi entre *x* & *Z*, seront inégales: & *f g* plus proche de K sera la plus courte, & *p q* la plus longue. Car soit menée *Z n*, perpendiculaire sur les trois paralleles, & *x t* de mêmes perpendiculaire sur toutes les trois: par le 8.e Lemme, *f i* est plus courte que *b m*, & *b m*, que *p n*; & de mêmes *r g* plus courte que *l c*, & *l c* que *t q*.



Or (par 23. *sup.*) *i r*, *m l*, & *n t* sont égales.

Donc (par I. 21.) *f g* est plus courte que *b c*; & *b c* que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.

I. Corollaire.

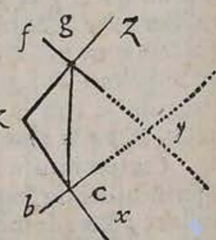
Il s'ensuit delà, 1. Que deux lignes coupées XXXII.
par une ligne qui coupe toutes les deux obliquement, & qui est inclinée sur chacune du même côté, ne sçauroient être paralleles. (30. *sup.*)

II. COROLLAIRE.

XXXIII. 2. QUE ces lignes se r'approchant toûjours vers le côté vers lequel cette coupante est inclinée, étant prolongées de ce côté-là, se rencontreront à la fin. V. 11.

XII. THEORÉME.

XXXIV. DEUX differentes lignes se joignant en un même point, les perpendiculaires sur chacune de ces lignes se rencontreront étant prolongées du côté qui regarde la concavité que font ces lignes jointes à un même point.

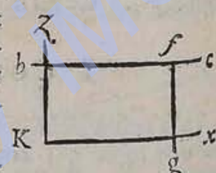


Soient les deux lignes K z & K x, dont K z soit coupée en g, perpendiculairement par $f\,g$, & K x coupée en c perpendiculairement par b c. Soient joints les points g & c; il est clair que g c est oblique tant sur $f\,g$ que sur b c, & inclinée sur l'une & sur l'autre vers y:

Donc elles se rencontreront étant prolongées de ce côté là, par 33. *sup*.

XIII. THEORÉME.

XXXV. DEUX lignes se joignant perpendiculairement, les perpendiculaires sur l'une & sur l'autre se joindront aussi perpendiculairement.



Soient K z & K x perpendiculaires; si $b\,c$ est perpendiculaire sur K z, elle est parallele à K x, par 13. *sup*.

Donc $g\,f$ ne peut être perpendiculaire sur K x, qu'elle ne le soit aussi sur b c.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SEPTIE'ME.

DES LIGNES TERMINE'ES A UNE CIRCONFERENCE,

Où il est parlé

DES SINUS,

Et de la Proportion des Arcs de divers Cercles à leurs Circonferences, & du Parallelisme des Lignes Circulaires.

JUSQUES *icy nous avons consideré les lignes droites entant qu'elles sont terminées à d'autres lignes droites, ou qu'elles leur sont paralleles. Nous les considerons maintenant entant qu'elles sont terminées à quelque point d'une circonference.* I.

 On

On les peut distinguer par les diverses situations du point d'où elles sont menées à la circonference. Car ce point est

1. Ou dans la circonference même,

2. Ou au dedans du cercle,

3. Ou au dehors.

1. Quand il est dans la circonference même, ce sont les lignes qui sont menées d'un point de la circonference à un autre point de la même circonference; Et ce sont celles que nous avons déja dit s'appeller des cordes.

2. Quand le point est au dedans du cercle, si ce point est le centre, ce sont des rayons. *Mais si ce n'est pas le centre, on les peut appeller* des secantes interieures.

3. Et quand ce point est hors le cercle: ou ces lignes entrent dans le cercle, le coupant dans sa convexité & étant terminées à sa concavité: ou elles n'entrent point dans le cercle; & alors elles sont telles, que si on les prolongeoit elles y entreroient, & tant celles-là que celles qui y entrent, peuvent être appellées des secantes exterieures.

Ou bien, quoi que prolongées, elles n'entrent point dans le cercle; & ce sont celles-là que l'on dit toucher le cercle, & que l'on appelle pour cette raison des tangentes.

Mais parce que les deux derniers genres, hors la derniere espece du 3.e qui est des tangentes, peuvent être compris dans les mêmes propositions, nous renfermerons tout cela en 3 sections, Dont

La 1.re sera des cordes.

La 2.de des secantes interieures & exterieures.

La 3.e des tangentes.

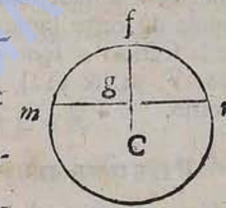
Et nous y en ajouterons une 4.e qui sera du parallelisme des lignes circulaires.

PREMIERE SECTION.

DES CORDES.

Premier Theoréme.

Les lignes droites qui coupent les cordes peuvent avoir trois conditions. 11.



La 1.re De les couper perpendiculairement.

La 2.de De les couper par la moitié.

La 3.e De passer par le centre.

Or deux de ces conditions étant données, donnent la 3.e

C'est à dire:

1. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, elles passent par le centre.

2. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & qu'elles passent par le centre, elles les coupent par la moitié.

3. Si elles les coupent par la moitié & qu'elles passent par le centre, elles les coupent perpendiculairement.

Soient pour tous les cas le centre C, & la corde *mn*, coupée par *fg*.

Preuve du premier Cas.

Si *fg*, étant perpendiculaire à *mn*, la coupe par la moitié, le point g est également distant des extrémités de la coupée *m* & *n*. Donc *fg* étant prolongée doit contenir tous les points de ce plan également distans d'*m* & *n*, par V. 42. Or le centre est un de ces points: Donc il se doit trouver dans *f g* prolongée. Ce qu'il falloit demontrer.

Preuve du second Cas.

Si *f g* coupe perpendiculairement *m n*, & qu'étant continuée elle passe par le centre, il y a un point dans cette ligne, sçavoir le centre, qui est également distant d'*m* & *n*. Donc tous les autres points de cette ligne *f g*, dont l'un est le point de la section, sont également distans d'*m* & *n*. (par V. 31. & 32.) Donc *m n* est divisée par la moitié.

Preuve du troisiéme Cas.

Si *f g* divisant *m n* par la moitié, étant prolongée passe par le centre, il y aura deux points dans cette ligne, sçavoir le point de la section, & le centre, également distans d'*m* & *n*. Donc *f g* est perpendiculaire à *m n*, par V. 32.

I. Corollaire.

III. Ayant trois points d'une circonference, on a toute la circonference.

Car qui a un point de la circonference & le centre, l'a toute entiere, par V. 22.

Or qui a trois points de la circonference, en a le centre. Ce qui se prouve de cette sorte:

Il est clair que ces trois points ne peuvent pas être dans la même ligne droite, parce que tous les points d'une circonference doivent être également distans d'un même point, sçavoir le centre, & qu'il est impossible que trois points d'une ligne droite soient également distans d'un même point, par V. 50.

Ainsi

Ainsi joignant ces trois points deux à deux, on a trois cordes qui soûtiennent 3 arcs de cette circonference.

Donc le centre se trouvera dans l'intersection de deux lignes qui couperont perpendiculairement & par la moitié deux de ces 3 cordes.

Car par le precedent Theoréme chacune de ces perpendiculaires passe par le centre. Donc le centre est le point qui leur est commun. Et par là on voit combien il est facile de resoudre le Probleme que voicy:

Probleme.

Trouver la circonference qui passe par trois divers points donnez. IV

Il ne faut que faire ce qui a servi de preuve au Theoréme precedent, en remarquant que si ces trois points étoient dans la même ligne droite, le Probleme seroit impossible, parce que les perpendiculaires étant paralleles ne se rencontreroient jamais: au lieu qu'il est toûjours possible quand ils sont en deux differentes lignes, parce que les lignes qui les couperont perpendiculairement se rencontreront. VI. 34.

II. Corollaire.

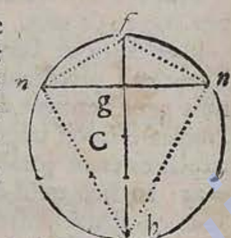
Deux circonferences ne peuvent avoir trois points communs, qu'elles ne les ayent tous. Car V.
par le premier Corollaire ces 3 points communs auront le même centre. Donc ces cercles seront concentriques. Or deux cercles étant concentriques, s'ils ont un rayon égal, tous les points des circonferences sont ensemble: comme quand un cercle de bois convexe est emboité dans un autre cercle de bois qui est creux.

III. Corollaire.

VI. Deux cercles ne ſe peuvent couper en plus de deux points. Car s'ils ſe coupoient en trois, leurs circonferences auroient 3 points communs, & par conſequent les auroient tous, & ainſi ne ſe couperoient point.

II. Theoréme.

VII. Les lignes qui coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, coupent auſſi par la moitié les arcs grands & petits que ſoûtiennent ces cordes de part & d'autre.



Soit la corde *m n* coupée par *f h* perpendiculairement & par la moitié; je dis que chacun des arcs *m f n*, & *m h n*, ſont coupez par la moitié, l'un en *f*, & l'autre en *h*. Car *f g* étant perpendiculaire à *m n*, & ayant un de ſes points, ſçavoir le point de ſection, également diſtant d'*m* & *n*, tous ſes autres points, comme *f* & *h*, ſeront auſſi également diſtans d'*m* & *n*, par V. 42. Donc tirant les cordes *f m* & *f n*, elles ſeront égales, & par conſequent les arcs qu'elles ſoûtiennent ſeront égaux, par V. 26. Donc par la même raiſon les cordes *h m* & *h n* ſeront égales, & les arcs qu'elles ſoûtiendront égaux. Donc les deux arcs *m f n*, & *m h n*, ſeront chacun partagez par la moitié par la ligne *f g*.

Corollaire.

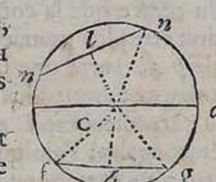
VIII. Tout rayon perpendiculaire à un diametre, coupe par la moitié la demy-circonference que ſoûtient ce diametre. Car y ayant un point dans ce rayon perpendiculaire à ce diametre également diſtant des extrémitez de ce diametre, ſçavoir le centre : tous les autres points de ce rayon ſeront auſſi également diſtans des extrémitez de ce diametre. Donc le point où ce rayon coupe cette demy-circonference en ſera également diſtant. Donc cette demy-circonference ſera coupée par la moitié. Par V. 26.

III. Theoréme.

La ligne qui paſſant par le centre coupe un arc par la moitié, coupe auſſi par la moitié & perpendiculairement la corde qui ſoûtient cét arc. IX.
Car il y a alors deux points dans la ligne qui coupe l'arc par la moitié, le centre & le point de ſection de l'arc, dont chacun eſt également diſtant des deux extrémitez de la corde.

IV. Theoréme.

Les cordes également diſtantes du centre dans le même cercle, ou dans cercles égaux, ſont égales; & les égales ſont également diſtantes du centre; & les plus proches du centre ſont les plus grandes. X.



Cela eſt clair des diametres, qui ſont également proches du centre, puis qu'ils paſſent tous par le centre.

Et il eſt clair auſſi que tout diametre eſt plus grand que toute autre corde, puiſque tirant du centre deux rayons aux extrémitez de toute autre corde, ces deux rayons ſeront égaux au diametre & plus grands que cette corde. par V. 5.

Pour ce qui eſt des autres cordes: 1. Les également diſtantes du centre ſont égales. Car ſi *m n* & *f g* ſont également diſtantes du centre: Donc les perpendiculaires du centre à chacune ſont égales, puis que c'eſt ce qui meſure la diſtance de ces cordes d'avec le centre. V. 38.

Et de plus ces perpendiculaires les diviſent chacune par la moitié, par 2. *ſup.* Donc tirant les rayons c *n* & c *g*: *l n*, & *h g* (qui ſont les moitiez de chacune de ces cordes) ſeront égales, par V. 51. parce que les obliques c *n* & c *g* ſont égales, & les perpendiculaires auſſi c *l* & c *h*. Donc les toutes *m n* & *f g* ſont égales. Ce qu'il falloit demontrer.

2. Les égales ſont également diſtantes du centre; car y ayant égalité entre les moitiez de ces cordes *l n* & *h g*, qui peuvent être conſiderées comme les éloignemens du perpendicule, & entre les rayons c *n* & c *g*, qui ſont les obliques: il faut qu'il y ait auſſi égalité entre les perpendiculaires du centre à ces cordes qu'elles diviſent par la moitié, (V. 52) & qu'ainſi ces cordes ſoient également diſtantes du centre.

3. Les plus proches du centre ſont les plus longues; car ſi la corde *m n* eſt plus proche du centre que la corde *p q*, elle doit être plus grande que la corde *p q*, parce que la perpendiculaire *c l* étant plus courte que la perpediculaire C *r*, & les obliques C *n* & C *q* étant égales: l'éloignement du perpendicule *l n* doit être plus grand que l'éloignement du perpendicule *r q*. (V. 55.) C'eſt à dire que la moitié d'*m n* eſt plus grande que la moitié de *p q*.

V. THEO-

V. THEORÉME.

DANS les mêmes cercles, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes ſoûtiennent les plus grands arcs du côté que ces arcs ſont plus petits que la demycirconference. XI.

Soit *m n* plus grande que *p q*; je dis que l'arc *m n* eſt plus grand que l'arc *p q*. Car prolongeant la perpendiculaire *C l* juſques à ce qu'elle ſoit auſſi longue que la perpendiculaire *C r*, comme *C S*, & tirant la corde *b d*, qui ſoit perpendiculaire à *C S*, cette corde *b d* eſt égale à *p q*, par le Theoréme precedent. Et ces deux cordes *m n* & *b d* étant paralleles (par VI. 13.) ne ſe peuvent jamais rencontrer.

Donc l'arc *m n* ne pourra manquer de comprendre l'arc *b d*. Donc il ſera plus grand que l'arc *b d*, puiſque le tout eſt plus grand que ſa partie.

Donc l'arc *m n* eſt plus grand auſſi que l'arc *p q*, qui eſt égal à l'arc *b d*. Ce qu'il falloit demontrer.

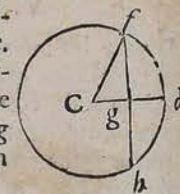
D'une autre meſure des Arcs, qui ſont les Sinus.

DEFINITIONS.

QUAND un arc eſt moindre que la moitié de la demy-circonference, ou le quart de la circonference, la perpendiculaire de l'une des extrémitez de l'arc ſur le rayon ou le diametre qui ſe termine à l'autre extrémité, s'appelle *le ſinus* de cét arc; & la partie du rayon ou diametre qui eſt depuis la rencontre de la perpendiculaire, ou ſinus, juſqu'à l'extrémité de l'arc, s'appelle *le ſinus verſe*. XII.

 Soit

Soit une circonference, dont le centre est C; & un arc *f d* moindre que la moitié de la demy-circonference. Soit tiré le rayon C *d*, & la perpendiculaire *f g* du point *f* sur ce rayon : cette perpendiculaire *f g* est le *sinus* de l'arc *f d*; & *g d* en est le *sinus verse*.



I. Lemme.

XIII. Que si on continuë *f g* jusqu'à *h*, autre point de la circonference, il est clair par le 1.er Theoreme qu'*f h* est partagée par la moitié par C *d*, & qu'ainsi le sinus *f g* est la moitié de la corde *f h*.

II. Lemme.

XIV. Et il est clair aussi par le 2.d Theoréme que l'arc *f d h*, soûtenu par la corde *f h*, est double de l'arc *f d*, dont *f g* est le sinus.

D'où il s'ensuit qu'on peut encore definir le *sinus* :

(Autre Definition des Sinus.)

XV. La moitié de la corde du double de l'arc.

Car *f g* est la moitié de la corde *f h*, laquelle corde *f g h* soûtient l'arc *f d h*, lequel est double de l'arc *f d*. Tout cela étant supposé, soit

VI. Theoréme.

XVI. Dans le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs qui ont le sinus égal sont égaux; & les sinus égaux donneront des arcs égaux; & les arcs qui ont les plus grands sinus, sont les plus grands. Car par le 1.er Lemme les sinus égaux sont moitiez de cordes égales. Or par

le 2.d Lemme ces cordes égales soûtiennent des arcs égaux qui sont doubles des arcs qui ont pour sinus ces sinus égaux. Donc les arcs doubles de ceux-là étant égaux, ceux là le sont aussi. La converse se prouve de la même sorte, sans qu'il soit besoin de s'y arrester.

Et de mêmes quand un sinus est plus grand que l'autre, la corde dont le plus grand est la moitié, est plus grande aussi que la corde dont le plus petit est la moitié. Donc cette plus grande corde soûtient un plus grand arc. Or l'arc qu'elle soûtient est double de celui dont la moitié de cette plus grande corde est le sinus. Donc l'arc dont la moitié de cette plus grande corde est le sinus, est plus grand que l'arc qui a pour sinus la moitié d'une plus petite corde. (Ce qu'il falloit demonstrer.)

VII. Theoréme.

Quand les sinus sont égaux, les sinus verses les XVII.
sont aussi, & les plus grands sinus donnent les plus grands sinus verses.

Car les sinus égaux sont également distans du centre.

Or cette distance du centre ôtée du rayon, ce qui reste est le sinus verse. Donc cette distance étant égale, le sinus verse est égal.

Que si le sinus est plus grand, cette distance est plus petite. Donc ôtant moins du rayon, ce qui reste, qui est le sinus verse, est plus grand.

Avertissement.

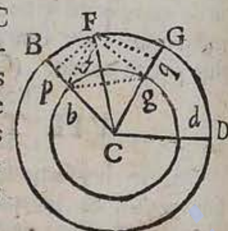
Les sinus ne mesurent proprement que les arcs XVIII.
moindres que la moitié de la demy-circonference. Mais cela n empêche pas qu'on ne s en puisse servir pour mesurer ceux qui sont plus grands. Car ce qui manque à ces plus grands arcs pour faire la de-

demycirconference, s'appelle le complement de ces plus grands arcs. Or ces complemens se mesurent par les sinus; & il est aisé de juger que ces complemens étant égaux, ces plus grands arcs sont égaux aussi. Mais qu'étant inégaux, celui qui a le plus petit complement est le plus grand.

VIII. Theoréme.

XIX. Quand plusieurs circonferences sont concentriques, & que du centre on tire des lignes indefinies, les arcs de toutes ces circonferences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonferences.

Soient autour du centre C deux circonferences concentriques, & soient tirées les deux lignes C B & C D; je dis que l'arc B D de la plus grande, & *b d* de la plus petite, sont proportionels à leurs circonferences.



Car les aliquotes quelconques de B D soient appellées X; je dis que si par tous les points de section on tire des lignes au centre, *b d* sera divisée par ces lignes en aliquotes pareilles.

Pour le prouver il suffit de considerer deux X, que je suppose être BF & F G. Tirant les lignes F C & G C, je dis que les arcs *b f* & *f g* sont égaux entr'eux aussi bien que B F & F G. Car tirant d'F une perpendiculaire sur B C & une autre sur G C, les deux perpendiculaires F *p* & F *q* seront les sinus d'arcs égaux, & par consequent égales (par 16. *sup.*) & les sinus verses de ces arcs B *p* & G *q* seront aussi égaux, (par 17. *sup.*) Donc *p b* & *q g* seront aussi égales.

Donc F *b* & F *g* sont égales, parce que ce sont les obliques dont les perpendiculaires F *p* & F *q* sont

sont égales, comme aussi les éloignemens des perpendicules *p b* & *q g*. V. 48.

Donc dans la ligne F C il y a deux points, sçavoir F & C, dont chacun est également distant de *b* & de *g*.

Donc F C coupe perpendiculairement & par la moitié la corde *b g*, & par consequent aussi l'arc *bfg*, (par 7. *sup.*)

Donc l'arc *b f* est égal à l'arc *f g*. Ce qu'il falloit demontrer.

Or cela étant demontré, il est clair qu'on prouvera la même chose de toutes les aliquotes de B D en les prenant deux à deux.

Donc B D étant divisé en aliquotes quelconques, les lignes menées au centre par tous les points de section feront des aliquotes pareilles dans *b d*, lesquelles on pourra appeller *x*.

Or appliquant X pour mesurer le reste de la grande circonference, si elle s'y trouve précisément tant de fois: menant des lignes par tous les points de section, *x* se trouvera aussi précisément tant de fois dans la petite circonference. Et si ce n'est dans la grande qu'avec quelque reste, ce ne sera aussi dans la petite qu'avec quelque reste.

Donc, par la definition des grandeurs proportionnelles, B D est à la grande circonference, comme *b d* à la petite, puisque les aliquotes quelconques pareilles de B D & de *b d* sont également contenuës dans les deux circonferences.

Definition.

Les arcs qui ont même raison à leur circonference soient appellez proportionnellement égaux, ou d'autant de degrez l'un que l'autre. Surquoi XX. il se faut souvenir que toute circonference grande ou ou petite est considerée comme divisée en 360 parties, qu'on appelle *Degrez*, & chaque degré en 60 *Minutes*, & chaque minute en 60 *Secondes*, & chaque seconde en 60 *Tierces*; & ainsi à l'infiny.

Et comme on ne regarde point la grandeur absoluë des portions d'une circonference, parce que cette grandeur nous est inconnuë, mais seulement la grandeur relative, c'est à dire par proportion à la circonference; on pourroit appeller simplement *égaux*, les arcs qui sont proportionellement égaux, parce qu'ils sont d'autant de degrez: & appeller *tout-égaux* ceux qui le sont tout ensemble proportionellement & obsolument, comme sont les arcs d'autant de degrez dans le même cercle.

IX. THEORÉME.

XXI. QUAND les cercles sont inégaux, les arcs proportionellement égaux sont soûtenus par de plus grandes cordes, & ont de plus grands sinus, dans les plus grands cercles.

Soient autour du centre C deux circonferences concentriques. Les arcs B D & *b d*, compris entre les mêmes rayons B C & D C, sont proportionellement égaux.

Or tirant les cordes B D & *b d*, & les divisant par la moitié aussi bien que les arcs par la ligne P C, les arcs B P & *b p* sont aussi proportionellement égaux. Or B F & *b f*, perpendiculaires sur P C, sont les sinus de ces deux arcs.

Et par VI. 12. B F est plus grande que *b f*.

Donc les arcs égaux ont de plus grands sinus dans les plus grands cercles.

Et de mêmes la corde B D est plus grande que *b d* (par VI. 31.) & aussi parce que B F, moitié de B D, est plus grande que *b f*, moitié de *b d*.

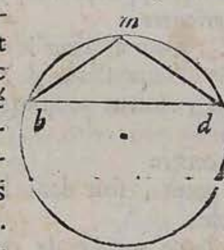
Donc

Donc les arcs B D & *b d* étant proportionellement égaux, celui du plus grand cercle a une plus grande corde.

X. THEORÉME.

LES cordes dans un même cercle ne sont point proportionelles aux arcs, mais les plus grands arcs (j'entens toûjours ceux qui ne sont pas plus grands que la demy-circonference) ont de plus petites cordes à proportion que les plus petits. C'est à dire que la corde d'un arc qui n'est que la moitié d'un plus grand arc, est plus grande que la moitié de la corde de ce plus grand arc, XXII.

La preuve en est bien facile. Car soit l'arc *b d* partagé en *m* par la moitié; *b m* égale à *d m* seront chacune la corde d'un arc qui n'est que la moitié de l'arc que soûtient la corde *b d*. Or ces deux cordes *b m* & *d m* sont plus grandes que *b d*, par V. 5. Donc étant égales, chacune est plus grande que la moitié de la corde *b d*.



COROLLAIRE.

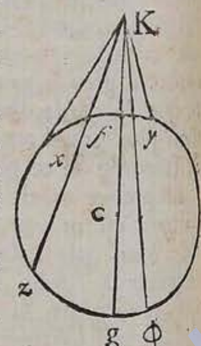
DE là il s'ensuit que plus les arcs sont grands, plus la difference est grande entre la longueur de l'arc & celle de la corde; & qu'au contraire plus les arcs sont petits plus cette difference diminuë. De sorte qu'on peut prendre un si petit arc, que cette difference sera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée. XXIII.

SECON-

SECONDE SECTION.

DES SECANTES INTERIEURES ET EXTERIEURES.

XXIV. Nous avons déja dit que les lignes menées à la circonference d'un point de dedans le cercle autre que le centre se pouvoient appeller *des secantes interieures*.



Et que quand le point étoit hors le cercle, & qu'elles n'étoient point tangentes, on les pouvoit appeller des *secantes exterieures*

Or pour abreger le discours dans l'expression de ces lignes, soient toûjours appellez

Le centre C

Le point, soit dans le cercle, soit hors le cercle, k.

La ligne menée de ce point passant par le centre, k g.

Celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe, k f.

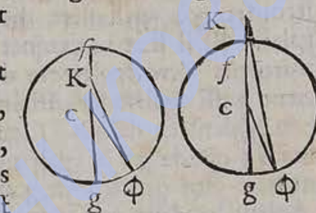
Les autres, { ———————— k x. / ———————— k y. } { ———————— k z. / ———————— k φ. }

Cela supposé, soit

I. THEO-

I. THEORÉME.

LA plus longue de ces lignes est K g. C'est à dire celle qui passe par le centre. XXV.

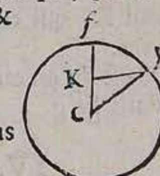


Car si on la veut comparer avec K Φ, soit tiré le rayon c Φ, qui est égal à c g; apres quoi K c plus c Φ, est plus grande que K Φ, par V. 5.

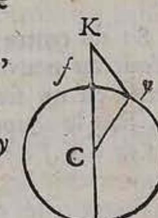
Donc K g est plus grande que K Φ.

II. THEORÉME.

LA plus courte de toutes ces lignes est K *f*. C'est à dire celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe. XXVI.



Car comparant K *f* avec K *y*, & ayant tiré le rayon C *y*:
Si K est au dedans du cercle,
C K plus K *f* est égale à C *y*.
Or C *y* est plus courte que C K plus K *y*.
Donc C K plus K *f* est plus courte que C K plus K *y*.
Donc ôtant C K, qui est commun, K *f* est plus courte que K *y*.



Que si K est hors le cercle,
K *f* plus *f* C est plus courte que K *y* plus *y* C, par V. 5.
Or *f* C est égale à *y* C.
Donc K *f* est plus courte que K *y*.

III. THEO-

III. THEORÉME.

XXVII. LES lignes menées de K à des points de la circonference également distans d'f ou de g sont égales. Et il faut remarquer que deux points ne sçauroient être également distans d'f, qu'ils ne soient aussi également distans de g. Mais on appelle également distans d'f ceux qui sont plus proches d'f que de g, & egalement distans de g ceux qui sont plus proches de g que d'f.

Soient les deux points également distans d'f, X & x. (*Voyez la fig. du 5e. Theor. cy dessous.*) La corde terminée par ces deux X & x est coupée perpendiculairement par la ligne f C, (V. 32.) puisque f par l'hypothese est également distant d'X & x, & C aussi, parce que c'est le centre du cercle.

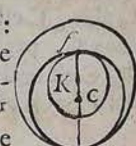
Donc tous les points de cette ligne sont également distans d'X & x. (par V. 42.) Donc le point K, qui en est un. Donc KX & K x sont égales.

C'est la meme chose de deux points également distans de g.

IV. THEORÉME.

XXVIII. SI du centre K, intervalle K f, ou K g, on décrit un nouveau cercle, il touchera le premier cercle en un seul point, c'est à dire en f, ou en g, sans le couper.

Car si K f est rayon du 2.^{d} cercle: comme cette ligne est la plus courte de toutes celles qui peuvent être menées de K à la circonference du 1.^{er} cercle, (par 26 sup.) toute autre ligne menée à la circonference du premier passera la circonference du second.

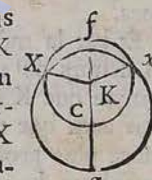


Et

Et au contraire si K g est le rayon du 2.^{d} cercle: cette ligne étant la plus longue de toutes celles qui peuvent être menées de K à la circonference du 1.^{er} cercle, (par 25 sup.) toute autre ligne menée de K à la circonference du 1.^{er} cercle ne pourra pas aller jusqu'à la circonference du 2.^{d}

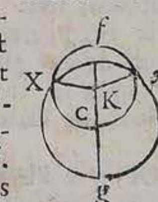
V. THEORÉME.

SI du centre K, intervalle plus grand que K f, & plus petit que K g, comme pourroit être K x, on décrit un cercle, il coupera la circonference du premier aux points X & x; c'est à dire en deux points également distans d'f, (ou également distans de g, si on avoit pris un point plus proche de g, pour determiner cét intervalle,) & la partie de la circonference du 1.^{er} cercle entre X & x, dont le milieu est f, sera au dedans du 2.^{d} cercle; au lieu que la partie de la même circonference du 1.^{re} cercle entre ces deux mêmes points X & x, dont g est le milieu, sera au dehors du 2.^{d} cercle. Car (par 6. S.) deux circonferences ne se peuvent couper en plus de deux points. XXIX.



Or cela étant: le rayon du 2.^{d} cercle étant K x, toute ligne menée de K à la circonference du 1.^{er} cercle qui sera égale à K x, se trouvera aussi terminée à le circonference du 2.^{d} cercle.

De plus, par le troisiéme Theoréme cette ligne égale à K x est celle qui est terminée à un point de la circonference du premier cercle, aussi distant d'f de l'autre côté qu' X en est distant de son côté. Donc X & x seront les deux seuls points dans lesquels la deuxiéme circonference coupera la premiere.



Or

Or il eſt clair que le point f ſe trouvera au dedans du 2.^{d} cercle, parce que K f eſt plus courte que K x, qui en eſt le rayon. Donc tout ce qui eſt d'une part entre f & X, & de l'autre entre f & x, ſe trouvera auſſi au dedans du 2.^{d} cercle; puis qu'il faudroit que le 2.^{d} cercle euſt coupé le 1.^{er} en d'autres points qu' X & x, afin que quelques uns des points plus proches d'f ſe trouvaſſent ou dans la circonference du 2.^{d} cercle, ou au dehors.

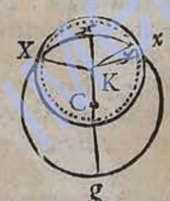
Et par la même raiſon le point g ſe trouvera au dehors du 2.^{d} cercle, parce que K g eſt plus longue que K x, qui en eſt le rayon: ce qui fait voir auſſi que tous les points de la 1.^{re} circonference plus proches de g qu' x ſe trouveront auſſi au dehors du 2.^{d} cercle.

VI. Theoréme.

XXX. De toutes les lignes menées de K, celles qui ſont menées à des points plus proches d'f ſont les plus courtes, & celles qui ſont menées à des points plus proches de g ſont les plus longues.

Suppoſons, par exemple, que le point y eſt plus proche d'f que le point x; je dis que K y eſt plus courte que K x.

Car ſi on décrit un cercle du centre K, intervalle K x: par le Theoréme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches d'f qu' x ſe trouveront au dedans du deuxiéme cercle.



Or, par l'hypotheſe, y eſt plus proche d'f, qu' x. Donc y eſt au dedans du 2.^{d} cercle. Donc K y eſt plus courte que K x, qui eſt un rayon du 2.^{d} cercle.

Que

Que ſi au contraire nous ſuppoſons que ϕ eſt plus proche de g que z; je dis que K ϕ eſt plus longue que K z. Car ſi on décrit un cercle du centre K, intervalle K z: par le Theoréme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches de g que z, ſe trouveront au dehors du deuxiéme cercle. Or, par l'hypotheſe, ϕ eſt plus proche de g que z. Donc ϕ eſt au dehors du cercle. Donc K ϕ eſt plus longue que K z, qui eſt un rayon du deuxiéme cercle.

I. Corollaire.

De nul point autre que le centre on ne peut mener trois lignes égales à la circonference. Car les trois points où ces trois lignes ſeroient terminées ne peuvent pas être également diſtans du point f, ou du point g. Donc ſi l'un des trois eſt plus proche ou plus éloigné du point f, la ligne qui y ſera terminée ſera plus courte ou plus longue que les deux autres. Donc, &c. XXXI.

II. Corollaire.

Le point d'où l'on peut mener trois lignes égales à la circonference, en eſt neceſſairement le centre. XXXII.

TROISIE'ME SECTION.

Des Tangentes.

Nous avons déja dit qu'on appelle *tangente* du cercle la ligne qui touche le cercle ſans entrer dedans, quoi que prolongée. XXXIII

I. The-

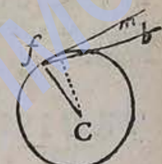
I. Theoréme.

XXXIV. Toute ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point; c'est à dire qu'il n'y a qu'un seul point qui soit commun à la circonference & à cette ligne; & ce point s'apelle *le point de l'attouchement.* Car puisque le rayon est perpendiculaire à cette ligne, c'est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées du centre à cette ligne. Donc toute autre menée du centre sera plus longue. Donc elle se terminera en un point hors de la circonference. Donc nul autre point que celui où ce rayon coupe perpendiculairement cette ligne ne pourra être commun à cette circonference & à cette ligne. Ce qu'il falloit demontrer.

II. Theoréme.

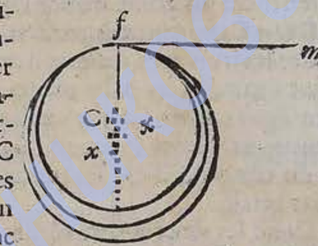
XXXV. On ne peut faire passer aucune ligne droite entre la tangente & la circonference, quoi qu'on en puisse faire passer une infinité de circulaires qui ne se rencontreront que dans le point de l'attouchement.

La premiere partie se prouve ainsi : Soit C *f* un rayon, *m f* la tangente: soit *b* un point quelconque au dessous de la tangente. Tirant de *b* une ligne à *f*, elle sera oblique sur C *f*, & inclinée vers C, parce que *m f* est perpendiculaire à C *f*. Donc la perpendiculaire de C à *b f* sera plus courte que C *f*, par V. 36. Donc elle se terminera dans le cercle (V. 27.) Donc une partie de *b f* sera au dedans du cercle. Donc on n'aura pas pû faire passer *b f* entre la tangente & la circonference.



La deuxiéme partie se prouve ainsi : Soit *f* C pro-

longée à l'infiny du côté de C, & soient tous les divers points de cette ligne au dessous de C appellez *x*. Toutes les circonferences qui auront l'un de ces points que j'appelle *x* pour centre, & *x f* pour rayon, auront *m f* pour tangente par le premier Theoréme, & ne rencontreront, ni la circonference qui a C pour centre, ni les unes les autres, qu'en *f* (par 28. S.) Donc toutes ces circonferences passeront entre la tangente & le premier cercle sans se rencontrer.



I. Probleme.

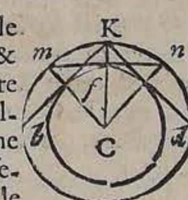
Décrire la tangente qui touche la circonference en un point donné. XXXVI.

Tirer un rayon de ce point donné; la perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon sera la tangente que l'on cherche.

II. Probleme.

D'un point donné hors le cercle tirer des tangentes au cercle. XXXVII.

Soit le point K donné hors le cercle, dont le centre est C, & le rayon C *f*. Je décris un autre cercle du même centre, intervalle CK; & puis ayant tiré la ligne KC, qui coupe en *f* la circonference du 1.er cercle, je tire par le point *f* la corde du grand cercle *m n*, qui coupe perpendiculairement KC, ce qui fait que *m n* touche le premier cercle en *f*.



K Cela

Cela fait, du point K je prens dans le grand cercle de part & d'autre les deux arcs K*b* & K*d*, égaux chacun à l'arc *m n*; Et je dis que les cordes K *b* & K *d* touchent le 1.er cercle, & qu'elles le touchent au point où les rayons du grand cercle *m* C & *n* C coupent ces cordes :

Car les trois arcs du grand cercle *m n*, K*b*, K*d* étant égaux, les trois cordes qui les soûtiennent sont égales aussi, & par consequent également distantes du centre, par 10. *sup*. Or *m n* est distante du centre C de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc les deux autres cordes K*b* & K*d* sont aussi distantes du centre de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc ce rayon leur est perpendiculaire, puis qu'autrement il ne mesureroit pas leur distance d'avec le centre. (V. 38.)

Donc par 34. *sup*. elles sont tangentes du premier cercle.

Et elles le touchent au point où elles sont coupées par les rayons du grand cercle *m* C & *n* C. Car le point K partageant par la moitié l'arc *m n*, le point *m* partage aussi par la moitié l'arc K *b*. Donc le rayon *m* C est perpendiculaire à la corde K *b*, (V. 32.) parce que les deux points *m* & C sont chacun également distans de K & de *b*.

Donc si le point où le rayon *m* C coupe la corde K *b* est *b* : ce point *b* sera aussi l'extrémité du rayon du premier cercle, qui est perpendiculaire à la corde K *b*, puis qu'autrement il faudroit que de C on pust tirer sur K *b* deux perpendiculaires differentes, ce qui ne se peut. (V. 37.)

I. Co-

I. Corollaire.

D'un point hors le cercle on peut tirer deux XXXVIII.
tangentes au cercle, & non plus.

Cela est clair par ce qui vient d'être demontré.

II. Corollaire.

On peut considerer les tangentes comme termi- XXXIX.
nées au point de l'attouchement; & alors

Les tangentes, ou menées à un même cercle d'un même point, ou de divers points également distans du centre, ou menées à des cercles égaux de points également distans des centres de chacun, sont égales.

Car il est visible, par la solution du deuxiéme Probleme, que dans tous ces cas, ces tangentes sont moitiez de cordes égales.

QUATRIEME SECTION.

Des Circonferences paralleles.

I. Lemme.

Une ligne droite est perpendiculaire à une cir- XL.
conference, autant que la nature de l'une & de l'autre le peut souffrir, lorsqu'elle est perpendiculaire à la tangente menée au point de la section.

II. Lemme.

D'où il s'ensuit, que toute ligne qui étant pro- XLI.
longée passe par le centre, est perpendiculaire à la circonference.

K 2 III. Lem-

III. LEMME.

XLII. LA distance d'un point à une circonference se mesure par la plus courte ligne qui puisse être menée de ce point à cette circonference. Or cette plus courte ligne est celle qui ne comprend point le centre, mais qui est dans la même ligne droite que celle qui y passe. (S. 26.)

Et par consequent cette ligne est perpendiculaire à la circonference, par les deux premiers Lemmes.

DEFINITION

DES CIRCONFERENCES PARALLELES.

XLIII. DEUX circonferences sont paralleles, lorsque tous les points de chacune sont également distans de l'autre.

C'est à dire, selon les precedens Lemmes, lorsque toutes les lignes droites menées chacune des points de l'une perpendiculairement sur l'autre, sont égales.

I. THEORÉME.

XLIV. TOUTES les circonferences concentriques (c'est à dire qui ont un même centre) sont paralleles.

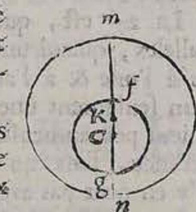
Car tous les rayons de la plus grande circonference sont perpendiculaires à l'une & à l'autre. Donc ôtant les rayons de la plus petite, ce qui restera entre les deux circonferences, sera égal, & en mesurera la distance. Donc tous les points de chacune seront également distans de l'autre. Donc elles sont paralleles.

II. THEO-

II. THEORÉME.

DEUX cercles non concentriques étant l'un dans l'autre, le diametre du plus grand qui passera par les deux centres, coupera chaque circonference par la moitié; & alors il arrivera 3 ou 4 choses considerables. XLV.

1. Les parties de ce diametre qui se trouveront d'un côté & d'autre entre les deux circonferences, c'est à dire *f m*, *g n*, sont perpendiculaires à l'une & à l'autre, & mesurent *f m* le plus grand, & *g n* le plus petit éloignement de ces deux circonferences.



2. Nulle autre ligne que ces deux là qui se trouvent dans ce diametre qui passe par les deux centres, ne peut être perpendiculaire à l'une & à l'autre circonference : toute autre ligne qui sera perpendiculaire à l'une des circonferences, étant oblique sur l'autre.

3. Tous les points d'une demy-circonference d'une part sont inégalement distans de l'autre demy-circonference de la même part.

4. Toutes les fois que deux points d'une circonference sont également distans de l'une ou l'autre des extremitez de son diametre, qui passe par les deux centres, ils sont aussi également distans de l'autre circonference.

Tout cela est si aisé à prouver par ce qui a été dit dans la 2.e Section, & par les trois Lemmes de celle-cy. que j'aime mieux le laisser à trouver pour exercer l'Esprit, que de perdre du tems à le demontrer.

COROLLAIRE.

IL s'ensuit de là, qu'on peut remarquer trois dif- XLVI.

differences entre le parallelisme des lignes droites, & celui des lignes circulaires.

La 1.re est, que la notion negative des paralleles droites, qui consiste à ne se rencontrer jamais quand on les prolongeroit à l'infini, n'a point de lieu dans les circulaires, qui peuvent bien ne se rencontrer jamais sans être paralleles, de sorte que pour l'être il faut que ce soit selon la notion positive, qui consiste en ce que les points de l'une sont toûjours également distans de l'autre.

La 2.de est, que deux lignes droites sont paralleles, quand une même ligne est perpendiculaire à l'une & à l'autre. Au lieu qu'il peut y avoir non seulement une ligne droite, mais deux, qui soient perpendiculaires à l'une & à l'autre circonference, sans qu'elles soient paralleles, mais il n'y en peut pas avoir trois.

La 3.e est, que deux lignes droites ne s'étant point croisées, il ne peut pas y avoir deux points de l'une également distans de l'autre, qu'elles ne soient paralleles. Au lieu que dans les circonferences non parelleles, il peut y avoir une infinité de points dans chacune, qui soient deux à deux également distans de l'autre. Mais il n'y en peut avoir trois ensemble.

Le fondement de ces differences vient d'une part de ce que la ligne circulaire est bornée en elle-même; & de l'autre de ce qu'il en faut avoir trois points pour en avoir la position: au lieu qu'il n'en faut que deux pour avoir celle de la ligne droite.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE HUITIE'ME.

DES ANGLES RECTILIGNES.

APRES avoir parlé des lignes, c'est suivre l'ordre de la Nature que de passer aux angles, qui sont plus composez que les lignes, tenant quelque chose des surfaces, comme nous allons voir. I.

DEFINITION DE L'ANGLE RECTILIGNE.

II. *L'angle rectiligne* est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, indefinie & in-

indeterminée ſelon l'une de ſes dimenſions, qui eſt celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, & determinée ſelon l'autre par la partie proportionnelle d'une circonference dont le centre eſt au point où ces lignes ſe joignent.

AUTRES DEFINITIONS.

III. Les lignes qui comprennent l'angle s'appellent ſes *côtez*.

IV. Le point où ces lignes ſe joignent s'appelle ſon *ſommet*.

V. Si l'on joint deux points de ces côtez par une autre ligne, cette ligne s'appelle *la baſe* ou *la ſoûtendante de l'angle*. Et l'on dit que cette ligne *ſoûtient* l'angle, & que l'angle eſt *oppoſé* à cette ligne, ou eſt *ſoûtenu* par cette ligne.

VI. Cette baſe s'appelle *corde* quand les côtez de l'angle ſont égaux, pource qu'alors ces côtez de l'angle ſont conſiderez comme rayons d'un cercle dont cette baſe eſt une corde.

VII. Que ſi de l'un des côtez on peut faire deſcendre une perpendiculaire ſur l'autre, cette perpendiculaire s'appelle le *ſinus* de cét angle.

VIII. Cette partie proportionelle de la circonference qui meſure la grandeur de l'angle s'appelle *l'arc que comprend l'angle*.

PROPOSITION FONDAMENTALE DE LA MESURE DES ANGLES.

IX. Les arcs de toutes les circonferences qui ont pour centre le point où les côtez de l'angle ſe coupent, ſont tous proportionels à leurs circonferences, & par conſequent determinent tous la même grandeur de l'angle.

La conſequence eſt claire par la definition de l'angle, puiſque nous avons dit que c'étoit une ſur-

face indeterminée ſelon une dimenſion, & qui n'étoit determinée ſelon l'autre que par une partie proportionnelle des circonferences qui ont pour centre le point où ſes coſtez ſe joignent.

Pour montrer donc que les arcs de ces circonferences determinent tous la même grandeur de l'angle, il ne faut que montrer que tous ces arcs ſont proportionels à leurs circonferences.

Or c'eſt ce qui a déja été prouvé, Livre VII. 19.

DE LA PREMIERE MESURE DE L'ANGLE, QUI EST L'ARC COMPRIS ENTRE SES CÔTEZ.

Il s'enſuit delà que pour ſçavoir la vraye grandeur d'un angle, il faut ſçavoir la grandeur proportionelle de l'arc compris entre ſes côtez, c'eſt à dire de combien de degrez eſt cét arc. Car un degré n'eſt pas le nom d'une grandeur abſoluë, mais proportionelle, puiſque, comme nous avons déja dit, il ſignifie la trois-cent ſoixantiéme partie de quelque circonference que ce ſoit, dont chacune en ſoy eſt plus grande ou plus petite ſelon que la circonference eſt plus grande ou plus petite: & il en eſt de même des minutes, des ſecondes, & des troiſiémes. C'eſt pourquoi on peut appeller *arcs égaux*, ſelon qu'il a été dit VII. 20. ceux qui ſont d'autant de degrez, quoi qu'ils puiſſent être inégaux ſelon leur grandeur abſoluë; & égaux en toute maniere, ou *tout-égaux*, ceux qui ſont d'autant de degrez, & qui ſont auſſi égaux ſelon leur grandeur abſoluë, tels que ſont les arcs d'autant de degrez dans les cercles égaux. X.

De l'Angle droit.

XI. C'est par là qu'on a divisé l'angle en *droit* & *non droit*, & le non droit, en *aigu* & *obtus*.

On appelle angle droit celui qui a pour mesure la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit :

1. Que tout angle droit a de l'autre côté sur la méme ligne un autre angle qui lui est égal, puisque l'angle qui est de l'autre côté a pour mesure ce qui reste de la demy-circonference, & qu'il en reste justement la moitié.

2. Qu'un angle droit est la méme chose qu'un angle de 90 degrez. Car la demy-circonference en ayant 180, la moitié de cette demy-circonference en a 90.

3. Que toute ligne perpendiculaire sur une ligne fait sur cette ligne deux angles droits, l'un d'un côté & l'autre de l'autre. Car elle partage en deux également la demy-circonference qui a pour centre le point de leur section, par VII. 8.

De l'Angle aigu.

XII. On appelle angle *aigu* celui qui est moindre qu'un droit, c'est à dire qui a pour mesure un arc moindre que la moitié de la demy-circonference, D'où il s'ensuit :

Que tout angle moindre que de 90 degrez est aigu.

De l'Angle obtus.

XIII. On appelle angle *obtus* celui qui est plus grand que l'angle droit, c'est à dire qui a pour mesure un arc plus grand que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit :

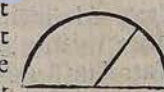
Que

Que tout angle plus grand que de 90 degrez est obtus.

I. Theoréme.

Toute ligne qui en coupe une autre obliquement, fait d'un côté une angle aigu & de l'autre un obtus, & les deux ensemble valent deux droits. XIV.

Car cette ligne partage inégalement la demy-circonference, & partant fait deux angles inégaux. Mais elle ne la divise qu'en deux portions, & partant les deux portions prises ensemble valent toute la demy-circonference.



II. Theoréme.

Lorsque plusieurs lignes droites en rencontrent une en un même point & du même côté, tous les angles que font toutes ces lignes entr'elles & avec la rencontrée valent deux droits. Car ils comprennent tous ensemble la demy-circonference, qui est la mesure de deux angles droits. XV.

Definition.

L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux angles droits, s'appelle le *complement de l'angle obtus.* XVI.

III. Theoréme.

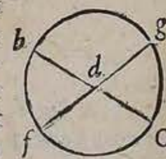
Lorsque deux lignes se coupent en passant de part & d'autre, il est bien clair que si elles se coupent perpendiculairement, elles font quatre angles égaux tous-quatre entr'eux, c'est à dire tous-quatre droits. XVII.

Mais si elles se coupent obliquement, elles en font deux aigus & deux obtus, dont l'aigu est op-

posé

poſé à l'aigu & l'obtus à l'obtus, & cela s'appelle être opposé au ſommet. Et les oppoſez ſont égaux.

Car faiſant un cercle du point où ces deux lignes *b* C & *f g* ſe coupent, chacune coupera la circonference par la moitié, & par conſequent la moitié *b g* C eſt égale à la moitié *f b g*. Or ces deux moitiez ont l'arc *b g* de commun, qui eſt l'arc d'un des angles obtus: & par conſequent ôtant cét arc, l'arc de l'aigu qui reſte d'une part, ſera égal à l'arc de l'aigu qui reſte de l'autre. On prouvera la même choſe des deux angles obtus.



IV. Theoréme.

XVIII. Lorsque pluſieurs lignes droites ſe rencontrent en un même point étant menées de toutes parts, tous les angles qu'elles font valent quatre droits. Car ils ont tous enſemble pour meſure une circonference entiére.

DES AUTRES MESURES

DE L'ANGLE.

XIX. *Quoi que l'angle n'ait en effet de vraye & naturelle meſure que l'arc d'un cercle: neanmoins comme on ne connoiſt pas la longueur des lignes courbes, on eſt obligé d'avoir recours à d'autres meſures, mais toûjours par rapport à celle-là.*

On les peut rapporter à trois, qui ſont toutes priſes de la baſe conſiderée diverſement: ou comme *corde*: ou comme *ſinus*: ou ſimplement comme *baſe*.

DE LA SECONDE MESURE DE L'ANGLE,

Qui est la Corde.

Nous commencerons par la baſe conſiderée comme corde, ſur quoi il faut remarquer XX.

1. Que pour cela il faut que les côtez de l'Angle ſoient pris égaux. (6. *ſup.*) Car alors ils ſont conſiderez comme rayons d'un cercle dont le centre eſt au ſommet, & ainſi la ligne qui en joint les extremitez eſt la corde de l'arc de ce cercle qui meſure cét angle.

2. Les angles ainſi conſiderez peuvent être appellez *iſoſceles*, c'eſt à dire à jambes égales.

3. Deux angles iſoſceles comparez enſemble peuvent être ou *équilateres* entr'eux, ou *inéquilateres*; c'eſt à dire que leurs côtez ſont rayons ou de cercles égaux, ou de cercles inégaux.

Cela ſuppoſé, pour bien comprendre toute cette meſure de l'angle, il ne faut que faire attention à ces Lemmes tirez des Livres V. & VII.

I. Lemme.

Dans les cercles égaux les cordes égales ſoûtiennent des arcs tout-égaux. Et les arcs égaux ſont ſoûtenus par cordes égales. (V. 26.) XXI.

II. Lemme.

Dans les cercles égaux les plus grandes cordes ſoûtiennent de plus grands arcs. Et les plus grands arcs ſont ſoûtenus par les plus grandes cordes. VII. 11. XXII.

III. Lemme.

XXIII. Les cercles étant inégaux, les cordes égales soûtiennent des arcs de plus de degrez dans les plus petits cercles VII. 21.

IV. Lemme.

XXIV. Les arcs d'un même nombre de degrez sont soûtenus par de plus grandes cordes dans les plus grands cercles. VII. 21.

I. Theoréme.

XXV. Trois sortes d'égalitez peuvent être considerées dans deux angles isosceles.

1. L'égalité des côtez de l'un à ceux de l'autre, qui fait qu'on les appelle *equilateres entr'eux*.

2. L'égalité des cordes, qui les peut faire appeller *isocordes*.

3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux de ces égalitez étant données, donnent la 3.me

Premier Cas.

XXVI. Les angles équilateres entr'eux & isocordes sont égaux. Car ils ont pour mesure des arcs tout-égaux, puisqu'étant équilateres ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux, & que par le 1.er Lemme les cordes égales de cercles égaux soûtiennent des arcs tout-égaux.

Second Cas.

XXVII. Les angles équilateres & égaux sont isocordes. C'est la converse du même premier Lemme.

Troi-

Troisiéme Cas.

Les angles isocordes & égaux sont équilateres entr'eux. Car il est aisé de voir par le 3.e Lemme que les cordes égales ne peuvent soûtenir des arcs égaux, que dans les mêmes cercles, ou en des cercles égaux. XXVIII.

II. Theoréme.

Quand il n'y a égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrive : XXIX.

Premier Cas.

N'y ayant égalité que dans les côtez, les plus grandes cordes donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grandes cordes. C'est le 2.d Lemme. XXX.

Second Cas.

N'y ayant égalité que dans les cordes, les plus grands côtez donnent les plus petits angles, & les plus petits angles ont les plus grands côtez. C'est le 3.e Lemme. XXXI.

Troisiéme Cas.

N'y ayant égalité que dans la grandeur des angles, les plus grandes cordes donnent les plus grands côtez, & les plus grands côtez ont les plus grandes cordes. C'est le 4.e Lemme. XXXII.

I. Probleme.

Couper en deux un angle donné. L'ayant pris isoscele, il ne faut qu'en couper la corde perpendiculairement & par la moitié, ce qui se fait XXXIII.

de

de la même sorte. Car alors l'arc sera partagé par la moitié, par VII. 7.

II. Probleme.

XXXIV. Ayant un point donné dans une ligne donnée, en élever une qui fasse sur cette ligne un angle égal à un donné. Soit l'angle donné. L'ayant fait isoscele, en marquer la corde; puis du point donné dans la ligne pris pour centre, décrire d'un intervalle égal aux côtez de l'angle donné une portion de circonference, dans laquelle, en commençant par le point où cette circonference coupera la ligne donnée, on prendra une corde égale à la corde de l'angle donné. La ligne menée du point donné à l'extremité de cette corde satisfera au Probléme. Car ces deux angles seront équilateres entr'eux & isocordes, & par consequent égaux par le premier Theoréme.

DE LA TROSIE'ME MESURE DE L'ANGLE,

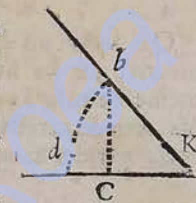
qui est le Sinus.

XXXV. Le sinus de l'arc qui mesure un angle, peut être appellé le sinus de cét angle. D'où il s'ensuit:

XXXVI. 1. Que comme il n'y a que les arcs moindres que la moitié de la demy-circonference qui ayent un sinus, il n'y a aussi que les angles aigus qui en ayent. Ce qui n'empêche pas qu'on ne se puisse servir des sinus pour comparer ensemble deux angles obtus, en mesurant par les sinus les angles aigus qui sont les complemens de ces obtus. Voyez VII. 18.

XXXVII. 2. Il s'ensuit que toute ligne menée d'un point de l'un des côtez d'un angle aigu perpendiculairement sur l'autre côté, est le sinus de l'arc qui mesure cét angle, & par consequent le sinus de cét angle.

Car soit K le sommet d'un angle aigu, & que de *b*, point quelconque de l'un de ses côtez, soit menée sur l'autre la perpendiculaire *b* C. Je dis que *b* C est le sinus de l'arc qui mesure cét angle. Car ayant prolongé K C jusques en *d*, en sorte que K *d* soit égale à K *b*; si du centre K, intervalle K *b*, on décrit un cercle, l'arc de ce cercle compris entre *d* & *b* sera la mesure de cét angle. Or *b* C est le sinus de cét arc, par VII. 12. Donc *b* C est le sinus de l'arc qui mesure l'angle K, & par consequent de l'angle K.



3. Il s'ensuit que le côté d'un des points duquel est menée la perpendiculaire sur l'autre côté, consideré depuis le sommet jusques à ce point, comme K *b*, peut être appellé le rayon de cét angle, parce qu'il est le rayon du cercle dont l'arc le mesure. Et l'autre côté depuis le point où tombe la perpendiculaire ou *sinus*, peut être appellé *l'anti-sinus*, qui est toûjours égal au rayon moins le *sinus verse*, D'où il s'ensuit: XXXVIII.

4. Que la grandeur du sinus reglant toûjours celle du sinus verse, (comme il a été montré VII. 17.) elle regle toûjours aussi celle des *anti-sinus*, quoique par rapport au rayon, puisque *l'anti-sinus* n'est autre chose que le rayon moins le *sinus verse*; de sorte que dans deux angles differens les rayons & les sinus ne sçauroient être égaux que les *anti-sinus* ne le soient aussi. XXXIX.

Tout cela supposé, soient considerez les Lemmes suivans.

I. Lemme.

XL. Quand on dit que deux angles qu'on veut mesurer par les sinus ont le rayon égal, c'est de même que si l'on disoit qu'ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux; & s'ils ont le rayon inégal, par des arcs de cercles inégaux.

II. Lemme.

XLI. Dans les cercles égaux les arcs égaux ont des sinus égaux, & les sinus égaux donnent des arcs égaux. VII. 16.

III. Lemme.

XLII. Dans les cercles égaux les plus grands arcs ont les plus grands sinus, & les plus grands sinus donnent les plus grands arcs. VII. 16.

IV. Lemme.

XLIII. Dans les cercles inégaux les arcs étant égaux, ceux des plus grands cercles ont les plus grands sinus. VII. 21.

V. Lemme.

XLIV. Dans les cercles inégaux les sinus étant égaux, ceux des plus grands cercles donnent des arcs proportionellement plus petits, c'est à dire de moins de degrez. C'est une suite claire du Lemme precedent.

I. Theoréme.

XLV. Trois égalitez peuvent être considerées dans les angles que l'on compare & que l'on mesure par les sinus.

1. L'éga-

1. L'égalité des rayons.
2. L'égalité des sinus.
3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux étant données donnent la 3.e

Premier Cas.

Les angles qui ont le rayon égal & le sinus égal sont égaux. 1.er & 2.d Lemme. XLVI.

Second Cas.

Les angles égaux qui ont le rayon égal, ont le sinus égal. 1.er & 2.d Lemme. XLVII.

Troisiéme Cas.

Les angles qui sont égaux & qui ont le sinus égal, ont le rayon égal. Car s'ils avoient le rayon inégal, ils seroient mesurez par des arcs de cercles inégaux: & par consequent (selon le 5.e Lemme) les sinus égaux donneroient des arcs proportionellement inégaux, & ainsi les angles ne pourroient pas être égaux. XLVIII.

II. Theoréme.

N'y ayant égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrivera: XLIX.

Premier Cas.

N'y ayant égalité que dans le rayon, les plus grands sinus donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grands sinus. 3.e Lemme. L.

Second Cas.

N'y ayant égalité que dans les sinus, le plus grand LI.

grand rayon donne le plus petit angle, & le plus petit angle a le plus grand rayon. 5.^{me} Lemme.

Troisiéme Cas.

LII. N'y ayant égalité que dans les angles, le plus grand rayon donne le plus grand ſinus, & le plus grand ſinus donne le plus grand rayon. 4.^{e} Lemme.

DES ANGLES FAITS PAR LES LIGNES

entre Paralleles.

LIII. Comme les perperpendiculaires entre les paralleles font des angles droits ſur l'une & ſur l'autre (ce qui eſt toûjours la même choſe :) il n'y a que les angles que font les obliques à conſiderer.

Mais ces obliques entre parelleles faiſant d'une part un angle aigu & de l'aurre un obtus, c'eſt l'aigu que l'on meſure premierement, & par l'aigu on connoiſt l'obtus. Et ainſi quand nous parlerons d'angles égaux, nous entendrons les aigus, & les obtus par conſéquence ſeulement.

Or dans la conſideration de ces angles aigus faits par des obliques entre paralleles,

L'oblique eſt le rayon de l'angle;

La perpendiculaire menée de l'extremité de l'oblique (qui eſt un point de l'une des paralleles) ſur l'autre parallele en eſt le ſinus.

D'où il s'enſuit, que les ſinus qui meſurent les angles que font des obliques entre les mêmes paralleles ſont tous égaux, parce que les perpendiculaires entre les mêmes paralleles ſont égales, VI. 16.

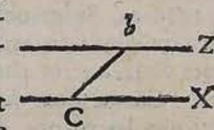
Com-

Comme auſſi entre differentes paralles, pourveu que les deux paralleles d'une part ſoient autant diſtantes l'une de l'autre, que celles de l'autre part. Et c'eſt ce qu'on peut appeller deux eſpaces paralleles égaux.

On peut tirer de là diverſes propoſitions importantes qui ne ſeront que des Corollaires du 1.^{er} *ou du* 2.^{d} *Theoréme.*

I. Corollaire.

Toute oblique entre deux paralleles fait les angles alternes ſur ces paralleles égaux, c'eſt à dire que l'aigu qui eſt d'une part eſt égal à l'aigu qui eſt de l'autre part, & par conſequent l'obtus à l'obtus. LIV.



Car ces angles alternes ont pour rayon cette même ligne oblique *b* C, & pour ſinus l'un la perpendiculaire de *b* ſur la parallele X, & l'autre la perpendiculaire de C ſur la parallele Z. Or ces deux perpendiculaires ſont égales. Donc par 46. S.

II. Corollaire.

Les obliques égales entre les mêmes paralleles font les angles égaux: par la même raiſon. LV.

III. Corollaire.

Les obliques entre paralleles qui font les angles égaux, ſont égales, S. 48. LVI.

IV. Corollaire.

Les plus courtes lignes entre paralleles font les plus grands angles; par le 2.^{d} Theoréme, 2.^{d} Cas. LVII.

V. Co-

V. Corollaire.

LVIII. Quand des lignes sont enfermées entre differentes lignes paralleles, on peut y considerer trois égalitez.

1. L'égalité des obliques.

2 L'égalité des angles.

3. L'égalité de la distance entre les unes & les autres de ces paralleles, ce qui fait que cette distance étant égale, les perpendiculaires entre ces differentes paralleles sont égales.

Or deux de ces égalitez étant données donnent la troisiéme.

1.er Cas. Si les obliques sont égales, & les angles qu'elles font entre leurs paralleles égaux, les unes & les autres paralleles sont également distantes. Car ce sont des angles qui sont égaux, & qui ont les rayons égaux (sçavoir ces obliques.) Donc leurs sinus sont égaux, par 47. S.

Or ils ont pour sinus les perpendiculaires entre leurs paralleles.

Donc ces perpendiculaires sont égales.

2.d Cas. Si les obliques sont égales, & les paralleles de part d'autre également distantes, les angles seront égaux, par 46. S.

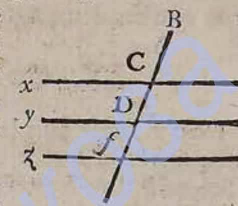
3.e Cas. Si les paralleles de part & d'autre sont également distantes, & que les angles soient égaux, les obliques sont égales, 48. S.

VI. Corollaire.

LIX. La même ligne coupant obliquement plusieurs paralleles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est à dire qu'elle fait sur toutes les angles aigus égaux. C'est une suite du premier Corollaire & de 14. S.

Soient trois lignes paralleles x, y, z, coupées par la ligne B en C, en D & en f. L'angle aigu vers C au

dessus d'x est égal à l'angle aigu de dessous, parce qu'ils sont opposez au sommet. (17. *sup.*) & l'angle aigu de dessous est égal à l'angle aigu vers D, au dessus d'y, parce qu'ils sont alternes, (54. *sup.*) & ce dernier est égal à l'aigu de dessous y, parce qu'il sont opposez au sommet. Et ce dernier à l'aigu vers f, au dessus de z, parce qu'ils sont alternes, & ainsi des autres. Donc tous les angles aigus que fait une même ligne sur diverses paralleles qu'elle coupe, sont égaux. Et de là il s'ensuit, que les obtus sont égaux aussi, parce que les aigus sont les complemens des obtus.



VII. Corollaire.

Plusieurs paralleles étant également distantes les unes des autres, c'est à dire la 1.re de la 2.de & la 2.de de la 3.e & la 3.e de la 4.e &c. LX.

Si une même ligne les coupe toutes, toutes les portions de cette ligne comprises entre deux de ces paralleles sont égales.

Car tous les angles aigus que fait cette ligne sur ces paralleles sont égaux. Et les sinus de ces angles, qui sont les perpendiculaires entre chaques deux paralleles, sont égaux aussi par l'hypothese.

Donc les rayons de ces angles, qui sont les portions de cette ligne comprises entre chaques deux paralleles, sont égaux. (48. *sup.*)

VIII. Corollaire.

Lors que deux lignes sont menées d'un même point sur une autre ligne, c'est comme si ces lignes étoient entre paralleles. LXI.

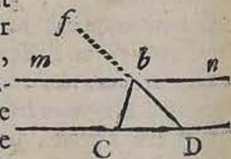
Car

Car on peut par ce point tirer une parallele à la ligne que ces deux lignes coupent.

IX. Corollaire.

LXII. Tout angle plus les deux angles que font ses côtez sur la base sont égaux à deux droits.

Soient *b* C & *b* D les côtez d'un angle, & CD la base. Par le precedent Corollaire, on peut mener par le point *b* la ligne *m n*, parallele à la base, sur laquelle parallele les côtez de de l'angle donné feront de nouveaux angles autour du donné, sçavoir l'angle *m b* C, & *n b* D. Or ces trois angles sont égaux à deux droits, par 15. S. Et chacun des deux qui sont à côté de l'angle donné, est égal à un de la base, sçavoir à son alterne, par 54. S.



Donc les deux de la base, plus l'angle donné, sont égaux à deux droits.

X. Corollaire.

LXIII. Si on prolonge un côté d'un angle vers le sommet de l'angle, comme si on prolongeoit D *b* jusques en *f*: l'angle que fait ce côté prolongé sur l'autre côté, comme l'angle *f b* C, est égal aux deux angles sur la base. Car cét angle, qui est appellé exterieur, plus l'angle du sommet, vallent deux droits. Or les deux angles sur la base, plus l'angle du sommet vallent aussi deux droits. Ostant donc l'angle du sommet qui est commun, l'angle exterieur sera égal aux deux angles sur la base.

Ce sera la même chose si on prolonge la base. Car l'angle exterieur que fera la base prolongée sur un côté,

côté, sera égal aux deux interieurs opposez; c'est à dire à l'angle que fait l'autre côté sur la base, plus l'angle du sommet.

XI. Corollaire.

Deux angles sont égaux, quand les angles que les côtez de l'un font sur sa base, sont égaux à ceux que les côtez de l'autre font sur la sienne. LXIV.

III. Probleme.

D'un point donné hors une ligne donnée, mener une ligne qui fasse sur la donnée un angle donné. LXV.

D'un point quelconque de la ligne donnée en élever une qui fasse sur la donnée l'angle donné, (par le 2.d Probleme, 34. *sup.*)

La parallele à cette ligne qui passera par le point donné & coupera la ligne donnée, satisfera au Probleme.

DE LA QUATRIE'ME MESURE DE L'ANGLE,

QUI EST GENERALEMENT LA BASE.

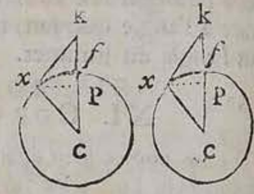
Cette mesure est la plus imparfaite, & ne peut servir à mesurer les angles, qu'en cas que les côtez de deux angles non isosceles soient égaux chacun à chacun, ce qui fera deux Theorémes.

I. Theoréme.

Lors que deux angles non isosceles sont equilateres entr'eux, c'est à dire que chacun des côtez de l'un est égal à chacun des côtez de l'autre: si la base est égale à la base, ces angles sont égaux. LXVI.

 C'est

C'est ce qui se prouve ainsi : Ou l'on peut faire tomber une perpendiculaire de l'extremité de l'un des côtez de ces angles sur l'autre côté, ou on ne le peut, comme lors qu'ils sont obtus.



1.er Cas. Si on le peut, (comme lorsque les angles sont k c x :) les perpendiculaires x P seront égales, par V. 58.

Or ces perpendiculaires sont les sinus de ces angles qui ont aussi le rayon égal, sçavoir c x. Donc ces angles sont égaux, par 46. S.

2.d Cas. Si on ne le peut, (comme si ces angles étoient c x k des mêmes figures :) alors la perpendiculaire x P menée du sommet même de chacun des angles sur la base, feroit voir que les deux angles formez par les côtez de chacun de ces angles obtus sur cette base, sont égaux chacun à chacun, (c'est à dire l'angle k égal à l'angle k, & l'angle c à l'angle c.) Donc les angles obtus c x k seront égaux, par 64. S.

II. Theoréme.

LXVII. Deux angles égaux étant équilateres entr'eux, ont la base égale.

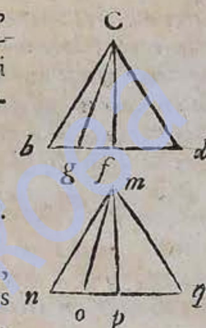
Ces angles égaux que l'on suppose équilateres entr'eux sont,

1. Ou droits.
2. Ou aigus.
3. Ou obtus.

1.er Cas. S'ils sont droits, comme *b f* C & *n p m* : ils ont les bases C *b* & *m n* égales, par V. 48.

2.d Cas

2.d Cas. S'ils sont aigus, comme *b d* C, *n q m* : les perpendiculaires C *f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales, par 47. S.



Donc *f d* = *p q*. V. 51.
Donc *b f* = *n p*. I. 19.
Donc C *b* = *m n*. V. 48.
Ce qu'il falloit demontrer.

3.e Cas. S'ils sont obtus, comme *b g* C, & *n o m* : les angles aigus C *g f*, *m o p*, complemens de ces obtus, seront égaux.

Donc les perpendiculaires C *f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales par 47. S.
Donc *g f* = *o p*. V. 51.
Donc *b f* = *n p*. I. 18.
Donc C *b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demontrer.

OBSERVATION,

Touchant la comparaison de la premiere mesure des angles avec ces trois dernieres.

Nous avons déja dit qu'il n'y avoit que l'arc qui fust la mesure parfaite & naturelle de l'Angle. Mais pour le mieux voir, il faut remarquer que les trois autres mesures montrent bien si un angle est égal à un angle, ou, entre des angles inégaux, quel est le plus grand ou quel est le plus petit ; mais il n'y a que l'arc qui donne la veritable proportion entre les angles inégaux. Car il est certain que si l'arc est triple, ou quadruple, ou quintuple de l'arc : l'angle sera aussi triple, quadruple, ou quintuple de l'angle. Mais cela ne se peut pas dire des trois au-

autres meſures : étant faux que ſi la corde eſt triple de la corde, lors même que les angles ſont équilateres entr'eux, l'angle ſoit triple de l'angle ; parceque les cordes ne ſont pas proportionelles à leurs arcs, comme il a été dit VII. 22. *Et c'eſt d'où vient la difficulté de la triſection de l'Angle ; parce qu'il ne ſuffit pas pour cela de couper la corde en trois, ce qui ſeroit facile : mais il faut couper l'arc en trois ; ce qui ne ſe peut par la* Geometrie *ordidinaire, c'eſt à dire en n'y employant que des lignes droites & circulaires.*

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE NEUFVIE'ME.

Des Angles qui ont leur ſommet hors le centre du Cercle, dont les Arcs ne laiſſent pas de les meſurer.

IL eſt bien aiſé de reconnoître que les Angles ne peuvent avoir pour veritable meſure que les arcs d'un cercle, & que toutes les autres meſures, comme les cordes, les ſinus, & les baſes, ne peuvent être que ſubſidiaires de celle là, & que même elles ne les meſurent qu'imparfaitement.

Mais on a creu juſques icy qu'on ne pouvoit employer pour meſurer un angle que les arcs du cercle au centre duquel eſt le ſommet de cét angle. Et *ainſi arrivant rarement que deux angles que l'on compare ayent leur ſommet au centre du même cercle : on ne pouvoit preſque jamais employer la meſure des arcs dans la comparaiſon de pluſieurs angles, & on étoit obligé d'avoir recours à de longs circuits par la conference de pluſieurs triangles ; ce qui obligeoit à conſiderer tant de lignes, qu'il étoit impoſſible que l'Imagination n'en fût extrémement fatiguée, qui eſt une des choſes qu'on doit éviter autant que l'on peut dans l'étude de la Geometrie.*

Cependant il eſt vray qu'il n'y a point d'angle qu'on ne puiſſe meſurer par les arcs d'un cercle, en quelque endroit qu'en ſoit le ſommet au regard du cercle : C'eſt à dire,

1. Soit qu'il ſoit dans la circonference du cercle :

2. Soit qu'il ſoit au dedans, quoi qu'ailleurs qu'au centre :

3. Soit mêmes qu'il ſoit au dehors, pourveu que ſes côtez coupent ou touchent le cercle.

C'eſt ce que l'on verra par ce Livre, qui ne ſervira pas ſeulement à meſurer avec une merveilleuſe facilité toutes ſortes d'angles, mais donnera auſſi par là de grandes ouvertures pour trouver beaucoup de nouvelles choſes touchant la proportion des lignes.

Mais pour rendre les preuves plus courtes, il eſt bon de ſuppoſer quelques Lemmes, ou clairs d'eux mêmes, ou demontrez dans le Livre precedent, afin d'y renvoyer quand on en aura beſoin.

I. Lemme. Definition.

II. Lors que dans toutes ces ſortes d'angles on dit qu'un tel arc du cercle auquel ils ont rapport leur ſert de meſure : cela veut dire, que ſi ce même angle étoit au centre du cercle, il auroit cét arc, ou un autre qui lui ſeroit égal, pour ſa meſure. Ou bien cela veut dire, qu'un angle qui ſeroit au centre de ce cercle, & qui auroit cét arc pour meſure, ſeroit égal à l'angle hors le centre qu'on dit avoir cét arc pour ſa meſure.

Et de là il s'enſuit, que dans ces ſortes d'angles, auſſi bien que dans ceux qui ſont au centre du cercle, deux angles ſont égaux quand ils ont pour meſure des arcs égaux : ou abſolument, quand ce ſont des arcs du même cercle, ou de cercles égaux : ou proportionellement, quand ce ſont des arcs de cercles inégaux ; l'arc du petit ayant la même raiſon à ſa circonference, que l'arc du grand à la ſienne : comme ſi l'un & l'autre étoit la dixiéme partie de ſa circonference, c'eſt à dire de 36 degrez.

II. Lemme.

Tout angle qui a pour meſure la Moitie'	de la demy-circonference eſt	*Droit.* III.
	d'un arc moindre que la demy-c.	*Aigu.*
	d'un arc plus grand que la demy-c.	*Obtus.*

Et de là il s'enſuit, que quand on dit que deux angles, ou trois angles, ſont égaux à deux droits : cela veut dire que ces deux angles, ou ces trois angles, pris enſemble, ont pour meſure la demy-circonference, c'eſt à dire 180 degrez.

Et quand on dit que deux angles ſont égaux à un droit : cela veut dire que ces deux angles, pris enſemble, ont pour meſure la moitié de la demy-circonference, c'eſt à dire 90 degrez.

III. Lemme.

Quand un tout eſt partagé en pluſieurs portions, comme *A* en *b*, *c*, *d*, comme ces trois portions enſemble font le tout : les trois moitiez de IV.

 ces

ces portions, c'est à dire une moitié de chacune, sont toutes ensemble la moitié du tout ; de sorte que ces trois expressions sont la même chose :

La moitié du tout ;

La moitié des trois portions que comprend le tout ;

Les trois moitiez de ces portions, c'est à dire une de chacune ; ce qui s'entend toûjours, quoi qu'on ne le marque pas.

Et ainsi supposant qu'*A* soit une circonference, & que *b*, *c*, *d*, soient trois arcs qui la comprennent toute :

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\text{ de l'arc } b,\\ \frac{1}{2}\text{ de l'arc } c,\\ \frac{1}{2}\text{ de l'arc } d,\end{array}\right\}$ sont égales, prises ensemble, à la $\frac{1}{2}$ de la circonference, c'est à dire à la demy-circonference, ou à 180 degrez.

Et supposant qu'*A* soit une demy-circonference, & que *b* & *c* soient deux arcs qui la comprennent : deux moitiez de ces arcs, une de chacun, valent la moitié de la demy-circonference, c'est à dire 90 degrez.

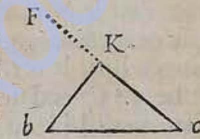
Et alors on peut exprimer la moitié de l'un de ces arcs en deux manieres : ou par son propre nom, comme la $\frac{1}{2}$ d'un tel arc ; ou par la moitié du tout dont il est portion, moins la moitié de l'autre arc.

Ainsi étant donné une demy-circonference qui comprend les arcs *b* & *c* : la $\frac{1}{2}$ de l'arc *b* est la même chose que la moitié de la demy-circonference, moins la $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*.

Enfin si un tout a deux portions : la moitié de la plus grande, moins la moitié de la plus petite, est la même chose que la moitié du tout moins la petite entiere. Car si le tout a pour portions *b* & *c*, la moitié du tout est égale à la moitié de *b*, plus la moitié de *c*. Il faut donc ôter deux fois

fois la moitié de *c* de la moitié du tout, pour rendre la moitié du tout égal à la moitié de *b* dont on auroit ôté la moitié de *c*.

IV. Lemme.



Enfin il se faut souvenir, V.

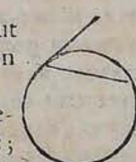
1. Que tout angle, plus les deux que font ses côtez sur sa base, sont égaux à deux droits.

2. Que les deux angles sur la base d'un angle droit sont égaux à un droit.

3. Que si on prolonge un côté de l'angle vers le sommet : le nouvel angle que fait ce côté prolongé sur l'autre côté, est égal aux deux angles qui sont sur la base du premier angle. Ainsi l'angle F K *b* est égal aux angles vers *b* & vers *c*.

La premiere sorte d'angles, dont le sommet est dans la circonference d'un Cercle donné.

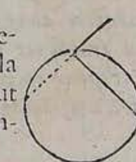
Division.



Le sommet d'un angle ne se peut terminer dans la circonference d'un cercle qu'en 3 manieres : VI.

1. Quand l'un des côtez est au dedans du cercle, & l'autre au dehors ;

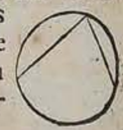
2. Quand tous les deux sont au dedans ;



3. Quand ils sont tous-deux au dehors du cercle. Mais parce que la premiere se subdivise en deux, on peut compter 4 genres de cette sorte d'angles.

Le 1.er Quand l'un des côtez est au dedans du cercle, & en est une corde, & que l'autre l'autre côté qui eſt au dehors, touche le cercle.

Le 2.d Quand l'un des côtez étant auſſi au dedans du cercle, celui qui eſt au dehors coupe le cercle, & entre dans le cercle lorſqu'on le prolonge de ce côté-là : ou que ce n'eſt mémes qu'une corde prolongée hors le cercle.



Le 3.e Quand tous les deux côtez ſont au dedans du cercle, & en ſont deux cordes.

Le 4.e Quand ils ſont tous-deux au dehors.

Mais parce qu'alors cette ſorte d'angle ne peut avoir de rapport au cercle, que parce qu'il ſeroit égal à un angle qu'on lui opoſeroit au ſommet, qui ſeroit neceſſairement ou du 1.er ou du 3.e genre : il ne ſera point neceſſaire de rien dire de ce 4.e genre, puiſqu'on en pourra juger par les autres.

Et ainſi il ne reſtera qu'à donner la meſure des trois premiers ; ce que nous ferons par trois Theorémes trés-clairs & trés-faciles, & dont même les deux derniers ne ſeront qu'une ſuite du premier : & en même temps ſi féconds, pour parler ainſi, qu'un trés-grand nombre de propoſitions qui ne ſe prouvent dans la Geometrie ordinaire que par des voyes trés obſcures & trés embaraſſées, s'en déduiront ſans peine, comme n'en étant que de ſimples Corollaires.

Mais pour cela, il eſt neceſſaire de marquer la maniere dont on exprime les angles du premier & du troiſiéme genre dans la Geometrie ordinaire. Car pour celui du deuxiéme, perſonne ne les a encore conſiderez.

PRE-

PREMIER AVERTISSEMENT.

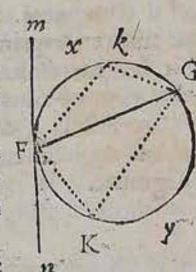
DEFINITIONS.

L'ANGLE du premier genre, qui eſt celui qui VII.
eſt compris entre une corde & une tangente, eſt appellé ordinairement *angle du ſegment, angulus ſegmenti.*

Et l'angle du 3.e genre qui eſt compris entre deux cordes qui ſe terminent d'une part à un même point de la circonference, *l'angle dans le ſegment, angulus in ſegmento.* Ce que pour mieux entendre, il faut remarquer, que toute corde partage le cercle en deux portions, qui ſont appellées *ſegmens*, & que ces ſegmens ſont égaux quand cette corde eſt un diametre, & alors on les appelle des demy-cercles, & l'arc de chacun eſt une demy-circonference :

Mais qu'ils ſont inégaux, quand c'eſt une autre corde que le diametre, l'un étant plus petit que le demy-cercle, & l'autre plus grand. De ſorte que pour abreger nous appellerons l'un *le petit ſegment*, & l'autre *le grand ſegment.*

Et delà il eſt clair que l'arc du petit ſegment eſt plus petit que la demy-circonference, & que l'arc du grand ſegment eſt plus grand que la demy-circonference.



Cela ſuppoſé, ſi on tire la corde F G, & au point F, la tangente *m n* : F *x* G eſt le petit ſegment, & F *y* G le grand ſegment.

Et l'angle G F *m*, l'angle du petit ſegment ; parce que la tangente *m* F eſt du côté de ce ſegment-là.

Et l'angle G F *n*, l'angle du grand ſegment.

Mais

Mais l'angle F *k* G eſt l'angle dans le petit ſegment.

Et l'angle F K G, l'angle dans le grand ſegment.

II. Avertissement.

VIII. On peut encore remarquer qu'au regard de l'angle du ſegment, il faut que la corde qui diviſe les deux ſegmens ſoit décrite ; parce qu'elle fait l'un des côtez de l'angle. Mais que cela n'eſt pas neceſſaire au regard de l'angle dans le ſegment, parce que la corde n'eſt que la

baſe de cét angle, & qu'elle eſt ſuffiſamment marquée par les deux points de la circonference auſquels aboutiſſent les deux côtez de l'angle. Ainſi l'angle F K G eſt ſuffiſamment marqué, quoi que la ligne F G ne ſoit que ſous-entenduë & non tracée.

III. Avertissement.

IX. L'angle dans le ſegment ſe peut exprimer en deux manieres ; ou par rapport au ſegment dans lequel il eſt inſcrit, ſon ſommet ſe trouvant dans l'arc de ce ſegment : ou par rapport à l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Et c'eſt en cette maniere qu'il vaut mieux l'exprimer, quand la corde qui joindroit les extrémitez de ſes côtez n'eſt pas marquée, comme dans l'angle F K G, qui eſt appuyé ſur l'arc F Z G ; & alors on dit ſimplement que c'eſt un angle inſcrit dans le cercle, ſans parler de ſegment.

IV. Aver-

IV. Avertissement.

Il eſt aiſé de voir que l'angle inſcrit dans un ſegment eſt toûjours appuyé ſur l'arc du ſegment opposé. Et qu'ainſi l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit ſegment : & au contraire l'angle dans le petit ſegment eſt appuyé ſur l'arc du grand. X.

V. Avertissement.

Enfin il faut remarquer, que quand on parle des arcs que ſoûtiennent les côtez d'un angle inſcrit dans le cercle, on doit entendre les deux qui ſont à côté l'un de l'autre, qui ſe joignent ſeulement en un point, & qui avec celui ſur lequel l'angle inſcrit eſt appuyé comprennent toute la circonference. XI.

PREMIER THEOREME,

FONDAMENTAL DE TOUS LES AUTRES.

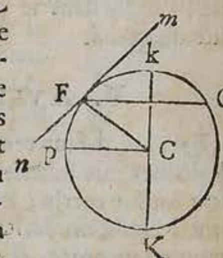
Tout angle compris entre une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par cette corde du côté de la tangente. XII.

Et parce que cét angle eſt auſſi appellé l'angle du ſegment vers lequel eſt cette tangente : ſelon cela on doit dire, qu'il a pour meſure la moitié de l'arc de ce ſegment-là. De ſorte que ſi c'eſt l'angle du petit ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment ; & ſi c'eſt l'angle du grand ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Ce Theoréme eſt le fondement de la meſure des angles par des arcs de cercles hors le centre deſquels est leur sommet, & la preuve en est trés-facile.

Soit la corde F G, & la ligne *m n* qui touche en F le cercle dont le centre est au point C. L'angle *m* F G est l'angle du petit segment, & *n* F G l'angle du grand.

Soit tiré le diametre *k* K perpendiculaire à F G; & le rayon C F; & P C perpendiculaire au diametre K *k*, & par consequent parallele à F G. Ce diametre *k* K coupera par la moitié les arcs du grand & du petit segment. (VII. 2. & 7.) D'ou il s'ensuit que l'angle au centre F C k a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment. Et qu'au contraire l'angle F C K a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.



De sorte que le Theoréme sera demontré, (par le 1.er Lemme,) si on peut faire voir, que l'angle du petit segment *m* F G est égal à l'angle au centre F C *k*. Or cela est facile. Car C P & F G étant paralleles, les angles alternes que fait sur l'une & sur l'autre le rayon C F, (c'est à dire les angles P C F, & C F G,) sont égaux. (VIII. 54.)

Or l'angle *m* F C (qui comprend l'angle du petit segment & l'angle C F G,) est droit, (VII. 34.) & par consequent égal à l'angle P C *k*, qui est droit aussi, & qui comprend les deux angles F C *k* & P C F. Donc ôtant de part & d'autre les angles C F G & P C F, (que l'on vient de faire voir être égaux:) l'angle du petit segment demeurera égal à l'angle F C *k*, qui a pour mesure la moitié de l'arc de ce petit segment.

Donc l'angle du petit segment *m* F G, a aussi pour

pour mesure la moitié de cét arc du petit segment. Ce qu'il falloit demontrer.

On fera voir de mémes que l'angle du grand segment *n* F G est égal à l'angle au centre F C K, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

Car l'angle du grand segment comprend l'angle droit *n* F C & l'angle C F G. Et l'angle au centre F C K comprend aussi l'angle droit P C K & l'angle P C F.

Or les angles C F G & P C F sont égaux, comme il vient d'être dit. Donc étant ajoûtez chacun à un droit, ils rendent égaux l'angle du segment & l'angle au centre, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

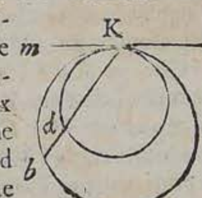
Donc (par le 1.er Lemme) l'angle du grand segment a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

I. Corollaire.

L'Angle du demy-cercle est droit. XIII.
Celui du petit segment est aigu.
Celui du grand, obtus
Cela est clair par le 2.e Lemme.

II. Corollaire.

Lorsque deux cercles, dont l'un est dans l'autre, se touchent: toutes les cordes menées du point de l'attouchement à la circonference du plus grand cercle soûtiennent des arcs proportionnellement égaux dans les deux cercles; c'est à dire que la ligne entiere soûtient dans le grand cercle un arc égal à celui que soûtient dans le petit la partie K *d* de cette même ligne. XIV.



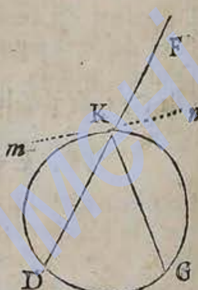
Car

Car les angles *m* K *b* & *m* K *d* sont le même angle. Or l'un a pour mesure la moitié de l'arc *k b*, & l'autre la moitié de l'arc K *d*. (12. *Sup.*) Donc ces deux arcs sont proportionnellement égaux.

II. THEORÉME.

XV. Tout angle dont le sommet est dans la circonference, & qui est compris entre une corde & la partie d'une autre corde prolongée hors le cercle du côté qu'elle est hors le cercle, a pour mesure la moitié des deux arcs qui sont à côté du sommet de cét angle, & qui sont soûtenus par les deux cordes, dont l'une est le côté de l'angle, & l'autre en fait l'autre côté par sa partie prolongée hors le cercle.

Soient les deux cordes K D & K G, dont K D soit prolongée en F hors le cercle; je dis que l'angle F K G a pour mesure la moitié des deux arcs K D & K G.



Car (par VII. 36.) soit tirée par le point K la tangente *m n* : l'angle F K G comprend les deux angles F K *n* & *n* K G. Or l'angle F K *n* est égal à l'angle *m* K D, (VIII. 17.) parce qu'il lui est opposé au sommet. Donc l'angle F K G est égal aux deux angles *n* K G & *m* K D.

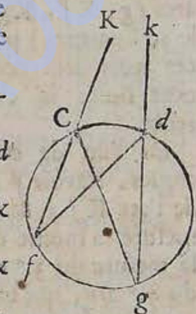
Or, par le 1.er Theoréme, *n* K G a pour mesure la moitié de l'arc K G, & *m* K D a pour mesure la moitié de l'arc K D.

Donc l'angle F K G, qui est égal à tous les deux, a pour mesure l'une & l'autre moitié de ces deux arcs. C'est à dire la moitié de ces deux arcs, par le troisiéme Lemme.

Co-

COROLLAIRE.

Si l'on joint les extremitez de deux cordes par deux autres cordes qui se croisent, & que l'on prolonge hors le cercle les deux premieres cordes: les angles que le prolongement de chacune fera sur les cordes qui se croisent, seront égaux. XVI.



Soient les deux premieres cordes C *f* & *d g*.

Les deux qui se croisent, *f d* & *g* C.

Les prolongemens, K C & *k d*.

Je dis que les angles K C *g* & *k d f* sont égaux.

Car, par le precedent Theoréme, l'un & l'autre a pour mesure la moitié des arcs *f* C, C *d*, *d g*.

III. THEORÉME.

Tout angle inscrit au cercle, c'est à dire compris entre deux cordes qui ne se joignent que dans la circonference, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. XVII.

Et parce qu'on appelle aussi ces angles *angles dans le segment*: selon cela,

Tout angle dans un segment a pour mesure la moitié de l'arc du segment opposé. (*Voyez le* 4.e *Avertissement*, 10. *Sup.*)

La preuve en est trés facile par le premier Theoréme.

Soit l'angle *f* K *g*. Je dis qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *f g*.

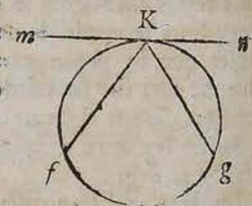
Soit menée par le sommet K la tangente *m n*; l'angle inscrit *f* K *g*, plus les deux qui sont à cô-

té

té f K m & g K n, valent deux droits. (VIII. 15.)

Donc ils ont pour meſure la demy-circonference, par le 2.e Lemme.

Donc ils ont pour meſure les trois moitiez des arcs fg, Kf, Kg, (par le 3.e Lemme,) parce que ces trois arcs comprennent toute la circonference.



Or l'un de ces trois angles, ſçavoir f K m, a pour meſure la moitié de l'arc Kf; & l'autre, ſçavoir g K n, a pour meſure la moitié de l'arc K g. Donc il reſte pour la meſure du 3.e qui eſt l'angle inſcrit, la moitié du 3.e arc, qui eſt f g.

On peut encore prouver la même choſe par le 2.d Theoréme. Car ſi on prolonge f K juſques à b: les angles f K g & g K b valent deux droits, (VIII. 14.) & par conſequent ont pour meſure la moitié de la circonference, & par conſequent auſſi les trois moitiez des trois arcs K f, K g, f g.

Or l'angle b K g a pour ſa meſure la moitié des deux arcs K f & K g, par le deuxiéme Theoréme.

Reſte donc pour la meſure de l'angle inſcrit la moitié du troiſiéme arc, qui eſt f g.

I. Corollaire.

XVIII. Il paroiſt par là, que ſi on ôte de la circonference entiere, c'eſt à dire de 360 degrez, les deux arcs que ſoûtiennent les côtez de l'angle inſcrit, la moitié de ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle inſcrit; comme ſi l'un de ces arcs eſt de 100 degrez, & l'autre de 44: ôtant 144 de 360, il reſtera 216, dont la moitié eſt 108 pour la meſure de l'angle inſcrit.

II. Corollaire.

Il paroiſt auſſi qu'on peut dire encore: Que XIX.
tout angle inſcrit a pour meſure la demy circonference, moins la moitié des deux arcs qui ſont ſoûtenus par ſes côtez, ou moins l'arc qui eſt ſoûtenu par l'un de ſes côtez quand il eſt Iſoſcele.

Cela eſt clair par la demonſtration precedente, & par le troiſiéme Lemme.

Et cette meſure eſt ſouvent plus commode que l'autre; comme ſi l'on ſçait que des arcs que ſoûtiennent les côtez de l'angle inſcrit l'un eſt de 100 degrez, & l'autre de 44: ôtant 50 & 22, qui ſont 72, de 180, ce qui reſtera, qui eſt 108, eſt la meſure de cét angle inſcrit.

Et cela eſt encore plus facile quand l'angle inſcrit eſt Iſoſcele, comme ſi l'un & l'autre de ſes côtez ſoûtient un arc de 36 degrez; car ôtant 36 de 180, ce qui reſte, qui eſt 144, eſt la meſure de cét angle inſcrit.

III. Corollaire.

Tous les angles inſcrits dans le même ſegment, XX.
ou appuyez ſur le même arc, ou ſur des arcs égaux, ſont égaux. Car ils ont la moitié du même arc, ou de deux arcs égaux, pour meſure. Donc ils ſont égaux par le premier Lemme.

Et il eſt clair auſſi (par le premier & le deuxiéme Corollaire,) que des angles inſcrits ſont égaux, quand les arcs que ſoûtiennent les deux côtez de l'un, ſont égaux, pris enſemble, aux arcs que ſoûtiennent

nent les deux côtez de l'autre ; & qu'il ne peuvent être égaux que cela ne ſoit.

Que ſi, au contraire, des angles inſcrits ſont ſuppoſez égaux, ils faut qu'ils ſoient appuyez ſur des arcs ou tout-égaux, ſi c'eſt dans le même cercle ou en des cercles égaux que ces angles ſoient inſcrits : ou qui ne ſont que proportionellement égaux ſi c'eſt dans des cercles inégaux. Ce qu'il faut auſſi ſuppoſer dans la premiere partie de ce Corollaire. Car les arcs qui ne ſont que proportionnellement égaux ſont autant pour l'égalité des angles, que s'ils étoient tout-égaux.

IV. Corollaire.

XXI. Si deux angles inſcrits en divers cercles ſont égaux, & qu'ils ſoient ſoûtenus par des cordes égales, les cercles dans leſquels ils ſont inſcrits ſont égaux.

Car les angles inſcrits en divers cercles ne ſçauroient être égaux, qu'ils ne ſoient appuyez ſur des arcs proportionellement égaux ; & des arcs proportionellement égaux ne ſçauroient être ſoûtenus par des cordes égales en divers cercles, que les cercles ne ſoient égaux. Donc, &c.

V. Corollaire.

XXII. Lorsque deux cercles dont l'un eſt au dedans de l'autre ſe touchent, ſi du point de l'attouchement on méne deux lignes juſques à la circonference du plus grand : les arcs de l'une & de l'autre circonference compris entre ces deux lignes ſeront proportionnellement égaux. Car le même angle ſera meſuré par la moitié de l'un & de l'autre de ces arcs.

VI. Corollaire.

Si un cercle a pour centre un point de la circonference d'un autre cercle, & que de ce point on tire deux lignes qui coupent l'une & l'autre circonference : des deux arcs compris entre ces deux lignes, celui de la circonference laquelle a ce point pour centre, eſt proportionnellement égal à la moitié de l'autre, c'eſt à dire à la moitié de l'arc de celle dans laquelle eſt ce point. Car le même angle a pour meſure le premier arc entier & la moitié de l'autre. XXIII.

VII. Corollaire.

Si l'angle inſcrit & l'angle au centre ſont appuyez ſur le même arc, l'angle au centre eſt double de l'angle inſcrit. Car l'inſcrit a pour meſure la moitié de l'arc, qui entier eſt la meſure de l'angle au centre. XXIV.

VIII. Corollaire.

Tous les angles dans un ſegment ſont égaux à l'angle du ſegment oppoſé. Et ainſi l'angle dans le grand ſegment eſt égal à l'angle du petit ſegment ; & l'angle dans le petit ſegment eſt égal à l'angle du grand. XXV.

Car l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit. Donc il a pour meſure la moitié de l'arc du petit, qui eſt auſſi la meſure de l'angle du petit ſegment.

IX. COROLLAIRE.

XXVI. L'ANGLE dans le demy-cercle eſt droit.
Dans le grand ſegment, aigu.
Dans le petit, obtus.
Cela eſt clair par le deuxiéme Lemme.

X. COROLLAIRE.

XXVII. LES angles inſcrits en deux ſegmens oppoſez ſont égaux à deux droits. Car les arcs des deux ſegmens comprennent toute la circonference. Donc la moitié de l'un, qui eſt la meſure de l'un de ces angles, plus la moitié de l'autre, qui eſt la meſure de l'autre angle, valent la demy-circonference, (par le troiſiéme Lemme.) Donc pris enſemble ils ont pour meſure la demy-circonference. Donc ils valent deux droits.

XI. COROLLAIRE.

XXVIII. SI quatre cordes ne ſe joignent qu'aux extremitez, elles font quatre angles inſcrits, dont les oppoſez ſont égaux à deux droits. C'eſt la même choſe que le precedent.

XII. COROLLAIRE.

XXIX. L'ANGLE aigu qui eſt dans le grand ſegment eſt le complement de l'obtus qui eſt dans le petit. Cela eſt clair, puiſque les deux enſemble valent deux droits.

XIII. COROLLAIRE.

XXX. LA moitié de la baſe d'un angle inſcrit eſt ſon ſinus, s'il eſt capable d'en avoir, c'eſt à dire s'il eſt aigu : ou de ſon complement, s'il eſt obtus. Car le ſinus eſt la moitié de la corde du double de

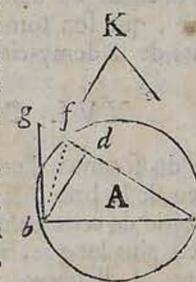
de l'arc. (VII. 15.) Or la baſe d'un angle inſcrit eſt la corde d'un arc qui eſt double de celui qui meſure l'angle inſcrit. Donc la moitié de cette corde eſt ſon ſinus, s'il eſt aigu : ou s'il eſt obtus, le ſinus de ſon complement, c'eſt à dire de l'angle aigu, qui étant inſcrit dans le ſegment oppoſé, a auſſi cette corde pour ſa baſe.

XIV. COROLLAIRE.

ON dit qu'un ſegment eſt capable d'un tel angle, quand tous les angles dans ce ſegment ſont égaux à cét angle. XXXI.

Et quand cela eſt, il eſt impoſſible qu'un angle de cette grandeur ait pour baſe la corde de ce ſegment, que ſon ſommet ne ſe trouve dans un des points de l'arc du ſegment.

Suppoſons par exemple que le ſegment A ſoit capable de l'angle K ; je dis que tout angle égal à l'angle K, qui aura *b* C pour baſe, aura ſon ſommet dans un des points de l'arc du ſegment A.



Car s'il l'avoit au dedans du cercle, comme en *d* : prolongeant C *d* juſques en *f*, point de la circonference, & tirant la ligne *b f*, l'angle *b f* C ſera égal à l'angle K, par l'hypotheſe. Or l'angle *b d* C, par le 4.me Lemme, eſt égal à l'angle *b f* C, plus l'angle *f b d*. Donc il eſt plus grand que le ſeul angle *b f* C. Donc il eſt plus grand que l'angle K.

Et ſi le ſommet étoit hors du ſegment, comme en *g* : tirant une ligne de *b* au point où C *g* coupe le cercle, comme à *f*, on prouvera que l'angle *b f* C, égal à K, ſera plus grand que l'angle

gle *b* g C, parce qu'il ſera égal à *b* g C plus *gbf*, par le quatriéme Lemme.

Donc l'angle qui a *b* C pour baſe ne peut être égal à K, qui eſt l'angle dont le ſegment A eſt capable, qu'il n'aït ſon ſommet dans la circonference; puiſque s'il l'avoit au dedans il ſeroit plus grand, & s'il l'avoit au dehors il ſeroit plus petit.

XV. Corollaire.

XXXII. Si de l'hypotenuſe ou ſoutendante d'un angle droit on fait le diametre d'un cercle, le ſommet de cét angle droit ſe trouvera dans la circonference du cercle.

Car chaque demy-cercle eſt capable de cét angle droit. (26. *ſup.*) Donc, par le Corollaire precedent, nul angle droit ne peut avoir pour hypotenuſe la corde du demy-cercle, c'eſt à dire le diametre, que ſon ſommet ne ſe trouve en un des points de la demy-circonference.

XVI. Corollaire.

XXXIII. Si du ſommet d'un angle on tire une ligne au milieu de la baſe, & que cette ligne ſoit égale à la moitié de cette baſe, l'angle eſt droit; mais ſi elle eſt plus longue, il eſt aigu; & ſi elle eſt plus courte, il eſt obtus.

Car faiſant un demy-cercle qui ait pour centre le point du milieu de la baſe, & pour intervalle la moitié de la baſe: le ſommet de l'angle ſe trouvera dans un des points de la demy-circonference, ſi la ligne tirée du ſommet au milieu de la baſe eſt égale à la moitié de la baſe. Donc l'angle ſera droit.

Et le ſommet ſe trouvera au dehors du demy-cercle, ſi elle eſt plus longue. Donc l'angle ſera plus

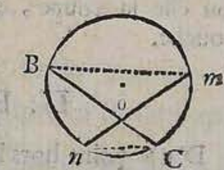
plus petit qu'un droit par le neufviéme Corollaire, & par conſequent aigu.

Et il ſe trouvera au dedans du demy-cercle ſi elle eſt plus courte. Donc l'angle ſera plus grand qu'un droit par le neufviéme Corollaire. Donc il ſera obtus.

XVII. Corollaire.

Quand deux cordes égales ſe coupent, chaque partie de l'une eſt égale à chaque partie de l'autre. XXXIV.

Soient les cordes égales B C & *m n*, qui ſe coupent en *o*. Les arcs B *n* C & *m* C *n* ſont égaux, (V. 26.) parce qu'ils ſont ſoûtenus par des cordes égales. Donc ôtant de ces deux arcs l'arc *n* C, qui leur eſt commun, les arcs B *n* & *m* C demeurent égaux. Donc tirant la ligne *n* C, les angles inſcrits *n* C B & C *n m* ſont égaux, (20. *ſup.*) parce qu'ils ſont appuyez ſur des arcs égaux. Donc les deux lignes *o n* & *o* C ſont égales, parce qu'étant menées d'un même point elles font des angles égaux ſur la même baſe. (VIII. 48.) Et on prouvera de mêmes, en tirant la ligne B *m*, que *o m* & *o* B ſont égales. Donc chaque partie de l'une de ces cordes eſt égale à chaque partie de l'autre.



I. Probleme.

Trouver l'angle droit dont on a l'hypotenuſe & la diſtance du ſommet à l'hypotenuſe. XXXV.

Elever de l'extremité de l'hypotenuſe une perpendiculaire égale à cette diſtance, & tirer par l'autre extremité de cette perpendiculaire une parallele à l'hypotenuſe.

M L'un

L'un des deux points où cette parallele coupera le cercle qui aura l'hypotenuſe pour diametre, ou le point de l'attouchement, ſi elle le touche, ſera le ſommet de cét angle droit qui en determinera les côtez.

Car la diſtance étant donnée de ce ſommet à l'hypotenuſe, il ne ſe peut trouver ailleurs (d'un côté) qu'en quelqu'un des points de cette parallele; & parce que cét angle eſt ſuppoſé droit, il faut par le 15.e Corollaire que le ſommet ſe trouve auſſi en quelqu'un des points de la demy-circonference. Donc en un des points où elle la coupe, ou en celui auquel elle le touche.

II. PROBLEME.

XXXVI. D'un point hors le cercle tirer les tangentes au cercle, & montrer qu'on n'en peut tirer que deux, & qu'elles ſont égales.

Soit k le point hors le cercle, & C le centre du cercle. Joindre ces points par une ligne. Décrire le cercle qui aura cette ligne pour diametre; il coupera le premier en deux points comme f & g. Enfin les lignes k f & k g étant tirées, elles toucheront le premier cercle en f & en g, ſans qu'on en puiſſe tirer d'autres, & elles ſeront égales.

Car l'angle que l'une & l'autre fait avec le rayon du premier cercle eſt droit, (26. *ſup.*) parce qu'il eſt dans un demy-cercle.

Et il ne peut y avoir que ces deux lignes tirées du point k qui touchent le cercle; parce que le ſommet de l'angle droit, qui doit avoir pour côtez la tangente tirée de k & un rayon du premier cercle,

cercle, doit être en un point commun aux circonferences des deux cercles. Car ce ſommet doit être dans la circonference du premier cercle, à cauſe qu'un rayon du premier eſt un de ſes côtez; & dans celle du ſecond, à cauſe que tous les angles droits qui ont le diametre du ſecond cercle pour hypotenuſe doivent avoir leur ſommet dans la circonference de ce ſecond cercle. (32. *ſup.*)

Or il n'y a que les points f & g qui ſoient communs aux deux cercles. Donc on ne peut tirer de k que les deux tangentes k f & k g.

Et il eſt clair qu'elles ſont égales, puis qu'elles ſoûtiennent des arcs égaux dans la circonference du nouveau cercle. (V. 26.)

III. PROBLEME.

Dans un cercle donné couper un ſegment qui ſoit capable d'un angle donné. XXXVII.

Ayant tiré une tangente au cercle, la corde qui fera avec cette tangente au point de l'attouchement un angle égal à l'angle donné, ſatisfera au Probleme. Car cét angle égal au donné ſera l'angle d'un ſegment. Donc il ſera égal à tout angle inſcrit dans l'autre ſegment. (25. *ſup.*) Donc cét autre ſegment ſera capable de l'angle donné. (31. *ſup.*)

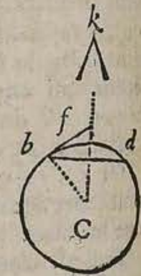
IV. PROBLEME.

XXXVIII. Trouver le cercle dont le ſegment terminé par une ligne donnée ſoit capable d'un angle donné.

Soit la ligne donnée $b\ d$, & l'angle donné k; ſoit tirée $b\ f$ qui faſſe ſur $b\ d$ un angle égal à l'angle k.

Soit élevé du point b une perpendiculaire à $b\ f$,

& qu'il y ait une autre perpendiculaire à *b d* qui coupe *b d* par la moitié ; le point C, où je ſuppoſe que ces deux perpendiculaires ſe rencontreront, ſera le centre du Cercle qui aura C *b* ou C *d* pour intervalle, & *f b* pour tangente.



Donc le ſegment oppoſé à celui vers lequel eſt *f b* ſera capable d'un angle égal à l'angle *f b d*, par le 8.e Corollaire, parce que l'un ſera l'angle du ſegment, & l'autre l'angle dans le ſegment oppoſé.

V. PROBLEME.

CONNOISSANT qu'elle eſt la diſtance de trois
XXXIX. points l'un de l'autre, comme de *b*, C, *d*, & ne ſçachant d'un 4.e comme *x*, ſinon de quel côté il eſt à l'égard de ces trois-là, & qu'elle eſt la grandeur de l'angle compris entre les lignes *x b* & *x* C, & celui qui eſt compris entre les lignes *x* C & *x d* : trouver ce 4.e point.

Les lignes *b* C & C *d* ſont données par l'hypotheſe.

Et les angles donnez ſoient *f* & *g*.

Trouver par le Probleme precedent le Cercle dont le ſegment terminé par *b* C, tourné vers *x*, ſoit capable de l'angle *f*.

Et trouver de même un autre Cercle dont le ſegment terminé par C *d* & tourné vers *x*, ſoit capable de l'angle *g*.

Ces deux Cercles ſe couperont en deux points, dont l'un ſera C par la conſtruction, & l'autre *x* ; ce qui ſe prouve ainſi :

Les

Les deux angles *b x* C, & C *x d*, dont la grandeur eſt connuë, ont leur ſommet au même point.

Or par le 14.e Corollaire l'angle égal à *f* ayant *b* C pour baſe, ne peut avoir ſon ſommet ailleurs que dans un des points de l'arc du ſegment qu'on a trouvé être capable de l'angle *f*. Et par la même raiſon l'angle égal à *g* ayant C *d* pour baſe, ne peut auſſi avoir ſon ſommet ailleurs que dans un des points de l'arc du ſegment qu'on a trouvé être capable de l'angle *g*. Donc il faut que ce point, qui eſt le ſommet de tous les deux angles, ſoit commun à tous les deux Cercles. Donc il faut que ce ſoit l'un des deux points où ils ſe coupent. Or il eſt bien viſible que ce n'eſt pas le point C. Donc l'autre point où ils ſe coupent eſt le point *x* que l'on cherchoit.

II.

Des Angles dont le ſommet eſt au dedans du Cercle & ailleurs qu'au centre.

QUAND le ſommet d'un Angle eſt au dedans du XL.
Cercle, mais ailleurs qu'au centre, comme peut être l'angle K, ſes côtez doivent toûjours être conſiderez comme terminez par la circonference, comme aux points *f* & *g* ; & de plus il les faut auſſi prolonger au delà du ſommet juſques à la circonference de l'autre part, en prolongeant par exemple *f* K juſques en C, & *g* K juſques en *d*.

Et ainſi ces angles ſe reduiſent aux angles qui ſe font dans la ſection de deux cordes qui ſe coupent au dedans du Cercle, où il ſe fait quatre angles dont les oppoſez ſont égaux, & qui ſont appuyez chacun ſur l'un des quatre arcs

auxquels cette circonference se trouve divisée par ces deux cordes.

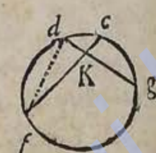
Voicy donc le Theoréme qui nous apprendra la mesure de ces angles:

IV. Theoréme.

XLI. Tout Angle fait par la section de deux cordes qui se coupent au dedans du Cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé.

Soient les deux cordes *c f* & *d g* qui se coupent en K. Prenons lequel on voudra des quatre angles qu'elles font en se coupant, comme *f* K *g*; je dis qu'il aura pour sa mesure la moitié de l'arc *f g* plus la moitié de l'arc opposé *d c*.

Soient joints les points *d*, *f*; l'angle *f* K *g* est égal aux deux angles vers *d* & vers *f*, (par le quatriéme Lemme.)



Or l'angle vers *d*, a pour mesure la moitié de l'arc *f g* sur lequel il est appuyé: (17. *sup.*) & l'angle vers *f* la moitié de l'arc *c d*, par la même raison.

Donc l'angle *f* K *g* qui leur est égal, a pour sa mesure les moitiez de ces deux mêmes arcs; ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

XLII. Quand deux cordes égales, moindres que des diametres, se coupent, elles divisent la circonference en quatre arcs, dont il y en a deux opposez qui sont égaux, & deux autres inégaux; & alors les angles qui sont appuyez sur chacun de ces arcs égaux ont pour mesure cét arc entier.

Car les opposez étant égaux, un entier est la même chose que la moitié de l'un plus la moitié de l'autre.

Je

Je ne prouve point ce qui est supposé dans ce Corollaire, parce que c'est une suite visible de ce qui a été demonstré *sup.* 34.

III.

Des Angles dont le sommet est hors le Cercle que leurs côtez coupent ou touchent.

Les côtez d'un Angle dont le sommet est hors le Cercle peuvent XLIII.

Ou le couper tous-deux:

Ou le toucher tous-deux:

Ou l'un le couper & l'autre le toucher.

Mais quand ils le coupent, on les considere toûjours comme entrans dans le Cercle selon sa convexité, & étant terminez par la circonference au dedans du Cercle selon sa concavité.

C'est pourquoy ces angles sont toûjours considerez comme étant appuyez sur deux arcs du Cercle, l'un concave & l'autre convexe.

Quand les deux côtez le coupent, l'arc concave est celuy qui est compris entre les deux points de la circonference où les deux côtez sont terminez. Et le convexe est celuy qui est compris entre les deux points par où ils entrent dans le Cercle.

Quand tous les deux côtez touchent le Cercle, l'un & l'autre est compris entre les deux points de l'attouchement; mais l'un est concave au regard de l'angle, & l'autre convexe.

Et

Et quand l'un touche & l'autre coupe le Cercle, le concave est compris entre le point de l'attouchement & celuy où se termine l'autre côté; & le convexe entre le point de l'attouchement & celuy où l'autre côté entre dans le Cercle.

Il étoit necessaire de bien expliquer ces deux sortes d'arcs, parce que de là dépend la mesure des angles dont il s'agit, selon ce Theoréme :

V. Theoréme.

XLIV. Lors que le sommet d'un Angle est hors le Cercle, soit que ses deux côtez coupent le Cercle, ou que tous-deux le touchent, ou que l'un le coupe & l'autre le touche: il a pour mesure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.

Preuve dans le premier Cas.

Soit l'angle K, dont le côté Kf coupe le Cercle en C, & K g en d; l'arc concave est fg, & le convexe Cd. Il faut donc prouver que cét angle a pour mesure la moitié de l'arc fg, moins la moitié de l'arc C d, & on le prouve ainsi:

Soit tirée la ligne fd. Par le 4e. Lemme, l'angle fdg est égal à l'angle K, plus l'angle Kfd.

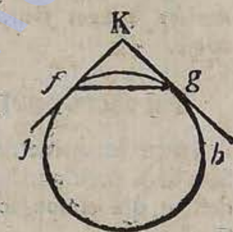
Donc l'angle K est égal à l'angle fdg, moins l'angle Kfd. Donc il doit avoir pour mesure la mesure de l'angle fdg, moins la mesure de l'angle Kfd.

Or la mesure de l'angle fdg est la moitié de l'arc concave fg sur lequel il est appuyé; & la mesure de l'angle Kfd est la moitié de l'arc convexe C d.

Donc l'angle K a pour mesure la moitié de l'arc concave fg, moins la moitié de l'arc convexe C d.

Preuve du second Cas.

Soit l'angle K, dont les côtez Kf & K g touchent le cercle, & soit K g prolongée jusques en h.



L'angle fgh est égal à l'angle K plus l'angle K fg. Donc l'angle K est égal à l'angle fgh, moins l'angle Kfg.

Or l'angle fgh a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment fg, & l'angle Kfg a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment fg. (12. *sup.*) Donc l'angle K, a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment, qui est l'arc concave, moins la moitié de l'arc du petit segment, qui est l'arc convexe.

La preuve du troisiéme Cas est semblable à ces deux-là, tenant quelque chose de l'un & de l'autre. Il vaut mieux la laisser trouver.

Avertissement.

Outre cette mesure qui est generale à toutes ces sortes d'angles, il y en a qui sont particulieres à quelques-uns qu'il est bon de marquer par des Theorémes particuliers.

VI. Theoréme.

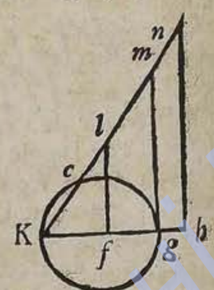
Un Angle ayant son sommet hors le Cercle, XLV.
si l'un de ses côtez qui coupe le Cercle se termine à l'extremité d'un diametre auquel l'autre côté est perpendiculaire, soit en coupant le Cercle, soit

en le touchant, soit mêmes étant hors le Cercle, ce diametre y étant prolongé : en tous ces cas, cét Angle a pour sa mesure la moitié de l'arc que soûtient la partie de son côté non perpendiculaire au diametre.

Il ne sera pas inutile de donner ce Theoréme pour exemple des diverses voyes que les principes qu'on a établis peuvent fournir pour demontrer une même chose.

Premiere Demonstration.

XLVI. Soit le diametre K g prolongé jusques à *h*. Soit de K tirée une ligne indefinie qui coupe le cercle en *c*.



Soient de divers points de cette ligne hors le Cercle comme de *l*, *m*, *n*, tirées sur le diametre les perpendiculaires *l f*, *m* g, *n h*. J'ai à prouver que chacun de ces angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'arc *c* K. Ce qu'on peut faire en cette maniere :

Chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, plus l'angle vers K, valent un angle droit par le 4.e Lemme, parce que ce sont les angles sur la base d'un angle droit. Donc chacun de ces angles, plus l'angle vers K, ont pour mesure la moitié de la demy circonference. Donc ils ont aussi pour mesure, par le 3.e Lemme, les deux moitiez des deux arcs *c* K & *c* g, qui comprennent la demy-circonference.

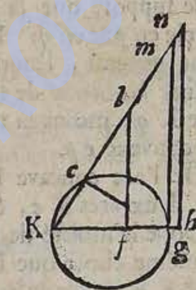
Or l'angle vers K a pour sa mesure la moitié de l'arc *c* g sur lequel il est appuyé.

Reste donc pour la mesure de chacun des autres la moitié de l'arc *c* K. Ce qu'il falloit demontrer.

Se-

Seconde Demonstration.

Soit encore tirée la ligne *c g*. L'angle K *c g* est droit, (26. *sup.*) parce qu'il est dans le demy-cercle. Donc l'angle *c g* K est égal à chacun des angles vers *l*, *m*, *n* : puisque chacun de ces angles, plus l'angle vers K, sont aussi égaux à un droit. XLVII.

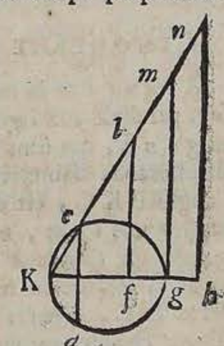


Or l'angle *c g* K a pour mesure la moitié de l'arc *c* K, sur lequel il est appuyé.

Donc la moitié de cét arc *c* K est aussi la mesure de chacun des angles vers *l*, *m*, *n*.

Troisiéme Demonstration.

Soit tirée la ligne *c d* qui coupe perpendiculairement le diametre, ce qui fera que les arcs K *c* & K *d* seront égaux. (VII. 2. & 7.) Et la ligne *c d* étant parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, les angles que font ces paralleles sur la même ligne aux points *c*, *l*, *m*, *n*, sont égaux. (VIII. 59. XLVIII.



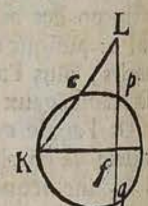
Or l'angle K *c d* a pour sa mesure la moitié de l'arc K *d* égal à l'arc K *c*. Donc chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'un ou l'autre de ces deux arcs qui sont égaux, K *d* & K *c*. Donc on peut dire qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc *c* K. Ce qu'il falloit demontrer.

M 6 Qua-

Quatriéme Demonstration.

XLIX. C'est l'application de la demonstration du Theoréme general à ce cas particulier.

Je suppose que la perpendiculaire L *f* coupe le Cercle en *p* & en *q*. Par la demonstration du Theoréme general, l'angle L a pour mesure la moitié de son arc concave K *q*, moins la moitié de son arc convexe *c p*.



Or l'arc concave K *q* est égal aux deux arcs K *c*, & *c p*.

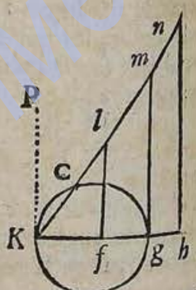
Donc la moitié de l'arc K *q* est la même chose que la moitié de l'arc K *c*, plus la moitié de l'arc *c p*, par le 3.e Lemme.

Donc la moitié de l'arc K *q*, moins la moitié de l'arc *c p*, est la même chose que la moitié de l'arc K *c*.

Donc la moitié de l'arc K *c* est la mesure de l'angle L. Ce qu'il falloit demontrer.

Cinquiéme Demonstration.

L. Ayant tiré la tangente P K, cette tangente sera parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, qui sont perpendiculaires au diametre. Donc l'angle P K C, est égal aux angles vers *l*, *m*, *n*. (VIII. 54.) Or l'angle P K C a pour sa mesure la moitié de l'arc K C, (par 12. *sup.*) Donc chacun des autres angles vers *l*, *m*, *n*, aura aussi pour sa mesure la moitié de ce même arc. Je croi que cette demonstration est la meilleure de toutes.



DES

DES ANGLES DONT LES DEUX COSTEZ TOUCHENT LE CERCLE.

Il est bon d'en dire quelque chose en particulier, outre ce qu'on en a dit en general. LI.

On les peut appeller *des Angles circonscrits.*

Et voicy une nouvelle maniere de les mesurer:

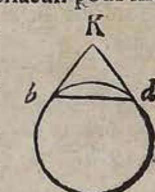
VII. Theoréme.

L'Angle circonscrit au Cercle, c'est à dire dont les deux côtez touchent le Cercle, a pour mesure la demy-circonference, moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. LII.

Premiere Demonstration.

Soit l'angle K, à qui soit donnée pour base la ligne *b d*, qui joint les deux points d'attouchement. L'angle K, plus les deux angles sur sa base, sont égaux à deux droits, c'est à dire ont pour mesure, pris ensemble, la demycirconference. (VIII. 62.)

Or les deux angles sur la base ont chacun pour mesure la moitié de l'arc convexe *b d*, par le 1.er Theoréme.



Donc la mesure des deux est cét arc convexe tout-entier.

Donc ôtant cét arc convexe de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure de l'angle K circonscrit au Cercle; ce qu'il falloit demontrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

PAR la demonſtration generale l'angle K a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe. (44. *Sup.*) Or ces deux arcs comprennent toute la circonference. Donc, par le 3.e Lemme, la moitié de toute la circonference, moins l'arc convexe entier, eſt la même choſe que la moitié de l'arc concave, moins la moitié du convexe.

I. COROLLAIRE.

LIII. DEUX angles circonſcrits ſont égaux quand ils ſont appuyez ſur des arcs convexes d'autant de degrez, & le plus grand eſt celuy qui eſt appuyé ſur un arc de moins de degrez.

Car ſi de 180 degrez on ôte un nombre égal, ce qui reſte eſt égal, & plus le nombre qu'on en ôte eſt petit, plus ce qui reſte eſt grand. Donc &c.

II. COROLLAIRE.

LIV. SI un angle circonſcrit eſt appuyé ſur un arc convexe qui ſoit ſoûtenu par le côté d'un angle inſcrit iſoſcele, l'angle inſcrit & le circonſcrit ſont égaux.

Car ôtant cét arc de la demy-circonference, ce qui reſtera ſera la meſure du circonſcrit par 52. S. & de l'inſcrit par 19. S.

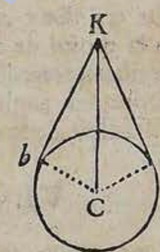
III. COROLLAIRE.

LV. IL eſt bon de conſiderer toûjours les côtez de l'angle circonſcrit comme terminez au point de l'attouche-

touchement. Et ſuivant cela il faut dire que tout angle circonſcrit eſt iſoſcele : car les deux tangentes au Cercle menées du même point ſont toûjours égales, par VII. 39.

IV. COROLLAIRE.

LA ligne menée du ſommet de l'angle circonſcrit au centre diviſe toûjours cét angle par la moitié. Et l'on peut appeller ces deux moitiez de l'angle circonſcrit *des demy-angles circonſcrits*. LVI.

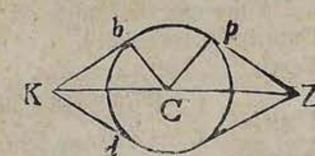


Car ſi on tire deux rayons aux points d'attouchement, on ne pourra conſiderer ces deux demy-angles, qu'on ne voye ſans peine que les côtez de l'un ſont égaux aux côtez de l'autre ; & que les rayons du même Cercle, & par conſequent les ſinus, en ſont égaux. Donc ils ſont égaux. (VIII. 46.)

V. COROLLAIRE.

LES angles circonſcrits au même Cercle ſont égaux, quand les tangentes de l'un ſont égales aux tangentes de l'autre. LVII.

Soit K *b* tangente de l'angle K égale à Z *p*, tangente de l'angle Z. Je dis que les angles K & Z ſont égaux. Car tirant les lignes du centre K C & Z C, & les rayons C *b* & C *p*, les angles K *b* C & Z *p* C ſont égaux, parce qu'ils ſont tous deux droits. (13. *ſup.*)



Et les côtez de l'un ſont égaux aux côtez de l'autre, puiſque par l'hypotheſe K *b* eſt égale à Z *p*, &

& que que C b & C p ſont les rayons du même Cercle.

Donc les baſes K C & Z C de ces angles ſont égales. (VIII. 67.)

Donc les angles b K C & p Z C ſont égaux, (VIII. 66.) les côtez de l'un étant égaux aux côtez de l'autre, & ayant les deux rayons pour leurs baſes.

Or ces deux angles b K C & p Z C ſont chacun la moité de chaque angle circonſcrit, par le Corollaire precedent.

Donc les angles circonſcrits ſont égaux : ce qu'il falloit demontrer.

VI. Corollaire.

LVIII. Les angles circonſcrits au même Cercle ſont égaux, quand leur ſommet eſt également éloigné du centre ; & les plus petits ſont ceux dont le ſommet en eſt plus éloigné.

Cela eſt facile à prouver par les demy angles circonſcrits, & je le laiſſe à trouver à ceux qui commencent, pour faire eſſay de leurs forces.

Recapitulation de la mesure des Angles.

LIX. Le ſommet de l'angle eſt

Dans le Cercle { Au centre. 1.
Hors le centre. 2. }

Dans la Circonf. { L'un des côtez au dedans du Cercle, Et l'autre au dehors, { le touchant. 3.
le coupant. 4. }
Tous-deux au dedans du Cercle. 5. }

Hors

Hors le Cercle { Les deux côtez le coupant. 6.
Les deux le touchant. 7.
L'un le coupant, & l'autre le touchant. 8.
Et mêmes l'un le coupant & étant terminé à l'extremité du diametre, & l'autre étant hors le Cercle, mais perpendiculaire à ce diametre prolongé. 9. }

Et ces angles ont pour mesure,

1. L'arc ſur lequel il eſt appuyé. VIII. 10.

2. La moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, plus la moitié de l'arc oppoſé. IX. 41.

3. La moitié de l'arc que ſoûtient le côté qui eſt au dedans du cercle. IX. 12.

4. La moitié de l'arc que ſoûtient le côté qui eſt au dedans du Cercle, plus la moitié de celui que ſoûtient le prolongement du côté qui eſt hors le Cercle. IX. 15.

5. La moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé. IX. 17.

6. 7. 8. } La moitié de l'arc concave ſur lequel il eſt appuyé, moins la moitié de l'arc convexe. IX. 44.

7. La demy-circonference, moins l'arc convexe ſur lequel il eſt appuyé. IX. 52.

8 & 9. La moitié de l'arc ſoûtenu par la partie du côté non perpendiculaire au diametre. IX. 45.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DIXIE'ME.

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

I. *LA proportion des lignes dépend de deux choses, des paralleles & des angles; & ainsi elle n'a pû se bien traiter qu'apres l'explication de l'une & de l'autre. Et mêmes pour en bien comprendre tout le mystere, il faut reprendre beaucoup de choses des paralleles, que nous proposerons en forme de Lemmes.*

I. LEMME. DEFINITION.

II. UN espace compris d'une part entre deux paralleles & indefiny de l'autre, soit appellé *espace parallele.*

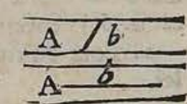
II. LEMME. DEFINITION.

COMME on ne considere dans ces espaces que la distance entre les parelleles, leur grandeur dépend de cette distance qui est mesurée par les perpendiculaires comprises entre ces paralleles, que nous appellerons pour cette raison *les perpendiculaires des espaces.* III.

Et delà il s'ensuit que ces espaces sont égaux quand les perpendiculaires de l'un sont égales aux perpendiculaires de l'autre.

III. LEMME. DEFINITION.

ON dit qu'une ligne est dans un espace parallele quand elle est terminée par les paralleles qui le terminent, comme la ligne *b* est dans l'espace A. IV.



On dit qu'une ligne est paralle à un espace quand elle l'est aux lignes qui le terminent, comme la ligne *b* est parallele à l'espace A.

IV. LEMME.

L'INCLINAISON d'une ligne dans un espace se considere par l'angle aigu qu'elle fait sur l'une & l'autre parallele, le faisant toûjours égal. V.

D'où il s'ensuit que deux lignes sont également inclinées dans le même espace, ou dans deux espaces differens, quand les angles aigus que fait l'une sont égaux aux angles aigus que fait l'autre.

Et que la moins inclinée est celle qui fait son angle aigu moins aigu & plus approchant du droit.

V. LEMME IMPORTANT.

LORSQUE deux ou plusieurs lignes sont menées d'un VI.

d'un même point sur la même ligne, elles sont censées être dans un même espace parallele. (VIII. 61.) Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui soit parallele à celle qui les termine. D'où il s'ensuit que les côtez d'un angle terminez par une base sont toûjours censez être dans le même espace parallele.

VI. Lemme.

VII. Deux angles soient appellez semblables, lors qu'étant égaux, les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun.

Et on est asseuré que cela est; 1. quand on sçait qu'ils sont égaux, & qu'un des angles sur la base de l'un est égal à l'un des angles sur la base de l'autre: car delà il s'ensuit que l'autre est égal aussi.

2. Lors qu'étant égaux il sont de plus Isosceles.

VII. Lemme.

VIII. Quand les sommets de deux angles sont également distans chacun de sa base, (prolongée s'il est besoin,) ces deux angles peuvent être compris dans le même espace parallele. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallele à celle qui comprendra les deux bases.

VIII. Lemme.

IX. Dans le même espace parallele, ou dans les espaces paralleles égaux, toutes les également inclinées sont égales, & toutes les égales sont également inclinées. VIII. 56.

Et au contraire les espaces paralleles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car de-là

là il est certain que les perpendiculaires le sont aussi, VIII. 58.

IX. Lemme.

Lors qu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes paralleles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les paralleles qui les renferment. VIII. 59. X.

X. Lemme.

Lors qu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionelles aux deux autres lignes, quand les deux antecedens de la proportion se trouvent dans les deux premieres, & les deux consequens dans les deux dernieres. D'où il s'ensuit qu'*Alternando*, on peut prendre aussi les deux premieres pour les deux termes d'une raison, & les deux dernieres pour les deux termes de l'autre. (II. 36.) XI.

PROPOSITION FONDAMENTALE

des Lignes proportionelles.

Lors que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces; & leurs éloignemens du perpendicule sont aussi en même raison. XII.

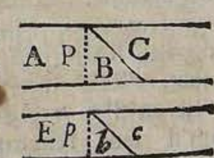
Soient deux espaces A & E.

Soient appellées dans l'espace A.

La perpendiculaire, P.

L'oblique, C.

L'éloignement du perpendicule B.



Et

Et soient de même appellées
dans l'espace, E.
La perpendiculaire p.
L'oblique c.
L'éloignement du perpendicule b. Je dis que

$$P.p. :: C.c. :: B.b.$$

Et en voilà la preuve tres-naturelle, dont je ne croi pas que jamais personne se soit avisé:

Soit P divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. Et ces aliquotes quelconques de P soient appellées x.

Si on tire par tous les points de cette division quelle qu'elle soit, des paralleles à l'espace A, cét espace sera divisé en autant de petits espaces paralleles qu'x sera dans P. Et ces petits espaces seront égaux par le 2^e. Lemme, parce qu'ils auront tous x pour perpendiculaire.

Et de là il s'ensuit que C sera aussi divisée en aliquotes pareilles à celles de P; parce que les portions de C qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y étant également inclinées par le 9^e. Lemme, y sont égales par le 8.^{e}

Soient donc les aliquotes de C pareilles à celles de P appellées y.

Que si de tous les points de division de C on tire des paralleles à P, (qui seront par consequent perpendiculaires à l'espace,) elles couperont encore B en aliquotes pareilles; parce que chaque y se trouvant également inclinée en chacun de ces nouveaux petits espaces, ils seront égaux par le 8.$_e$ Lemme. Et par consequent les portions de B; qui seront toutes perpendiculaires dans ces espaces égaux, seront égales. (Et cela mêmes seroit vrai quand elles n'y seroient pas perpendiculaires, pourveu qu'elles y fussent également inclinées. Ce qu'il faut remarquer pour une autre occasion.)

Cela

Cela étant fait, prenant x pour mesurer p de l'espace E, ou elle s'y trouvera précisément tant de fois, ou tant de fois plus quelque reste, c'est à dire plus une portion moindre qu'x. Et ainsi tirant des lignes paralleles à l'espace E par tous les points de la division de p mesurée par x, l'espace E se trouvera divisé en autant de petits espaces égaux entr'eux, & égaux à ceux qui ont eu la même x pour perpendiculaire dans l'espace A, qu'x se sera trouvée dans p, si ce n'est qu'il y en aura un plus petit, si x ne s'y est trouvée que tant de fois plus quelque reste. Car le petit espace où sera compris ce reste sera plus petit que les autres.

Et de là il s'ensuit que c étant aussi inclinée dans E que C dans A, les portions de c comprises dans ces espaces égaux à ceux d'A seront égales aux portions de C, & ainsi se pourront aussi appeller y; & s'il y avoit eu en p un reste moindre qu'x, il y auroit aussi eu en c un reste moindre qu'y.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles, (II. 33.)

$$P.p. :: C.c.$$

puisque x & y, aliquotes quelconques pareilles des deux antecedens P & C, sont également contenuës dans les deux consequens p & c; si dans l'un sans reste, dans l'autre sans reste, si dans l'un avec reste, dans l'autre avec reste.

On prouvera la même chose de B & de b. Car si c étant mesurée & divisée par y, on tire des paralleles à p (qui seront perpendiculaires à l'espace) par tous les points de la division, b sera divisée en autant de parties que c, & ces parties seront égales aux parties de B, que nous avons nommées z: si ce n'est qu'il y en aura une moindre que z, s'il y a eu un reste dans c moindre qu'y.

Donc les aliquotes pareilles de C & de B seront également contenuës dans c & b.

Donc $C.c. :: B.b.$

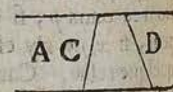
Donc

Donc P.*p* :: C.*c* :: B.*b*. Ce qu'il falloit démontrer.

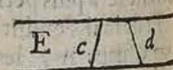
I. THEORÉME.

XIII. SI deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le sont autant chacune, que chacune de deux autres le sont dans un autre espace, les également inclinées sont en même raison.

Soient les espaces A & E.



Soit C autant inclinée dans l'espace A que *c* dans l'espace E.



Et D autant inclinée dans l'espace A que *d* dans l'espace E.

Je dis que C.*c*. :: D.*d*.

Car, par la Proposition precedente, C est à *c*, comme la perpendiculaire d'A à la perpendiculaire d'E.

Or D est aussi à *d*, comme ces deux mêmes perpendiculaires.

Donc C.*c*. :: D.*d*. (II. 26.)

On le peut aussi prouver immédiatement & par soy-même sans avoir recours aux perpendiculaires, par la même voye dont on s'est servi dans la Proposition precedente, & que je ne repete point, parce qu'il est trés-facile de la trouver.

I. COROLLAIRE.

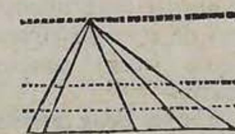
XIV. PLUSIEURS lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallele, si elles sont toutes coupées par des paralleles à cét espace, elles le sont proportionellement; c'est à dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la premiere, ou la deuxiéme, ou la troisiéme, &c. cõme chaqu'autre toute à la même pt. 1.2.3. &c.

C'est

C'est une suite manifeste du precedent Theoréme, puisque d'une part toutes les toutes sont dans le même espace, qui est l'espace total; toutes les premieres parties dans le 1.er espace partial; les 2.des dans le 2.e, & ainsi des autres. Et que de l'autre, chaque toute & chacune de ses parties sont également inclinées chacune dans son espace, par le 9.e Lemme. Donc la 1.ere toute est à sa 1.ere partie, comme la seconde toute à sa 1.ere partie.

II. COROLLAIRE.

SI plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine. XV.



C'est la même chose que le precedent Corollaire; puisque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallele, & par consequent les paralleles à cét espace les doivent toutes couper proportionellement.

III. COROLLAIRE.

SI deux lignes comprises dans un même espace parallele se coupent, elles sont coupées proportionellement; c'est à dire que les parties de l'une sont proportionelles aux parties de l'autre: outre que la toute est à la toute, comme chaque partie à la même partie, suivant le même ordre dans lequel ces parties sont proportionnelles. XVI.

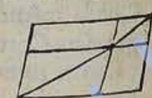
C'est encore la même chose que le 1.er Corollaire; puisque menant une parallele à l'espace par le le point de la ſection, ce ſeront deux lignes dans le même eſpace total qui ſont coupées par une parallele à cét eſpace, & qui par conſequent le doivent être proportionnellement.

IV. Corollaire.

XVII. Si quatre lignes, dont les oppoſées ſont paralleles, ſe joignent aux extremitez, elles font deux eſpaces paralleles, l'un d'un ſens & l'autre de l'autre ſens ; & la ligne tirée de coin en coin s'appelle *diagonale*.

Que ſi d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes compriſes chacune dans chacun de ces deux eſpaces, les parties de l'une de ces lignes ſeront proportionnelles aux parties de l'autre.

Car les deux parties de chacune ſont proportionnelles aux deux parties de la diagonale, par le Corollaire precedent ; parce que chacune de ces lignes & la diagonale



ſont compriſes dans le même eſpace parallele & s'y coupent. Donc les parties de chacune étant en même raiſon que celles de la diagonale, les parties de l'une doivent auſſi être en même raiſon que les parties de l'autre, puiſque deux raiſons égales à une 3.^{e} ſont égales entr'elles. (II. 26.)

II. Theoréme.

XVIII. Lorsque deux angles ſont ſemblables, (c'eſt à dire ſelon le ſixiéme Lemme, lorſqu'étant égaux, les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun :) les côtez ſont proportionnels aux côtez, & la baſe à la baſe, & la hauteur à la hauteur. C'eſt à dire que les côtez de ces deux angles également inclinez chacun ſur ſa baſe, ſeront en même raiſon que

que les deux autres côtez & que les deux baſes, & que les diſtances de chaque ſommet à chaque baſe : ce que j'appelle la hauteur de chaque angle.

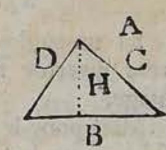
Soient les deux angles nommez A & E.
Soit le grand côté d'A nommé C.
Le petit D.
La baſe B.
La hauteur H.
Et dans l'angle E,
Le grand côté *c*.
Le petit *d*.
La baſe *b*.
La hauteur *h*.

Je dis que C. *c*. :: D. *d*. :: B. *b*. :: H. *h*.

On le peut prouver facilement de la même ſorte qu'on a prouvé la Propoſition fondamentale, c'eſt pourquoi je ne le repete point.

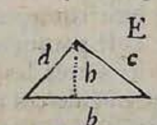
Mais on le peut encore de cette autre ſorte :

1.^{o} Par le 5.^{e} Lemme C & D ſont cenſées être dans le même eſpace parallele, & de même *c* & *d*.



Et de plus par l'hypotheſe C & *c* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace, & de même D & *d*.

Donc par la Propoſition fondamentale, & par le 1.^{er} Theoréme,



C. *c*. :: H. *h*.
D. *d*. :: H. *h*.

Donc C. *c*. :: D. *d*. & *alternando*, C. D. :: *c*. *d*.

2.^{o} Par le 5.^{e} Lemme C & B ſont dans le même eſpace parallele, & de même *c* & *b* ; & de plus C & *c* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace, & de même B & *b*.

Donc par le 1.^{er} Theoréme,

C. *c*. :: B. *b*. & *alternando*, C. B :: *c*. *b*.

 3.^{o} Par

3.° Par le même 5.ᵉ Lemme D & B sont dans le même espace parallele, & de même *d* & *b*.

Et de plus, D & *d* sont également inclinées chacune dans son espace, & de même B & *b*.

Donc par le 1.ᵉʳ Theoréme,

D. *d*. :: B. *b*. & *alternando*, D. B. :: *d*. *b*.

Donc C. *c*. / D. *d*. } :: B. *b*. Ce qu'il falloit demontrer.

I. COROLLAIRE.

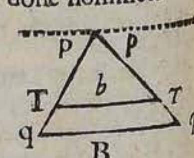
XIX. DEUX angles Isosceles étant égaux, ils sont semblables; & par consequent les côtez sont aux côtez comme la base à la base, & la hauteur à la hauteur. Car deux angles étant Isosceles, ils ne peuvent être égaux que les angles sur la base de l'un ne soient égaux aux angles sur la base de l'autre. VIII. 62.

II. COROLLAIRE.

XX. SI un angle a deux bases paralleles, il s'y trouvera diverses sortes de proportions de grand usage.

Mais pour le mieux faire entendre, il faut considerer que les côtez de cét angle selon la derniere base comprennent ses côtez selon la premiere; & c'est pourquoy nous appellerons les uns *toutes*, & les autres les premieres ou dernieres parties de chacune de ces toutes. Soient donc nommées

Les deux toutes T, & *T*.
Les deux premieres parties p, & *p*.
Les deux dernieres q, & *q*.
La derniere base & la 1.ᵉʳᵉ B. & *b*.



De plus tirant par le sommet une parallele aux deux bases, ils se trouvera trois espaces paralleles:

Le

Le total entre le sommet & B, que j'appelleray ω.
Le premier partial entre le sommet & *b*, A.
Le second partial entre *b* & B, E.

Cela étant, par le 9.ᵉ Lemme T est autant inclinée dans ω, que p dans A, & q dans E.

Et de mêmes *T* autant inclinée dans ω, que *p* dans A, & *q* dans E.

Donc, par le 1.ᵉʳ Theoréme,

1. T. p. :: *T*. *p*. & *alternando*, T. *T* :: p. *p*.
2. T. q. :: *T*. *q*. T. *T* :: q. *q*.
3. p. q. :: *p*. *q*. p. *p*. :: q. *q*.
4. Par le 2.ᵉ Theoréme chaque toute & sa premiere partie sont en même raison que la derniere base & la premiere.

T. p :: B. *b*. & *alternando*, T. B. :: p. *b*.
T. *p* :: B. *b*. *T*. B. :: *p*. *b*.

Car cét angle qui a deux bases paralleles doit être consideré comme si c'étoient deux angles égaux, dont l'un eût pour côtez & pour bases T, *T*, B: & l'autre p, *p*, *b*. Et ainsi les deux angles sur la base de l'un étant égaux aux deux angles sur la base de l'autre chacun à chacun, les côtez de l'un sont proportionnels aux côtez de l'autre, & les bases aussi. Et par consequent T. p. :: *T*. *p*. :: B. *b*.

III. COROLLAIRE.

LORSQUE deux angles ont leur sommet également distant de leur base, & que par consequent ils peuvent être compris dans le même espace parallele, (selon le 7ᵉ. Lemme:) si l'on donne à ces deux angles de nouvelles bases paralleles aux anciennes, & dont chacune en soit également distante, ces deux nouvelles bases seront proportionelles aux deux anciennes. XXI.

 Sup-

Suppoſons que les deux baſes de ces deux angles, leſquelles j'appelleray B & *B*, ſoient ſur la même ligne : la ligne qui joindra les ſommets ſera parallele à cette ligne. D'où il s'enſuit,

1°. Que conſiderant dans chacun de ces angles un ſeul côté, dont j'appelleray l'un T & l'autre *T*, ce ſeront deux lignes dans le même eſpace parallele.

2°. Que les deux nouvelles baſes, que j'appelleray b & *b*, étant paralleles aux anciennes, & en devant être chacune également diſtantes, ſe trouveront neceſſairement dans la même ligne parallele à l'eſpace.

Donc, par le 1er. Corollaire du 1er. Theoréme, cette ligne parallele à l'eſpace coupe proportionnellement T & *T*; & ainſi appellant p la premiere partie de T, & *p* la premiere partie de *T*,

T.p. :: *T.p*.

Or, par le Corollaire precedent, chacun de ces angles ayant deux baſes paralleles

T.p. :: B.b.

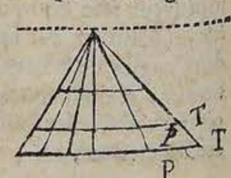
T.p. :: *B.b*.

Donc les deux raiſons de B.b. & de *B.b*. ſont égales, puiſque chacune eſt égale à chacune des deux raiſons T.p. & *T.p*. qui ſont égales entr'elles. Donc

B.b. :: *B.b*. Donc *alternando*, B.*B*. :: b.*b*.

IV. Corollaire.

XXII. Si d'un même point on tire pluſieurs lignes à la même ligne compriſes entre la premiere & la derniere, & qu'on tire des paralleles à celle-là, qui ſoient auſſi compriſes entre la premiere & la derniere de ces lignes tirées du même



me

me point : toutes ces paralleles ſeront coupées proportionnellement, c'eſt à dire que chaque toute & ſa premiere partie ſeront en même raiſon que chaque autre toute & ſa 1.re partie, & ainſi du reſte.

Il ſuffit d'examiner deux de ces paralleles, comme eſt la derniere, que j'appelleray T, & ſa premiere partie p ; & une autre que j'appelleray *T*, & ſa premiere partie *p*. Et ainſi il faut prouver que

T.p. :: *T.p*.

Et pour cela il ne faut que conſiderer, 1°. Que ces lignes tirées d'un même point font divers angles ; que la premiere & la derniere font l'angle total, qui a toutes les paralleles entieres pour ſes diverſes baſes ; que la premiere & la ſeconde font le premier angle partial, qui a toutes les premieres parties de ces paralleles pour ſes diverſes baſes, & ainſi du reſte.

2.° Que tous ces angles ſont dans le même eſpace parallele, parce qu'on peut tirer une ligne par leur ſommet commun qui ſera parallele à la derniere baſe de l'angle total.

Donc T étant la derniere baſe de l'angle total, & p la derniere baſe du 1.er angle partial, laquelle eſt partie de la ligne T ; & *T* étant une autre baſe de l'angle total, *p* une autre baſe du 1er. angle partial : *T* & *p* ſeront auſſi ſur une même ligne parallele à l'eſpace ; puiſque *p* eſt partie de *T*.

Donc, par le Corollaire precedent, les deux dernieres baſes T & p de ces deux angles ſeront en même raiſon que leurs deux autres baſes *T* & *p*. Donc

T.p. :: *T.p*.

Donc par la même raiſon chaque parallele & ſa 1.re partie ſeront en même raiſon que chaque autre parallele & ſa 1re. partie.

Et on prouvera la même choſe avec la même faci-

lité

lité de chacune des autres parties ; en comparant toûjours ensemble celles qui sont renfermées entre les deux mêmes lignes.

V. Corollaire.

XXIII. Si l'une de ces paralleles renfermées entre la 1re. & la derniere de plusieurs lignes tirées du même point est divisée par ces lignes en parties aliquotes, c'est à dire en un certain nombre de parties égales: toutes les autres sont divisées par les mêmes lignes en aliquotes pareilles.

C'est une suite manifeste du precedent Corollaire. Car si chaque partie de l'une de ces paralleles en est par exemple la dixiéme partie, il faut que chaque partie de chaque autre parallele en soit aussi la dixiéme partie ; puisque chaque parallele & chacune de ses parties, sont en même raison que chaque autre parallele & chacune de ses parties semblables.

VI. Corollaire.

XXIV. Si un angle a plusieurs bases paralleles, toutes les lignes tirées du sommet qui couperont ces bases, les couperont proportionellement. D'où il s'ensuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces bases paralleles soit divisée, toutes les autres le seront en aliquotes pareilles.

Ce n'est que les precedens Corollaires un peu autrement énoncez.

VII. Corollaire.

XXV. Les deux cordes d'un cercle sont proportionnelles aux deux cordes d'un autre cercle, si les arcs que soûtiennent les unes sont proportionnellement égaux aux arcs que soûtiennent les autres, chacun à chacun.

Soient considerées les deux cordes d'un cercle com-

me jointes & faisant un angle inscrit: telles que sont *b c* & *b d* d'une part, & BC & BD de l'autre. (Car si elles ne faisoient pas d'angle inscrit dans chaque cercle, il ne faudroit qu'en prendre d'égales à celles-là qui en fissent, puisque soûtenant des arcs égaux daus chaque cercle, par V. 26. ce sera la même chose pour juger de la proportion.) Cela supposé,

L'angle *c b d* inscrit dans le premier cercle est égal à l'angle CBD inscrit dans le second cercle, par IX. 20.

Et les angles que font les côtez *b c* & *b d* sur la base *d c*, sont égaux aux angles que font les côtez BC & BD sur la base DC, chacun à chacun, par IX. 20.

Donc par le 2.d Theoréme,

bc. BC. :: *bd*. BD. :: *dc*. DC.

VIII. Corollaire.

Si deux cordes de divers cercles soûtiennent des arcs proportionellement égaux, (c'est à dire d'autant de degrez,) elles sont proportionnelles aux diametres de ces cercles. XXVI.

C'est une suite du precedent. Car les diametres soûtiennent des arcs proportionellement égaux dans chaque cercle, puisqu'ils en soûtiennent la demy-circonference. C'est donc la même preuve & encore plus facile.

IX. Corollaire.

Si deux cordes égales de divers cercles soûtiennent chacune autant de degrez, les cercles sont égaux. Car par le precedent Corollaire elles sont en XXVII.

N 5 même

même raison que les diametres des cercles. Donc si elles sont égales, les diametres sont égaux. Donc les cercles sont égaux.

III. Theoréme.

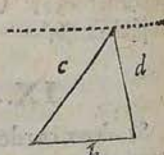
XXVIII. Deux Angles quoy qu'inégaux ont neanmoins leurs côtez proportionnels, lorsque le côté de l'un sur sa base fait un angle égal à celui que fait aussi sur sa base l'un des côtez de l'autre; & que l'autre côté du premier angle faisant sur sa base un angle obtus, & l'autre côté du second angle faisant un angle aigu sur la sienne, l'aigu est le complement de l'obtus, en sorte que tous les deux ensemble valent deux angles droits.

Cette derniere condition se peut encore exprimer en une autre maniere: qui est que ces deux côtez, l'un d'un angle & l'autre de l'autre, fassent chacun sur sa base le même angle aigu, mais que l'un le fasse en dehors sur le prolongement de la base, & l'autre en dedans sur la base même.

Cette derniere expression fait entrer plus facilement dans la demonstration de ce Theoréme.

Soient les deux angles, dont l'un ait pour côtez C & D, & pour base B. Et l'autre pour côtez *c* & *d*, & pour base *b*.

Je suppose, 1.° Que les angles que les côtez C & *c* font chacun sur leur base sont égaux.



2.° Que le côté D fait un angle obtus sur la base B, & *d* un angle aigu sur la base *b*, mais que cét aigu est égal au complement de cét obtus. D'où il s'ensuit

Que l'angle aigu que D fait sur la base en dehors en la concevant prolongée, est égal à l'angle aigu que *d* fait sur la sienne en dedans.

Cela étant, je dis que C. *c*. :: D. *d*.

Car soient faits des deux angles deux espaces paralleles, en prolongeant les bases B & *b* autant qu'il est necessaire, & tirant par chacun des sommets des paralleles à ces bases. Et celuy de ces espaces dans lequel sont C & D soit appellé A, & l'autre E.

Par l'hypothese l'angle aigu que fait C dans l'espace A est égal à l'angle aigu que fait *c* dans l'espace E.

Donc, par le 4.e Lemme, C & *c* sont également inclinées chacune dans son espace.

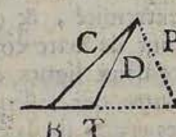
De mêmes, par l'hypothese, l'angle aigu que fait D dans l'espace A (sur la base B prolongée) est égal à l'angle aigu que fait *d* dans l'espace E.

Donc, par le 4.e Lemme, D & *d* sont également inclinées chacune dans son espace; & il n'importe que D soit autrement tournée au regard de *c*, car cela ne change en rien l'inclinaison de chacune dans son espace. Donc, par le 1.er Theoréme,

C. *c*. :: D. *d*. & *alternando*, C. D. :: *c*. *d*.

Autre Demonstration.

Si on tire du sommet sur la base B prolongée une ligne égale à D: l'angle aigu que cette ligne, que j'appellerai P, fera sur B prolongée, sera égal au complement de l'obtus que fait D sur B; & par consequent à l'aigu que fait *d* sur *b*. XXIX.



Donc les deux angles dont l'un a pour ses côtez C & P, & l'autre *c* & *d*, sont semblables, par le 6.e Lemme.

Donc C. *c*. :: P. *d*.

Or par la construction P est égale à D. Donc C. *c*. :: D. *d*.

AVERTISSEMENT.

XXX. *Cette derniere demonstration, quoi que moins bonne que la premiere, a cela d'utile, qu'elle fait voir plus clairement la difference qu'il y a entre ce 3.ᵉ Theoréme & le 2.ᵉ; qui est que dans le 2.ᵉ non seulement les côtez d'un Triangle sont proportionnels à ceux de l'autre, mais aussi la base: au lieu que dans celui-ci il n'y a que les côtez de proportionnels; étant bien clair que la base* B, *sur laquelle est l'angle obtus, doit être plus petite à proportion que la base b.*

Car appellant T *la base* B, *prolongée jusques à* P, *il est clair que l'angle qui a pour côtez* C *&* P, *&* T *pour base, est semblable à l'angle qui a pour côtez c & d, & b pour base.*

Donc, par le 2.ᵉ Theoréme, $\left.\begin{matrix}C.\,c.\\ P.\,d.\end{matrix}\right\} :: T.\,b.$

Or B *n'est que partie de* T; *donc il n'y a pas la même raison de* B *à b, que de* C *à c.*

I. COROLLAIRE.

XXXI. UNE ligne, que j'appellerai la coupante, étant inclinée sur une autre, que j'appellerai la coupée, si de l'extremité, & d'un autre point de cette coupante on tire deux lignes de part & d'autre qui fassent des angles égaux sur la coupée: la coupante entiere sera à sa partie vers la coupée, comme la ligne tirée de son extremité à l'autre ligne tirée de son autre point.

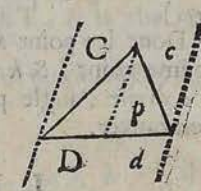
J'en laisse à trouver la demonstration, qui n'est qu'une application du precedent Theoréme.

II. Co-

II. COROLLAIRE.

SI un angle a diverses bases diversement inclinées sur ses côtez: la ligne qui divisera cét angle par la moitié fera que les deux parties de chaque base seront proportionnelles aux deux côtez de cét angle selon cette base. Il suffira de le demontrer en une seule base. XXXII.

Soit un angle divisé par la moitié par la ligne *p*. Soit l'un de ses côtez appellé C & l'autre *c*; la partie de la base qui joint C appellée D, & l'autre *d*.



Si on tire par les extremitez de la base des paralleles à *p*, il y aura deux espaces paralleles.

Celui dans lequel sont C & D soit appellé A, & l'autre E. Par le 9.ᵉ Lemme D & *d* sont également inclinées chacune dans son espace.

Et par l'hypothese C & *c* sont aussi également inclinées chacune dans le sien, puisque les angles aigus que chacune fait sur *p* sont égaux.

Donc, par le 1.ᵉʳ Theoréme,

C. *c.* :: D. *d.* & *alternando*, C. D. :: *c. d.*

III. COROLLAIRE.

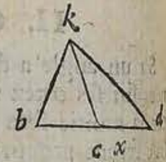
XXXIII. SI la ligne qui divise un angle en divise aussi la base proportionellement aux côtez, c'est à dire en sorte que les deux côtez de l'angle soient en même raison que les deux parties de la base, l'angle est divisé par la moitié.

C'est la Converse du precedent Corollaire, qui se prouve en cette maniere:

N 7 Soit

Soit l'angle *b k d* divisé par *kc*, en sorte que

bc. cd. :: kb. kd.



Si nous supposons que ce même angle est divisé par la moitié par *kx*, il s'ensuit par le precedent Corollaire que

bx. xd. :: kb. kd.

Donc *bx. xd. :: bc. cd.*

Donc ***componendo***, *bd. xd. :: bd. cd.* (II. 47.)

Donc les point *x* & *c* ne sçauroient être que le même point, & *kx* & *kc* la même ligne. Donc *kc* divise l'angle par la moitié. Ce qu'il falloit demontrer.

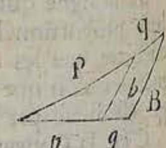
I. Probleme.

XXXIV. Trouver une 4.e proportionelle. C'est à dire ayant la 1.re la 2.e & la 3.e de 4 lignes proportionelles, trouver la 4.e

Ou ayant les deux premiers termes d'une raison, & l'antecedent de la 2.e en trouver le consequent.

Le moyen le plus facile est de se servir pour cela du 2.e Corollaire du second Theoréme. (20. *sup.*) Et ainsi donnant les mêmes noms aux trois données & à la 4.e qui est à trouver, j'appellerai

La 1re. p.
La 2e. q.
La 3e. *p*.
Et la 4e. à trouver, *q*.



Cela étant, il faut

1°. Mettre p & q sur une même ligne.

2°. Faire un angle de *p* la 3.e avec p la 1.re

3°. Joindre par *b* les extremitez de la 1.ere & de la 3.e

4.° Pro-

4°. Prolonger indefiniment *p* la 3.e

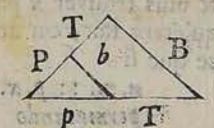
5°. De l'extremité de q la 2.e tirer B parallele à *b*, jusqu'à la rencontre de *p* prolongée.

Le prolongement de *p* jusqu'à la rencontre de B sera la 4.e que l'on cherche. Car il est clair par le Corollaire sus-dit (20. *sup.*) que

p. q. :: *p. q.*

On peut encore faire la même chose d'une autre maniere, qui est de renfermer la plus petite des deux premieres données dans la plus grande : & alors la plus grande s'appellera T, & la plus petite, qui en est partie, p. XXXV.

Mais il faut prendre garde si la premiere des données est la plus petite ou la plus grande. Car si c'est la plus grande, il faudra commencer par T, & la 3.e sera aussi *T*. Et alors pour trouver *p*, qui sera la 4.e que l'on cherche: aprés avoir joint par B les extremitez de T & de *T*, *b* parallele à B étant tirée de l'extremité de p sur *T* donnera *p*.



Car il est encor clair par le même Corollaire que

T. p. :: *T. p.*

Que si la 1.re des deux données est la plus petite, la 3.e sera *p*, & la 4.e à trouver sera *T*. De sorte qu'aprés avoir joint par *b* les extremitez de p & *p*, il faudra prolonger *p*; & tirant de l'extremité de T sur le prolongement de *p*, B parallele à *b*, on aura *T* pour la 4.e à trouver. Car par le même Corollaire (20. *sup.*) ***permutando***,

p. T. :: *p. T.*

Corollaire.

XXXVI. Trouver une 3.e proportionelle; c'est à dire faire que l'une des deux données soit moyenne proportionelle entre l'autre donnée & la trouvée.

C'est

C'eſt la même choſe que le precedent, excepté qu'une ſeule des deux données tient lieu de la 2.^{e} & de la 3.^{e}

II. Probleme.

XXXVII. Trouver la ligne qui ſoit à une ligne donnée en raiſon donnée.

Soit la ligne donnée p; la raiſon donnée $m.\ n$; la ligne que l'on cherche x. Ainſi il faut trouver

$$x.p :: m.n.$$

Or pour cela il ne faut que tranſpoſer les termes en commençant par n, & les mettant ainſi:

$$n.m. :: p.x.$$

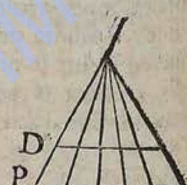
& puis trouver x par le Probleme precedent. Ce qu'étant fait, on aura ce que l'on cherche; parce que ſi

$n.m. :: p.x.$
permutando
$x.p. :: m.n.$ Ce qu'il falloit demontrer.

III. Probleme.

XXXVIII. Diviser une ligne donnée en quelques aliquotes que l'on voudra.

Soit D la ligne à diviſer. Tirer au deſſous ou au deſſus une parallele indefinie que j'appellerai P. Prendre dans P autant de parties égales qu'on veut en avoir en la diviſion de D, & prendre garde qu'elles ſoient notablement plus grandes ou plus petites que ne peuvent être celles de D. Puis des deux points entre leſquels ſont compriſes toutes les parties égales qu'on a priſes dans P, tirer deux lignes par les extremitez de D, juſques à ce qu'elles ſe joignent en un point.



point. Toutes les lignes tirées de ce point là à tous les points de la diviſion de P qui couperont D, la diviſeront en autant de parties égales qu'on en aura pris dans P.

La preuve en eſt cy-deſſus dans le 5.^{e} Corollaire du 2.^{e} Theoréme. (23. *ſup.*)

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE ONZIE'ME.

DES LIGNES RECIPROQUES.

Ce Livre-cy sera encore de la proportion des Lignes, & contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peut être plus belles & plus generales que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matiere des Proportions, en ne se servant que des lignes droites & des Cercles.

Pour les mieux faire entendre nous proposerons quelques Lemmes, qui feront voir aussi en quoi est different ce que l'on traite dans ce Livre de ce qui vient d'être traité dans le Livre precedent, & nous le diviserons en 7 Sections.

SECTION I.

Lemmes, & de ce qu'on entend par les Antiparalleles : avec le plan des principales choses qu'on doit traiter dans ce Livre.

I. LEMME.

QUAND il y a proportion entre 4 lignes, on y doit remarquer en les comparant deux à deux, deux rapports fort differens. 1.

L'un est celuy qui fait dire que les unes sont proportionelles aux autres.

Et l'autre, que les unes sont reciproques aux autres.

Car si on compare ou la 1.^{r} & la 3.^{e} avec la 2.^{e} & la 4.^{e}, c'est à dire les deux antecedens avec les deux consequens;

Ou les deux premieres avec les deux dernieres, c'est à dire le 1.^{er} antecedent & son consequent avec le 2.^{e} antecedent & son consequent : on dit alors que les unes sont *proportionelles* aux autres.

Mais si on compare la 1.^{re} & la 4.^{e} avec la 2.^{e} & la 3.^{e} c'est-à-dire les extremes avec les moyens: on dit alors que les unes sont *reciproques* aux autres.

Tout ce que nous avons dit dans le Livre precedent ne regarde que le premier rapport.

Et tout ce que nous dirons dans celuy-cy ne regarde presque que le second, & c'est pourquoy nous l'avons intitulé *Des Lignes Reciproques*.

II. Lemme.

II. Une ſeule ligne peut être dite reciproque à deux lignes, & deux lignes être reciproques à une ſeule. Mais c'eſt lors ſeulement que cette ligne que l'on compare ſeule avec deux autres eſt moyenne proportionelle entre ces deux autres. Car alors elle en vaut deux, parce qu'elle fait deux termes de la Proportion; le premier & le dernier, quand on commence par elle: comme ſi je dis, une ligne de 6 pieds eſt à une de 4, comme une de 9 à une de 6; ou le 2.ᵉ & le 3.ᵉ quand on la met au milieu: comme ſi je dis, 4. 6 :: 6. 9. Et il faut remarquer que quoique cette derniere diſpoſition ſoit la plus ordinaire, il y a neanmoins des rencontres où il eſt utile de ſe ſervir de la premiere, comme on pourra voir à la fin de ce Livre.

III. Lemme.

III. Lorsqu'un Angle a deux baſes, & que les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe chacun à chacun, cela peut arriver en deux manieres.

La premiere eſt quand l'angle que l'une des baſes fait ſur un côté eſt égal à l'angle que l'autre baſe fait ſur le même côté. (J'appelle le même côté la même ligne droite tirée du ſommet, quoique conſiderée ſelon les diverſes baſes elle tienne lieu de deux côtez.)

Or il eſt viſible que cela ne peut être que quand les baſes de cét angle ſont paralleles, comme l'on a veu X. 20.

La ſeconde maniere eſt quand l'angle qu'une baſe fait ſur un côté eſt égal à l'angle que l'autre baſe fait ſur l'autre côte. Et alors on peut appeller ces baſes *antiparalleles*, pour marquer leur effet oppoſé à celui

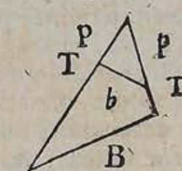
celui des baſes paralleles. Ce ſont ces ſortes de baſes qui feront preſque toutes les preuves dans tout ce Livre.

IV. Lemme.

Les baſes paralleles d'un même angle ne peuvent être diſpoſées que d'une ſeule maniere, qui eſt d'être toutes ſeparées l'une de l'autre. Car c'eſt le propre des paralleles de ne ſe pouvoir jamais joindre. Mais les antiparalleles peuvent être diſpoſées en trois manieres differentes. IV.

Premiere disposition des Antiparalleles.

La premiere reſſemble à celle des paralleles, les deux antiparalleles étant auſſi toutes ſeparées, & alors il eſt viſible que les côtez de cét angle ſelon la derniere baſe que nous appellerons B, comprennent les côtez de ce même angle ſelon la premiere baſe que nous appellerons *b*: & ainſi de ces lignes ou côtez les uns ſont *toutes*, & les autres leurs premieres parties, c'eſt à dire leur partie la plus proche du ſommet, (& remarquez que dans tout ce Livre ce ſera toûjours celle-là que nous entendrons par le nom de *partie*, ou de 1.ʳᵉ *partie*.) V.



C'eſt pourquoy nous appellerons toûjours, comme dans le Livre precedent, les deux toutes T. *T*.
& leurs parties p. *p*.
de ſorte que p de caractere Romain ſera toûjours la partie de T du même caractere Romain: Et *p* de caractere Italique ſera toûjours la partie de *T* de caractere Italique.

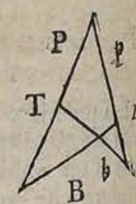
Or afin que les baſes B & *b* ſoient antiparalleles, il eſt clair qu'il faut

Que

Que l'angle que T premiere toute fait ſur B, ſoit égal à l'angle que *p* partie de la ſeconde toute fait ſur *b*. Et que l'angle que *T* ſeconde toute fait ſur B, ſoit égal à l'angle que p partie de la premiere toute fait ſur *b*.

SECONDE DISPOSITION DES ANTI-PARALLELES.

VI. LA ſeconde eſt quand elles ſe croiſent. Et alors ce ne ſont pas les deux toutes qui ſont les côtez au regard d'une baſe, & les deux parties qui le ſont au regard de l'autre, comme dans la premiere diſpoſitiou.

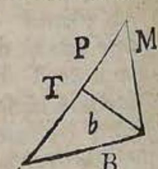


Mais les côtez au regard de chaque baſe ſont une toute & la partie de l'autre toute. Et ainſi pour diſtinguer les deux baſes, nous appellerons B celle qui ſe trouve terminée par l'extremité de T, & l'autre *b*.

Or afin que les baſes ſoient antiparalleles dans cette diſpoſition, il eſt clair qu'il faut que les angles que les deux toutes font, l'une ſur B & l'autre ſur *b*, ſoient égaux ; & que ceux que les deux parties font, l'une ſur B & l'autre ſur *b*, ſoient égaux auſſi.

TROISIÉME DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

VII. LA troiſiéme eſt quand les deux baſes ſe joignent en un même point de l'un des côtez. Et alors comme ce côté n'eſt point partagé, & que ſeul il tient lieu d'une toute & de ſa partie, nous l'appellerons M ; appellant à l'ordinaire la derniere baſe B, la premiere *b*, le côté partagé T, & ſa partie p.



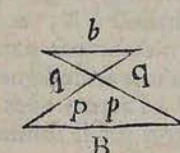
Or afin que les baſes B & *b* ſoient antiparalleles, il faut que l'angle que T fait ſur B ſoit égal à l'angle que M fait ſur *b* ; & que l'angle que M fait ſur B, (qui comprend celui qu'elle fait ſur *b*,) ſoit égal à l'angle que p fait ſur *b*.

V. LEMME.

LORSQUE deux lignes ſe coupant font 4 angles qui ſont deux à deux oppoſez au ſommet, & par conſequent égaux : on peut donner des baſes à deux de ces angles oppoſez au ſommet, qui ſoient telles que ces angles ſoient ſemblables, c'eſt à dire, que les deux angles ſur la baſe de l'un ſoient égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. VIII.

Mais cela peut arriver en deux manieres ; que pour mieux faire entendre, p & q de caractere Romain marqueront les deux parties d'une même ligne, & *p* & *q* de caractere Italique les deux parties de l'autre ligne. Et de plus, comme chaque angle doit avoir pour ſes côtez la partie d'une ligne & la partie d'une autre ligne : p & *p* ſeront les côtez d'un angle, & q & *q* les côtez de l'autre.

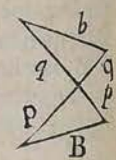
Soit enfin appellée B la baſe de l'angle qui a p & *p* pour ſes côtez ; & *b*, celle de l'angle qui a q & *q* pour ſes côtez. Cela étant, voici les deux manieres dont ces angles oppoſez au ſommet peuvent être ſemblables:



La 1.re eſt quand ce ſont les angles alternes qui ſont égaux ſur les deux baſes. C'eſt à dire quand ce ſont les deux parties d'une même ligne, comme p & q, qui font des angles égaux p ſur B, & q ſur *b*, & ainſi des deux autres ; & alors il eſt clair que ces deux baſes doivent être paralleles.

La

IX. La 2.e eſt quand ce ſont les angles de proche en proche qui ſont égaux ſur les deux baſes; de ſorte que ce ſont p & *q*, parties l'une d'une ligne & l'autre de l'autre, qui ſont les angles égaux p ſur B, & *q* ſur *b*; & *p* & q qui ſont auſſi les angles égaux *p* ſur B, & q ſur *b*.



Ce ſont encore ces baſes que nous appellerons *antiparalleles*, pour marquer leur effet contraire à celui des paralleles.

VI. Lemme.

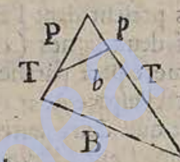
X. Comme lorſqu'un angle a deux baſes paralleles, on peut & on doit conſiderer ſes côtes ſelon une baſe dans un eſpace parallele, & ſes autres côtez ſelon l'autre baſe dans un autre eſpace parallele: il en eſt de même quand les baſes ſont antiparalleles; avec cette difference,

Que quand les baſes ſont paralleles, une ſeule ligne tirée par le ſommet fait trois eſpaces paralleles: le 1.er compris entre le ſommet & la derniere baſe; le 2.e entre le ſommet & la 1.re baſe; le 3.e entre les deux baſes.

Mais quand elles ſont antiparalleles, ce 3.e eſpace ne peut pas être parallele. Et pour les deux autres, on ne les peut concevoir qu'en s'imaginant deux lignes differentes tirées par le ſommet, l'une parallele à B, & l'autre parallele à *b*. Car B & *b* n'étant pas paralleles entr'elles, il eſt viſible qu'une ſeule ligne ne peut pas être parallele à l'une & à l'autre; mais il ſuffit de s'imaginer ces lignes tirées par le ſommet, ſans qu'il ſoit neceſſaire de les décrire.

Et ainſi nous devons toûjours nous imaginer dans ces angles qui ont deux baſes antiparalleles deux eſpaſes paralleles. L'un que j'appelleray A, com-

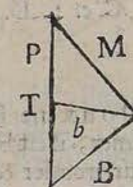
compris entre le ſommet & B. Et l'autre que j'appelleray E, compris entre le ſommet & *b*.



Et de plus il faut remarquer, XI.

Que dans la 1.re diſpoſition des baſes antiparalleles les deux toutes T & *T* ſont dans l'eſpace A, & les deux parties p & *p* dans l'ſpace E.

Que dans la ſeconde, qui eſt quand les baſes ſe croiſent, T & *p* ſont dans l'eſpace A; & *T* & p dans l'eſpace E. XII.



Que dans la troiſiéme, qui eſt quand elles ſe joignent en un ſeul point d'un côté, M ſe trouve dans l'un & l'autre eſpace. Car l'eſpace A comprend T & M; & l'eſpace E comprend M & p. XIII.

VII. Lemme.

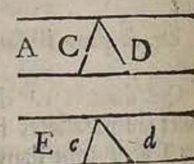
XIV. Il en eſt de même quand les angles oppoſez au ſommet ont leurs baſes antiparalleles.

Car il ſe faut imaginer deux lignes tirées par le ſommet commun, dont l'une ſoit parallele à B & l'autre à *b*; & ainſi l'on aura deux eſpaces paralleles, l'un compris entre le ſommet & B, (dans lequel ſont p & *p*,) que nous appellerons A. Et l'autre compris entre ce même ſommet & *b*, (dans lequel ſont q & *q*,) que nous appellerons E. (9. *ſup.*)

VIII. Lemme.

XV. Tout ce qu'on aura à prouver dans ce Livre le ſera par le premier Theoréme du Livre precedent, que je repeteray encore ici, afin qu'on l'ait plus present dans l'Esprit.

Si deux lignes (comme C & D) sont dans un même espace parallele, comme est l'espace A:



Et que deux autres lignes comme (*c* & *d*) soient dans un autre espace parallele, comme est l'espace E:

Si C & *c* sont également inclinées, C dans A, & *c* dans E; & que D & *d* soient aussi également inclinées D dans A & *d* dans E: les deux également inclinées entr'elles sont proportionelles aux deux qui le sont aussi entr'elles.

C.*c*. :. D.*d*. & *alternando*, C.D. :: *c*.*d*.

IX. Lemme.

XVI. Pour ne se point broüiller en disposant les termes, il est bon de s'astraindre à donner toûjours pour premier & deuxiéme termes de la Proportion les également inclinées dans les deux differens espaces paralleles, & de même au regard du troisiéme & du quatriéme. Et pour premier & troisiéme termes, celles qui sont dans le même espace parallele. Et de même au regard du deuxiéme & du quatriéme. Sauf à les disposer apres autrement, *Alternando*.

I Proposition fondamentale des reciproques.

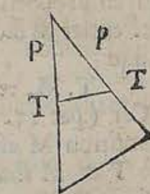
XVII. Lorsqu'un même angle à deux bases antiparalleles, une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. C'est à dire que

T.*p*. :: *T*.p. ou T.*T*. :: *p*.p.

PRE-

Premiere preuve dans la premiere disposition des Anti-paralleles.

Dans cette disposition les deux toutes T & *T* sont dans l'espace A, & les deux parties p & *p* sont dans l'espace E. (par 11. S.) XVIII.



Or (par 5. *sup.*) T & *p* sont également inclinées, T dans A, & *p* dans E. De même aussi *T* & p sont également inclinées, *T* dans A, & p dans E.

Donc (par 15. *sup.*) T.*p*. :: *T*.p.

Or T & sa partie p sont les extremes de la Proportion, dont *T* & *p* sa partie sont les moyens.

Donc une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

Seconde preuve dans la seconde disposition des Anti-parallèles.

Dans cette 2.[e] disposition T & *p* (partie de l'autre toute) sont dans l'espace A; & *T* & p dans l'espace E. (par 12. *sup.*) XIX.

Or (par 6. *sup.*) T & *T* sont également inclinées, T dans A, & *T* dans E. Et de même p & *p* également inclinées, *p* dans A & p dans E.

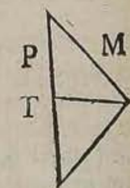
Donc (par 15. *sup.*) T.*T*. :: *p*.p.

Je

Je reſerve la 3.ᵉ diſpoſition pour un Corollaire à part.

COROLLAIRE.

XX. QUAND un angle a deux baſes antiparalleles dans la 3.ᵉ diſpoſition, qui eſt quand elles ſe joignent en un ſeul point d'un côté : ce côté eſt moyen proportionel entre l'autre côté entier & ſa partie; c'eſt à dire que



T. M. :: M. p.

Car (par 13. *ſup.*) dans cette diſpoſition M eſt dans l'un & l'autre eſpace ; parce que T & M ſont dans l'eſpace A, & M & p dans l'eſpace E.

Or (par 7. *ſup.*) T & M ſont également inclinées, T dans l'eſpace A, & M dans l'eſpace E.

Et M & p ſont également inclinées, M dans l'eſpace A, & p dans l'eſpace E.

Donc (par 15. *ſup.*) T. M. :: M. p.

II. PROPOSITION FONDAMENTALE

DES RECIPROQUES.

XXI. QUAND deux lignes ſe coupant font deux angles oppoſez au ſommet qui ont des baſes antiparalleles, les parties de l'une de ces lignes qui ſe coupent en ce ſommet ſont reciproques aux parties de l'autre. (*Voyez la figure du N. 9.*)

Car (par 14. *ſup.*) p & *p* ſont dans l'eſpace A, & q & *q* ſont dans l'eſpace E.

Or (par 9. *ſup.*) p & *q* ſont également inclinées; p dans A, & *q* dans E.

Et *p* & q également inclinées, *p* dans A & q dans E.

Donc

Donc (par 15. *ſup.*)

p. *q*. :: *p*. q.

Or p & q ſont les parties de la même ligne : & *p* & *q* ſont les parties de l'autre ligne.

Donc les parties d'une ligne ſont reciproques aux parties de l'autre.

COROLLAIRE.

SI une de ces lignes qui en ſe coupant font des angles oppoſez au ſommet, qui ont des baſes antiparalleles, eſt diviſée par la moitié : une ſeule de ces moitiez eſt moyenne proportionelle entre les parties de l'autre ligne. XXII.

Cela eſt clair, puiſque c'eſt la même choſe de donner pour les moyens de cette Proportion les deux moitiez de la même ligne, ou une ſeule moitié priſe deux fois.

PLAN GENERAL
DE CE QUE L'ON PRETEND MONTRER DANS LA SUITE DE CE LIVRE.

XXIII.

Nous avons déja dit que les extremes d'une Proportion comparez aux moyens s'appellent reciproques : *& qu'ainſi il y en a dans toute Proportion.*

Mais ce que l'on pretend principalement faire dans ce Livre, eſt de montrer comment deux lignes droites qui ſe rapportent à une même, (ou parce qu'elles en ſont les deux parties, ou parce que l'une eſt la toute, & l'autre une partie de cette toute,) ſont reciproques à deux autres lignes, qui ſe rapportent de la même ſorte à une même ligne, ou quelquefois même à une ſeule qui étant repetée deux fois ſera ou les deux extremes ou les deux moyens de la Proportion.

Il faut pour cela que les deux lignes à chacune desquelles deux se rapportent, & que par cette raison ont peut appeller les principales, *ayent un point commun; ce qui peut être en deux manieres: Ou parce qu'elles se croisent & se coupent effectivement en un point, & y font des angles opposez au sommet; & alors ce point s'appellera pour cette raison* point de section: (Voyez la fig. du N. 9. sup.) *Ou parce qu'elles se terminent à un même point & y font un angle seulement sans passer plus outre; & alors ce point commun s'apppellera* terminant. (Voyez les trois dernieres figures. Sup.)

Quand le point commun est de section, *chaque ligne étant coupée en deux, ce sont les deux parties d'une même ligne qui doivent être reciproques aux deux parties de l'autre. Et alors ce point commun aux deux* principales *l'est aussi aux 4 lignes: quoy que ce ne soit qu'au regard des principales qu'il soit point de* section: *car les parties ne s'y coupent pas, mais y aboutissent.*

Mais quand le point est terminant *au regard des principales: parce que cela seul ne donneroit que deux lignes, & qu'il en faut 4, ou au moins 3, il est necessaire que ces lignes principales qui sont terminées par ce point commun, soient encore toutes deux coupées en quelque autre endroit, (ou au moins l'une,) afin que cela puisse faire 4 lignes, ou au moins 3. Et alors ce sont les deux toutes, & la partie de chacune vers le point commun, qui font les 4 lignes: & il faut que ce soit chaque toute & sa partie vers le point commun qui soient reciproques à l'autre toute & à sa premiere partie.*

Quand le point est de section, *les deux principales se coupant font 4 angles dans ce point de section; mais il suffit d'en considerer deux opposez au sommet. Et il faut alors que ces deux Angles qui sont égaux ayent leurs bases antiparalleles, selon ce qui vient d'être dit N. 9.*

Mais

Mais quand le point est terminant, *c'est le même angle qui doit avoir deux bases antiparalleles, & l'une des trois manieres qui ont éte representées S. 18. 19. 20.*

Il n'est donc question que de chercher les voyes generales pour trouver ces bases antiparalleles.

Or voici ce qui m'est venu en pensée sur cela:

J'ai reconnu qu'il n'y a point de voye generale pour couper tout d'un coup les côtez d'un angle, ou les côtez de deux angles opposez au sommet, par des bases antiparalleles, qu'en y employant la circonference d'un Cercle; c'est pourquoi on ne peut trouver sans cela la moyenne proportionelle entre deux lignes données.

J'ai inferé de là qu'il falloit que le point commun dont nous venons de parler, soit qu'il soit de section, *ou* terminant, *ait rapport à la circonference d'un Cercle. C'est à dire qu'il faut qu'il soit*

Ou {
1. *Dans le Cercle.*
2. *Hors le Cercle.*
3. *Dans la circonference du Cercle.*

Quand le point commun est au dedans du Cercle, c'est toujours un point de section, & ce sont deux angles opposez au sommet qui ont leurs bases antiparalleles. (Voyez la fig. du N. 27. ci apres.) *Car il faut que les 4 lignes dont deux sont reciproques aux deux autres, soient les deux parties de chacune des principales qui se coupent en un point quelconque au dedans du Cercle, & qui se terminent de part & d'autre à 4 points differens de la circonference.*

Quand le point commun est hors le Cercle, c'est toujours un point terminant. (Voyez les fig. des N. 31, 32, & 33. ci apres.) *Car ce sont deux toutes qui partant de ce point qui est hors le Cercle coupent chacune la circonference du Cercle en un point de sa convexité, & se terminent à un autre*

 poinτ

point de sa concavité ; & alors ce sont chaque toute & sa partie hors le Cercle qui sont reciproques à l'autre toute & à sa partie qui est aussi hors le Cercle. Mais il peut arriver que l'une de ces lignes ne faisant que toucher le Cercle sans passer plus outre, le point auquel elle aboutira tenant lieu de convexité & de concavité, elle sera toute seule reciproque à l'autre toute & à sa partie, c'est à dire qu'elle sera moyenne proportionelle entre cette toute & sa partie.

Mais quand le point commun est dans la circonference même du Cercle, on a besoin, pour avoir des reciproques, d'une ligne droite indefinie, outre la circulaire, qui coupe perpendiculairement celle qui peut être menée indefiniment du point commun en passant par le centre. Et alors cette ligne indefinie ou coupe le Cercle, (comme dans les fig. des N. 40, 41, 42, 43, & 44. ci apres,) ou le touche, (comme dans les fig. des N. 46, & 47, ci apres;) ou est au dessous, ou est au dessus. J'appelle au dessous, celle qui est telle, que le Cercle est entre cette ligne & le point commun, (comme dans la fig. du N. 48, ci apres;) j'appelle au dessus, celle qui est à l'opposite, (comme dans la fig. du N. 49. ci apres.)

Dans les trois premiers cas, le point commun est toûjours un point terminant, & chacune des deux lignes qui en partent, ou coupe le Cercle & est terminée par l'indefinie, (comme dans les fig. des N. 41, 46 & 48, ci apres;) ou coupe l'indefinie & est terminée par le Cercle, (comme dans la fig. du N. 40. ci apres;) ou l'une coupe le Cercle & est terminée par l'indefinie, & l'autre coupe l'indefinie & est terminée par le Cercle, (comme dans la fig. du N. 42, ci apres.) Et alors chaque toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. Mais il y en peut avoir une qui se terminera à un point commun à la circonference & à l'indefinie, (comme dans les fig. des N. 43 & 44, ci apres;) & alors elle sera moyenne proportionelle entre l'autre toute & sa partie.

Mais dans le 4.e cas, c'est à dire quand l'indefinie est au dessus du point commun, (Voyez la fig. du N. 49, ci apres:) ce point commun ne peut être qu'un point de section. Car toutes les fois que des lignes se couperont dans ce point & se termineront d'une part à la circonference, & de l'autre à l'indefinie, les parties de l'une sont reciproques à celles de l'autre.

Il faut relire tout le Livre IX. Car c'est sur ce qui y est dit que sont fondées les demonstrations de celui-ci.

DEUX AVIS DE LOGIQUE.

I.

Quand on a à prouver qu'un angle ayant deux bases, les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun, on est assuré que cela est, quand on a prouvé que l'un des angles sur une base est égal à l'un des angles sur l'autre, parce qu'il s'ensuit de là necessairement que l'autre est égal aussi à l'autre. XXXV.

Cette preuve est convainquante, & on s'en doit passer quand on ne peut mieux. Mais il faut avoüer qu'elle n'est pas si bonne & ne fait pas si bien entrer dans la nature des choses, que celle qui montre positivement que l'un & l'autre angle d'une base est égal à l'un & l'autre angle de l'autre. Et c'est pourquoi je ne me contenteray point de la premiere sorte de preuve, & je me serviray toûjours de cette derniere.

2.

XXV. *Quand on a à prouver de plusieurs binaires de lignes, qu'ils sont reciproques les uns aux autres, on en est asseuré quand on peut montrer qu'ils sont tous reciproques à un même binaire, ou qu'ils ont tous la même moyenne proportionelle.*

Mais quoique cela soit convainquant, l'Esprit ne reçoit pas la même clarté & ne demeure pas si satisfait, que si on montroit immediatement de chaque binaire qu'il est reciproque à chaque autre.

Et ainsi, quoi qu'il me fût facile d'employer la premiere voye, je me suis resolu de n'employer que cette derniere, comme plus parfaite & plus lumineuse, pour parler ainsi; & peut être qu'on trouvera que ces deux exemples sont remarquables, pour faire voir la difference qu'il y a entre convaincre l'Esprit en le mettant hors d'état de pouvoir douter qu'une chose soit: & le satisfaire pleinement en lui donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement desirer.

Reprenons maintenant la division proposée, qui est que le point commun aux lignes reciproques par la section du Cercle, est necessairement

1. *Ou dans le Cercle.*
2. *Ou hors le Cercle.*
3. *Ou dans la circonference du Cercle.*

SE.

SECTION II.

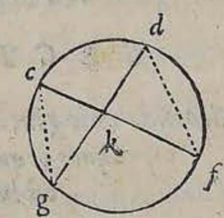
Premiere voye generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est au dedans du Cercle.

CETTE voie est pour trouver que les parties d'une ligne sont reciproques aux parties d'une autre ligne, ou à une ligne quand elle est moyenne proportionelle. Et ainsi elle est toute appuyée sur la 2.e Proposition fondamentale & son Corollaire (21. & 22. *sup.*) qui est des angles opposez au sommet qui ont leurs bases antiparalleles. XXVI.

I. THEORÉME.

SI deux cordes se coupent dans le Cercle, les parties de l'une sont reciproques aux parties de l'autre. XXVII.

Soient les cordes *c f* & *d g* qui se coupent en *k*. Soient tirées les bases à deux angles opposez *c g*, *d f*. Je dis qu'elles sont antiparalleles.



Car (par IX. 20.) les angles vers g & vers *f* sont égaux, parce qu'ils sont appuyez sur le même arc *c d*. Et par la même raison les angles vers *c* & vers *d* sont égaux aussi, étant appuyez sur le même arc *g f*.

Donc les bases *c g* & *d f* sont antiparalleles. (9. *sup.*)

Donc par la 2.e Proposition fondamentale (21. *sup.*)

kf. kg :: kd. kc.

p. q. :: p. q.

O 6 II. THEO-

II. Theoréme,

Corollaire du Premier.

XXVIII. Si une des lignes est coupée par la moitié, une de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les deux parties de l'autre.

C'est le Corollaire même de la 2.e Proposition fondamentale.

Corollaire.

XXIX. Si d'un point quelconque d'un diametre on éléve une perdendiculaire jusques à la circonference, cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre.

Car il est clair que cette perpendiculaire est la moitié de la corde qui couperoit le diametre perpendiculairement par ce point. Donc, par le Theoréme precedent, elle doit être moyenne proportionelle entre les parties du diametre.

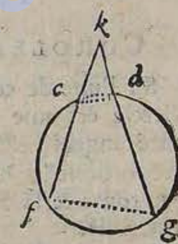
SECTION III.

Seconde voie generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est hors le Cercle.

XXX. Quand le point commun est hors le Cercle, les côtez de l'angle qui a ce point pour sommet peuvent être coupez chacun deux fois par la circonference du Cercle; une fois par la convexité en entrant dans le Cercle, & une fois par la concavité, où on les suppose terminées; si ce n'est que que le point de l'attouchement tenant lieu tout seul de la convexité & de la concavité, un des côtez peut n'être terminé qu'à ce point. Et alors il sera tangente du Cercle, & les deux bases antiparalleles n'auront que trois points differens. C'est ce qu'on verra dans les deux Theorémes suivans.

III. Theoréme.

Lorsque d'un point hors le Cercle on tire des lignes qui coupent le Cercle en sa convexité, & sont terminées en sa concavité: chaque toute & sa partie hors le Cercle, sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie hors le Cercle. XXXI.



Soient tirées *kf*, qui coupe la circonference en *c*; & *k g* qui la coupe en *d*. Je dis que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

Car (par IX. 15.) l'angle *k c d* a pour mesure la moitié des deux arcs *c d*, & *c f*. Or la moitié de ces deux arcs *c d* & *c f* est aussi la mesure de l'angle *k g f*. (par IX. 17.) Donc les angles *k c d* & *k g f* sont égaux.

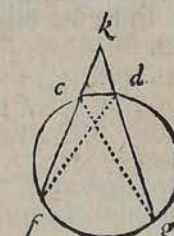
On prouvera de la même sorte l'égalité des angles *k d c* & *k f g*.

Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. (3. *sup.*)

Donc *k f. k d.* :: *k g. kc.*

T. *p.* :: *T. p.*

On peut aussi prouver ce Theoréme en croisant les bases, en montrant que les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles. XXXII.



Car les angles vers *f* & vers *g* sont égaux, étant appuyez sur le même arc *c d*.

Et pour les angles *k c g* & *k d f*, ils sont égaux; parce que si on les examine, on trouvera qu'ils ont chacun pour mesure la moitié des trois arcs *f c*, *c d*, *d g*. (IX. 15.)

Donc les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

Donc *kf*. *kg* :: *kd*. *kc*.
T. T. :: p. p.

IV. Theoréme,

Corollaire du troisiéme.

XXXIII. Si l'une de ces lignes tirées d'un point hors le Cercle est une tangente, cette tangente est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie hors le Cercle.

Soit tirée *k f* qui coupe le Cercle en *c*, & la tangente *k E*; je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car (par IX. 17.) l'angle *k f E*, a pour mesure la moitié de l'arc *c E*, qui est aussi la mesure de l'angle *k E c* (par IX. 12.)

Et l'angle *k E f*, (par IX. 12.) a pour mesure la moitié des deux arcs *E c* & *c f*, qui est aussi la mesure de l'angle *k c E*, par IX. 15.

Donc les bases *f E* & *E c* sont antiparalleles.

Donc, par 20. *sup*.
k f. *k E*. :: *k E*. *k c*.
T. M. :: M. p.

AVER-

Avertissement.

Il n'y a rien jusqu'ici qui ne soit dans toutes les Geometries : si ce n'est qu'il est prouvé d'une maniere nouvelle. XXXIV.

Mais on le pourroit encore faire comprendre d'une maniere plus naturelle & plus simple sans considerer aucuns angles, faisant seulement attention à la nature du Cercle : ce qui fera voir aussi pourquoi on a besoin d'un Cercle pour couper des lignes Reciproquement.

Soit que le point commun soit au dedans du Cercle, ou au dehors, on peut considerer entre toutes les lignes qui se coupent dans ce point ou qui partent de ce point, celle qui passe par le centre que nous appellerons la centrique, *& les autres* excentriques.

Quand le point est au dedans du Cercle, la centrique *est un diametre, & par consequent la plus grande ligne qui puisse passer par le point commun que nous supposons n'être pas le centre, mais c'est aussi la plus inégalement partagée. Car comme il paroît par VII. 25. la plus petite partie d'une* excentrique *quelconque, est plus grande que la plus petite partie de la* centrique; *& en récompense la plus grande partie de l'*excentrique *est plus petite que la grande partie de la* centrique. *Et l'uniformité de la ligne circulaire fait que cette compensation est si juste, qu'il ne faut pas s'étonner si les deux parties de la centrique sont reciproques aux deux parties de toute excentrique, c'est à dire si la petite partie de la centrique est à la plus petite partie de l'excentrique, comme la plus grande de l'excentrique est à la plus grande de la centrique. D'où il s'ensuit aussi que les deux parties d'une excentrique quelconque doivent être reciproques aux deux parties de toute autre excentrique.*

Il

Il en est de même quand le point est hors le Cercle. Car la centrique est aussi la plus longue de toutes, (VII. 25.) *& sa partie qui est hors le Cercle est au contraire plus courte, que la partie de toute autre qui est aussi hors le Cercle. Ce qui faisant une compensation juste à cause de l'uniformité du Cercle, on juge aisément que la centrique & sa partie hors le Cercle doivent être reciproques à toute excentrique & sa partie hors le Cercle; & qu'il en est de même des excentriques comparées les unes aux autres; celles qui approchent le plus de la centrique étant toûjours les plus longues, & ayant toûjours aussi leurs parties de dehors plus courtes.*

SECTION IV.

Troisiéme voie generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est dans la circonference du Cercle.

XXXV. *Je ne croi pas que ce que l'on va dire se trouve nulle part.*

Nous avons déja remarqué (23. sup.) *que cette derniere voie generale se pouvoit diviser en deux manieres : Dans l'une desquelles le point commun étoit* terminant, *& dans l'autre* de section.

Qu'il étoit terminant, *quand la ligne droite indefinie, dont nous allons parler, ou coupoit le Cercle, ou le touchoit, ou étoit au dessous du Cercle.*

Et qu'il étoit de section, *c'est à dire que les deux lignes principales s'y coupoient, quand cette ligne indefinie étoit au dessus du Cercle. Il faut donc traiter separément ces deux manieres.*

PRE-

PREMIERE MANIERE DE LA III. VOIE GENERALE :

Quand l'indefinie coupe, ou touche, ou est au dessous du Cercle.

Une seule Proposition comprendra la maniere de trouver une infinité de Reciproques. Et il est peut-être difficile de s'imaginer rien de plus general sur la proportion des lignes par la Geometrie ordinaire.

PROPOSITION GENERALE.

Si d'un point dans la circonference on tire une ligne indefiniment par le centre, & qu'on en tire une autre indefinie que j'appelleray *y*, qui coupe perpendiculairement celle qui passe par le centre : en quelque endroit qu'elle la coupe, soit en coupant aussi le Cercle, soit en le touchant, soit tout à fait hors le Cercle & au dessous : toutes les lignes tirées du point dans la circonference qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference : ou coupées par la circonference & terminées par *y* : seront telles, que chaque toute & sa partie vers le point commun seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie ; & chaque toute & sa partie auront pour moyenne proportionnelle celle qui sera terminée à un point commun à *y* & à la circonference. XXXVI.

Cette proposition est si vaste & comprend tant de cas qu'on n'en sçauroit bien voir la verité, qu'en la considerant dans ces cas particuliers qui sont trois principaux. XXXVII.

Le 1.er Quand la ligne *y* coupe le Cercle.

Le 2.e Quand elle le touche.

Le

Le 3.^e Quand elle eſt tout à fait hors le Cercle, & au deſſous.

C'eſt ce que nous traiterons par divers Theorémes.

PREMIER CAS.

XXXVIII. LE 1.^er Cas eſt quand y coupe le Cercle. Et alors il n'eſt point neceſſaire de dire que cette ligne doit être perpendiculaire à celle qui étant tirée du point K paſſe par le centre: car il ſuffit de dire, (ce qui eſt la même choſe,) qu'elle doit couper le Cercle en deux points, que j'appelleray E & *E*, qui ſoient également diſtans de K. Cela étant vrai, voici le 1.^er Theoréme:

V. THEORÉME.

XXXIX. SI la ligne y coupe le Cercle en deux points également diſtans de K, toutes les tirées du point K qui ſeront ou coupées par y, & terminées par la circonference: ou coupées par la circonference, & terminées par y: ſeront telles que chaque toute & ſa partie vers K ſeront reciproques à chaque autre toute & à ſa partie vers K.

On peut faire ſur cela trois comparaiſons:

La 1.^re De deux lignes qui ſont toutes deux coupées par y & terminées par la circonference.

La 2.^e De deux lignes qui ſont toutes deux coupées par la circonference, & terminées par y.

La 3.^e De deux lignes, dont l'une eſt coupée par y, & terminée par la circonference; & l'autre coupée par la circonference, & terminée par y.

PREMIERE COMPARAISON.

XL. SOIENT tirées K f, qui coupe y en c; & K g qui la coupe en d: je dis que les baſes $f\,g$ & $c\,d$ ſont antiparalleles. Donc tout le reſte s'enſuit, par la 1.^re Propoſition fondamentale, *ſup.* 17.

Car

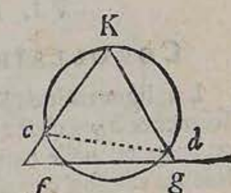
Car (par IX. 41.) l'angle K c *E*, a pour meſure la moitié de l'arc K *E* plus la moitié de l'arc E f; & l'arc K *E* étant égal à l'arc K E, cette meſure eſt égale à la moitié des deux arcs K E & E f. Or la moitié des deux arcs K E & E f eſt la meſure de l'angle inſcrit K $g\,f$, parce que l'arc K E f, ſur lequel il eſt appuyé, comprend ces deux-là.

Donc l'angle K c *E* (ou K $c\,d$) eſt égal à l'angle K $g\,f$. On prouvera la même choſe des angles K $d\,c$ & K $f\,g$. Donc ces deux baſes ſont antiparalleles. Donc (par la 1.^re Propoſition fond. *ſup.* 17.) la toute d'une part & ſa partie, ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. Ce qu'il falloit demontrer.

K f. K d. :: K g. K c.
T. p. :: T. p.

SECONDE COMPARAISON.

SOIENT tirées K f qui coupe la circonference en c, & K g qui la coupe en d; je dis que les baſes $f\,g$ & $c\,d$ ſont antiparalleles. XLI.



Car (par IX. 45.) l'angle K $f\,g$ a pour meſure la moitié de l'arc K c, qui eſt auſſi la meſure de l'angle inſcrit K $d\,c$. Donc les angles K $f\,g$ & K $d\,c$ ſont égaux.

On prouvera de la même ſorte que les angles K $g\,f$ & K $c\,d$ ſont égaux.

Donc

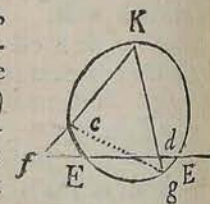
Donc les baſes *fg* & *cd* ſont antiparalleles.
Donc Kf. Kd. :: Kg. Kc.
T.p. :: T.p.

Troisiéme Comparaison.

XLII. Soient tirées K*f* qui coupe la circonference en *c*, & K*g* qui coupe *y* en *d*.

Dans cette comparaiſon les baſes ſe croiſent. Car il faut prendre pour les deux baſes *fd* & *gc*.

Or pour prouver qu'elles ſont antiparalleles, il faut montrer que les angles K*fd*, ou K*fE*, & K*gc*, ſont égaux. Ce qui eſt facile, puiſqu'il eſt clair (par ce qui vient d'être dit 41. *ſup.*) que l'un & l'autre a pour meſure la moitié de l'arc K*c*; & pour les deux autres K*d*E & K*cg*, cela ſe prouve auſſi facilement (par ce qui a été dit 40 *ſup.*) de l'égalité entre les angles K*df* (ou K*d*E,) & K*cg*.



Donc les baſes *fd* & *gc* ſont antiparalleles.
Donc Kf. Kd. :: Kg Kc.
T. p. :: T. p.

VI. Theoréme,

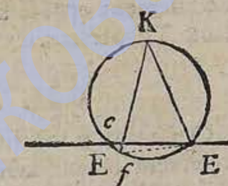
Corollaire du Cinquiéme.

XLIII. La ligne tirée de K au point commun à la circonference & à *y* (c'eſt à dire K E ou K *E*,) eſt moyenne proportionelle entre chaque toute & ſa partie, ſoit qu'elle ſoit coupée par *y* & terminée par la circonference, ſoit qu'elle ſoit coupée par la circonference & terminée par *y*.

Premiere Comparaison.

Soit tirée K *f* qui coupe *y* en *c*, & K E; il ne faut que prouver que les baſes *fE* & *cE* ſont antiparalleles. Ce qui eſt facile.

Car les angles inſcrits K*fE* & K*Ec* (ou K*E*E,) ſont égaux; parce que (par IX. 17.) l'un eſt appuyé ſur l'arc K*E*, & l'autre ſur l'arc K E, qui ſont égaux.

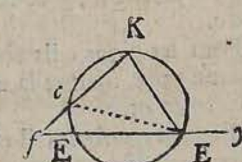


Et pour les angles K*cE*, & K*Ef*, leur égalité ſe prouve de la même ſorte que l'égalité des angles K*fg* & K*dc*, dans le 5.e Theorême, 1.re Comparaiſon.

Donc ces baſes ſont antiparalleles & diſpoſées en la 3.e maniere expliquée dans le 4.e Lemme.
Donc Kf. KE. :: KE Kc.
T.M. :: M.p.

Seconde Comparaison.

Soit tirée K*f* qui coupe la circonference en *c*; je dis que les baſes *fE* & *cE* ſont antiparalleles. Car les angles K*fE* & K*Ec* ont pour meſure la moitié de l'arc K*c*, ſelon ce qui a été dit, 5.e Theoréme, 2.de Comparaiſon; & les angles inſcrits K*Ef* (ou K *E* E,) & K*cE*, ſont égaux auſſi, étant appuyez ſur les arcs égaux K E & K *E*. XLIV.



Donc Kf. KE. :: KE. Kc.
T. M. :: M. p.

SECOND CAS.

XLV. Le 2.e Cas de la Proposition generale (*sup.* 37.) est quand la ligne *y* touche le Cercle en un point diametralement opposé à K : ce qui comprend aussi deux Theorémes.

VII. THEORÉME.

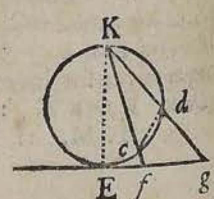
XLVI. QUAND *y* touche le Cercle en un point diametralement opposé à K : toutes les lignes tirées de K sur cette ligne, (qui ne peuvent pas n'être point coupées par le Cercle,) sont telles, que chaque toute & sa partie sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie.

Si les deux lignes étoient tirées de deux differens côtez, il n'y auroit rien qui n'eust déja été prouvé 41. *sup.* C'est pourquoy nous les proposerons du même côté. Ce qui pourra aussi servir au cas semblable du 5.e Theoréme.

Soient tirées du même côté K *f*, coupée par la circonference en *c*, & K g coupée par la circonference en *d* ; il faut prouver que les bases *fg* & *cd* sont antiparalleles. Or il y a sur chacune un angle aigu K *gf* (ou K *g* E,) & K *cd* ; & un obtus K *fg* & K *dc*.

Pour les aigus, ils sont égaux ; parce qu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc K *d*. (par IX. 17 & 45.)

Et pour les obtus, il est aisé de prouver qu'il sont égaux, par leurs complemens *cdg* & K *f* E.



Car par IX. 15. *cdg*, a pour mesure la moitié des deux arcs K *d* & *d c*.

Et par IX. 45. K *f* E, a pour mesure la moitié de l'arc K *d c*, qui comprend ces deux-là.

Donc

Donc ces angles aigus sont égaux.

Donc les obtus K *d c* & K *fg*, dont ces aigus sont les complemens, sont égaux aussi.

Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

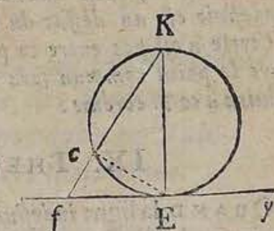
Donc K *f*. K *d* :: K g. K *c*.

T. *p* :: T. p.

VIII. THEORÉME,

COROLLAIRE DU SIXIÉME.

LE diametre tiré du point K (& par consequent tout autre) est moyen proportionel entre chaque toute & sa partie. XLVII.



Soit tirée K *f* qui soit coupée en *c* ; les bases *f* E & *c* E sont antiparalleles.

Car les angles K E *f*, & K *c* E, sont droits, & par consequent égaux.

Et les aigus K *f* E, & K E *c*, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc K *c* (par IX. 45, & 17.

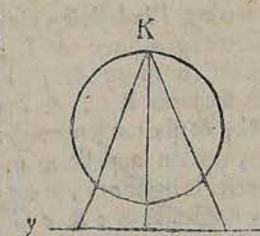
Donc les bases *f* E & *c* E sont antiparalleles.

Donc K *f*. KE. :: KE. K *c*.

T. M. :: M. p.

TROISIÉME CAS.

LE 3.e Cas est quand la ligne *y* est tout à fait hors le Cercle & au dessous : mais comme il n'a aucune difficulté particuliere, nous ne nous y arrêterons point. XLVIII.



Il faut seulement remarquer, qu'il n'y a point

de

de moyenne proportionelle dans ce 3.e Cas; parce qu'il n'y a aucun point qui ſoit commun à la ligne *y*, & à la circonference: la ligne *y* étant tout à fait hors le Cercle.

SECONDE MANIERE

De la troiſiéme voie pour trouver des Reciproques: Quand l'indefinie eſt tout à fait hors le Cercle & au deſſus.

Nous avons veu dans le Plan, (23. S.) que l'indefinie eſt au deſſus du point commun, quand le Cercle n'eſt pas entre ce point & l'indefinie. Et alors le point commun ſera de ſection, & tout ſe reduira à ce Theoréme:

IX. Theoréme.

XLIX. QUAND la ligne *indefinie* qui coupe perpendiculairement le diametre prolongé, eſt au deſſus du Cercle, c'eſt à dire quand le Cercle n'eſt point entre cette ligne *indefinie* & le point commun: toutes les lignes qui ſe couperont dans ce point, étant terminées d'une part par l'*indefinie*, & de l'autre par le Cercle, les parties de l'une ſeront reciproques aux parties de l'autre.

SOIT *l'indefinie y*; le diamettre prolongé A E; le point commun K; l'une des ſecantes B *c*, & l'autre F G; & une tangente au point K, qu'on appelle *m n*. Si on tire la ligne *c* G, je dis que les angles A B *c* & *c* G K, ſont égaux. Car l'indefinie

&

& la tangente étant paralleles, les angles correſpondans que chaque ſecante fait ſur l'une & l'autre ſont égaux: c'eſt à dire que l'angle A B *c* eſt égal à l'angle *m* K *c*. (VIII. 59.) Or *m* K *c*, a pour ſa meſure la moitié de l'arc K *c* (par IX. 12.) qui eſt auſſi la meſure de l'angle *c* G K (par IX. 17.) Donc les angles A B *c* & *c* G K, ſont égaux. Et il en eſt de même des deux angles A F G, & G *c* K. Donc les baſes B F & G *c* des deux angles oppoſez en K ſont antiparalleles, par 9. *ſup*.

Donc les parties de la ligne B *c* ſont reciproques à celles de la ligne F G, par 21. *ſup*.

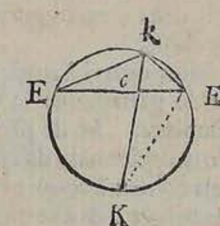
SECTION V.

Autres Theorémes, ou qui n'entrent pas dans l'analogie des precedens, ou qui ſe peuvent rapporter à pluſieurs de ces trois voies.

X. Theoréme.

LES deux côtez de tout angle inſcrit au Cercle ſont reciproques à la ligne entiere, qui le partageant par la moitié ſe termine à la circonference, & à la partie de cette ligne compriſe entre le ſommet de l'angle coupé par la moitié & ſa baſe. L.

Soit l'angle inſcrit E *k* E. Soit pris le point K dans le ſegment oppoſé également diſtant d'E & d'E. La ligne *k* K qui coupe la baſe en *c* partage cét angle inſcrit par la moitié, puiſque les deux angles E *k* K & E *k* K, étant appuyez ſur des arcs égaux, ſont égaux, (par IX. 20.)



P Or

Or les angles E *k c*, (qui eſt le même qu'E *k* K,) & *E k* K, ne ſont pas ſeulement égaux, mais ils ſont auſſi ſemblables; c'eſt à dire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun, à chacun.

Car les angles inſcrits vers E & vers K ſont égaux (par IX. 20.) parce qu'ils ſont appuyez ſur le même arc *k E*.

De plus l'angle *k c* E a pour meſure la moitié de l'arc *k* E ſur lequel il eſt appuyé, plus la moitié de l'arc oppoſé *E* K. (IX. 41.) Et l'arc E K étant égal à l'arc *E* K, cette meſure eſt égale à la moitié des arcs *k* E & E K, qui eſt la meſure de l'angle inſcrit *k E* K. (par IX. 17.

Donc les angles *k c* E & *k E* K ſont égaux.

Donc les angles E *k c* & *E k* K ſont ſemblables. (X. 7.)

Donc (par X. 18.)

k E. *k* K. :: *k c*. *k E*.

Ce qu'il falloit demontrer, puiſque *k* E & *k E* ſont les deux côtez de l'angle partagé par la moitié, & que *k* K eſt la ligne entiere qui le partage, & *k c* ſa partie.

Corollaire.

LI. Si l'angle inſcrit étoit Iſoſcele, chaque côté ſeroit moyen proportionel entre la toute qui le diviſeroit par la moitié, & ſa partie.

Car le côtez de l'angle étant égaux, les prendre tous-deux, ou en prendre un deux fois, c'eſt la même choſe.

Mais quand l'angle inſcrit eſt Iſoſcele, la ligne qui le partage par la moitié eſt neceſſairement un diametre. Et de plus les deux points E *E* étant alors également diſtans de *k* auſſi bien que de K, cela revient à ce qui a été demontré plus haut par une autre voie, & à ce qui le ſera encore plus bas.

XI. Theoréme.

Si du ſommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire ſur l'hypotenuſe, il y aura trois moyennes proportionelles. LII.

1. La perpendiculaire, entre les deux parties de l'hypotenuſe.

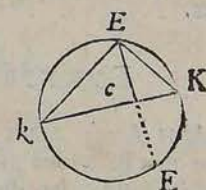
2. Le petit côté de l'angle droit, entre la plus petite partie de l'hypotenuſe qui y eſt jointe, & l'hypotenuſe entiere.

3. Le plus grand côté de l'angle droit, entre la plus grande partie de l'hypotenuſe qui y eſt jointe, & l'hypotenuſe entiere.

Tout cela ſe peut prouver par un grand nombre de voies. Mais celle-cy me ſemble la plus facile & la moins embaraſſée:

Soit l'angle droit *k E* K, & la perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe *E c*.

Si on fait un Cercle qui ait l'hypotenuſe *k* K pour diametre, le ſommet *E* ſe trouvera dans la circonference, par IX. 32.



Et ſi on prolonge *E c* juſques à E, que je ſuppoſe être le point oppoſé de la circonference, la corde *E* E ſera coupée en *c* par la moitié, & les points *E* E également diſtans tant de *k* que de K.

Donc 1. par 29. *ſup.*

k c. *E c*. :: *E c*. *c* K.

Donc 2. par le 6.^e Theoréme (43. *ſup.*)

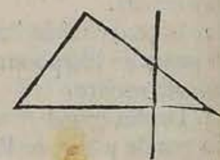
K *c*. K *E*. :: K *E*. K *k*.

Donc 3. par le même 6.^e Theoréme,

k c. *k E*. :: *k E*. *k* K.

XII Theoréme.

LIII. Toute ligne qui coupant perpendiculairement l'hypotenuse d'un Angle droit en coupe aussi un côté, les coupe *reciproquement* ; c'est à dire que l'hypotenuse entiere & sa partie vers le point qui lui est commun avec le côté coupé, sont reciproques au côté coupé entier, & à sa même



partie vers le point commun. La preuve en est facile par le 5.^{e} Theoréme (39. & 40. *sup.*) en décrivant un Cercle qui ait cette hypotenuse pour diametre, & prolongeant la coupante, qui tiendra lieu *d'Indefinie y* ; elle se peut faire encore par d'autres voies, que je laisse à trouver.

Dernier Theoréme.

LIV. Un Angle ayant deux bases, si ses côtez selon une base sont proportionnels à ses côtez selon l'autre base, les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base, chacun à chacun. C'est la converse de la plûpart des Propositions de ce Livre, qui se prouve ainsi :

Les côtez sur une base ne sçauroient être proportionels aux côtez sur l'autre base qu'en deux manieres.

La 1.^{re} est, quand la toute d'une part & sa partie sont proportionelles à l'autre toute & à sa partie.

La

La 2.^{e} quand une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

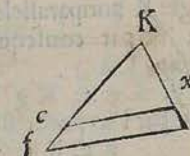
Or le premier cas ne peut être, que les bases ne soient paralleles. Et le second, qu'elles ne soient antiparalleles. Et en l'un & en l'autre les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base.

Preuve du premier Cas.

Soit l'Angle f K g, dont les deux bases soient fg & cd. Je dis que ces bases sont paralleles, si LV.

Kf.Kc. :: Kg.Kd.

Car soit menée du point c une parallele à fg, qui coupe Kg en un point que j'appelleray x.



Il est certain (par X. 20.) que

Kf. Kc. :: Kg. Kx.

Or par l'hypothese,

Kf. Kc. :: Kg. Kd.

Donc Kg. Kx. :: Kg. Kd. (II. 26.)

Donc Kx & Kd sont égales, par II. 28.

Donc les points x & d ne sont qu'un même point.

Donc cx & cd ne sont que la même ligne.

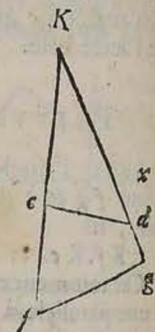
Or cx est parallele à fg. Donc cd luy est aussi parallele.

Donc les angles sur la base cd sont égaux aux angles sur la base fg. Ce qu'il falloit demontrer.

Preuve du Second Cas.

LVI. Soit l'angle fKg, qui ait deux bases fg & cd. Je dis que ces bases sont antiparalleles, si

Kf.Kd. :: Kg.Kc.



Car soit tirée du point c une ligne qui coupant Kg, prolongée s'il est besoin, fasse sur Kg un angle égal à celuy que gf fait sur Kf, & que le point où cette ligne coupera Kg soit x. Cette ligne cx sera une base de l'angle K antiparallele à la base fg; & par consequent (par 18. *sup.*)

Kf. Kx. :: Kg. Kc.

Or par l'hypothese,

Kf. Kd. :: Kg. Kc.

Donc Kf.Kx. :: Kf. Kd. (II. 26.)

Donc, par II. 28. Kx est égale à Kd.

Donc les points x & d étant sur la même ligne, ne sont qu'un même point.

Donc cx & cd ne sont qu'une même ligne.

Or cx est antiparallele à fg.

Donc cd est aussi antiparallele à fg.

Donc les angles sur la base cd sont égaux aux angles sur la base fg. Ce qu'il falloit demontrer.

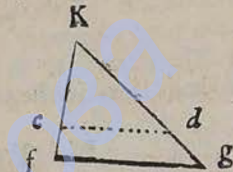
Corollaire.

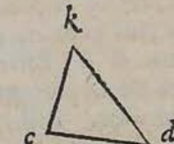
LVII. Si deux angles égaux ont leur côtez proportionels, ils sont semblables; c'est à dire que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun.

Soient les angles égaux qui ayent leurs côtez proportionels fKg, & ckd, ensorte que Kf. kc. :: Kg. kd.

D'où

D'où il s'ensuit que si Kf est plus grand que kc, Kg sera plus grand que kd. Prenant donc dans Kf, Kc égale à kc; & dans Kg, Kd égale à kd: les angles cKd & ckd étant égaux, & les côtez de l'un étant égaux à ceux de l'autre, leurs bases seront égales, (VIII. 67.) & les angles sur la base de l'un égaux aux angles sur la base de l'autre, par VIII. 66.





Or par le precedent Theoréme les deux bases de l'angle K, sçavoir la base cd & la base fg, sont paralleles, & les angles sur l'une sont égaux aux angles sur l'autre.

Donc dans les deux angles égaux K & k les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre. Ce qu'il falloit demontrer.

Remarquez que ce dernier Theoréme & son Corollaire sont les converses des principaux Theorémes de ce Livre & du Livre precedent, & qu'ils seront de grand usage dans la suite.

SECTION VI.

Problemes.

I. Probleme.

Trouver la moyenne proportionelle entre deux lignes données. Joindre les lignes données. Faire un demy-cercle, dont prises ensemble elles soient le diametre. La LVIII.

 per-

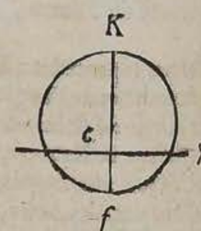
perpendiculaire élevée du point où se joignent ces lignes à la circonference sera la moyenne proportionelle entre ces lignes données (par 29. *sup.*)

On peut employer pour trouver la même chose les Theorémes 6.e & 8.e *sup.* & d'autres encore. J'en laisse la recherche pour exercer l'Esprit.

II. Probleme.

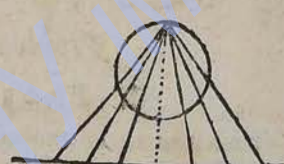
LIX. Trouver toutes les reciproques possibles à deux lignes données.

Mettre la plus petite dans la plus grande, comme K *c* dans K *f*. Faire un Cercle qui ait la plus grande pour diametre. Et du point *c*, où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indefinie comme *y*. Cette perpendiculaire satisfera au Probleme, comme on le peut juger, en considerant le 5.e Theoréme (39. 40. 41. &c. *sup.*) sans qu'il soit besoin que je m'amuse à l'expliquer davantage.



III. Probleme.

LX. Ayant tiré à discretion d'un même point tant de lignes que l'on voudra sur une même ligne : les diviser toutes, ensorte que chaque toute & sa partie vers le point commun soient reciproques à chaque autre toute & à sa même partie.



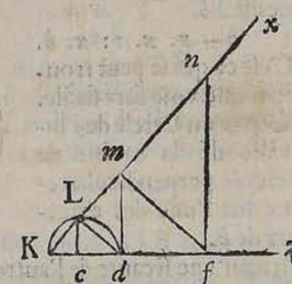
Tout

Tout Cercle dont la circonference passera par le point commun, & qui aura pour diametre, ou la perpendiculaire entiere tirée de ce point sur la ligne, ou une partie de cette perpendiculaire, satisfera au Probleme, par le 7.e Theoréme, & ce qui a été dit du 3.e Cas (48. *sup.*)

IV. Probleme.

Ayant les trois premieres lignes d'une Progression Geometrique, trouver toutes les autres à l'infini. LXI.

Faire que la 2.e comprenne la 1.re, comme K *d* comprend K *c*. Faire un Cercle qui ait K *d* pour diametre. De *c* élever la perpendiculaire *c* L ; & puis tirer une ligne indefinie de K par L, laquelle j'appelleray *x* ; & prolonger aussi indefiniment K *d*, laquelle j'appelleray *z*.



Tirant L *d* perpendiculaire sur *x*, & *d m* perpendiculaire sur *z*, & *m f* perpendiculaire sur *x*, & *f n* perpendiculaire sur *z*, & ainsi à l'infini :

On trouvera facilement (par 52. *sup.*) la suite infinie de la Progression Geometrique, dont les trois premiers termes auront été K *c*. K L. K *d*. qui seront suivis de K *m*. K *f*. K *n*. K g. &c.

V. PROBLEME.

LXII. DIVISER une ligne donnée en moyenne & extreme raison. C'est à dire en telle sorte que sa plus grande partie soit moyenne proportionelle entre la plus petite partie & la toute.

Ce qui est aussi la même chose que de trouver une ligne qui soit moyenne entre une donnée, & cette donnée moins cette moyenne, laquelle pour cette raison j'appelleray *la mediane*.

Soit la ligne donnée appellée b.

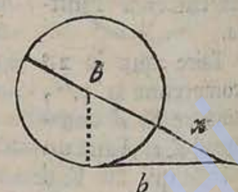
Sa plus grande partie que l'on cherche, x.

Et sa plus petite, $b - x$.

Il faut trouver une ligne qui soit telle, que b moins cette ligne, soit à cette ligne : comme cette ligne est à b.

$$b - x.\ x.\ ::\ x.\ b.$$

C'est ce qui se peut trouver par une voie fort facile.



Décrire un Cercle de l'intervalle de la moitié de b, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.

Et tirer une secante de l'autre extremité de b, qui passant par le centre du Cercle se termine à la circonference.

La partie de cette secante qui est hors le Cercle sera x. C'est à dire moyenne proportionelle entre b, & $b - x$.

Car 1. par la construction b est tangente de ce Cercle.

2. Le diametre de ce Cercle est égal à b.

3. Et par consequent la secante entiere est $x + b$.

Or (par 33. *sup.*) b tangente est moyenne proportionelle entre la partie de la secante qui est hors le Cercle, (c'est à dire x,) & la secante entiere, (c'est à dire $x + b$.)

Donc

Donc $x.\ b.\ ::\ b.\ x + b.$

Donc *permutando*, $b.\ x.\ ::\ x + b.\ b.$

Donc *dividendo*, $b - x.\ x.\ ::\ x.\ b.$

Ce qu'il falloit demontrer.

I. COROLLAIRE.

UNE ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, si on y ajoûte sa plus grande partie, (que nous appellerons *la mediane* :) il s'en fera une nouvelle toute qui sera encore divisée en moyenne & extreme raison, la premiere toute étant la mediane. LXIII.

C'est ce qui se voit par la voie même dont on s'est servi pour diviser la premiere toute en moyenne & extreme raison ; ensorte qu'il ne faut que recomposer, pour parler ainsi, ce que l'on a divisé.

Car si $b - x.\ x.\ ::\ x.\ b.$

Componendo, $b.\ x.\ ::\ x + b.\ b.$

Donc *permutando*, $x.\ b.\ ::\ b.\ x + b.$

Donc la ligne $x + b$ est divisée par b en moyenne & extreme raison, puisque b est moyenne proportionelle entre la toute $x + b$, & son autre partie x.

II. COROLLAIRE.

UNE ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, sa petite partie divise la mediane en moyenne & extreme raison. LXIV.

Soit b divisée comme dessus ; & comme sa mediane est appellée x, soit la petite partie appellée y. Il faut prouver que $x - y.\ y.\ ::\ y.\ x.$

Or il ne faut pour cela que nommer b par ses parties $y + x$.

Car, par la division de b par x en moyenne & extreme raison, $y.\ x.\ ::\ x.\ y + x.$

Donc *permutando*, $x.\ y.\ ::\ y + x.\ x.$

Donc *dividendo*, $x - y.\ y.\ ::\ y.\ x.$ Ce qu'il falloit demontrer.

 II. Co-

III. Corollaire.

LXV. Il eſt aiſé de conclure de ces deux Corollaires que lorſqu'on a une ligne diviſée en moyenne & extreme raiſon, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes & plus petites diviſées de la même ſorte.

PREUVE DES PLUS GRANDES.

LXVI. Si on joint la mediane à la premiere toute, il s'en fait une ſeconde toute qui a la premiere pour ſa mediane, (par le premier Corollaire.)

Donc ſi on joint la premiere toute à la deuxiéme, il s'en fait une troiſiéme qui a la deuxiéme pour ſa mediane.

Et joignant la deuxiéme à la troiſiéme, il s'en fait une quatriéme qui a la troiſiéme pour ſa mediane, & ainſi à l'infini.

PREUVE DES PLUS PETITES.

Si on prend la mediane de la premiere toute, il s'en fait une ſeconde toute plus petite, qui a pour ſa mediane (par le deuxiéme Corollaire,) la petite partie de la premiere toute.

Et cette mediane de la deuxiéme toute eſt une troiſiéme toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la deuxiéme toute; & cette mediane de la troiſiéme toute eſt une quatriéme toute, qui a pour ſa mediane la petite partie de la troiſiéme toute, & ainſi à l'infini. Ce qui peut-être conſideré comme une nouvelle & trés-belle preuve de la diviſibilité d'une ligne à l'infini.

VI. Pro-

VI. Probleme.

Ayant la grandeur des côtez d'un angle qui LXVII. doive être la moitié de chacun des angles ſur la baſe, en trouver la baſe.

Soit K *b* la grandeur de ces côtez; & ſoit décrite une portion de Cercle de cét intervalle & du centre K.

Soit diviſée K *b* en *c*, en moyenne & extreme raiſon, enſorte que

$bc.\ cK. :: cK.\ bK.$

La corde *b d* de la grandeur de *c* K, qui eſt la moyenne entre *b c* & *b* K, ſera la baſe de cét angle, & K *d* en ſera l'autre côté.

Car ſoit tirée la ligne *c d*: je ſuppoſe que les deux angles ſur la baſe d'un angle Iſoſcele ſont égaux. Et ainſi j'auray prouvé que l'angle K eſt la moitié de chacun des angles ſur la baſe, ſi je puis montrer deux choſes:

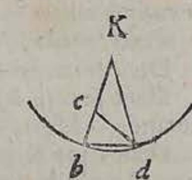
La 1.re Que l'angle K eſt égal à l'angle *b d c*.

La 2.e Que l'angle *b d c* eſt la moitié de l'angle *b d* K.

PREUVE DE LA PREMIERE.

L'angle *b* a deux baſes, *c d* & K *d*; & ſes côtez ſelon une baſe ſont proportionnels à ſes côtez ſelon l'autre baſe, puiſque par la conſtruction

$bc.\ bd. :: bd.\ bK.$



Donc les baſes *c d* & K *d* ſont antiparalleles; & par conſequent les angles ſur l'une ſont égaux aux angles ſur l'autre, chacun à chacun.

Donc l'angle K eſt égal à l'angle *b d c*. Ce qui eſt la premiere choſe qu'il falloit demontrer.

PREU-

PREUVE DE LA SECONDE.

Les deux parties de *bK*, base de l'angle de *bdK*, sont en même raison que les deux côtez de cét angle : puisque *dK* étant égale à *bK*, & *cK* à *bd*,

$bc.\ cK.\ ::\ bd.\ dK.$

Donc l'angle *b d K* est divisé par la moitié. (X. 33.)

Donc l'angle K étant égal à l'angle *bdc*, qui est la moitié de l'angle *bdK*, est aussi la moitié de l'angle *bdK*. Ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

XXVIII. Tout angle Isoscele dont la base est moyenne proportionelle entre le côté entier & le côté moins cette base, est de 36 degrez ; & chacun des angles sur la base est de 72. Car 36, plus deux fois 72 qui est le double de 36, vaut 180, qui est ce que valent les trois angles pris ensemble.

VII. Probleme.

XXIX. Ayant la base d'un angle Isoscele de 36 degrez, en trouver le côté.

Soit *b* la base donnée divisée en moyenne & extréme raison, & *x* en soit la plus grande partie ; $x+b$ sera le côté de cét angle. C'est à dire que l'angle qui aura $x+b$ pour l'un & l'autre de ses côtez, & *b* pour base, sera de 36 degrez.

Car puisque par la division de *b* en moyenne & extreme raison $b-x.\ x.\ ::\ x.\ b.$

Componendo, $b.\ x.\ ::\ x+b.\ b.$

Donc *permutando*, $x.\ b.\ ::\ b.\ x+b.$

Donc la base *b* est moyenne proportionelle entre le côté $x+b$ & *x*, qui est ce côté moins *b*.

Donc, par le precedent Corollaire, l'angle qui a $x+b$ pour chaque côté, & *b* pour base, est de 36 degrez. Ce qu'il falloit demontrer.

SEC-

SECTION VII.

Des Lignes Incommensurables.

Ce que nous avons dit des Grandeurs Incommensurables dans le IV. Livre donne une si grande facilité d'expliquer les Lignes Incommensurables, qu'il ne faut pour cela qu'ajoûter à ce Livre trois ou quatre Propositions.

PROPOSITION GENERALE.

Lorsque trois lignes sont continuëment proportionelles, la raison de la premiere à la troisiéme peut-être de trois sortes ; ce qui se fait en trois cas. LXX.

Premier Cas.

Si la raison de la premiere à la troisiéme est une raison de nombre à nombre qui ait pour ses exposans des nombres quarrez : la moyenne est à chacune des deux autres, comme le produit des racines de ces nombres quarrez, est à chacun de ces nombres quarrez ; & par consequent la moyenne est commensurable aux deux autres.

Second Cas.

Si la raison de la 1.re à la 3.e est une raison de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez : la moyenne est incommensurable en longueur & commensurable en puissance à la 1.re & à la 3.e

Troisiéme Cas.

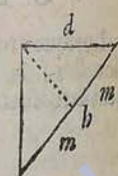
Si la raison de la 1.re à la 3.e est une raison sourde, & non de nombre à nombre : la moyenne est incommensurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puissance.

Tous-

Tous ces 3 Cas ſe prouvent des lignes, de la même ſorte qu'on les a prouvez des grandeurs en general dans le IV. Livre. C'eſt pourquoi ce qui reſte ici eſt d'appliquer cette doctrine generale à des exemples particuliers qui ſoient propres aux lignes. Ce que nous ferons par les Theorémes ſuivans.

I. Theoréme.

LXXI. Un angle droit étant Iſoſcele, le côté & l'hypotenuſe ſont incommenſurables en longueur, & commenſurables en puiſſance.



Soit un angle droit Iſoſcele, dont
L'hypotenuſe ſoit appellée *h*.
Le côté *d*.
La perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe la partagera en deux également. Chaque moitié ſoit appellée *m*.

Donc ∺ *h. d. m.* (52. *ſup.*)

Or *h. m.* :: 2. 1.

Donc 2 & 1 n'étant pas deux nombres quarrez: par le 2.ᵉ Cas *d* eſt incommenſurable en longueur à *h* & à *m*.

Mais il leur eſt commenſurable en puiſſance; parce que par III. 34.

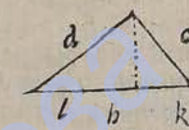
$$\left.\begin{matrix} hh.\ dd. \\ dd.\ mm. \end{matrix}\right\} :: h.\ m. :: 2.\ 1.$$

II. Theoréme.

LXXII. Quand l'hypotenuſe eſt à l'un des côtez d'un angle droit, comme nombre à nombre, il eſt aiſé de juger ſi l'autre côté eſt commenſurable ou incommenſurable à l'hypotenuſe. Et voici comment :

Soit l'hypotenuſe *h*.
Un des côtez *c*.
L'autre côté *d*.

Un



Une perpendiculaire étant menée du ſommet à l'hypotenuſe,
Soit ſa portion vers *c* appellée *k*.
Et l'autre vers *d* appellée *l*.

Il s'enſuit que $\left\{\begin{matrix} ∺\ h.\ c.\ k. \\ ∺\ h.\ d.\ l. \end{matrix}\right.$

Suppoſant donc que *h* & *c* ſoient comme les deux nombres *x* & *z*, c'eſt à dire que

h. c. :: *x. z.*

Donc la raiſon de *h. k.* étant doublée de la raiſon de *h. c.* (III. 24.)

h. k. :: *xx. zz.* (III. 31.)

Donc *h. h—k.* :: *xx. xx—zz.* (II. 48.)

Or *k* & *l* étant les deux portions de *h*,

l = *h—k.*

Donc *h. l.* :: *xx. xx—zz.*

Donc ſi *xx—zz* eſt un nombre quarré : par le premier Cas de la Propoſition generale, *h* eſt commenſurable à *d*.

Que ſi au contraire *xx—zz* n'eſt pas un nombre quarré : par le deuxiéme Cas *h* n'eſt point commenſurable à *d* en longueur, mais ſeulement en puiſſance.

III. Theoréme.

Lorsqu'un des côtez de l'angle droit eſt une aliquote de l'hypotenuſe, l'autre côté eſt incommenſurable à l'hypotenuſe en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance. LXXIII.

Car afin que *c* par exemple, ſoit une aliquote de *h*, il faut que *h* ſoit à *c*, comme quelque nombre à l'unité que je marqueray par un 1. (*Voyez la fig. precedente.*)

Soit donc *h. c.* :: *x.* 1.

Donc *h. k.* :: *xx.* 11. (III. 31.)

Donc

Donc $h.\ h-k.\ ::\ xx.\ xx-11.$ (II. 48.)

Or $l = h-k.$

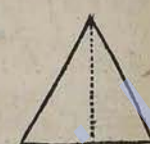
Donc $h.\ l.\ ::\ xx.\ xx-11.$

Or il eſt impoſſible que $xx-11$ ſoit un nombre quarré. Car (11) ne fait qu'une unité, ſelon ce qui a été dit, IV. 9. Et deux nombres quarrez ne peuvent jamais être differens ſeulement d'une unité.

Donc, par le ſecond Cas de la Propoſition Generale, h & d ſont incommenſurables en longueur, & commenſurables ſeulement en puiſſance.

Corollaire.

LXXIV. Si la baſe d'un angle Iſoſcele eſt égale au côté: la perpendiculaire du ſommet à la baſe eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance, avec le côté.



Car alors cette perpendiculaire fait un angle droit avec la moitié de la baſe, & l'un ou l'autre des côtez eſt l'hypotenuſe de cét angle droit.

Donc l'un des côtez de cét angle droit, qui eſt la moitié de la baſe, eſt auſſi la moitié de l'hypotenuſe.

Donc il eſt une aliquote de l'hypotenuſe.

Donc, par le Theoréme precedent, l'autre côté, qui eſt la perpendiculaire, eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance, avec l'hypotenuſe de cét angle droit, laquelle eſt le côté de l'angle, dont la baſe eſt ſuppoſée égale à chaque côté.

IV. Theo-

IV. Theoréme.

Ayant deux lignes incommenſurables en longueur, (ou par les Theorémes precedens, ou par d'autres voies,) & ayant trouvé la moyenne proportionelle entre ces deux lignes: elle leur ſera incommenſurable tant en longueur, qu'en puiſſance. LXXV.

Cela eſt clair par le 3.e Cas de la Propoſition generale.

V. Theoréme.

Quand une ligne eſt diviſée en moyenne & extreme raiſon, la toute & ſes deux parties ſont incommenſurables les unes aux autres. C'eſt ce qui a été prouvé dans le IV. Livre, Nomb. 36. LXXVI.

Avertissement.

Il n'y a à dire de quatre lignes continuëment proportionelles, que ce qui a été dit dans le IV. Livre de quatre grandeurs continuëment proportionelles.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DOUZIE'ME.

DES FIGURES EN GENERAL CONSIDERE'ES SELON LEURS ANGLES ET LEURS CÔTEZ.

I. ON appelle *Figure* dans les élemens de Geometrie, une surface plate terminée de tous côtez.

Ce qui comprend deux choses: la premiere, les extremitez de cette surface: la seconde, l'espace qu'elle comprend; ce qui s'appelle *l'aire de la figure.*

Nous les considerons dans ce Livre & le suivant selon le premier rapport; & dans d'autres Livres nous les considererons selon le dernier.

Di-

DIVISION.

TOUTE figure considerée selon ses extremitez, est, II.
Ou rectiligne:
Ou curviligne:
Ou mixte.

PREMIERE DEFINITION.

ON appelle rectiligne celle qui est terminée III.
par des lignes droites, qui ne peuvent être moins de trois; étant clair que deux lignes droites ne peuvent pas terminer un espace de tous côtez, puisqu'elles ne peuvent se rencontrer qu'en un point, ce qui laisse l'espace ouvert du côté opposé à ce point.

Il est clair aussi par là, que les lignes droites ne peuvent terminer un espace, qu'en faisant autant d'angles qu'il y a de lignes droites qui terminent l'espace. Car si un angle demande deux lignes, une ligne sert à deux angles.

Et ainsi l'on peut considerer trois choses dans l'extremité d'une figure rectiligne. 1. Les angles. 2. Les côtez. 3. Le circuit, qu'on appelle aussi *perimetre*, qui n'est autre chose que la somme des côtez; c'est à dire tous les côtez pris ensemble.

SECONDE DEFINITION.

ON appelle curviligne celle qui est terminée par IV.
une ou plusieurs lignes courbes. Et une seule ligne courbe pouvant rentrer en soy-même, peut terminer un espace.

Mais on ne considere icy des figures curvilignes que le seul Cercle; parce que de toutes les lignes courbes on ne considere que la circulaire.

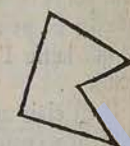
Troi-

TROISIÉME DEFINITION.

V. ON appelle figure mixte celle qui eſt terminée en partie par des lignes droites, & en partie par des courbes ; dont on ne conſidere ici que les portions de Cercle, qui ſont celles qui ſont terminées par une corde & une portion de circonference : ou les ſecteurs du Cercle, qui ſont terminez par deux rayons & une portion de la circonference, tel qu'eſt un quart de Cercle.

DES FIGURES RECTILIGNES.

VI. ON peut diviſer les figures rectilignes en celles qui ont quelque angle r'entrant, & celles dont tous les angles ſont ſaillans ; c'eſt à dire tels que leur pointe regarde toûjours le dehors de la figure.



Les Geometres ſe ſont reſtraints à conſiderer les dernieres, parce qu'on y peut facilement reduire les premieres.

ESPECES DES FIGURES RECTILIGNES.

VII. TOUTE figure rectiligne ayant autant d'angles que de côtez, on les diviſe indifferemment par le nombre de leurs angles ou de leurs côtez, & on les nomme ſelon l'un ou ſelon l'autre.

Ainſi on appelle *Triangle*, une figure de trois angles & de trois côtez ; & *Quadrilatere*, celle de quatre angles & de quatre côtez.

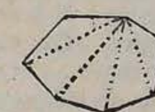
Les

Les noms Grecs des figures ſont pris du nombre des angles : comme
Pentagone, de cinq.
Hexagone, de ſix.
Heptagone, de ſept.
Octogone, de huit.
Enneagone, de neuf.
Decagone, de dix.
Et *Polygone*, de pluſieurs angles indeterminément.

Ces noms ſont ſi communs, qu'il eſt bon de ne les pas ignorer ; mais on peut ſe paſſer d'en ſçavoir d'autres qui ſont moins communs : & appeller les figures du nombre de leurs côtez ou de leurs angles, une figure de quinze côtez, de trente, de cent, de mille &c.

I. THEORÉME.

TOUT Polygone peut-être reſolu en autant de Triangles, qu'il a de côtez, moins deux, & il ne le peut-être en moins. VIII.



C'eſt à dire, que s'il a 4 côtez, il peut-être reſolu en deux Triangles ; ſi 5, en trois ; ſi 6, en quatre ; ſi 7, en cinq ; ſi 8, en ſix &c.

Car d'un angle quelconque tirant deux lignes de part & d'autre, qui ſoûtiennent chacune l'angle qui le ſuit de part & d'autre, il s'en fait deux Triangles qui comprennent 4 côtez de la figure. Mais de ce même angle menant des lignes à chacun des autres angles, il s'en fait autant de Triangles qu'il y a de côtez outre ces 4. Donc il y aura autant de Triangles qu'il y a de côtez outre ces 4. Donc il y aura autant de Triangles que de côtez, moins deux ; puiſqu'il y a neceſſairement deux de ces Triangles qui comprennent 4 de ces côtez.

II. THEO-

II. Theoréme.

IX. Tous les angles d'un Polygone quelconque sont égaux à autant de droits, que le double de ces côtez moins quatre.

Car nous avons déja veu qu'un angle plus les deux angles que font ses côtez sur sa base, sont égaux à deux droits. (VIII. 62.) Or un angle avec sa base n'est point different d'un Triangle. Et par consequent les trois angles d'un Triangle valent deux angles droits, qui sont six moins quatre.

Or par le precedent Theoréme tout autre Polygone peut être resolu en autant de Triangles, moins deux, qu'il a de côtez; & les angles de ces Triangles comprendront ceux du Polygone. Donc si le Polygone a 7 côtez: étant resolu en 5 Triangles, les angles de ces 5 Triangles en vaudront dix droits, qui sont 14 moins 4.

On le peut encore demontrer d'une autre sorte, en prenant un point quelconque au dedans du Polygone, & de ce point menant des lignes à tous les angles. Car alors l'Heptagone sera partagé en 7 Triangles, qui tous auront deux de leurs angles autour de la figure, & le 3.e au dedans. Or tous les 21 angles de ces 7 Triangles en valent 14 droits; & les 7 du dedans de la figure valent 4 droits; (& quand il y en auroit mille, ou tant que l'on voudra, ils ne vaudront jamais que 4 droits, par VIII. 18.) Donc les 14 autres, qui sont égaux à ceux de l'Heptagone, valent 14 droits moins 4; c'est à dire 10 droits.

Division.

Les figures de ces differentes especes se peuvent considerer ou chacune à part, ou en les comparant deux ensemble.

FIGU-

FIGURES CONSIDERE'ES A PART.

Définitions.

1. Celles dont tous les angles sont égaux, s'apellent ***Equiangles***. X.

2. Celles dont tous les côtez sont égaux, s'apellent ***Equilateres***.

3. Celles qui sont tout-ensemble équiangles & équilateres, s'apellent ***Regulieres***.

Et on met aussi le Cercle entre les regulieres, à cause de sa parfaite uniformité, & qu'on le peut considerer comme un Polygone regulier d'une infinité de côtez.

4. Celles dont les angles ou les côtez seroient alternativement égaux; c'est à dire le premier égal au 3.e 5.e 7.e 9.e & le second égal au 4.e 6.e 8.e 10.e se peuvent apeller ***alternativement équiangles*** ou ***équilateres***.

Mais il faut remarquer que cela ne peut-être que quand le nombre des angles ou des côtez est pair. Car s'il étoit impair, le dernier & le premier se trouveroient égaux; & par consequent le penultiéme & le premier seroient inégaux: & par consequent ils ne seroient pas tous alternativement égaux.

FIGURES COMPARE'ES.

DEFINITIONS.

Quand on compare deux figures de même genre, c'est à dire d'un nombre égal de côtez: XI.

1. Si les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, on les apelle ***Equiangles***; & ce mot

ne marque pas alors que les angles de chaque figure sont égaux entr'eux ; mais seulement que ceux de l'une sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

2. Si les côtez de l'une sont égaux aux côtez de l'autre, on les apelle ***Equilateres***, ou ***Equilateres entr'elles***.

3. Si elles sont tout-ensemble équiangles & équilateres entr'elles, on les peut apeller ***Tout-égales***; ce qu'il faut bien distinguer de celles qu'on apelle simplement ***Egales***.

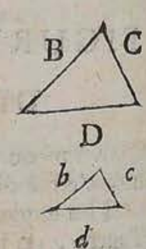
4. Si elles sont équiangles, & que les côtez de l'une soient proportionels aux côtez de l'autre, on les apelle ***Semblables***.

Ce qui fait voir que les ***tout-égales*** sont toûjours ***semblables***, puisqu'il y a même raison entre les côtez de l'une & de l'autre, qui est la raison d'égalité. Au lieu que les ***semblables*** ne sont pas toûjours ***tout-égales*** : puisqu'il peut y avoir une autre raison que celle d'égalité, qui soit la même entre les côtez de l'une & de l'autre.

Les côtez des figures semblables, entre lesquels il y a même raison, s'apellent les côtez *Homologues*, qui sont toûjours le plus grand côté de l'une & de l'autre : & toûjours ainsi. Et c'est ce qui produit ce Theoréme :

I. Theoréme.

XII. Les circuits de deux figures semblables sont en même raison que leurs côtez homologues.



Car soient les trois côtez de l'une de ces figures, B, C, D ; & de l'autre *b*, *c*, *d*.

Puisque B est à *b*, comme C à *c*, & D à *d* :

Les

Les trois d'une part, (qui font le circuit de la premiere figure,) sont aux trois de l'autre part, (qui font le circuit de la seconde,) en même raison que chacun d'une part à chacun de l'autre. C'est ce qui a été demontré II. 52.

Autres Definitions.

Quand on compare deux figures de même ou de differentes especes : XIII.

5. Si le circuit de l'une est égal au circuit de l'autre, on les apelle ***Isoperimetres***.

6. Si l'espace que comprend l'une est égal à l'espace que comprend l'autre, on les appelle ***égales***. Ce qui appartient au Livre où l'on traitera des figures considerées selon l'***aire***. Et ce qu'il ne faut pas confondre, comme il a déja été dit, avec celles qu'on appelle ***tout-égales***.

DES FIGURES INSCRITES OU CIRCONSCRITES AU CERCLE.

Des Inscrites.

On dit qu'une figure rectiligne est ***inscrite au Cercle***, quand les sommets de ses angles se trouvent dans la circonference de ce Cercle. D'où il s'ensuit, XIV.

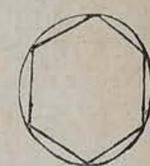
1. Que les angles de cette figure inscrite se doivent alors considerer comme des angles inscrits au Cercle, dont il a été parlé dans le Livre IX.

2. Qu'ainsi les angles d'une figure inscrite ne sçauroient être égaux, que quand les deux arcs que soutiennent les deux côtez de chaque angle sont égaux, pris ensemble, aux deux arcs que soutiennent les

les deux côtez de chaque autre angle : parce que chacun de ces angles a pour meſure la demi-circonference , moins la moitié des deux arcs que ſoûtiennent ſes côtez. IX. 19. D'où s'enſuit ce Theoréme :

II. Theoréme.

XV. Une figure inſcrite au Cercle ne ſçauroit être équiangle , qu'elle ne ſoit équilaterale , ou abſolument, ou alternativement ; & en ce dernier cas , il faut que le nombre de ſes côtez ſoit pair.



Car afin que les angles d'une figure inſcrite au Cercle , (qui ſont des angles inſcrits ,) ſoient tous égaux : il faut & il ſuffit que les deux arcs que ſoûtiennent les côtez de chaque angle pris enſemble ſoient égaux aux arcs que ſoûtiennent auſſi les côtez de tout autre angle , comme il vient d'être dit.

Or cela eſt quand tous ces arcs ſont égaux : ce qui arrive quand la figure eſt abſolument équilaterale ; parce que tous ſes côtez étant égaux , tous les arcs qu'ils ſoûtiennent le ſont auſſi.

Mais cela arrive encore quand ces arcs ne ſont qu'alternativement égaux , pourveu qu'ils ſoient en nombre pair ; parce qu'alors la moitié de ces arcs étant petits & tous égaux entr'eux , & l'autre moitié étant plus grands & tous égaux auſſi entr'eux, & un petit étant toûjours ſuivi d'un grand : les deux arcs ſoûtenus par les côtez d'un angle inſcrit pris enſemble, ſeront toûjours égaux à deux autres arcs ſoûtenus par les côtez de tout autre angle. Et ainſi ces angles ſeront égaux. Or pour cela il ſuffit que les côtez de la figure ſoient alternativement égaux ; parce qu'alors ils ſoûtiendront des arcs alternativement égaux.

Mais il eſt bien viſible qu'il faut en ce cas-là que le nombre des côtez ſoit pair. Car s'il étoit impair, comme de 9 : il y auroit neceſſairement deux côtez , ſçavoir le 1.er & le 9.e qui ſeroient de ſuite tous-deux grands , ou tous-deux petits ; & ainſi l'angle compris entre le 1.er & le 9.e côté ſeroit ou plus grand, ou plus petit, que les autres.

Donc une figure inſcrite en un Cercle ne ſçauroit être équiangle , ſi elle n'eſt ou abſolument équilaterale ou alternativement ; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes côtez ſoit pair.

Des Circonscrites au Cercle.

On dit qu'une figure eſt *circonſcrite à un Cercle* , quand tous les côtez de la figure touchent le Cercle. Et de-là il s'enſuit, XVI.

1. Que les angles de la figure ſont des angles circonſcrits ; & par conſequent il eſt bon de les conſiderer comme des angles compris entre deux tangentes , que l'on doit prendre comme ſi chacune étoit terminée au point de l'attouchement. D'où il s'enſuit encore ,

2. Que ces angles circonſcrits ſont toûjours Iſoſceles ; parce que les tangentes menées d'un même point ſont égales , VII. 39.

3. Que les angles circonſcrits ſont égaux, quand les tangentes de l'un ſont égales aux tangentes de l'autre. IX. 57.

4. Que chaque côté d'une figure circonſcrite eſt compoſé de deux tangentes, qui viennent de deux differens angles.

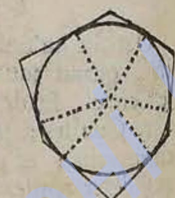
Et delà s'enſuit ce Theoréme :

III. Theoréme.

XVII. Une figure circonſcrite au Cercle ne ſçauroit être équilaterale, qu'elle ne ſoit équiangle, ou abſolument ou alternativement ; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes angles ſoit pair.

Car afin qu'une figure circonſcrite au Cercle ſoit équilaterale, il faut & il ſuffit que les deux tangentes dont eſt compoſé chaque côté de cette figure circonſcrite priſes enſemble, ſoient égales aux deux autres tangentes dont ſera compoſé tout autre côté.

Or cela eſt quand toutes ces tangentes ſont égales, ce qui arrive quand tous les angles de cette figure ſont égaux ; car alors toutes les tangentes ſont égales auſſi.



Mais cela arrive encore quand les angles de la figure ne ſont qu'alternativement égaux, pourveu qu'ils ſoient en nombre pair, en ſorte que la moitié des angles n'ait que deux petites tangentes, (ce qui fait neanmoins les plus grands angles,) & l'autre moitié deux plus grandes tangentes, & que toutes les petites ſoient égales entr'elles, & les grandes auſſi, & qu'un petit angle ſoit toûjours ſuivi d'un grand.

Car alors chaque côté ſera compoſé d'une petite & d'une grande tangente, (parce que chaque côté, comme il a été dit, eſt compoſé de deux tangentes qui viennent de deux differens angles.) Donc tous les côtez ſeront égaux.

Donc une figure circonſcrite au Cercle ne peut-être équilaterale, ſi elle n'eſt équiangle, ou abſolument

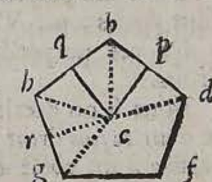
lument ou alternativement ; & en ce dernier cas il faut que le nombre des angles ſoit pair. Ce qu'il falloit demontrer.

Des Figures Regulieres.

Le meilleur moyen de bien concevoir les figures regulieres, eſt de les conſiderer comme inſcrites en un Cercle ; parce qu'elles peuvent toutes y être inſcrites, ſelon ce Theoréme : XVIII.

IV. Theoréme.

Toute figure reguliere peut-être inſcrite & circonſcrite au Cercle ; parce qu'il y a toûjours dans ces figures un point qui en eſt le centre, dont toutes les lignes menées à tous les angles, (qu'on apelle *rayons*,) ſont égales, & dont toutes les perpendiculaires menées au côté, (qu'on peut appeller *les rayons droits*,) ſont auſſi égales entr'elles. XIX.



Soit une figure reguliere de tant de côtez & d'angles que l'on voudra ; il ſuffira d'en conſiderer 4 ou 5 angles, dont j'appelleray les ſommets *b*, *d*, *f*, *g*, *h*.

Si de *p* milieu du côté *b d*, & de *q* milieu du côté *b h*, on éléve deux perpendiculaires, elles ſe rencontreront étant prolongées, par VI. 34.

Et le point *c* où elles ſe rencontrent ſera le centre de la figure :

Car du point *c*, intervalle *c b*, décrivant une circonference, elle paſſera par les trois points *h*, *b*, *d*. VII. 3.

Donc les trois rayons *c b*, *c h*, & *c d*, ſeront égaux.

Donc les 4 angles *c h b*, *c b b*, *c b d* *c d b*, seront égaux, par VIII. 66.

Donc chacun de ces trois rayons *c h*, *c b*, *c d*, partage par la moitié l'angle de la figure.

Donc l'angle *c h g*, étant égal à l'angle *c h b*, *c g* base de l'angle *c h g*, doit être égale à *c b*, base de l'angle *c h b*, par VIII. 67.

Donc ce 4.e rayon *c g* est égal aux trois autres.

Et il est clair que quand cette figure reguliere auroit cent mille angles, on prouveroit la même chose de toutes les lignes menées de *c* aux angles, qui sont les rayons.

Donc si de ce point *c*, & de l'intervalle d'un rayon, on décrit un Cercle, la figure sera inscrite en ce Cercle, puisque tous les rayons étant égaux, les sommets de tous les angles se trouveront dans la circonference de ce Cercle.

Et delà il s'ensuit que tous les côtez de cette figure seront des cordes égales du même Cercle.

Donc les perpendiculaires du centre aux côtez sont égales, par VII. 10.

Or ces perpendiculaires en sont les rayons droits.

Donc si on décrit un autre Cercle de l'intervalle d'un rayon droit, c'est à dire d'une perpendiculaire à un côté: cette figure sera circonscrite à ce Cercle; puisque tous ces rayons droits étant égaux, il n'y aura aucun côté qui ne touche le Cercle.

Corollaire.

XX. Il est aisé par là de determiner trois choses importantes dans chaque espece de figure reguliere.

La premiere, de combien de degrez est l'arc que soûtient le côté de la figure, que j'appelleray simplement *l'arc de la figure*.

La seconde, de combien de degrez est l'angle de la figure, c'est à dire l'angle compris entre les deux côtez de la figure.

La troisiéme, quel est aussi l'angle que fait un rayon sur un côté. C'est ce qui se verra par ces trois Problemes:

I. Probleme.

Determiner la grandeur de l'arc de toute espece de figure reguliere. XXI.

La circonference étant divisée en 360 degrez, ou 21600 minutes, ou 1296000 secondes: si on divise ce nombre par celui des côtez de la figure, le quotient fera voir de combien de degrez, ou de minutes, ou de secondes, est l'arc de la figure.

Ainsi l'arc d'une figure de 15 côtez est de 24 degrez; parce que 15 divisant 360, le quotient est 24.

L'arc d'une figure de 3600 côtez est de 6 minutes; parce que 21600 minutes étant divisées par 3600, le quotient est 6.

II. Probleme.

Determiner la grandeur de l'angle de toute espece de figure reguliere. XXII.

Ayant trouvé l'arc par le premier Probleme, ôter les degrez de cét arc de 180, qui est la demi-circonference; ce qui restera sera la mesure de l'angle de la figure.

Car tout angle d'une figure reguliere doit être consideré comme un angle Isoscele inscrit dans le Cercle, qui a pour mesure la demi-circonference, moins l'arc que soûtient un de ses côtez. IX. 19.

Et ainſi pour avoir la grandeur de l'angle d'une figure de 15 côtez, il ne faut qu'ôter de 180 les 24 degrez de l'arc que ſoûtient le côté de cette figure; & ce qui reſtera, qui eſt 156, ſera la meſure de l'angle d'une figure de 15 côtez.

Et pour avoir l'angle d'une figure de 3600 côtez, il faut ôter 6 minutes de 180 degrez, & ce qui reſtera, qui eſt 179 d. 54'. ſera la meſure de l'angle de cette figure.

III. PROBLEME.

XXIII. DETERMINER la grandeur de l'angle que fait le rayon ſur le côté de toute figure reguliere.

Il ne faut pour cela que prendre la moitié du nombre des degrez que vaut l'angle de la figure. Parce que tout rayon partage par la moitié l'angle de la figure.

Ainſi l'angle du rayon ſur le côté dans une figure de 15 côtez, eſt de 78 degrez, qui eſt la moitié de 156. Et l'angle du rayon ſur le côté d'une figure de 3600 côtez, eſt de 89. d. 57'.

CONSIDERATION SUR LE CERCLE.

XXIV. LES Geometres conſiderent ſouvent le Cercle comme un Polygone d'une infinité de côtez: & ſelon cela, voicy de quelle ſorte on devroit marquer les trois choſes que nous venons de determiner dans tout autre Polygone.

Puiſque l'arc d'un Polygone regulier eſt d'autant plus petit, que le nombre de ſes côtez eſt grand: il faut que l'arc d'un Polygone d'une infinité de côtez ſoit infiniment petit, & qu'ainſi il ne puiſſe être marqué que par un zero.

Or

Or ſi l'on ôte zero de 180 degrez, il reſtera 180 pour l'angle de ce Polygone infini.

Et ſi l'on prend la moitié de 180 degrez, il viendra 90 degrez, (qui eſt la meſure d'un angle droit,) pour l'angle du rayon ſur le côté de ce Polygone infini.

Auſſi il eſt vray que l'angle du rayon ſur la circonference d'un Cercle eſt droit en ſa maniere, puiſque le rayon coupe perpendiculairement ſa circonference; & que ſi cét angle eſt plus petit qu'un angle droit rectiligne, ce n'eſt que de l'eſpace qui eſt entre la circonference & la tangente, qui eſt plus petit que tout angle aigu; quoy qu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puiſſe être diviſé en une infinité de plus petits.

Et on peut dire auſſi que tout point de la circonference eſt comme le ſommet d'un angle de 180 degrez; puis qu'étant partagé par le rayon en deux angles égaux, chacun de ſes angles de part & d'autre eſt droit en ſa maniere, & qu'ainſi chacun eſt de 90 degrez.

DES FIGURES REGULIERES COMPARE'ES ENSEMBLE.

V. THEORÉME.

LES figures regulieres de même eſpece; c'eſt à dire dautant de côtez, ſont toûjours ſemblables; & les circuits ſont en même raiſon que les côtez. XXV.

Car, par ce qui vient d'être dit, les angles de deux figures regulieres de même eſpece ſont neceſſairement égaux; leur grandeur étant determinée par les arcs des figures, & ces arcs l'étant par le nombre des côtez de la figure.

 Et

Et pour ce qui eſt des côtez, ceux de chaque figure étant égaux, on peut apeller les uns *b*, & les autres *c*.

Or il eſt bien clair que *b*. *c*. :: *b*. *c*.

Et il eſt clair auſſi que *b* eſt à *c*, comme 10 *b* à 10 *c*, ou 100 *b* à 100 *c*, ou 1000 *b* à 1000 *c*. (II. 15.)

Donc les circuits ne ſçauroient manquer d'être en même raiſon que les côtez.

VI. Theoréme.

XXVI. Deux figures regulieres étant de même eſpece, ces 4 choſes de l'une, *rayon*, *rayon droit*, *côté*, *circuit*, ſont en même raiſon avec ces 4 autres mêmes choſes de l'autre : c'eſt à dire que le rayon de l'une eſt au rayon de l'autre, comme le rayon droit au rayon droit, le côté au côté, le circuit au circuit.

Ces deux derniers viennent d'être prouvez; mais ils ne laiſſeront pas d'entrer dans la preuve generale des autres.

Il ne faut pour cela que conſiderer dans chacune de ces figures un angle compris entre un rayon, & un rayon droit, qui a pour baſe la moitié du côté.

Ces deux angles ſont ſemblables en toutes les figures regulieres de même eſpece; c'eſt à dire que l'angle eſt égal à l'angle, & que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre.

Car chacun de ces angles a pour meſure la moitié de l'arc de la figure, puiſque ſa baſe eſt la moitié du côté. Or dans toutes les figures de même eſpece l'arc de la figure eſt d'autant de degrez en l'une qu'en l'autre.

Pour les angles ſur chacune des baſes, cela eſt encore plus clair, puiſque l'un eſt droit en l'un &

en l'autre, ſçavoir celui qui eſt fait par le rayon droit; & que l'autre eſt la moitié de l'angle de la figure, qui eſt égal en toutes les figures de même eſpece.

Or puiſque ces angles ſont ſemblables, les côtez ſont proportionels aux côtez, & la baſe à la baſe. (X. 18.) C'eſt à dire que

Le rayon eſt au rayon, comme le rayon droit au rayon droit, & la moitié du côté à la moitié du côté, & par conſequent comme le côté au côté, & le circuit au circuit.

I. Corollaire.

Les côtez & les circuits de deux figures regulieres de même eſpece ſont en même raiſon, que les diametres des Cercles dans leſquels elles ſont inſcrites. XXVII.

Car ces diametres ſont le double des rayons de ces figures. Donc &c.

II. Corollaire.

Les circonferences des Cercles ſont en même raiſon que leurs diametres. XXVIII.

Car les Cercles ſont comme des Polygones d'une infinité de côtez; & leur circonference eſt comme le circuit comprenant cette infinité de côtez. Donc, par le precedent Corollaire, ce circuit d'une infinité de côtez d'une part, eſt au circuit d'une infinité de côtez de l'autre, comme le diametre au diametre.

C'eſt la ſeule voye dont on peut prouver la proportion des circonferences & des diametres. Car n'y en ayant point pour le faire poſitivement & immediatement, on eſt reduit à y employer l'analogie des Polygones ſemblables d'un ſi grand nombre de côtez que l'on voudra, qu'on peut concevoir être inſcrits dans l'un & l'autre Cercle:

comme de cent mille côtez, de cent millions, de cent mille millions, & ainsi jusqu'à l'infini.

Car plus ces Polygones ont de côtez, moins il y a de difference entre la circonference du Cercle & leur circuit, VII. 23. Et ainsi quelque petite que soit une ligne donnée, quand ce ne seroit que la cent milliême partie de l'épaisseur d'une feüille de papier; on peut concevoir un Polygone de tant de côtez inscrit dans l'un & dans l'autre Cercle, que la difference de son circuit d'avec la circonference de ces Cercles sera moindre que cette ligne donnée.

Or de quelque grand nombre de côtez que soient ces Polygones, leurs circuits seront toûjours en même raison que les diametres, par le Corollaire precedent.

Donc on doit conclure par une analogie trés-certaine, que les circonferences sont aussi en même raison que les diametres.

III. Corollaire.

XXIX. Si deux figures regulieres de même espece ont de l'égalité en l'une de ces quatre choses, rayon, rayon droit, côté, circuit: elles l'ont en tout, & sont tout-égales.

C'est une suite évidente du sixiéme Theoréme, 26. *Sup.*

IV. Corollaire.

XXX. L'une de ces quatre choses étant donnée, la grandeur de la figure reguliere est determinée: c'est à dire qu'elle ne peut étre que d'une sorte, quoy qu'il ne soit pas toûjours facile de la décrire; parce que souvent il n'est pas aisé ou de trouver le côté d'une figure reguliere en ayant le rayon, ce qui est la même chose que de l'inscrire en un Cercle donné: ou d'en trouver le rayon en ayant le côté; ce qui est la même chose que de trouver le Cercle dans lequel une figure dont le côté est donné puisse être inscrite. C'est dequoy nous allons traiter.

DE L'INSCRIPTION OU CIRCONSCRIPTION d'une figure reguliere, de telle espece qu'on voudra, dans un Cercle donné.

Il est bien facile par ce qui a été dit, une figure reguliere étant décrite, d'en trouver le rayon pour l'inscrire dans un Cercle: mais il n'est pas aussi facile d'inscrire dans un Cercle donné, telle figure reguliere que l'on voudra. Et souvent mêmes on ne le peut que mechaniquement, & non Geometriquement, au moins par la Geometrie ordinaire; parce qu'elle ne donne pas le moyen de diviser un arc donné, en 3, en 5, en 7 &c. ce qui seroit souvent necessaire pour inscrire en un Cercle donné telle figure que l'on voudroit. XXXI.

Ainsi je pense que tout ce que l'on peut faire de mieux se reduit à ces deux regles generales, & à quelques Problemes particuliers:

PREMIERE REGLE GENERALE.

Lorsqu'on sçait inscrire en un Cercle donné une certaine espece de figure reguliere: il est bien facile d'inscrire toutes celles qui ont plus ou moins de côtez, selon la progression double. XXXII.

C'est à dire qui en ont deux fois moins, 4 fois moins, 8 fois moins &c. jusques à ce qu'on soit ar-

arrivé ou à 4, ou à un nombre impair, qui ne se puisse plus diviser par la moitié.

Ou qui en ont deux fois plus, 4 fois plus, 8 fois plus &c. jusqu'à l'infini.

Supposons, par exemple, qu'on sçache inscrire dans un Cercle donné une figure de 32 côtez. La corde qui soûtiendra deux arcs de cette figure, sera le côté d'une figure de 16. Et celle qui soûtiendra deux arcs de la figure de 16 côtez, sera le côté d'une figure de 8. Et ainsi de suite.

Et au contraire la corde qui soûtiendra la moitié de l'arc de cette figure de 32 côtez, sera le côté d'une figure de 64. Et celle qui soûtiendra la moitié de l'arc d'une figure de 64 côtez, sera le côté d'une figure de 128 côtez. Et ainsi à l'infini.

SECONDE REGLE GENERALE.

XXXIII. LORSQUE l'on sçait inscrire une certaine espece de figure reguliere en un Cercle donné, on la sçait aussi circonscrire.

Car ayant les points de tous les sommets des angles de l'inscrite, les tangentes au Cercle à ces mêmes points étant prolongées jusques à ce qu'elles se rencontrent, font une figure semblable circonscrite au même Cercle; puisque d'une part tous les angles circonscrits de cette figure sont égaux, étant appuyez sur des arcs convexes égaux; & que de l'autre chacun de ces angles est égal à l'angle de la figure inscrite. IX. 53 & 54.

PROBLEMES PARTICULIERS.

I. PROBLEME.

INSCRIRE un Quadrilatere regulier (qui s'apelle *Quarré*) dans un Cercle donné. XXXIV.

Deux diametres qui se coupent perpendiculairement, partagent la circonference en 4 parties, dont chacune est l'arc du Quarré inscrit dans le Cercle.

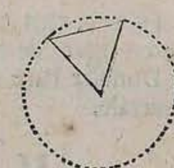
COROLLAIRE.

INSCRIRE dans un Cercle donné une figure de 8 côtez, de 16, de 32; & ainsi a l'infini. 1.re Regle generale. XXXV.

II. PROBLEME.

INSCRIRE en un Cercle donné un Hexagone regulier. XXXVI.

Le demi diametre ou rayon est le côté de l'Hexagone. Car ayant fait un angle compris par deux rayons, & ayant pour base une ligne égale au rayon: cét angle est de 60 degrez, puisqu'il est égal à chacun des angles sur la base, & que les trois emsemble valent 180 degrez. (VIII. 62.) Donc chacun est de 60 degrez. Or 60 degrez est l'arc de l'Hexagone. Donc le demy diametre est le côté de l'Hexagone.



I. Corollaire.

XXXVII. Inscrire en un Cercle donné un Triangle regulier.

Doubler l'arc de l'Hexagone, par la 1.re Regle generale.

II. Corollaire.

XXXVIII. Inscrire en un Cercle donné une figure de 12 côtez, de 24, de 48; & ainsi à l'infini. 1.re Regle generale.

III. Probleme.

XXXIX. Inscrire en un Cercle donné un Decagone, ou figure de dix côtez.

Ayant divisé le demy diametre en moyenne & extreme raison, (par XI. 62.) la plus grande partie de cette ligne ainsi divisée est le côté du Decagone. Car elle soûtient un arc de 36 degrez, par XI. 68.

I. Corollaire.

XL. Inscrire en un Cercle donné un Pentagone ou figure de cinq côtez.

Doubler l'arc du Decagone, par la 1.re Regle generale.

II. Corollaire.

XLI. Inscrire en un Cercle donné une figure de 20 côtez, de 40, de 80; & ainsi à l'infini. 1.re Regle generale.

IV. Probleme.

XLII. Inscrire en un Cercle donné une figure de 15 côtez.

De

De l'arc de l'Hexagone, qui est de 60 degrez, ôter l'arc du Decagone, qui est de 36: il restera un arc de 24 degrez, qui est l'arc d'une figure de 15 côtez; parce que 24 fois 15 font 360.

Corollaire.

Inscrire en un Cercle donné une figure de 30 côtez, de 60, de 120; & ainsi à l'infini. XLIII. 1.re Regle generale.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TRE'ZIE'ME.

DES TRIANGLES ET QUADRILATE'RES CONSIDEREZ SELON LEURS CÔTEZ ET LEURS ANGLES.

APRE'S ce qui a été dit des figures en general, il ne reste plus que d'expliquer ce qui est particulier aux Triangles, & aux Quadrilateres.

PREMIERE SECTION.

Des Triangles.

I. LEMME.

UN Angle avec sa base, est la même chose qu'un Triangle. Et ainsi tout ce qui a été dit dans les Livres des Angles, des Proportionelles, des Reciproques, & des Angles considerez avec leur base, se peut sans peine appliquer aux Triangles. I.

II. LEMME.

TOUT Triangle se peut inscrire en un Cercle. Car il ne faut que trouver la circonference qui passe par les trois sommets des trois angles, par VII. 4. II.

III. LEMME.

DEFINITION.

LE côté quelconque d'un Triangle en peut être apellé *la base*; & les deux autres, *ses côtez* : & alors l'angle soûtenu par la base est apellé *l'angle du sommet*; & la distance de ce sommet à la base est apellée *la hauteur du Triangle*. III.

TRIANGLES CONSIDEREZ 'A PART.

I. THEORÉME.

TOUT Triangle a ses trois angles égaux à deux droits. VIII. 62. IV.

I. COROLLAIRE.

Tous les trois angles d'un Triangle peuvent être aigus ; mais il n'y en peut avoir qu'un droit ou obtus.

II. COROLLAIRE.

VI. Si l'un des angles d'un Triangle est droit, les deux autres valent un droit.

III. COROLLAIRE.

VII. Qui connoît la grandeur de deux angles d'un Triangle, connoît la grandeur du 3.e Car ôtant de la demy-circonference les deux dont on connoît la grandeur, ce qui reste est la grandeur du 3e.

Qui connoît de combien de degrez sont les deux, sçait de combien de degrez est le 3.e Car ôtant de 180 le nombre des degrez que valent les deux, ce qui reste est le nombre des degrez que vaut le 3.e Si les deux valent 108 degrez, le 3e. en vaut 72.

II. THEORÉME.

VIII. En tout Triangle le plus grand côté soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand côté. Car par le 2e. Lemme, tout Triangle peut être inscrit dans un Cercle, & alors la circonference du Cercle est partagée en trois arcs, sur chacun desquels est apuyé chacun des angles du Triangle.

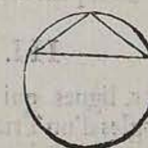
Or ces trois arcs sont :

1.er Cas. Ou tous-trois moindres que la demy-circonference : & alors chacun des angles du Triangle est aigu. (IX. 26.) Et il est clair que le plus grand an-

gle

gle étant apuyé sur le plus grand arc, est aussi soûtenu par le plus grand côté. VII. 11.

2.e Cas. Ou l'un de ces arcs est une demy-circonference, & les autres moindres ; & alors l'angle apuyé sur la demy-circonference est droit, (IX. 26.) & par consequent le plus grand de tous ; comme aussi le côté qui le soûtient, qui est un diametre, est plus grand qu'aucun des deux autres. VII. 10.



3.e Cas. Ou l'un de ces arcs est plus grand que la demy-circonference ; & alors l'angle appuyé sur cét arc est obtus, (IX. 26.) & par consequent le plus grand de tous : comme aussi le côté qui le soûtient terminant le segment dans lequel est cét angle obtus, est plus prés du centre qu'aucun des deux côtez qui le comprennent, & ainsi plus grand. VII. 10.

I. COROLLAIRE.

Tous les côtez d'un Triangle étant égaux, tous les angles le sont aussi : & au contraire tous les angles étant égaux, les côtez le sont aussi. IX.

Car étant inscrit dans un Cercle, les côtez égaux soûtiennent des arcs egaux. (V. 26.) Or les angles apuyez sur des arcs égaux, sont égaux. IX. 20.

Que si au contraire on supposoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les côtez sont égaux. Car les angles égaux seront apuyez sur des arcs égaux. IX. 20. Or les arcs égaux sont soûtenus par des côtez égaux. V. 26.

II. Co-

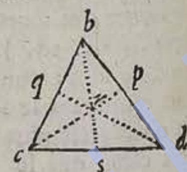
II. COROLLAIRE.

EN tout Triangle qui a deux côtez égaux ;
X. les deux angles soûtenus par ces côtez égaux sont aussi égaux ; & au contraire. En inscrivant ce Triangle dans le Cercle, on prouvera ce Corollaire de la même sorte que le precedent.

On laisse à trouver beaucoup d'autres manieres dont on le peut demontrer.

III. THEORÉME.

LES lignes qui divisent par la moitié chacun
XI. des angles d'un Triangle, se rencontrent en un même point au dedans du Triangle.



Soit le Triangle *bcd*.

Soit l'angle *d* divisé par la moitié par *dq*, & *c* divisé par la moitié par *cp*, & que *dq* & *cp* se coupent en *r* ; je dis que la ligne *br* divisera aussi l'angle *b* par la moitié.

Car (par X. 32.) l'angle *d* étant divisé par la moitié,

db. bq. :: dc. cq.

Et par la même raison considerant *dq* comme la base de l'angle *c* divisé par la moitié par *cr* :

cd. cq :: dr. qr.

Donc *db. bq :: dr. qr.* (II. 26.)

Donc (par X. 33.) la ligne *br* divise l'angle *b* par la moitié. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

Ces lignes coupant par la moitié les angles d'un Triangle font plusieurs proportions. On les peut reduire à 9, en commençant la comparaison par les portions des secantes.

Pour

Pour l'angle *b*.

$$br.\ rs. :: \begin{cases} bd.\ ds. \\ bc.\ cs. \end{cases}$$

Donc *bd. ds. :: bc. cs.*

Pour l'angle *c*.

$$cr.\ rp. :: \begin{cases} cd.\ dp. \\ cb.\ bp. \end{cases}$$

Donc *cd. dp. :: cb. bp.*

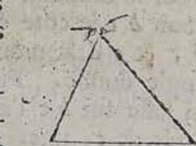
Pour l'angle *d*.

$$dr.\ rq. :: \begin{cases} db.\ bq. \\ dc.\ cq. \end{cases}$$

Donc *db. bq. :: dc. cq.*

I. PROBLEME. XII.

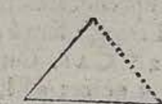
FAIRE un Triangle de trois lignes données.



Il faut que deux quelconques prises ensemble soient plus grandes que la 3.^e

De chacune des deux extremitez de l'une des données décrire un Cercle de l'intervalle de chacune des deux autres ; où ces deux Cercles se rencontreront, ce sera le point où il faudra tirer les deux côtez du Triangle.

II. PROBLEME. XIII.



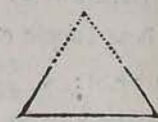
FAIRE le Triangle dont on a un angle, & la grandeur des côtez qui le comprennent.

Ayant mis ces deux côtez en sorte qu'ils fassent l'angle donné : la ligne qui en joindra les extremitez achevera le Triangle.

 III. PRO-

III. PROBLEME.

XIV. FAIRE le Triangle dont on a un côté, & les deux angles ſur ce côté.



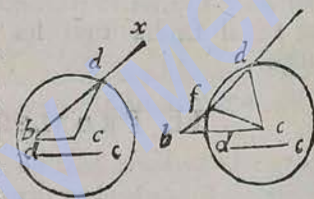
Tirant des lignes ſur les extremitez du coté donné qui faſſent les angles donnez : où elles ſe rencontreront elles acheveront le Triangle.

IV. PROBLEME.

XV. FAIRE le Triangle dont on a un angle, un des côtez qui le comprennent, & la grandeur du côté qui le ſoûtient.

Soit *b c* le côté donné comprenant l'angle donné, & *c d* la grandeur du coté qui doit ſoûtenir l'angle donné. Tirant de *b* une ligne indefinie qui faſſe ſur *b c* l'angle donné, & décrivant un Cercle de *c*, intervalle *c d* :

1.er CAS. Ou ce Cercle ne coupera l'indefinie qu'au point *d* ; ce qui arrivera toûjours quand le côté qui doit ſoûtenir l'angle donné eſt plus grand que celui qui le comprend : & alors le Triangle ſera *b c d*.



2.e CAS. Ou le Cercle coupera l'indefinie en deux points de la même part, comme en *f* & en *d* ; & alors le Triangle pourra être *b c d*, ou *b c f*.

Et pour ſçavoir lequel des deux c'eſt preciſément : il faudroit avoir determiné ſi *b c* doit ſoûtenir

tenir un angle aigu, ou s'il doit ſoûtenir un angle obtus.

Car ſi *b c* doit ſoûtenir un angle aigu, le Triangle eſt *b c d* ; & s'il doit ſoûtenir un angle obtus, le Triangle eſt *b c f*.

TRIANGLES COMPAREZ.

I. THEORÉME.

DEUX Triangles ſont tout-égaux, quand les côtez de l'un ſont égaux aux côtez de l'autre, chacun à chacun. Car alors les angles de l'un ſont auſſi égaux aux angles de l'autre, par VIII. 66. XVI.

II. THEORÉME.

DEUX Triangles ſont tout-égaux quand ils ont un angle égal, & que les cotez qui comprennent dans l'un cét angle égal, ſont égaux à ceux qui le comprennent dans l'autre, chacun à chacun. Car alors la baſe eſt auſſi égale à la baſe, par VIII. 67. XVII.

III. THEORÉME.

DEUX Triangles ſont tout-égaux quand ils ont un côté égal, & que les angles ſur ce côté égal ſont égaux chacun à chacun. XVIII.

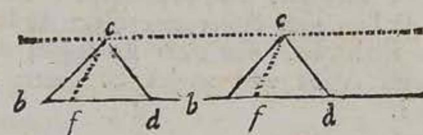
Car ces deux angles étant égaux chacun à chacun, le troiſiéme qui eſt celuy que ſoûtient le côté égal, ſera égal auſſi. (VIII. 64.)

Si donc l'on s'imagine que ces deux Triangles ſont inſcrits chacun dans un Cercle, ces Cercles ſeront égaux, (par X. 27.) parce que le côté égal ſoûtiendra dans ces deux Cercles des arcs d'autant de degrez.

Donc les deux autres angles étant égaux chacun à chacun, ſeront appuyez ſur des arcs égaux; qui étant de Cercles égaux, ſeront ſoûtenus par des côtez égaux chacun à chacun. V. 26.

Donc les trois côtez de ces deux Triangles ſont égaux chacun à chacun, auſſi bien que les angles. Donc ils ſont tout-égaux.

IV. Theoréme.



XIX. Si deux Triangles ont ces trois choſes égales,

Un angle, comme celui dont le ſommet eſt en *b*.

Un des côtez qui comprennent cét angle, comme *b c*.

Et le côté qui le ſoûtient, comme *c d*, ou *c f*:

Il faut outre cela afin qu'ils ſoient tout-égaux, ou que l'angle que ſoûtient *b c*, ne ſoit obtus ny dans l'un ny dans l'autre, ou qu'il ſoit obtus dans tous-les deux.

Car ſuppoſant qu'on eût mené par *c* une parallele à *b d*:

Ces deux Triangles ſeroient enfermez entre deux eſpaces paralleles égaux (par VIII. 58.) parce que *b c* eſt égale & fait le même angle *c b d* dans l'un & dans l'autre.

Donc le côté *c d*, ou *c f*, étant égal par l'hypotheſe dans les deux Triangles: s'il eſt oblique dans tous-les deux vers le même endroit, il fait le même angle aigu dans l'un & dans l'autre, lorſque c'eſt vers le dedans du Triangle qu'il eſt incliné, comme quand c'eſt *c d* en l'un & en l'autre; ou

ou le même angle obtus, quand c'eſt vers le dehors, comme ſi c'eſt *c f* en l'un & en l'autre. VIII. 55.

Donc les deux Triangles qui avoient déja deux côtez égaux par l'hypotheſe, ſe trouvant encore avoir deux angles égaux, & par conſequent trois, (VIII. 64.) ſeront tout-égaux par le 2.e Theoréme.

Mais ſi le côté qui ſoûtient l'Angle *b* étoit diverſement incliné dans ces deux Triangles, comme ſi c'étoit *c d* dans l'un & *c f* dans l'autre: ces Triangles n'auroient garde d'étre tout-égaux; puiſque *c d* feroit dans l'un un angle aigu, & *c f* dans l'autre un angle obtus.

Corollaire.

Dans l'hypotheſe du precedent Theoréme, lorſque des deux côtez ſuppoſez égaux dans les deux Triangles, celui qui ſoûtient l'angle ſuppoſé égal eſt plus grand que celuy qui le comprend, les deux Triangles ſont certainement tout-égaux.

Car alors dans l'un & dans l'autre, l'angle *c d b* eſt neceſſairement aigu, par 8. S.

V. Theoréme.

Deux Triangles équiangles entr'eux ſont ſemblables. C'eſt à dire que les côtez de l'un ſont proportionels aux côtez de l'autre. C'eſt ce qui a été prouvé en diverſes manieres dans les deux Livres des Proportionelles. Voyez X. 18. XX.

Avertissement et Definition.

En comparant deux Triangles ſemblables, il faut toûjours comparer le plus grand côté de l'un au plus grand côté de l'autre, le moyen au XXI.

 moyen

moyen, & le plus petit au plus petit. Ainsi en deux Triangles semblables le plus grand côté étant appellé *b*. b.

Le moyen *d*. d.

Et le plus petit *h*. h.

b. b. : : *d*. d. : : *h*. h.

Et ces côtez que l'on doit comparer ensemble s'appellent *homologues*.

I. Corollaire.

XXII. Les côtez qui soûtiennent les angles égaux, sont homologues. Car dans l'un & dans l'autre le plus grand côté soûtient le plus grand angle; le moyen côté le moyen angle; le plus petit côté le plus petit angle. Cela se prouve encore par X. 18.

II. Corollaire.

XXIII. Deux Triangles sont équiangles, si deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun. Car il s'ensuit de-là que le 3.e est aussi égal au 3.e.

VI. Theoréme.

XXIV. Lorsque deux Triangles ont un angle égal, & les côtez qui comprennent ces angles, proportionels, ils sont semblables. Car alors la base est aussi proportionelle à la base, & les deux angles sur cette base égaux, par XI. 57.

VII. Theoréme.

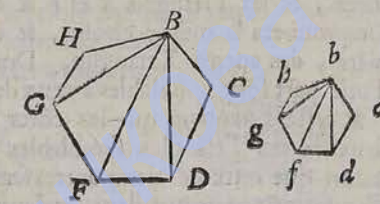
XXV. Si deux Triangles sont de même hauteur, les paralleles à la base également distantes de la base dans l'un & dans l'autre sont entr'elles comme ces bases.

Cela est demontré X. 20.

VIII. Theo-

VIII. Theoréme.

Deux Polygones quelconques étant semblables, peuvent être partagez chacun en autant de Triangles XXVI.



l'un que l'autre; qui seront tels, que ceux d'une part sont semblables à ceux de l'autre part, chacun à chacun; & les côtez homologues de deux de ces Triangles semblables, sont en même raison que ceux de deux autres semblables.

Soient deux Hexagones irreguliers semblables *BCDFGH*, & *bcdfgh*. Soient menées dans le grand des lignes de *B* à *D*, à *F*, à *G*. Et de même dans le petit.

L'un & l'autre Hexagone sera partagé en 4 Triangles,

Sçavoir $\begin{cases} BCD.\ BDF.\ BFG.\ BGH. \\ bcd.\ \ bdf.\ \ bfg.\ \ bgh. \end{cases}$

Qui sont semblables deux à deux, *BCD* à *bcd* &c.

Car les angles *C* & *c* sont égaux, par l'hypothese que les Hexagones sont semblables; & les côtez *CB* & *CD* sont proportionels aux côtez *cb* & *cd*, par la même hypothese.

Donc les bases *BD* & *bd* sont aussi proportionelles aux côtez; & les Triangles sont semblables, par le 6.e Theoréme.

BDF & *bdf* sont semblables aussi. Car les angles *CDF* & *cdf* étant égaux par l'hypothese, si on en ôte les angles *BDC* & *bdc* qui sont égaux aussi, (comme on le vient de voir:) les angles *BDF* & *bdf* demeureront égaux.

 Or

Or les côtez de ces angles $B D$ & $D F$ d'une part, & $b d$ & $d f$ de l'autre, sont proportionels. Donc les bases $B F$ & $b f$ sont proportionelles aux côtez, & les Triangles $B D F$ & $b d f$ semblables. On prouvera la même chose, & de la même maniere, des autres Triangles. Donc les Triangles d'une part sont semblables à ceux de l'autre.

Il reste à prouver que les côtez homologues de deux de ces Triangles semblables sont en même raison que ceux de deux autres semblables ; ce qui est aisé. Car prenant dans les deux Hexagones les points B & b pour sommet commun des quatre Triangles : ils auront chacun pour base un des côtez de l'Hexagone : les deux premiers $C D$ & $c d$, les deux seconds $D F$ & $d f$ &c.

Or par l'hypothese $C D . c d :: D F . d f$.

Donc les bases des deux premiers Triangles sont proportionelles aux bases des deux seconds. Et ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *On omet diverses choses qui pourroient être dites des Triangles semblables ; parce qu'il n'y a rien en tout cela qui ne se trouve facilement par ce qui a été dit des Angles considerez avec leurs bases dans les deux Livres des Proportionelles.*

DIVISION DU TRIANGLE EN SES ESPECES.

XXVIII. Le Triangle se divise selon ses côtez & selon ses angles. Si donc

Les côtez sont	Tous-trois inégaux, il s'appelle	Scaléne.
	Deux égaux,	Isoscéle.
	Tous-trois égaux,	Equilateral.

Les angles sont	Tous-trois aigus,		Oxygone
	Deux aigus & l'autre	obtus,	Amblygone.
		droit,	Rectangle.

Le Scaléne à ses trois angles inégaux.
L'Isoscéle en a deux égaux.
L'Equilateral les a tous-trois égaux.

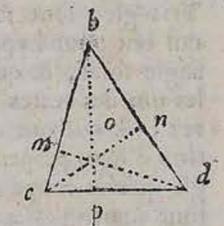
Le Scaléne / L'Isoscéle	peuvent être	Oxygone.
		Amblygone.
		Rectangle.

L'Equilateral ne sçauroit être qu'Oxygone.

DES TRIANGLES OXYGONES.

THEORÉME.

Si de tous les angles d'un Triangle Oxygone on tire des perpendiculaires aux côtez, elles se couperont en un même point au dedans du Triangle. XXIX.



Soit le Triangle $b c d$, & deux perpendiculaires aux côtez $d m$, $c n$; je dis que $b p$ menée par le point o, qui est celuy où $d m$ & $c n$ se coupent, sera aussi perpendiculaire à $c d$.

Car les Triangles $c b n$ & $d b m$ sont équiangles, ayant chacun un angle droit & un angle commun ; & par consequent les angles $b c n$ & $b d m$ sont égaux.

Et par consequent aussi les Triangles $b d m$ & $c o m$ sont équiangles, ayant chacun un angle droit, & l'angle $m c o$ (qui est le même que $b c n$,) étant égal à l'angle $b d m$.

Donc $d m . m c :: m b . m o$; & *alternando*, $d m . m b :: m c . m o$.

Donc les Triangles *bmo* & *dmc* sont semblables, par 24. *sup.* puisque dans le Triangle *dmc* les côtez *dm* & *mc*, qui comprennent un angle droit, sont proportionels à *mb* & *mo* qui comprennent aussi un angle droit.

Donc l'angle *mbo* soûtenu par *mo*, est égal à l'angle *mdc* soûtenu par *mc*.

Or les angles *mob* & *pod* sont égaux, parce qu'ils sont opposez au sommet. Donc les Triangles *mob* & *pod* sont équiangles.

Or l'angle *omb* est droit, par la construction. Donc l'angle *opd* est droit aussi. Ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

XXX. Ces perpendiculaires coupant les angles d'un Triangle, font 12 Triangles rectangles: 6 grands, qui ont pour hypotenuse l'un des côtez du Triangle total, & qui enferment tous quelque chose les uns des autres : & 6 petits entierement separez, & qui ont chacun pour hypotenuse la portion d'une perpendiculaire la plus proche de l'angle qu'elle coupe ; & ces 12 Triangles rectangles sont équiangles 4 à 4, deux grands & deux petits. C'est un exercice d'Esprit de les trouver, & il vaut mieux le laisser à ceux qui commencent. Je diray seulement qu'entre les diverses proportions qui se font par tous ces Triangles, il y en a de deux sortes fort considerables.

La premiere est, que l'un des côtez d'un angle & sa premiere portion sont reciproques à l'autre côté & sa premiere portion ; c'est à dire que le grand côté est au petit, comme la premiere portion du petit à la premiere portion du grand. Exemple dans l'angle *b*:

grand.	petit.	::	1.re port. du petit.	1.re port. du grand.
bd.	*bc.*	::	*bm.*	*bn.*

La

La seconde est, que les portions d'un côté du Triangle total sont reciproques à la perpendiculaire entiere, & sa portion qui fait l'angle droit ; c'est à dire qu'une portion du côté est à la perpendiculaire, comme la portion de la perpendiculaire qui fait l'angle droit, est à l'autre portion du côté. Exemple :

port. du côté.	perp.	::	port. de la perp.	port. du côté.
mc.	*md.*	::	*mo*	*mb.*

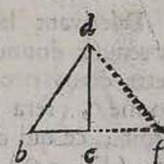
DES TRIANGLES RECTANGLES.

Theoréme.

Si l'un des angles aigus d'un Triangle rectangle est double de l'autre, (ce qui ne peut être qu'il ne vaille les deux-tiers d'un angle droit, & l'autre le tiers, c'est à dire qu'il ne soit de 60 degrez, & l'autre de 30 :) le petit côté qui soûtient l'angle de 30 degrez & qui en est le sinus, est la moitié de l'hypotenuse de l'angle droit, qui est aussi le rayon de cét angle de 30 degrez. XXXI.

Soit le Triangle *bdc* conforme à l'hypothese.

Tirant *df* égale à *db* sur *bc* prolongée, l'angle *dfb* sera égal à l'angle *dbf*, (10. *sup.*) & par consequent l'un & l'autre sera de 60 degrez. Donc l'angle *bdf* sera aussi de 60 degrez, puisque tous les trois ensemble valent deux droits, c'est à dire 180 degrez. (4. *sup.*)



Donc le Triangle *bdf* est équilateral. (9. *sup.*)

Donc $bc + cf = db$.

Or

Or $b\,c = c\,f$, les deux Triangles $d\,b\,c$ & $d\,c\,f$ étant tout-égaux, par 18. *sup.*

Donc $b\,c$ est la moitié de $d\,b$. Ce qu'il falloit demontrer.

PROBLEME.

XXXII. TROUVER le Triangle rectangle dont on a

1. Ou les deux côtez comprenans l'angle droit.
2. Ou l'hypotenuse, & un des côtez.
3. Ou l'hypotenuse, & la perpendiculaire du sommet de l'angle droit à cette hypotenuse.
4. Ou l'hypotenuse, & la moyenne proportionelle entre l'hypotenuse donnée & un des cotez.
5. Ou l'un des côtez, & la moyenne proportionelle entre le côté donné & l'hypotenuse.
6. Ou l'un des côtez, & la moyenne proportionelle entre ce côté donné & l'autre côté.

PREMIER CAS.

Mettant en angle droit les deux côtez donnez: la ligne qui en joint les extremitez est l'hypotenuse.

SECOND CAS.

Décrivant la demy-circonference dont l'hypotenuse donnée est le diametre: le point de cette demy-circonference où se terminera le côté donné, fera le point du sommet de l'angle droit; ce qui determinera l'autre côté non donné. (IX. 26.)

TROISIÉME CAS.

Voyez IX. 35.

QUA-

QUATRIÉME, CINQUIÉME ET SIXIÉME CAS.

Trois lignes étant continuëment proportionelles, ayant la premiere & la seconde, qui est la moyenne, on a la 3.e par X. 36. Et par consequent le 4.e & le 5.e Cas se rapportent au 2.e & le 6.e au 1.er

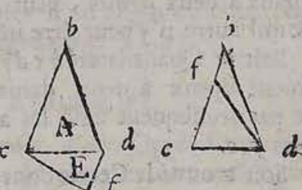
DES TRIANGLES ISOSCELES.

I. THEORÉME

LORSQUE l'angle du sommet d'un Triangle Isoscele est de 36 degrez, chacun des angles sur la base est de 72; & la base est moyenne proportionelle entre le côté entier, & le côté moins cette base, (c'est à dire que la base divise le côté en moyenne & extreme raison,) & la base étant ajoûtée au côté, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extreme raison. Voyez XI. 68. 69. 63. XXXIII.

II. THEORÉME.

DEUX Triangles Isosceles étant semblables & inégaux, si la même ligne est la base de l'un & le côté de l'autre: cette ligne sera moyenne proportionelle entre le côté du Triangle dont elle est base, & la base de celui dont elle est côté. XXXIV.



Soit l'un des Triangles Isosceles $b\,c\,d$, & l'autre $c\,f\,d$, de sorte que $c\,d$ soit la base de $b\,c\,d$, & le le côté de cfd. Je dis que cd sera moyenne proportionelle entre bc côté du premier Triangle, & fd base du second. Car ces Triangles étant semblables, bc (côté du 1.er) est à cd (côté du 2.e) comme le même cd entant que base du premier, est à fd base du second. (X. 18.)

Donc $\div\!\!\!\cdot\cdot$ $bc. cd. fd.$ Ce qu'il falloit demontrer.

SECONDE SECTION.

Des Quadrilateres.

DEFINITIONS.

XXXV. Le Quadrilatere est une figure de 4 côtez qui ne se joignent qu'aux extremitez : & par consequent de 4 angles qui tous ensemble valent quatre droits. XII. 9.

Les côtez qui comprennent un même angle s'appellent *côtez angulaires.*

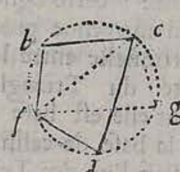
Ceux qui ne comprennent point le même angle, *cotez opposez.*

Les angles de même sont *proches* ou *opposez.*

THEORÉME.

XXXVI. Tout Quadrilatere qui a ses angles opposez égaux à deux droits, peut être inscrit au Cercle, & nul autre n'y peut être inscrit.

Soit le Quadrilatere $bcdf$, dont les angles b & d soient égaux à deux droits, & par consequent aussi les angles $f. c.$



Soit trouvé le Cercle dont la circonference passe par les 3 points $f\,b\,c.$ par VI. 4. Je dis qu'elle passera aussi par le 4.e qui est d.

Car

Car tout angle qui a fc pour base, & qui est inscrit dans ce Cercle du côté de d, comme fgc, plus l'angle b, vaut deux droits. IX. 28. Donc l'angle fgc est égal à l'angle d, qui avec l'angle b, vaut aussi deux droits, par l'hypothese. Donc l'angle d est aussi inscrit dans ce Cercle par IX. 31.

DIVISION ET DEFINITIONS.

Lorsque les côtez opposez d'un Quadrilatere sont paralleles, le 1.er au 3.e & le 2.e au 4.e on l'appelle *Parallelogramme* ; sinon on l'appelle *Trapéze*, quand même deux des côtez opposez, comme le 1.er & le 3.e seroient paralleles, si le 2.e & le 4.e ne le sont pas. XXXVII.

DES PARALLELOGRAMMES.

I. THEORÉME.

Si les côtez opposez d'un Quadrilatere sont égaux, ils sont paralleles ; & s'ils sont paralleles, ils sont égaux. VI. 26 & 27. XXXVIII.

II. THEORÉME.

Si tous les 4 angles d'un Quadrilatere sont droits, il est Parallelogramme. VI. 13. XXXIX.

III. THEORÉME.

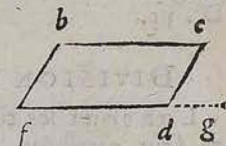
Si deux côtez opposez d'un Quadrilatere sont égaux & paralleles, les deux autres sont aussi égaux & paralleles. VI. 28. XL.

IV.

IV. Theoréme.

XLI. Les deux angles opposez d'un Parallelogramme sont égaux, & les proches sont égaux à deux droits.

Soit le Parallelogramme *b c d f*. Soit prolongé *f d* jusques à g. L'angle *c d g* est égal à l'angle *c*, par VIII. 54. & à l'angle *f*, par VIII. 55. Donc les aigus opposez *c* & *f* sont égaux.



Or les deux angles vers *d*, l'un exterieur & l'autre interieur, sont égaux à deux droits. (VIII. 14.) Donc les angles interieurs vers *d* & vers *f* sont aussi égaux à deux droits.

Donc les deux autres vers *b* & vers *c* sont aussi égaux à deux droits, puisque les quatre valent 4 droits. (XII. 9.)

Otant donc de part & d'autre les deux aigus *c* & *f* qui sont égaux, les obtus opposez *b* & *d* seront égaux.

I. Corollaire.

XLII. S'il y a un angle droit dans un Parallelogramme, tous les autres le sont aussi, & alors il est appellé *Rectangle*.

Car l'opposé est droit, puisqu'il est égal à celuy-là ; & les proches ne peuvent valoir deux droits, que l'un étant droit, l'autre ne le soit aussi.

II. Corollaire.

XLIII. Qui connoist un angle d'un Parallelogramme les connoist tous. Car ce qui manque de la demy-circonference à l'arc qui mesure l'angle donné, est la mesure de l'angle proche de celuy-là, & les deux autres sont égaux chacun à l'un de ces deux-là.

III. Corollaire.

Deux Parallelogrammes qui ont un angle égal, sont équiangles. XLIV.

IV. Corollaire.

Si deux côtez angulaires d'un Parallelogramme sont égaux, tous les quatre sont égaux entr'eux. Car chacun des angulaires est égal à son opposé. (38. *sup.*) XLV.

V. Corollaire.

Qui connoist d'un Parallelogramme deux côtez angulaires & un angle, connoît tout le Parallelogramme. XLVI.

Car qui connoist un angle, les connoist tous ; & qui connoist deux côtez angulaires connoist les deux autres, chacun étant égal à son opposé.

Probleme.

Achever un Parallelogramme dont on a deux côtez angulaires avec l'angle qu'ils comprennent. XLVII.

De l'extremité de l'un des côtez, & de l'intervalle de l'autre, décrire un Cercle. De l'extremité de cét autre côté, & de l'intervalle du premier, décrire un autre Cercle. Les lignes menées de ces extremitez au point où ces Cercles se couperont, acheveront la description du Parallelogramme.

V. Theoréme.

XLVIII. Deux Parallelogrammes ſont ſemblables, quand ils ont un angle égal, & les côtez angulaires proportionnels.

Car l'égalité d'un angle donne celle des autres, (44. S.) & deux côtez angulaires ne ſçauroient être proportionels, que les deux autres ne le ſoient auſſi.

DEFINITION.

XLIX. La ligne qui joint deux angles oppoſez s'appelle *Diagonale*, & elle diviſe le Parallelogramme en deux Triangles tout-égaux. Car les deux angles non diviſez ſont égaux parce qu'ils ſont oppoſez (41. S.) & les parties des diviſez ſont alternativement égales, par VIII. 54.

VI. Theoréme.

L. Si on tire des paralleles aux côtez angulaires qui paſſent par un même point de la diagonale, les parties de ces nouvelles lignes ſont proportionelles.

Demontré X. 17.

Definition.

LI. On dit qu'un Parallelogramme eſt décrit autour de la diagonale d'un autre Parallelogramme, quand d'un point de cette diagonale on tire deux paralleles aux deux côtez angulaires du Parallelogramme, qui ſe terminant chacune à l'un de ces côtez faſſent un nouveau Parallelogramme, dont une partie de cette diagonale eſt encore diagonale.

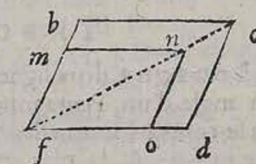
VII. Theoréme.

Tout Parallelogramme décrit autour de la diagonale d'un autre, lui eſt ſemblable. LII.

b c d f eſt ſemblable à *m n o f*. Car d'une part les angles *f d c* & *f o n* ſont égaux; parce que *c d* & *n o* ſont paralleles. (VIII. 59.)

Et par la même raiſon les angles *f c d*, & *f n o* ſont égaux auſſi.

Donc *f d*. *f o* :: *d c*. *o n*. (20. *ſup.*)



Donc ces Parallelogrammes ſont équiangles, & ont les côtez angulaires proportionels. Donc ils ſont ſemblables, par le 5.e Theoréme 48. *ſup.*

DIVISION DU PARALLELOGRAMME EN SES ESPECES.

LIII.

Selon ſes	Côt. angul.	ég.	Quarré.	Angles droits.
			Rhombe.	Angles non dr.
		inég.	Oblong.	Angles droits.
			Rhomboïde.	Angles non dr.
	Angl.	dr. recta.	Quarré.	Côtez tous ég.
			Oblong.	Côt. non tous ég.
		non dr.	Rhombe.	Côtez tous ég.
			Rhomboïde.	Côt. non tous ég.

AU-

AUTREMENT

Parallelogr.	rectangle	Tous les côtez ég.	Quarré.
		Les seuls oppos. ég.	Oblong.
	non recta.	Tous les côtez ég.	Rhombe.
		Les seuls oppos. ég.	Rhomboïde.

DU PENTAGONE.

THEORÉME.

LIV. LORSQUE deux lignes qui soûtiennent chacune un angle d'un Pentagone regulier se coupent, elles se coupent mutuellement en moyenne & extreme raison; & la plus grande partie de chacune de ces lignes est égale au côté du Pentagone.

Soit le Pentagone inscrit dans un Cercle.

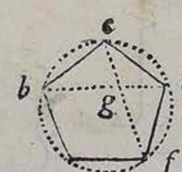
Chaque côté soûtient un arc de 72 degrez. XII. 21.

Donc les angles inscrits au même Cercle qui sont soûtenus par un de ces arcs, (tels que sont *cbd*, *cdb*, *dcf*, *dfc*,) sont chacun de 36 degrez. IX. 17.

Et ceux qui sont soûtenus par deux de ces côtez, (comme l'angle *bcf*,) sont de 72. *Ibid.*

Et les angles opposez au sommet (*bgc* & *fgd*) sont chacun aussi de 72 degrez, par IX. 42. Et par consequent *bg* est égale à *bc* côté du Pentagone, par 10. *sup.*

Donc l'angle *cbg* est tel par 33. *sup.* que la base étant jointe au côté, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extreme raison. Or *gd* est égale à la base *gc*, par



par 10 *sup.* ou par IX. 34. Donc la toute *bd* est divisée en moyenne & extreme raison. C'est-à-dire que,

bd. bg. :: bg. gd.

COROLLAIRE.

Un Hexagone & un Decagone étant inscrits dans le même Cercle, le côté de l'un ajoûté au côté de l'autre fait une ligne divisée en moyenne & extreme raison. LV.

Car l'angle compris entre deux demy-diametres, qui a pour base le côté du Decagone, est un angle de 36 degrez (XII. 21.) Donc ajoûtant le côté à la base, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. 33. *sup.*

Or le côté de cét angle, qui est le demy-diametre, est aussi le côté de l'Hexagone inscrit dans ce Cercle-là. XII. 36.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATORZIE'ME.

DES FIGURES PLANES considerées selon leur aire : c'est à dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

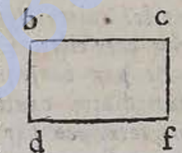
Et premierement des Rectangles.

IDE'E GENERALE DE LA MESURE DES SURFACES.

I. *LA surface étant une Etenduë de deux dimensions, longueur & largeur : il est necessaire pour en connoître la grandeur, de sçavoir quelle en est la longueur, & quelle en est la largeur.*

La longueur se mesure par une ligne droite qui donne la distance d'un point à un point. C'est pourquoy on ne peut connoître la longueur des lignes courbes que par rapport à des lignes droites.

La largeur consiste dans la distance entre deux lignes, comme entre b c *&* d f, *qui se mesure aussi par une ligne droite. C'est pourquoy les surfaces courbes ne se peuvent mesurer que par rapport à des surfaces planes.*



De plus toute ligne droite n'est pas propre à mesurer la distance d'une ligne à une ligne. Car si elle tomboit d'un point d'une ligne obliquement sur l'autre, elle n'en mesureroit pas la distance ; mais tombant d'un point d'une ligne perpendiculairement sur l'autre, elle mesure la distance de ce point à cette ligne.

Mais il ne s'ensuit pas que pour avoir mesuré la distance d'un des points de la ligne b c *à la ligne* d f, *elle ait mesuré la distance de tous les autres points de la ligne* b c, *à moins que tous les autres points de la ligne* b c *ne fussent également distans de la ligne* d f ; *c'est à dire qu'elle ne lui fust parallele.*

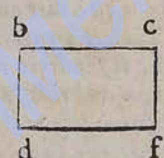
D'où il s'ensuit que si b c *n'étoit pas parallele à* d f, *il faudroit autant de differentes mesures pour connoître la distance de* b c *à* d f, *qu'il y auroit de differens points dans* b c. *Ce qui étant impossible, il paroît par là qu'afin qu'on puisse avoir distinctement la distance d'une ligne à une autre, (ce qui fait la largeur,) il faut que ces lignes soient paralleles.*

De plus, si ces lignes sont inégales, & que b c *soit plus grande que* d f, *on ne sçauroit laquelle prendre pour la longueur, parce que cette surface se-*

seroit plus longue d'un côté que de l'autre. Et ainsi afin qu'on puisse avoir exactement la mesure d'une surface, il faut que les lignes dont la distance en fait la largeur, soient non seulement paralleles, mais aussi égales. D'où il arrivera que les autres lignes seront aussi égales & paralleles entr'elles. (VI. 28.)

Et par consequent afin qu'une surface soit en état d'être exactement mesurée, il faut qu'elle soit terminée par 4 lignes paralleles; c'est à dire que ce soit un Parallelogramme.

Mais si les deux lignes égales & paralleles qu'on prend pour mesure de la longueur ne sont pas directement opposées, en sorte que de tous les points de l'une on ne puisse tirer des perpendiculaires sur l'autre; c'est à dire si ce Parallelogramme n'est pas rectangle, mais obliquangle: on aura bien alors dans la figure dequoi en mesurer la longueur, sçavoir lequel on voudra de deux côtez opposez. Mais l'autre côté angulaire étant oblique sur cette longueur, ne sera pas propre à mesurer la distance entre les deux lignes qui font la longueur. D'où il s'ensuit qu'il n'y a que le Rectangle qui ait en soi la mesure de sa longueur & de sa largeur.



Car si d f *est prise pour la longueur,* b d *qui est la mesure de de la distance de tous les points de* b c *à* d f, *en mesurera la largeur.*

C'est pourquoi nulle surface ne se mesure proprement par soi-même, que le Rectangle. Et dans tout Rectangle l'un des côtez angulaires à choisir, se peut appeller sa longueur, *& l'autre* sa largeur; *ou pour s'accommoder davantage aux termes communs, l'un* sa base, *& l'autre* sa hauteur.

Mais comme la mesure est d'autant plus parfaite qu'el-

qu'elle est plus simple, & que le Quarré qui n'a qu'une même mesure pour sa longueur & pour sa largeur, est plus simple que l'Oblong qui en a deux: il est arrivé de là que les Hommes prennent le Quarré de quelque ligne connuë, comme d'une toise, d'un pied, d'un pouce &c. pour la mesure commune de toutes les surfaces; & qu'alors seulement ils en croient connoître parfaitement la grandeur, quand ils peuvent dire qu'elle est de tant de toises quarrées, ou de tant de pieds quarrez, ou de tant de pouces quarrez &c. Et ainsi ce qu'on entend ordinairement par ces mots, (avoir l'aire d'un Plan,) c'est sçavoir combien ce Plan, de quelque figure qu'il soit, contient ou de toises quarrées, ou de pieds quarrez, ou de pouces quarrez; & quand on parle de surface, on sous entend le mot de quarré sans l'exprimer: comme quand on dit que la place d'un logis est de tant de toises, cela s'entend de toises quarrées, dont chacune vaut 36 pieds quarrez.

Neanmoins comme cela ne se peut pas toûjours connoître à cause des grandeurs incommensurables, on se contente souvent en comparant des surfaces ensemble, de sçavoir que si l'une contient tant de petits Rectangles, comme 16 fois b f, *l'autre en contient tant aussi; comme 25 fois le même* b f.

Tout cela nous fait voir, 1.° *Que la premiere & la plus parfaite mesure est le Quarré, & que c'est par le Quarré qu'on mesure les Rectangles pour en connoître exactement la grandeur.*

2.° *Que la plus parfaite apres le Quarré, & qui est mêmes parfaite en son genre, parce qu'elle contient en soi la mesure de la longueur & de la largeur, est le Rectangle oblong; & que c'est par là que l'on mesure les autres Parallelogrammes.*

3°. *Que celle d'apres, & qui est imparfaite, ne contenant pas en soi la mesure de la longueur & de la largeur, est le Parallelogramme non rectangle: & que c'est d'or-*

d'ordinaire par ces Parallelogrammes que l'on mesure les Triangles, en ce qu'on les considere comme les moitiez de ces Parallelogrammes.

4°. Que le Triangle suit aprés, & que c'est par lui qu'on mesure d'ordinaire les autres Polygones en les reduisant en Triangles, comme ils s'y peuvent tous reduire.

5°. Qu'enfin les autres Polygones sont mesurez & ne servent point de mesure, comme le Quarré sert de mesure & n'est point mesuré si ce n'est par d'autres Quarrez plus petits; comme quand on dit que la toise quarrée contient 36 pieds quarrez.

Voilà en abregé tout ce qu'a pû faire l'art des Hommes pour mesurer les surfaces rectilignes, sans parler des curvilignes qui ne se peuvent mesurer que par rapport à des rectilignes.

Mais comme toutes nos connoissances qui dependent de l'Art, en supposent de naturelles qu'on appelle Axiomes: voici ceux sur lesquels est fondée toute la science de la dimension des figures planes.

I. AXIOME.

TOUS les Quarrez de racine égale sont égaux.
II. C'est à dire que les espaces compris dans le Quarré de la ligne b, & dans celui de la ligne m égale à b, & de quelque autre ligne que ce soit égale à b, sont egaux. Cela est clair par la notion même de la surface, qui n'ayant que deux dimensions, longueur & largeur, il n'est pas plus clair que deux lignes droites d'une même longueur sont égales, qu'il est clair que deux surfaces de même longueur & de même largeur sont égales. Or deux Quarrez sont de même longueur & de même largeur, si la ligne qui mesure dans l'un tant la longueur que la largeur, est égale à celle qui mesure dans l'autre tant la longueur que la largeur.

C'est pourquoi aussi partout où une ligne d'une cer-

certaine longueur se trouve, comme de la longueur de b, elle peut être marquée par le même caractere & appellée b. Car il ne peut y avoir de difference que de situation, ce qui n'y fait rien. Et ainsi il ne faut pas s'étonner si bb est partout égal à bb.

II. AXIOME.

SI les côtez angulaires d'un Rectangle sont III.
égaux aux côtez angulaires d'autres Rectangles, chacun à chacun, tous ces Rectangles sont égaux. Ou ce qui est la même chose, tous ceux dont la base est égale à la base, & la hauteur à la hauteur, sont égaux.

C'est la même chose que le precedent. Car les côtez angulaires d'un Rectangle en mesurent la longueur & la largeur; & on peut même, comme nous avons dit, en appeller l'un sa longueur, & l'autre sa largeur indifferemment. Et par consequent tous les Rectangles dont les côtez angulaires sont égaux, chacun à chacun, ont même longueur & même largeur.

On peut encore dire que les côtez angulaires d'un Rectangle pouvant être marquez par les mêmes caracteres partout où ils se rencontrent égaux, comme par b & par c: tous les Rectangles qui ont leurs côtez angulaires égaux l'un à b & l'autre à c, sont égaux; c'est à dire que bc est égal à bc.

AVERTISSEMENT.

Ces deux Axiomes nous font voir que tout ce que IV.
nous avons dit dans le premier Livre de la multiplication des grandeurs incomplexes & complexes, & dans le 3.e de la raison entre les grandeurs planes, se peut appliquer aux Quarrez & aux Rectangles; & qu'il n'y a qu'à substituer des lignes au lieu des simples caracteres.

C'est ce que nous verrons en peu de mots en commençant par la puissance des lignes.

DEFINITION.

On apelle puissance d'une ligne le Quarré de cette ligne, comme *b b* est la puissance de *b*; ou bien le Rectangle de deux lignes quand il s'agit de deux lignes, comme la puissance de *b* par *c* est le Rectangle *b c*.

DE LA PUISSANCE D'UNE LIGNE comparée avec la puissance de ses parties.

VI. TOUT ce qu'on enseigne de la puissance d'une ligne comparée avec la puissance de ses parties, n'est que la même chose que ce que nous avons dit dans le premier Livre de la multiplication des grandeurs complexes, & se peut reduire à cét Axiome;

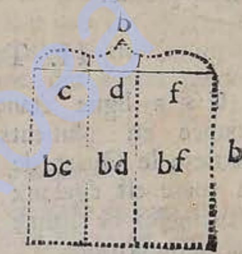
III. AXIOME.

VII. C'est la même chose de multiplier le tout par le tout, & de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties, en faisant autant de multiplications partiales qu'il y a d'unitez dans le produit des deux nombres des parties qu'on multiplie les unes par les autres.

AVERTISSEMENT.

VIII. *Ainsi le plus grand mystere pour ne se point broüiller est de nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractere, afin que deux caracteres joints ensemble puissent marquer une multiplication, c'est à dire un Rectangle; & de marquer par un même caractere les lignes égales.*

Exemple : La ligne b *soit divisée en trois portions inégales que j'appelleray* c. d. f. *Il est visible que c'est la même chose de multiplier* b *par* b, *ce qui donne* b b, *que de multiplier* b *par toutes ses parties, c'est à dire par* c, *par* d, *& par* f, *ce qui donne* b c. b d. b f: *& par consequent* b b = b c + b d + b f.



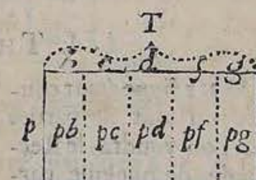
Ainsi presque toutes les Propositions du second Livre d'Euclide ne sont que des Corollaires de cet Axiome & de cét Avertissement. Je ne proposeray que les principales qui sont d'usage.

Je suppose toûjours qu'on mette à angles droits les lignes qui doivent faire les côtez angulaires des Rectangles, sans que je m'amuse plus à en avertir.

Et quand je parle d'une ligne coupée en plusieurs parties, j'entens toûjours égales ou inégales, à moins que je n'exprime qu'on les doit prendre égales.

I. THEORÉME.

AYANT deux lignes, l'une non coupée & l'autre coupée en tant de parties que l'on voudra: le Rectangle des deux entieres est égal à tous les Rectangles de la non-coupée par chaque partie de la coupée. C'est à dire qu'un Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble. IX.



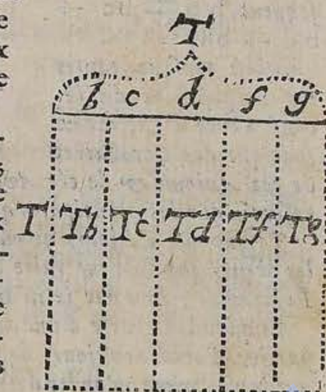
Soit *p* la non-coupée, & *T* la coupée en 5 parties *b, c, d, f, g*. Il est bien visible qu'en tirant des lignes paralleles à *p*, (& par consequent qui lui sont égales,) par tous les points de division de

 T: elles

T : elles feront pb, pc, pd, pf, pg, qui pris ensemble sont égaux à pT, puisque c'en sont toutes les parties.

II. Theoréme.

X. Une ligne étant coupée en plusieurs parties, le Quarré de la toute est égal aux Rectangles de chaque partie sur la toute.



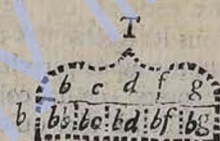
C'est la même chose que le precedent ; excepté que la même ligne faisant les deux côtez du Rectangle total qui est alors Quarré, on la prend une fois pour la non-coupée, & une autre fois pour la coupée.

Il est donc clair que T étant coupée en b, c, d, f, g :

TT doit étre égal à Tb, Tc, Td, Tf, Tg.

III. Theoréme.

XI. Une ligne étant coupée en tant de parties que l'on voudra, le Rectangle de quelque partie que ce soit par la toute, est égal au Quarré de cette partie plus les Rectangles de cette partie par chacune des autres.



Soit T comme auparavant divisée en 5 parties b, c, d, f, g. Il est clair par le premier Theoréme, que le Rectangle de b par la toute est égal aux 5 Rectangles de b par chaque partie de T. Or b est l'une de ces parties, & par consequent l'un de ces 5 Rectangles sera bb, c'est à dire le Quarré de cette partie ; & les autres 4 Rectangles seront les Rectangles de b par chacune des autres parties, sçavoir bc. bd. bf. bg.

IV. Theoréme.

Une ligne étant divisée en tant de parties que l'on voudra, le Quarré de la toute est égal aux Quarrez de chaque partie, plus deux fois autant de Rectangles, dont il y en a toûjours deux qui sont les Rectangles des mêmes deux parties. XII.

	b	c	d	f	g
b	bb	bc	bd	bf	bg
c	cb	cc	cd	cf	cg
d	db	dc	dd	df	dg
f	fb	fc	fd	ff	fg
g	gb	gc	gd	gf	gg

Ce Theoréme n'est que l'assemblage du 2.e & du 3.e

Soit T comme auparavant divisée en b, c, d, f, g. Par le 2.e Theoréme ayant fait le Quarré TT, & n'ayant divisé qu'un seul de ses côtez par b, c, d, f, g, & tiré les paralleles à l'autre côté, on a 5 bandes, dont on peut appeller chacune du nom de sa partie, sçavoir Tb, Tc, Td, Tf, Tg. Mais divisant encore l'autre côté par les mêmes b, c, d, f, g, on divise chacune des 5 bandes en 5 cellules,

lules, ce qui en fait 25; & dans chaque bande ainſi diviſée ſe trouve un Quarré de la partie dont elle eſt bande, (dans Tb, bb; dans Tc, cc;) & quatre Rectangles des autres parties par celle-là. Et il eſt aiſé de voir que dans chaque bande ſe trouve toûjours un Rectangle de deux parties, qui ſe trouve encore dans une autre bande, comme dans Tb ſe trouve bc, qui ſe trouve auſſi dans Tc; & ainſi tout le Quarré contient

5 Quarrez, $bb.\ cc.\ dd.\ ff.\ gg.$
20 Rectangles, $2bc.\ 2bd.\ 2bf.\ 2bg.$
$2cd.\ 2cf.\ 2cg.$
$2df.\ 2dg.$
$2fg.$

Corollaire.

XIII. Le plus grand uſage de ces Theorémes eſt quand la ligne eſt coupée en deux. C'eſt pourquoy il faut bien retenir ces trois Propoſitions:

1. Le Quarré de la toute eſt égal aux deux Rectangles de chaque partie par la toute.
2. Le Rectangle d'une partie par la toute eſt égal au Quarré de cette partie, plus le Rectangle des deux parties.
3. Le Quarré de la toute eſt égal aux 2 Quarrez de chaque partie, plus deux fois le Rectangle des deux parties.

DE LA PROPORTION entre les Rectangles.

Proposition Fondamentale.

XIV. Les Rectangles qui ont un côté égal à un côté, & l'autre inégal, ſont entr'eux comme l'inégal.

Ou,

Ou, les Rectangles de même hauteur ſont comme leurs baſes.

D'égale baſe ſont comme leurs hauteurs.

Ou, d'égale longueur ſont comme leurs largeurs.

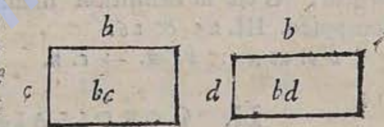
D'égale largeur ſont comme leurs longueurs.

Tout cela n'eſt que la même choſe, & peut paſſer pour prouvé dans le 2.ᵉ Livre.

Neanmoins en voicy encore la preuve. La theſe eſt

$$bc.\ bd.\ ::\ c.\ d.$$

L'aliquote quelconque de c ſoit appellée x.



Si par tous les points de la diviſion on tire des paralleles à b, il eſt clair que bx ſera autant de fois dans bc, qu'x dans c. C'eſt à dire que bx & x ſeront toûjours les aliquotes pareilles, l'une de bc, & l'autre de c. Car il eſt bien clair que toutes les x étant égales, tous les bx ſeront égaux.

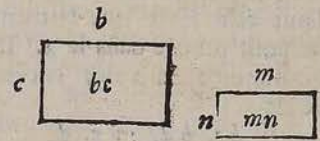
Que ſi on applique x à d, & qu'on tire auſſi par tous les points de la diviſion des paralleles à b: il eſt clair que bx ſera autant de fois dans bd, qu'x dans d; & que ſi x eſt préciſément tant de fois dans d, bx ſera auſſi preciſément tant de fois dans bd. Et ſi x n'eſt pas preciſément tant de fois dans d, mais avec quelque reſte, bx de même ne ſera pas preciſément tant de fois dans bd, mais avec un Rectangle de reſte plus petit que bx.

Donc les aliquotes pareilles de bc & de c ſont également contenuës, celles de bc dans bd, & celles de c dans d.

Donc, par la definition de l'égalité des raiſons, bc & bd ſont en même raiſon que c & d; puiſque les aliquotes pareilles des antecedens *b c* & *c* sont également contenuës dans les consequens *b d* & *d*. Donc *b c. b d.* :: *c. d.*

I. Corollaire.

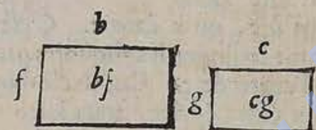
XV. Les Rectangles sont en raison composée de la longueur à la longueur, & de la largeur à la largeur. C'est la définition même de la raison composée. III. 25 & 26.



b c. m n. :: *b. m.* + *c. n.*

II. Corollaire.

XVI. Les Rectangles semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues.



Car les Rectangles sont semblables, quand la longueur est à la longueur, comme la largeur à la largeur.

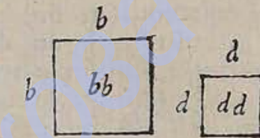
bf & *c g* sont semblables, si *b. c.* :: *f. g.*

Donc la raison de ces deux Rectangles est composée de deux raisons égales, par le premier Corollaire.

Donc cette raison est doublée de chacune, par la définition de la raison doublée. III. 24.

III. Corollaire.

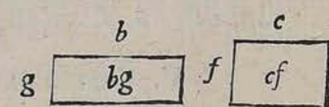
Les Quarrez sont en raison doublée de leurs racines. C'est la même chose que le precedent. XVII.



Et ainsi si *b* est double de *d*, *b b* est quadruple de *dd*.

IV. Corollaire.

Les Rectangles reciproques sont égaux. Car on appelle les Rectangles reciproques quand la longueur du premier est à la longueur du second, comme la largeur du second est à la largeur du premier. III. 37. XVIII.



Ainsi *b g* & *c f* sont reciproques, si

b. c. : : *f. g.*

Or la grandeur plane des deux extremes d'une Proportion est égale à la grandeur plane des moyens.

Donc *b g* = *c f*. II. 73.

MESMES COROLLAIRES AUTREMENT PROPOSEZ.

Si 4 lignes sont proportionelles, XIX.

b. c. : *f. g.*

1. Le Rectangle *bf* des antecedens, est au Rectangle *c g* des consequens, en raison doublée de la raison *b. c.* ou *f. g.* de cette Proportion. III. 29.

2. Le Rectangle $b\,c$ des deux premiers termes est au Rectangle $f\,g$ des deux derniers en raison doublée de la raison alterne $b.\,f.$ ou $c.\,g.$ de cette Proportion. (16. S.)

3. Le Rectangle des deux extremes est égal au Rectangle des deux moyens, $b\,g = c\,f$. II. 73.

4. Les Quarrez de ces quatre lignes sont proportionels, $bb.\ cc. :: ff.\ gg.$ par III. 32.

5. Si trois lignes sont continuëment proportionelles, le Quarré de celle du milieu est égal au Rectangle des extremes.

Si $\div\ b.\,c.\,d.\ cc = b\,d.$ II. 73 & 82.

6. Les Quarrez des deux premiers bb & cc sont en même raison que la premiere & la troisiéme.

$bb.\ cc :: b.\ d.$ par III. 34.

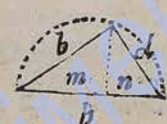
V. Corollaire.

XX. Une ligne étant divisée en deux parties, si deux autres lignes sont moyennes proportionelles, l'une entre la toute & sa plus grande partie, & l'autre entre la même toute & sa plus petite partie : les deux Quarrez de ces deux lignes sont égaux au Quarré de cette toute.

Soit h divisée en m & n.

Soit b moyenne entre h & m.

Et d entre h & n.



Puisque $\div\ h.\,b.\,m.\ bb = hm.$

Et puisque $\div\ h.\,d.\,n.\ dd = hn.$

Donc $bb + dd = hm + hn.$

Or $hm + hn = hh.$ (10. *sup.*)

Donc $bb + dd = hh.$

Avertissement.

XXI. *On peut rapporter ici tout ce qui a été demontré des Grandeurs planes en general dans le II. & le III. Livre. Car le Rectangle est une grandeur plane en matiere d'Etenduë ou d'Espace.*

Application de cette doctrine generale à quelques lignes particulieres qu'on a fait voir ci-devant être proportionelles.

I. Theoréme.

Si deux lignes se coupent dans un Cercle, le Rectangle des portions de l'une est égal au Rectangle des portions de l'autre. Voyez XI. 27. & XIV. 18. XXII.

II. Theoréme.

Le Quarré de la perpendiculaire d'un point de la circonference au diametre, est égal au Rectangle des portions du diametre. Voyez XI. 29. & XIV. 19. *Art.* 5. XXIII.

III. Theoréme.

Si d'un point hors le Cercle deux lignes sont menées jusqu'à la concavité du Cercle : le Rectangle d'une toute & de sa portion qui est hors le Cercle, est égal au Rectangle de l'autre toute & de sa portion qui est aussi hors le Cercle. Voyez XI. 31. & XIV. 18. XXIV.

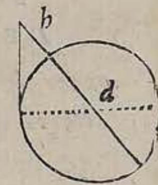
IV. Theoréme.

Si d'un point hors le Cercle on méne une ligne qui touche le Cercle, & l'autre qui le coupe jusqu'à la concavité : le Quarré de la tangente est égal au Rectangle de l'autre toute, & de sa portion XXV.

 qui

qui eſt hors le Cercle. XI. 33. & XIV. 19. *Art.* 5.

Et ſi on appelle la tangente p, la ſecante entiere t, la partie qui eſt hors le Cercle b, & celle qui eſt au dedans d, on aura toutes ces égalitez par ce qui a été dit cy-devant :

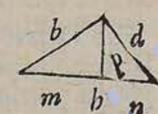


$pp = bt.$
$pp = bb + bd.$
$bb = pp + bd.$
$tt = bt + dt.$ (10. S.)
$tt = pp + dt.$

V. THEORÉME.

XXVI. SI du ſommet d'un Angle droit on tire une perpendiculaire ſur l'hypotenuſe,

1. Le Quarré de cette perpendiculaire eſt égal au Rectangle des deux portions de l'hypotenuſe. $pp. = mn.$



2. Le Quarré du grand côté de l'angle droit eſt égal au Rectangle de l'hypotenuſe entiere & de ſa grande portion, $bb = bm.$

3. Le Quarré du petit côté eſt égal au Rectangle de l'hypotenuſe entiere & de la petite portion, $dd = bn.$

4. Le Quarré de toute l'hypotenuſe eſt égal aux Quarrez des deux côtez, $hh = bb + dd.$

Les 3. premiers points ſont clairs, par XI. 52. & par 19. S. *Art.* 5.

Et le 4.e par le 5.e Corollaire S.

I. COROLLAIRE.

XXVII. La diagonale d'un Rectangle peut autant que les Quarrez des deux côtez.

II.

II. COROLLAIRE.

LA diagonale d'un Quarré peut 2 fois le Quarré du côté. XXVIII.

III. COROLLAIRE.

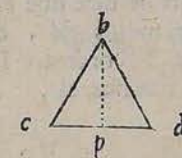
LA diagonale d'un Quarré eſt incommenſurable en longueur au côté, & commenſurable en puiſſance. XI. 71. XXIX.

IV. COROLLAIRE.

LA hauteur d'un Triangle équilateral, (c'eſt à dire la perpendiculaire du ſommet à la baſe,) eſt incommenſurable en longueur au côté, & commenſurable en puiſſance ; le Quarré du côté étant au Quarré de cette perpendiculaire comme 4 à 3. XXX.

La premiere partie eſt claire, par XI. 73.

La ſeconde ſe prouve ainſi : pd eſt la moitié de bd. Donc le Quarré de bd eſt au Quarré de pd comme 4 à 1. (17. *Sup.*) Or ce même Quarré de pd, plus celuy de bp, eſt égal au quarré de bd. (26. *Sup.*)



Donc le Quarré de bd eſt à celuy de bp comme 4 à 3.

VI. THEORÉME.

LE Quarré de la baſe d'un angle aigu, eſt égal aux Quarrez des côtez qui le comprennent, moins deux fois le Rectangle du côté ſur lequel on méne une perpendiculaire de l'extremité oppoſée de la baſe, & de la ligne compriſe entre le ſommet de cét angle aigu & cette perpendiculaire. XXXI.

Soit

Soit la base de l'angle aigu nommée b.

Le côté vers lequel on ne méne point la perpendiculaire, c.

Celuy sur lequel on la méne, d.

La perpendiculaire, p.

La ligne comprise entre la perpendiculaire & le sommet de l'angle aigu, x.

Celle qui est comprise entre la perpendiculaire & la base, y.

Je dis que $bb = cc + dd - 2dx$.

Mais il faut remarquer qu'x est quelquefois $d - y$.

Quelquefois d simplement.

Et quelquefois $d + y$.

Selon que d fait sur la base, ou un angle aigu, ou un droit, ou un obtus.

Mais quand d fait un angle droit sur b, il est plus court de dire que bb base de l'angle aigu, est égal à cc moins dd, comme il est clair par le precedent Theoréme. Et ainsi il reste seulement les deux autres cas.

Premier Cas.

Quand d fait sur la base un angle aigu, la perpendiculaire coupe d en deux parties.

Et ainsi $d = x + y$; & $x = d - y$.

Et alors le Theoréme se prouve ainsi :

Par le precedent Theoréme $bb = pp + yy$.

Et $cc = pp + xx$.

Et $dd = yy + xx + 2xy$. (par 13. *Sup.*)

Donc bb est moindre que $cc + dd$, de $2xx$ & $2xy$.

C'est à dire que $bb = cc + dd - 2xx - 2xy$.

Or x étant égale à $d - y$, $xx = dx - xy$.

Donc $xx + xy = dx$.

Donc

Donc $2xx + 2xy = 2dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2dx$. Ce qu'il falloit demontrer.

Second Cas.

Si d fait un angle obtus sur b, alors p ne tombe sur d qu'étant prolongé, & y est une ligne ajoûtée à d, & x est égale à $d + y$. Ce qui fait qu'on prouve ainsi que $bb = cc + dd - 2dx$.

$pp = cc - xx$, c'est-à-dire $-dd - yy - 2dy$.

Or $bb = pp + yy$.

Donc $bb = cc - dd - 2dy$.

Et par consequent $bb = cc + dd - 2dd - 2dy$.

Or $x = d + y$. Donc $dd + dy = dx$.

Donc $2dd + 2dy = 2dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2dx$. Ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

De tout ceci il est aisé de conclure que si des deux extremitez de la base d'un angle aigu, on tire des perpendiculaires à chaque côté : le Rectangle d'un côté & de la ligne comprise entre le sommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe sur ce côté, sera toûjours égal au Rectangle de l'autre côté & de la ligne comprise entre le sommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe sur cét autre côté. XXXII.

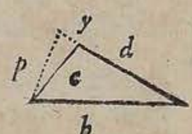
VII.

VII. Theoréme.

XXXIII. Le Quarré de la baſe d'un angle obtus eſt égal aux Quarrez des côtez, plus deux fois le Rectangle du côté vers lequel on aura mené une perpendiculaire de l'extremité de cette baſe, & de la ligne compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus.

Il eſt clair que cette perpendiculaire ne peut tomber ſur aucun côté qu'en le prolongeant.

Soit donc la baſe b.
Le côté non prolongé c.
L'ajoûtée y.
La perpendiculaire p.



Je dis que $bb = cc + dd + 2dy$.

Car bb eſt égal au Quarré de p, plus le Quarré de $d+y$. C'eſt à dire que

$bb = pp + yy + dd + 2dy$.

Or $cc = pp + yy$.

Donc $bb = cc + dd + 2dy$. Ce qu'il falloit demontrer.

Avertissement

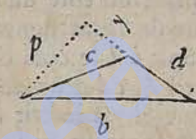
XXXIV. *On peut faire ici un Corollaire ſemblable à celui du Theoréme precedent. Je le laiſſe à chercher, & à prouver ſi l'on veut par les principes du Livre des Lignes proportionelles.*

VIII. Theoréme.

XXXV. Le Quarré de la baſe d'un angle obtus qui vaut les deux-tiers de deux angles droits, (c'eſt à dire qui eſt de 120 degrez,) eſt egal aux Quarrez des deux côtez, plus le Rectangle de ces deux mêmes côtez.

Toutes choſes étant faites, & les lignes nommées

mées comme dans le precedent Theoréme, l'angle obtus ne peut valoir 120 degrez, que l'angle que fait c ſur l'ajoûtée y, (qui eſt le complement de cét angle obtus,) ne ſoit de 60 degrez.



Or le Triangle que font c, y, p, eſt rectangle. Donc y eſt le ſinus d'un angle de 30 degrez. (VIII. 37.) Donc (par XIII. 31.) y eſt la moitié de c, qui en eſt le rayon.

Donc $dc = 2dy$.

Or par le precedent Theoréme,

$bb = cc + dd + 2dy$.

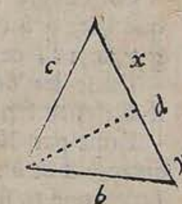
Donc $bb = cc + dd + dc$.

IX. Theoréme.

Le Quarré de la baſe d'un angle aigu de 60 degrez eſt égal aux Quarrez des côtez, moins le Rectangle des côtez. XXXVI.

Car par le 6.e Theoréme b étant la baſe d'un angle aigu,

$bb = cc + dd - 2dx$.



Or x en tous les cas, (c'eſt à dire ſoit qu'x ſoit ou $d-y$, ou d ſimplement, ou $d+y$,) eſt toûjours le ſinus d'un angle de 30 degrez dont c eſt le rayon, quand l'angle que ſoûtient b eſt de 60 degrez.

Donc x eſt toûjours la moitié de c, par XIII. 31.

Donc $dc = 2dx$.

Donc $bb = cc + dd \left\{ \begin{array}{l} -2dx. \\ \text{ou} \\ -dc. \end{array} \right.$

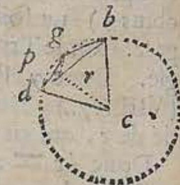
X. Theoréme.

Le Quarré du côté du Pentagone eſt égal au XXXVII.
Quarré

Quarré du côté du Decagone, plus le Quarré du côté de l'Hexagone inscrits dans le même Cercle.

Soit *b d* le côté du Pentagone.

c b & *c d* deux demy-diametres du Cercle dans lequel il est inscrit, qui sont aussi les côtez de l'Hexagone, par XII. 36.



d g & *g b* deux côtez du Decagone.

c p une ligne qui coupe perpendiculairement & par la moitié, tant le côté *d g* du Decagone, que l'arc *d g*: & qui coupe en *r* le côté du Pentagone.

Cela étant, je prouve 1.° Que *b c* (côté de l'Hexagone) est moyen proportionel entre *b d* côté du Pentagone, & sa partie *b r*.

Car les deux angles vers *b* & vers *d* sont chacun de 54 degrez, XII. 23.

Or l'angle *r c b* est aussi de 54 degrez, puisque l'arc *g b* est de 36 degrez, XII. 21. & l'arc *g p* de 18, ce qui ensemble fait 54.

Donc les deux Triangles *b c d*, & *b r c* sont isosceles & semblables.

Donc par XI. 20. *b c* est moyen proportionel entre *b d* & *b r*; c'est à dire entre le côté du Pentagone & sa plus grande partie.

Je prouve 2.° Que *d g* côté du Decagone, est moyen proportionel entre *b d* côté du Pentagone, & *d r* sa plus petite partie.

Car *r p* coupant *g d* perpendiculairement & par la moitié, *r g* est égale à *r d*. Donc les angles que chacune fait sur *g d* sont égaux. XIII. 10.

Donc les deux Triangles *d g b* & *d r g* sont isosceles & semblables. Donc par XIII. 34. *d g* (base du petit & côté du grand) est moyen proportionel entre *b d* (base du grand) & *r d* (côté du petit.)

Donc

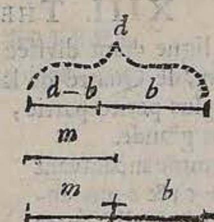
Donc le côté du Decagone est moyen proportionel entre le côté du Pentagone & sa plus petite partie.

Donc par le 5.e Corollaire (20. *sup.*) le Quarré du côté du Pentagone est égal au Quarré du côté de l'Hexagone, plus le Quarré du côté du Decagone inscrits dans le même Cercle. Ce qu'il falloit demontrer.

XI. Theoréme.

Si une ligne est divisée en moyenne & extreme raison, la ligne composée de la moitié de cette ligne & de sa plus grande partie, peut 5 fois le Quarré de la moitié. XXXVIII.

Soit la ligne *d* divisée en moyenne & extreme raison, en sorte que $bb = dd - db$, & par consequent $bb + db = dd$.



Appellant *m* la moitié de *d*, je dis que le Quarré de $m + b$ vaut 5 fois le Quarré d'*m*.

Car *m* étant la moitié de *d*, $dd = 4mm$. Et $2mb = bd$.

Et ainsi le Quarré de $m + b$

Etant égal à $mm + bb + 2mb$:

Il sera égal à $mm + bb + db$.

Donc à $mm + dd$.

Donc à $mm + 4mm$.

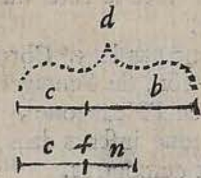
Donc à $5mm$.

XII. Theoréme.

Une ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, la ligne composée de la petite portion & de la moitié de la plus grande, peut 5 fois le Quarré de la moitié de la plus grande. XXXIX.

Soit

Soit comme auparavant la toute d, la plus grande partie b, & sa moitié n, la plus petite c; en sorte que $dc = bb$.



Or $dc = cc + cb$. (13. *sup.*) Donc $cc + cb = bb$.

Cela étant, je dis que le Quarré de $c + n = 5\,nn$.

Car ce Quarré de $c + n$

Est égal à $cc + nn + 2\,cn$.

Donc à $cc + nn + bc$, (puisque n est $\frac{1}{2}$ de b.)

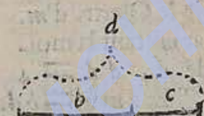
Donc à $nn + bb$, (puisque $bb = cc + bc$.)

Donc à $nn + 4\,nn$. Donc à $5\,nn$. Ce qu'il falloit demontrer.

XIII. Theoréme.

XL. Une ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, le Quarré de la toute, plus le Quarré de la plus petite partie, valent 3 fois le Quarré de la plus grande.

Soit comme auparavant $d = b + c$; & b moyenne proportionnelle entre d & c, en sorte que $bb = dc$, & par consequent à $cc + cb$. Je dis que $dd + cc = 3\,bb$.



Car $dd = bb + cc + 2\,cb$.

Donc $dd + cc = bb + 2\,cc + 2\,cb$.

Or $2\,cc + 2\,cb = 2\,bb$, puisque $cc + cb = bb$.

Donc $dd + cc = 3\,bb$. Ce qu'il falloit demontrer.

I. Probleme.

XLI. Trouver le Quarré égal à un Rectangle donné.

Ou

Ou ayant l'aire d'un Quarré, en trouver la racine.

Il ne faut que trouver la moyenne proportionelle entre les côtez du Rectangle donné.

Ou entre les deux lignes qui font l'aire donnée; comme si l'aire est supposée de 20 toises, ou pieds, ou pouces, entre 1 & 20, ou 2 & 10, ou 4 & 5.

II. Probleme.

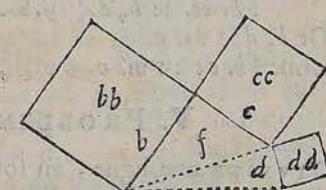
Avant le côté d'un Rectangle, trouver quel doit être l'autre, afin qu'il soit égal à un Rectangle donné. XLII.

Prendre le côté donné pour premier terme d'une Proportion; les deux côtez du Rectangle donné pour 2.^{e} & 3^e. Le côté que l'on cherche se trouvera en trouvant une 4.^{e} proportionelle, par X. 34.

III. Probleme.

Trouver un Quarré égal a deux ou plusieurs Quarrez donnez. XLIII.

Soient les Quarrez donnez bb, cc, dd. Mettant b & c à angle droit, le Quarré de l'hypotenuse de cét angle droit que je nomme f, sera égal à $bb + cc$. Et mettant de nouveau f & d à angle droit, le Quarré de l'hypotenuse de cét angle sera égal à $ff + dd$, & par consequent à $bb + cc + dd$. Et on peut conduire cela jusqu'à l'infini.



Corollaire.

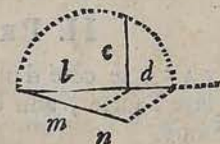
Trouver le Quarré égal à plusieurs Rectangles donnez. XLIV.

Il

Il ne faut que trouver les Quarrez égaux à chacun de ces Rectangles. Et puis on trouvera le Quarré égal à tous ces Quarrez.

IV. Probleme.

XLV. Trouver un Quarré auquel un Quarré donné soit en raison donnée.



Soit le Quarré donné *b b*.

La raison donnée *m. n.*

Ayant disposé *m*, *n*, *b*, comme les trois premiers termes d'une Proportion, & trouvé *d* pour 4.[e] proportionelle, par X. 34. en sorte que

$m. n. :: b. d.$

Et trouvant aussi par XI. 58. la moyenne proportionelle entre *b* & *d*, que je suppose être *c* : le Quarré de *c* satisfera au Probleme. Car puisque

$\div b. c. d.$

$bb. cc. :: b. d.$ (19. S. *Art.* 6.)

Or $b. d. :: m. n.$

Donc $bb. cc :: m. n.$

V. Probleme.

XLVI. Diviser une ligne, en sorte que le Quarré de la plus grande portion soit égal au Rectangle de la toute & de la plus petite portion.

Ce Probleme a été resolu (XI. 62.) quand on a appris à couper une ligne en moyenne & extreme raison : c'est à dire, en sorte que la toute soit à la plus grande portion, comme la plus grande portion à la plus petite.

VI. Probleme.

XLVII. Diviser une ligne en sorte que le Quarré de la

plus grande portion soit au Rectangle de la toute & de la plus petite portion en raison donnée.

Soit la ligne donnée *d*.

La raison donnée *m. n.*

La plus grande portion que l'on cherche, *x*.

Et la plus petite, qui est la même chose que $d - x$, soit appellée *y*.

Il n'y a qu'à trouver *x* ; ce qui se fera en cette maniere :

1. Trouver une ligne qui soit à *d*, comme *m* est à *n*. Je la suppose trouvée par X. 34. & je l'appelle *c*.

2. Chercher la moyenne proportionnelle entre *c* & *d*. Je la suppose trouvée par XI. 58. & je l'appelle *p* ; d'où il s'ensuivra que $cd = pp$. (19. S. *Art.* 5.)

3. Faire un Cercle qui ait *c* pour diametre, & *p* pour tangente. Si de l'extremité de *p* qui est hors le Cercle on tire une secante qui passe par le centre du Cercle : la partie de cette secante qui est au dedans du Cercle étant *c*, celle qui est au dehors sera *x*. Et $d - x$ sera *y*. D'où il s'ensuivra

4. Que $cd - cx$ sera la même chose que cy. Car *y* étant égale à $d - x$, c'est la même chose de multiplier *c* par $d - x$, (ce qui fait $cd - cx$,) que de multiplier *c* par *y* ; ce qui fait cy.

Cela étant ainsi, il est facile de prouver que

$xx. dy. :: m. n.$

C'est à dire que le Quarré de la plus grande partie de *d* est au Rectangle de *d* par l'autre partie que j'ay nommée *y*, en raison donnée.

Car *p* qui est tangente par la 3.[e] supposition, est moyenne proportionelle entre *x* & $x + c$. (25. S.)

Donc $x. p. :: p. x + c.$

Donc $xx + cx = pp$. (19. S. *Art.* 3.)

Or

Or $pp = cd$ (par la 2.^{e} supp.)

Donc $xx + cx = cd$.

Donc $xx = cd - cx$.

Or $cd - cx = cy$ (par la 4.^{e} supp.)

Donc $xx = cy$.

Or $cy. dy. :: c. d.$ (II. 58.)

Et $c. d :: m. n.$ (par la 1.^{re} supp.)

Donc xx (égal à cy) $dy. :: m. n.$ ce qu'il falloit demontrer.

VII. PROBLEME.

XLVIII. TROUVER la racine d'un Quarré dont on ne sçait autre chose, sinon qu'étant comparé au Quarré d'une ligne donnée, & à un Rectangle d'une autre ligne donnée & de cette racine inconnuë, il est

Ou { 1. Egal au Quarré plus le Rectangle.
2. Egal au Quarré moins le Rectangle.
3. Egal au Rectangle moins le Quarré.

Ainsi la racine inconnuë étant nommée x ou y;

La ligne donnée qui fait le Quarré, b;

Et l'autre ligne donnée côté du Rectangle, d.

Le 1.^{er} Cas sera $yy = bb + yd$.

Le 2.^{e} Cas, $xx = bb - xd$.

Et le 3.^{e} $\begin{cases} yy = yd - bb. \\ xx = xd - bb. \end{cases}$

CONSTRUCTION COMMUNE

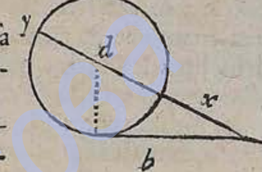
au premier & au second Cas.

DÉCRIRE un Cercle de l'intervalle de la moitié de d, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.

Et tirer de l'autre extremité de b une secante qui passant par le centre du Cercle se termine à la circonference.

Cette

Cette secante entiere soit appellée y;



Qui sera composée de sa partie hors le Cercle appellée x,

Et du diametre du Cercle, qui sera d par la construction.

Et b sera tangente du Cercle.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Dans le 1.^{er} Cas, c'est y, (c'est à dire la secante entiere,) qui est la racine que l'on cherche.

Car y étant égale à $x + d$,

$yy = yx + yd$. *sup.* 13.

Or $bb = xy$. *sup.* 25.

Donc $yy = bb + yd$. Ce qu'il falloit demontrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Dans le 2.^{e} Cas, c'est x, (c'est à dire la partie de la secante qui est hors le Cercle,) qui est la racine que l'on cherche.

Car $x. b. :: b. x + d$.

Donc $xx + xd = bb$.

Donc $xx = bb - xd$. Ce qu'il falloit demontrer.

CONSTRUCTION ET PREUVE DU TROISIÉME CAS.

Faisant un Cercle qui ait d pour diametre, & b pour tangente, il faut tirer une parallele à d de l'extremité de b qui est hors le Cercle.

Que si cette parallele ne coupe point le Cercle, parce que b est aussi grande ou plus grande que la moitié de d, le Probleme est impossible.

Mais si elle le coupe: tirant une tangente parallele à b de l'autre extremité de d, & prolongeant jus-

jusqu'à cette tangente la secante parallele à d : cette secante (égale à d) sera composée de trois parties ; de deux hors le Cercle, qui étant égales, (comme il est aisé de le prouver en tirant du centre une perpendiculaire à cette secante,) chacune s'appellera x, & celle de dedans le Cercle plus une de dehors, c'est à dire plus x, s'appellera y.

Cela étant supposé, je dis qu'x & y peuvent l'une & l'autre satisfaire au Probleme.

Car $xy = bb$, par le 4.ᵉ Theoréme, 25. S.

Et d étant égale à $x + y$,

$$\left.\begin{array}{l} xx + xy = xd. \\ \text{Et } yy + xy = yd. \end{array}\right\} \text{ par 13. } \textit{sup.}$$

Donc $xx = xd - xy$ égal à bb.

Et $yy = yd - xy$ égal à bb.

Donc soit qu'on prenne x ou y, on satisfait au Probleme. Et le choix depend de sçavoir d'ailleurs si la racine que l'on cherche doit être plus petite que b, car alors c'est x ; au lieu que si elle doit être plus grande, c'est y.

NOU-

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUINZIE'ME.

DE LA MESURE DE L'AIRE des Parallelogrammes, des Triangles, & autres Polygones.

DEFINITIONS.

QUAND on parle des côtez d'un Parallelogramme, on entend les côtez angulaires, à moins qu'on ne marque autre chose. 1.

On peut prendre lequel on veut de ces côtez pour mesure de la longueur du Parallelogramme ; & alors ce côté s'appelle la base.

Et la perpendiculaire qui mesure la distance entre la base & son côté opposé s'appelle la hauteur du Parallelogramme.

 FON-

FONDEMENT DE LA MESURE *des Parallelogrammes.*

I. Nous avons dit au commencement du Livre precedent, que dans les Parallelogrammes non rectangles, (à qui pour abreger nous donnerons simplement le nom de Parallelogrammes,) on pouvoit prendre lequel on vouloit de leurs côtez angulaires pour mesure de l'une de leurs dimensions, qui est la longueur; mais que l'autre côté angulaire ne pouvoit pas en mesurer la largeur, parce qu'étant oblique il ne mesuroit pas la distance entre les côtez opposez qui avoient été pris pour la longueur. Et ainsi au lieu de cét autre côté angulaire, il faut prendre la perpendiculaire qui mesure la distance entre le premier côté & son opposé, pour avoir l'autre dimension de ces Parallelogrammes.

Or de là il s'ensuit que le Rectangle de la base & de cette perpendiculaire appellée la hauteur du Parallelogramme, est égal à ce Parallelogramme: puisque n'ayant tous-deux que deux dimensions, longueur & largeur: la longueur de l'un est égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une base égale: & que la largeur de l'un est égale à la largeur de l'autre, puisqu'elle est mesurée par une perpendiculaire égale dans l'un & dans l'autre; quoy qu'en l'un elle soit l'un des côtez de la figure, sçavoir dans le Rectangle, & que dans l'autre elle n'y soit pas marquée.

Cela pourroit suffire pour ceux qui cherchent plûtost à s'assurer de la verité, qu'à en pouvoir convaincre les autres.

Neanmoins pour plus grande certitude, on peut employer deux voyes pour prouver cette proposition:

tion: l'une nouvelle appellée la *Geometrie des Indivisibles*: & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

NOUVELLE METHODE APPELLÉE LA GEOMETRIE DES INDIVISIBLES.

Quoique les Geometres conviennent que la ligne n'est pas composée de points, ny la surface de lignes, ny le solide de surfaces: neanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de demontrer une infinité de choses, en considerant les surfaces comme si elles étoient composées de lignes, & les solides de surfaces. III.

Je n'ay rien veu de ce qui en a été écrit: mais voici ce qui m'en est venu dans l'Esprit, en ne m'arrêtant maintenant qu'à ce qui regarde les surfaces.

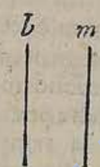
Le fondement de cette nouvelle Geometrie est de prendre pour l'aire d'une surface la somme des lignes qui la remplissent; de sorte que deux surfaces sont estimées égales, quand l'une & l'autre est remplie par une somme égale de lignes égales; soit que chacune de celles d'une somme soit égale à chacune de celles de l'autre somme; soit qu'il se fasse une compensation; en sorte par exemple, que deux d'une somme qui pourront être inégales entr'elles, soient égales à deux prises ensemble de l'autre somme qui seront égales entr'elles.

Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogismes où l'on tombe aisément en se servant de cette methode, si on n'y prend bien garde, il faut remarquer,

1. Qu'afin que des lignes soient censées remplir un espace, il faut qu'elles soient toutes paralleles entr'elles; soit qu'elles soient droites, pour rem-

plir un eſpace rectiligne : ſoit qu'elles ſoient circulaires, pour remplir des Cercles ou des portions de Cercles. Il eſt facile d'en voir la raiſon. Et ainſi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne ſeroient pas paralleles en l'une ou l'autre de ces deux manieres.

2. Afin qu'une ſomme de lignes ſoit cenſée égale à une autre ſomme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puiſſe dire le nombre qu'en contient chaque eſpace, (car il n'y a point de ſi petit eſpace qui n'en contienne un nombre infini :) mais ce qui fait qu'on appelle ces ſommes égales, c'eſt que toutes les lignes d'un côté & d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple ſi la ligne *b* eſt égale à la ligne *m*, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement *b* en tous ſes points, eſt cenſé égal au nombre infini de celles qui peuvent auſſi couper perpendiculairement *m* ; étant viſible qu'il n'y a point de raiſon pourquoy on en puiſſe faire paſſer davantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une & de l'autre étant toûjours égales juques à l'infini : on pourra toûjours de part & d'autre tirer par tous les points de ces diviſions autant de lignes paralleles entr'elles, & qui contiendront toûjours de part & d'autre un eſpace parallele égal. Et c'eſt proprement de là que depend la verité de cette nouvelle methode, (& non que le continu ſoit compoſé d'indiviſibles ;) ce qui l'a fait mêmes appeller par quelques-uns, *la Geometrie de l'infini.*



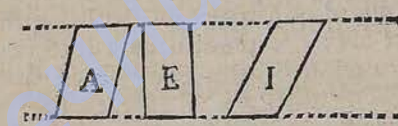
Il faut donc bien prendre garde que les lignes, par le rapport deſquelles on dit qu'une ſomme de ces lignes paralleles qui rempliſſent un eſpace, eſt égale

égale à une autre ſomme, les coupent perpendiculairement. Et c'eſt où il y a plus de danger de ſe tromper. Sur ces fondemens voicy les Theorémes que l'on établit.

I. Theoréme.

Tous les Parallelogrammes de baſe égale & de même hauteur ſont égaux entr'eux. IV.

Soient divers Parallelogrammes, comme A, E, I,



enfermez dans le même eſpace parallele, (comme ils le peuvent être, puiſqu'ils ſont ſuppoſez de même hauteur,) & ayant tous les baſes égales. Il eſt clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cét eſpace, rempliront tous ces Parallelogrammes ; & qu'ainſi ils ſeront tous remplis d'une ſomme égale de lignes, cette ſomme étant meſurée dans tous par la perpendiculaire qui meſure la hauteur de ces Rectangles, qui eſt la même en tous, puiſqu'ils ſont de même hauteur.

De plus, toutes ces lignes étant paralleles à la baſe dans tous ces Rectangles, ſont égales en tous ; puiſqu'elles ſont en tous égales à la baſe, & que les baſes ſont ſuppoſées égales.

Donc il y a partout ſomme égale de lignes égales.

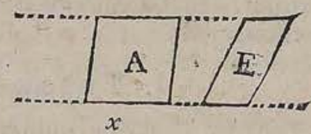
Donc ils ſont tous égaux, ſelon le fondement de la Geometrie des indiviſibles.

II. Theoréme.

Tous les Parallelogrammes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. V.

 C'eſt

C'eſt une ſuite du precedent. Soient les Parallelogrammes A, E, entre mêmes paralleles, & qui ayent des baſes inégales. En quelques aliquotes que je diviſe la baſe d'A : en tirant des paralleles au côté par tous les points de la diviſion, il y aura dans A autant de Parallelogrammes égaux entr'eux, que cette baſe aura de parties égales ; de ſorte que ſi elle avoit été diviſée en 7 parties, dont j'appelleray chacune *x*, il y aura dans A 7 Parallelogrammes qui auront chacun *x* pour baſe.



Que ſi appliquant *x* à la baſe d'E, il ſe trouve qu'il y ſoit trois fois, ou ſans reſte, ou avec reſte : tirant encore de tous les points de la diviſion, des lignes paralleles au côté d'E, il eſt viſible qu'il y aura dans E autant de Parallelogrammes qui auront *x* pour baſe, qu'*x* ſe ſera trouvée dans la baſe d'E. Et ſi ç'a été ſans reſte, ces trois Parallelogrammes rempliront E ſans reſte : & ſi avec reſte, il reſtera auſſi un Parallelogramme qui aura ce reſte pour baſe.

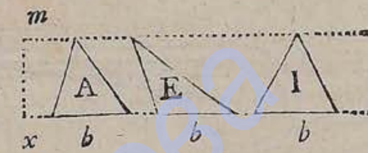
Or les Parallelogrammes qui dans E ont *x* pour baſe, ſont égaux à ceux qui dans A ont auſſi *x* pour baſe ; par le precedent Theoréme.

Donc, par la définition de l'égalité des raiſons, A eſt à E en même raiſon que la baſe d'A à la baſe d'E ; puiſqu'autant que les aliquotes quelconques de la baſe d'A ſont contenuës dans la baſe d'E, les aliquotes pareilles d'A ſont contenuës dans E : ſi ſans reſte, ſans reſte ; ſi avec reſte, avec reſte.

III. Theoréme.

VI. Les Triangles de même hauteur & de même baſe ſont égaux. Car étant mis entre les mêmes paralleles, comme devant, & ayant tous *b* pour baſe,

ſe, toutes les lignes paralleles qui rempliront cét eſpace, rempliront ces Triangles ; & de chacune de ces lignes tirées tout le long de l'eſpace d'un point quelconque de la perpendiculaire *m x*, ce qui ſera enfermé dans chaque Triangle ſera toûjours égal, comme il a été prouvé XIII. 25. & X. 21. quoy que toûjours de plus petit en plus petit montant vers le ſommet.



Donc une ſomme égale de lignes égales chacune à chacune de chaque Triangle, remplit tous ces Triangles.

Donc ces Triangles ſont égaux.

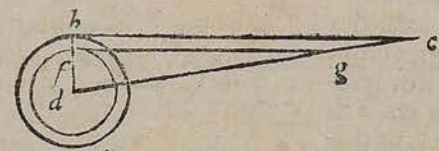
IV. Theoréme.

Les Triangles de même hauteur ſont entr'eux VII.
comme les baſes.

C'eſt la même choſe que le 2.e Theoréme, & qui ſe prouve de la même ſorte ; excepté qu'on employe icy au lieu de Parallelogrammes des Triangles qui ont *x* pour baſe, & qui aboutiſſent de part & d'autre au ſommet de chaque Triangle dont ils ſont parties. Or ces Triangles qui ont *x* pour baſe dans l'un & dans l'autre Triangle, ſont auſſi de même hauteur dans l'un & dans l'autre ; & par conſequent ils ſont égaux. Enſuite dequoy il ne faut qu'appliquer ce que nous avons dit pour la demonſtration du 2.e Theoréme.

V. Theoréme.

Le Cercle eſt égal au Triangle rectangle, qui a VIII.
pour côtez de ſon angle droit le rayon du Cercle, & une ligne égale à la circonference du Cercle.



Soit le Cercle *d*; le rayon *d b*; la tangente *b c* égale à la circonference; & l'hypotenuſe *d c*.

Si on tire de tous les points du rayon, des circonferences concentriques au Cercle, elles rempliront tout le Cercle, & elles ſeront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent être, & coupées perpendiculairement par le rayon. VII. 41 & 44.)

Si on tire auſſi de tous ces mêmes points du rayon par leſquels auront paſſé ces circonferences, des paralleles à *b c*, juſques en *d c*: ces paralleles rempliront le Triangle. Et ainſi la ſomme de ces circonferences & de ces paralleles ſera égale, étant determinée de part & d'autre par les points du même rayon; étant clair que l'on ne ſçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire auſſi une parallele à *b c* par ce même point, & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point ſont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra: par exemple celle du point *b*. Car

$$b\,d.\ d\!f.::\begin{cases}\text{circonf. } b.\ \text{circonf. } f.\ (\text{XII. } 28.)\\ b\,c.\qquad\qquad f\,g.\ (\text{X. } 20.)\end{cases}$$

Donc circonf. *b*. circonf. *f*. : : *bc*. *fg*.

Donc *alternando*, circonf. *b*. *b c*. : : circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypotheſe la circonference *b*, qui eſt celle du Cercle, eſt égale au côté *b c* du Triangle.

Donc la circonference paſſant par le point *f*, eſt égale à *f g*, parallele à *b c*. Le reſte s'enſuit.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Je n'en dirai pas davantage de cette nouvelle methode. Il eſt aiſé de juger que ces 5 Theorémes ſont de ſuffiſans fondemens pour meſurer ſans peine toutes les figures rectilignes, & en trouver les égalitez & les rapports: ſur tout en y joignant les principes qui ont été établis dans les 3 premiers Livres. IX.

METHODE COMMUNE.

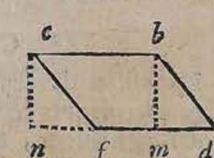
LEMME OU AXIOME.

DEUX Triangles tout-égaux ſont égaux. C'eſt à dire que lorſque les angles d'un Triangle ſont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, & les côtez égaux auſſi chacun à chacun, ces deux Triangles comprennent un eſpace égal; en quoi conſiſte ce qu'on appelle égalité dans les figures. X.

Cela eſt clair de ſoi-même, étant viſible que deux Triangles de cette ſorte ne different que de poſition.

PROPOSITION FONDAMENTALE de la meſure des Parallelogrammes & des Triangles.

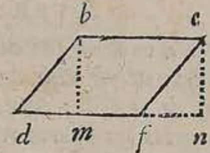
TOUT Parallelogramme eſt égal au Rectangle de ſa hauteur & de ſa baſe. XI.



Soit le Parallelogramme *c b d f*. Tirant ſes perpendiculaires *b m* & *c n*, ſur la baſe *d f*, prolongée autant qu'il eſt neceſſaire: je dis que le Rectangle *c b m n*, qui eſt le Rectangle de la baſe & de la hauteur de *c b d f*, eſt égal à *c b d f*.

 Car

Car *b c* étant égale tant à *d f* qu'à *m n*, *d f* est égale à *m n*. Donc ôtant *m f* commune de l'une & de l'autre : *d m* demeurera égale à *f n*. Et ainsi *b d* étant égale à *c f*, & *b m* à *c n*, les Triangles *b d m* & *c f n* sont égaux par le Lemme precedent. Et ainsi ajoûtant à l'un & à l'autre le Trapéze commun *c b m f* : *c b d f* sera égal *c b m n*. Ce qu'il falloit demontrer.



I. Corollaire.

XII. Les Parallelogrammes de même hauteur & de base égale sont égaux.

Car ils ont tous pour leur mesure commune le même Rectangle de cette hauteur & de cette base.

II. Corollaire.

XIII. Les Parallelogrammes de même hauteur sont comme leurs bases ; de base égale, sont comme leurs hauteurs.

Car chacun est égal au Rectangle de sa base & de sa hauteur. Or les Rectangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. XIV. 14. Il en faut donc dire de même des Parallelogrammes qui leur sont égaux.

On peut aussi prouver ce 2.e Corollaire par le premier, de la même façon qu'on a déja fait en demontrant le 2.e Theoréme de la premiere methode.

III. Corollaire.

XIV. La raison de deux Parallelogrammes quelconques est toûjours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

Car les Parallelogrammes sont toûjours entr'eux comme les Rectangles de leur hauteur & de leur base.

IV. Co-

IV. Corollaire general.

Tout ce qui a été dit de la raison des Rectangles par la comparaison de leurs côtez angulaires, est vray des Parallelogrammes, en comparant la hauteur à la hauteur, & la base à la base. Cela est clair par la raison du precedent Corollaire. XV.

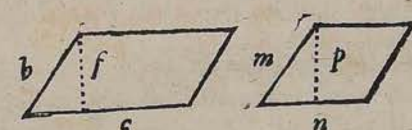
DES PARALLELOGRAMMES EQUIANGLES.

Theoréme general.

Les Parallelogrammes équiangles sont entr'eux en raison composée de leurs côtez angulaires, de même que s'ils étoient rectangles. XVI.

Car tous les Parallelogrammes sont entr'eux en raison composée de celle de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils sont équiangles, la raison des côtez obliques sur la base de chacun est la même que celle de la hauteur à la hauteur. Parce que les lignes également inclinées sont en même raison que leurs perpendiculaires qui mesurent cette hauteur. X. 12.



Exemple. Soient *b c* & *m n* deux Parallelogrammes équiangles, dont les hauteurs soient *f* & *p*.

Par les precedens Corollaires,

$b c. \ m n. :: c. n. + f. p.$

Or $f. p. :: b. m.$ X. 12.

Donc $b c. \ m n. :: c. n. + b. m.$ Ce qu'il falloit démontrer.

Co-

COROLLAIRE GENERAL.

XVII. Tout ce qui a été dit de la raison des Rectangles entr'eux par la comparaison de leurs côtez angulaires, est vray aussi des autres Parallelogrammes équiangles par la même comparaison de leurs côtez angulaires.

C'est à dire par exemple, que s'ils sont semblables, le grand côté du premier étant au grand côté du second, comme le petit côté du premier au petit côté du second : ils sont en raison doublée de leurs côtez homologues.

Si leurs côtez sont reciproques, (c'est à dire, si le grand côté du premier est au grand côté du second, comme le petit côté du second est au petit côté du premier,) ils sont égaux. Et ainsi de tout le reste.

COROLLAIRE PARTICULIER.

XVIII. Lorsque deux lignes paralleles chacune aux côtez angulaires d'un Parallelogramme se coupent en un même point de la diagonale, il se fait 4 Parallelogrammes, dont les deux qui ne sont point coupez par la diagonale, comme A & E, sont égaux.

Car ils sont équiangles, puisqu'il y a un angle de l'un qui est opposé au sommet à un angle de l'autre.

Et il est visible par XIII. 50. que le grand côté d'A est au grand côté d'E, comme le petit côté d'E est au petit côté d'A. Donc A = E.

Je sçai bien que cela se prouve ordinairement d'une autre maniere plus palpable ; qui est que la diagonale partage par la moitié tant le Parallelogramme total, que chacun de ceux qui sont autour de cette diagonale. Donc la moitié du total dans laquelle est A étant égale à la moitié dans laquelle

quelle est E, & ôtant de chacune de ces deux moitiez deux Triangles égaux, les deux Parallelogrammes qui demeureront seront égaux.

DES PARALLELOGRAMMES SEMBLABLES.

I. Theoréme.

Deux Parallelogrammes semblables, (c'est à dire qui étant équiangles ont leurs côtez proportionels,) sont en raison doublée de leurs côtez homologues, comme il vient d'être dit *sup.* 17. XIX.

II. Theoréme.

Les côtez homologues de deux Parallelogrammes semblables, étant en même raison que les côtez homologues de deux autres Parallelogrammes semblables entr'eux, ces 4 Parallelogrammes sont proportionels. XX.

Soient les deux premiers semblables A & E, & les deux derniers I & O. Si la raison d'entre les côtez d'A & E est $x.\ y.$ & de même entre les côtez d'I & O : je dis que

A. E. :: I. O.

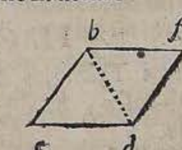
Car $\left.\begin{matrix}A.\ E.\\ I.\ O.\end{matrix}\right\}$ :: $xx.\ yy.$

DES TRIANGLES.

Lemme.

Tout Triangle est la moitié d'un Parallelogramme de même base & de même hauteur. XXI.

Soit le Triangle bcd. Si de b on tire bf égale & parallele à la base cd, & que du point f on tire fd : je dis 1. que $bcdf$ est un Parallelogramme. Car cd & bf sont paralleles



&

& égales par la construction ; & par consequent *bc* & *fd* sont aussi paralleles & égales, par VI. 28.

Et par consequent *bd*, qui est la diagonale de ce Parallelogramme, le divise en deux Triangles égaux *bcd* & *bfd*. Donc *bcd* est la moitié de ce Parallelogramme.

Or il est visible que ce Triangle & ce Parallelogramme sont de même hauteur, puisqu'ils sont enfermez entre les mêmes paralleles *bf* & *cd*, & qu'ils ont la même base, sçavoir *cd*.

Donc tout Triangle est la moitié d'un Parallelogramme de même base & de même hauteur.

Theoréme general.

XXII. Tout Triangle est égal au Rectangle de la moitié de sa base, & de toute sa hauteur ; ou de la moitié de sa hauteur & de toute sa base.

Car il est la moitié d'un Parallelogramme de sa base & de sa hauteur. Or ce Parallelogramme est égal au Rectangle de sa base & de sa hauteur.

Donc prenant la moitié de la base & toute la hauteur, ou la moitié de la hauteur & toute la base, on a un Rectangle qui vaut la moitié du Rectangle de toute la base & de toute la hauteur. Donc on a un Rectangle égal au Triangle.

I. Corollaire.

XXIII. Les Triangles de même hauteur & de base égale, sont égaux.

Car ils sont tous égaux au même Rectangle, qui est celuy de la moitié de leur base & de toute leur hauteur.

II. Corollaire.

XXIV. Les Triangles de même hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

Car ils sont tous égaux à des Rectangles, qui étant de

de même hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

On peut aussi prouver ce second Corollaire par le premier, de la même façon qu'on a demontré le 4.e Theoréme de la premiere methode.

III. Corollaire.

La raison de deux Triangles quelconques est toûjours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base. Car ces Triangles sont toûjours entr'eux comme les Rectangles de la moitié de leur base & de toute leur hauteur, qui ont entr'eux cette raison composée. XXV.

IV. Corollaire general.

Tout ce qui a été dit de la raison des Rectangles par la comparaison de leurs côtez, est vray des Triangles par la comparaison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base. XXVI.

Des Triangles equiangles ou semblables.

I. Theoréme.

Tous les Triangles équiangles & par consequent semblables, sont en raison doublée de la raison de leurs côtez homologues. XXVII.

Car par les Corollaires precedens, les Triangles sont entr'eux en raison composée de la raison de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

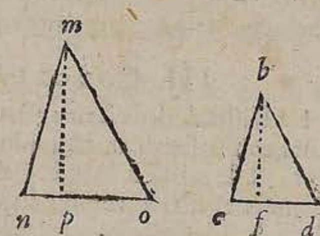
Or quand ils sont équiangles, les côtez sur la base de part & d'autre sont chacun à chacun en même raison que les perpendiculaires du sommet à la base qui en mesurent la hauteur. X. 12.

Et par consequent ils sont en raison composée de celle de la base à la base, & d'un côté à un côté.

Or

Or étant équiangles, la base est à la base comme chacun des côtez à chacun des côtez.

Et par consequent leur raison est composée de deux raisons égales ; ce qui s'appelle raison doublée.



Exemple. Soient deux Triangles semblables *bcd* & *mno*, dont *bf* & *mp* mesurent les hauteurs.

bcd. mno. :: *cd. no.* + *bf. mp.*

Or *bc. mn.*
bd. mo. } :: *bf. mp.* (X. 18.)
cd. no.

Donc tous les côtez ayant la même raison, chacun à chacun, & avec les perpendiculaires : la raison de ces Triangles *bcd* & *mno* ne peut être composée de la raison des bases *cd* & *no*, & de celle des hauteurs *bf*, *mp*, qu'ils ne soient en raison doublée de l'une de ces raisons, puisqu'elles sont égales ; & par consequent aussi de la raison des autres côtez homologues, qui est la même.

II. Theoréme.

XXVIII. Si les côtez homologues de deux Triangles semblables sont en même raison que les côtez homologues de deux autres Triangles semblables entr'eux, ces 4 Triangles sont proportionels. C'est la même chose que ce qu'on a demontré des Parallelogrammes. *sup.* 20.

DES

DES FIGURES SEMBLABLES.

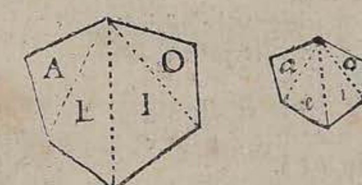
I. Theoréme.

Deux figures semblables quelconques sont en raison doublée de leurs côtez homologues. XXIX.

Car par XIII. 26. elles peuvent être partagées chacune en autant de Triangles, tels que ceux d'une part étant semblables à ceux de l'autre, chacun à chacun, les côtez homologues de deux semblables seront en même raison que ceux de deux autres quelconques semblables.

Ainsi supposant qu'elles soient partagées chacune en 4 Triangles qui soient

A. E. I. O.
a. e. i. o.



Par le precedent Theoréme A. *a.* :: E. *e.* :: I. *i.* :: O. *o.*

Donc par II. 52. A + E + I + O. *a* + *e* + *i* + *o.* :: A. *a.*

C'est à dire que la plus grande des figures semblables qui comprend ces 4 Triangles A. E. I. O. sera à la plus petite qui comprend les Triangles *a. e. i. o.* comme l'un de ces Triangles est à son semblable.

Or ces Triangles semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs bases, 27. *Sup.* & les bases de ces deux Triangles semblables sont côtez homologues de ces deux figures, (comme on a veu XIII. 26.)

Donc ces figures semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues.

Corol-

COROLLAIRE.

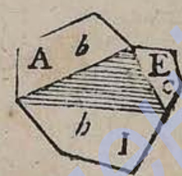
XXX. LES figures ſemblables ſont entr'elles comme les Quarrez de leurs côtez homologues.

Car, par le Theoréme precedent, les figures ſemblables ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs côtez homologues.

Or les Quarrez de ces côtez homologues ſont auſſi entr'eux en raiſon doublée de ces côtez qui ſont leurs racines. Donc &c.

II. THEORÉME.

XXXI. SI l'on conſtruit ſur l'hypotenuſe & ſur les deux côtez d'un angle droit des figures ſemblables quelconques : celle qui ſera conſtruite ſur l'hypotenuſe ſera égale aux deux qui ſeront conſtruites ſur les côtez.



Soit *b* le grand côté de l'angle droit, le petit *c*, l'hypotenuſe *h*.

La figure conſtruite ſur *b* ſoit nommée A; ſur *c*, E; & ſur *h*, I.

Par le Corollaire precedent, *alternando*,

A. *bb.* :: E. *cc.* :: I. *hh.*

Donc A+E. *bb*+*cc.* :: I. *hh.* (par II. 52.)

Donc *alternando*,

A+E. I. :: *bb*+*cc.* *hh.*

Or *bb*+*cc* = *hh.* par XIV. 26.

Donc A+E = I. Ce qu'il falloit demontrer.

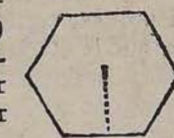
AVERTISSEMENT.

XXXII. *On voit par là que cette propoſition quoi que plus generale que celle des Quarrez, n'a dû être traitée qu'aprés celle des Quarrez; parce que le Quarré eſt la vraye & naturelle meſure de la dimenſion des autres figures planes.*

DES FIGURES REGULIERES.

I. THEORÉME.

TOUT Polygone eſt égal au Rectangle du rayon droit, (qui eſt la perpendiculaire du centre à l'un des côtez) & de la moitié de ſon perimetre : ou au Triangle qui a pour hauteur ce rayon droit, & pour baſe ce perimetre. XXXIII.



Car tout Polygone regulier comprend autant de Triangles tout-égaux qu'il a de côtez, leſquels ont tous pour meſure de leur hauteur la perpendiculaire du centre au côté qui leur ſert de baſe.

Donc chaque Triangle eſt égal au Rectangle de ce rayon droit qui eſt leur hauteur, & de la moitié de la baſe. 22. *ſup.*

Or toutes ces moitiez des baſes de ces Triangles priſes enſemble font la moitié du perimetre, puiſque toutes les baſes font tout le perimetre.

Donc le Rectangle de cette perpendiculaire & de la moitié du perimetre eſt égal à tous ces Triangles, & par conſequent au Polygone.

Et c'eſt la même choſe du Triangle qui a pour hauteur cette perpendiculaire, & pour baſe tout le perimetre, puiſqu'il eſt égal à ce Rectangle. 22. *ſup.* Outre qu'il eſt aiſé de prouver qu'il eſt égal à tous les Triangles que contient le Polygone, étant de même hauteur que chacun, & ſa baſe étant égale à toutes les baſes des autres priſes enſemble.

II. THEO-

II. Theoréme.

XXXIV. Par l'analogie du Cercle à un Polygone d'une infinité de côtez, le Cercle eſt égal au Rectangle du rayon & de la moitié de la circonference : ou au Triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour baſe toute la circonference.

Nous l'avons prouvé par la premiere methode, qui eſt la Geometrie des indiviſibles. On le peut auſſi prouver par la voye d'Archimede, en montrant que le Rectangle du rayon & de la moitié de la circonference eſt plus grand que tout Polygone inſcrit au Cercle, & plus petit que tout circonſcrit.

Il eſt plus grand que tout inſcrit, parce que l'inſcrit, par le Theoréme precedent, eſt égal au Rectangle de la perpendiculaire du centre au côté & de la moitié du perimetre. Or cette perpendiculaire eſt plus petite que le rayon du Cercle, puis qu'elle eſt terminée dans le Cercle; & le perimetre du Polygone inſcrit eſt plus petit que la circonference qui le comprend, par la maxime d'Archimede. V. 6.

Donc le Rectangle du rayon du Cercle & de la moitié de la circonference eſt plus grand que tout Polygone inſcrit.

Et il eſt plus petit que tout Polygone circonſcrit, parce que le Polygone circonſcrit eſt égal au Rectangle du rayon du Cercle, (qui eſt alors la même choſe que la perpendiculaire au côté,) & de la moitié de ſon perimetre, lequel perimetre eſt plus grand que la circonference du Cercle, puiſqu'il la comprend, ſelon la même maxime d'Archimede. Donc &c.

III. Theoréme.

XXXV. Les figures regulieres de même eſpece ſont entr'elles en raiſon doublée de celle de leurs rayons droits.

Car

Car elles ſont égales chacune au Rectangle du rayon droit, & de la moitié du perimetre. Or le rayon droit eſt au rayon droit comme le perimetre au perimetre, par XII. 26. Donc ces Rectangles (auxquels ces figures regulieres ſont égales) étant ſemblables, ſont entr'eux en raiſon doublée de celle du rayon droit, qui eſt l'un de leurs côtez. (29. *ſup.*)

I. Corollaire.

Les Cercles ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs rayons, ou de leurs diametres, ce qui eſt la même choſe. XXXVI.

II. Corollaire.

Les Cercles ſont entr'eux comme les Quarrez de leurs diametres. Car les uns & les autres ſont en raiſon doublée de celle de leurs diametres. XXXVII.

IV. Theoréme.

Les Triangles ſemblables inſcrits en des Cercles ſont entr'eux en raiſon doublée des diametres de ces Cercles: ou, ce qui eſt la même choſe, comme les Cercles, ou comme les Quarrez des diametres. XXXVIII.

Car les cordes de divers Cercles qui ſoûtiennent les angles inſcrits égaux, ſont entr'elles comme les diametres, par X. 25 & 26.

Donc les côtez de ces Triangles ſemblables qui ſoûtiennent les angles égaux, (qui ſont ceux qu'on appelle côtez homologues,) ſont entr'eux comme les diametres.

Or ces Triangles étant ſemblables, ſont en raiſon doublée de leurs côtez homologues. (27. *ſup.*)

Donc ils ſont auſſi en raiſon doublée de ces diametres.

Donc ils ſont auſſi entr'eux comme les Cercles & comme les Quarrez des diametres.

V. Theo-

V. THEORÉME.

XXXIX. LES figures semblables inscrites dans les Cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres.

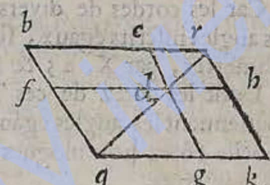
Car comme il a été prouvé S. 29. & XIII. 26. ces figures semblables se peuvent resoudre en Triangles semblables, chacun d'une figure à chacun de l'autre, qui seront tous inscrits dans le Cercle.

Donc tous les Triangles d'une figure sont à tous ceux de l'autre, (& par consequent une figure est à l'autre,) comme un des Triangles d'une figure à un semblable de l'autre. Or par le Theoréme precedent ces deux Triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des diametres. Donc les figures semblables inscrites dans les Cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres. Donc aussi comme les Cercles. 36. *sup.* Donc aussi comme les Quarrez des diametres. 37. *sup.*

I. PROBLEME.

XL. DÉCRIRE sur un côté donné le Parallelogramme égal & équiangle à un Parallelogramme donné.

Soit le Parallelogramme donné *b c d f*. Soit continuée *c d* jusques à *g*, en-sorte que *d g* soit égale au côté donné.



Soit aussi continuée *b f* jusques à ce que *f q* soit égale à *d g*. Soit menée de *q* par *d* une indefinie.

Soit prolongée *b c*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *r* cette indefinie.

Soit prolongée *q g* jusques en *k*, en sorte que *q k* soit égale à *b r*.

Joignant

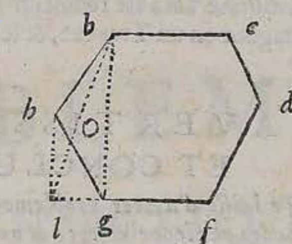
Joignant les points *r k*, & prolongeant *f d* jusques en *h*, où elle rencontre *k* :

Le Parallelogramme *d h k g* sera égal & équiangle au donné *b c d f*. (18. *Sup.*)

II. PROBLEME.

FAIRE une figure égale à une donnée, qui ait moins d'un côté que la donnée. C'est à dire que si la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5, & si elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4 : de sorte que par là on pourra venir jusqu'au Triangle. XLI.

Soit proposé de reduire l'Hexagone *b c d f g h* en un Pentagone qui luy soit égal.



Ayant prolongé *f g*, je tire la ligne *b g*.

Puis de *h* je tire sur *f g* prolongée *h l* parallele à *b g*.

Et de *b* je tire *b l*. Je dis que le Pentagone *b c d f l* est égal à l'Hexagone donné.

Car les Triangles *h l b* & *h l g* sont égaux, parce qu'ils sont sur la même base & entre mêmes paralleles. (6. *sup.*)

Donc ôtant *h l o* commun à l'un & à l'autre : *h o b* demeurera égal à *l g o*, & tout le reste est commun à l'Hexagone & au Pentagone.

On reduira de même le Pentagone *b c d f l* à un Trapéze.

Ayant mené la ligne *b f* : mener de *l* sur *d f* prolongée, *l m* parallele à *b f*.

Puis tirer *b m*.

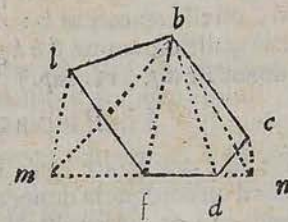
On prouvera de la même maniere que l'on vient de

faire

faire, que le Trapéze *b c d m* sera égal au Pentagone *b c d f l*.

Que si de *b* on tire une ligne à *d*,

Et de *c* sur *f d* prolongée de ce coté là, *c n* parallele à *b d*:



En tirant *b n*, le Triangle *b m n* sera égal tant au Trapéze *b c d m*, qu'au Pentagone *b c d f l*. Et ainsi l'Hexagone aura été reduit en un Pentagone, & le Pentagone en un Trapéze, & le Trapéze en un Triangle.

AVERTISSEMENT ET CONCLUSION.

XLII. *Je laisse d'autres Problemes qui sont trés faciles à resoudre par les principes qui ont été établis. Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraye methode qui doit traiter les choses simples avant les composées, & les generales avant les particulieres : je pense avoir satisfait à ce dessein, & avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cét ordre de la Nature, en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes : au lieu qu'il est clair, ce me semble, par cét essay, que les elemens de Geometrie étant reduits selon l'ordre naturel, peuvent être aussi solidement demontrez, & sont sans comparaison plus aisez à concevoir & à retenir.*

FIN.

SOLU-

SOLUTION D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES PROBLEMES D'ARITHMETIQUE, APPELLÉ COMMUNÉMENT LES QUARREZ MAGIQUES.

SOLUTION
D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE, APPELLE' COMMUNE'MENT
LES QUARREZ
MAGIQUES.

§. I. *Ce que c'est que ce Probleme.*

AYANT un Quarré de cellules pair ou impair : 1.

Et l'ayant remply de chiffres ou selon l'ordre naturel des nombres 1. 2. 3. 4. &c.

Ou de quelqu'autre progression arithmetique que ce soit, comme 2. 5. 8. 11. 14. &c.

Disposer tous ces chiffres dans un autre Quarré de cellules semblable à celui-là, en sorte que tous les chiffres de chaque bande soit de gauche à droit, soit de haut en bas, soit même les deux diagonales, fassent toûjours la même somme.

Soient pris pour exemples les Quarrez d'11 pour les impairs, & de 12 pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traité.

§. 2. *Considerations sur les Quarrez naturels.*

II. J'APPELLE *Quarrez naturels* ceux où les chiffres sont disposez en progression arithmetique, en commençant par les plus petits.

SUR LES QUARREZ IMPAIRS.

III. DANS le milieu du Quarré impair il y a une cellule qui en est le centre. Le chiffre qui est dans cette cellule soit nommé *centre* & marqué par *c*.

IV. DE tous les autres chiffres la moitié sont plus petits & les autres plus grands que le centre. Les uns soient appellez simplement *petits* & les autres *grands*.

V. LES cellules autour du centre soient appellées 1.re *enceinte*.
Autour de la premiere enceinte, 2.e *enceinte*.
Autour de la seconde enceinte, 3.e *enceinte*.
Et ainsi de suite.

VI. LES enceintes 1.re 3.e 5.e 7.e 9.e &c. soient appellées *enceintes impaires*.

Les 2.e 4.e 6.e 8.e 10.e &c. *enceintes paires*.

VII. IL est important de considerer dans chaque enceinte où sont les petits chiffres, & où sont les grands.

Les petits sont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui est de 3 dans la 1.re enceinte, de 5 dans la 2.e, de 7 dans la 3.e &c.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts

hauts jusqu'à celui qui est vis-à-vis le centre *inclusivè*.

Troisiémement dans la bande à droit les plus hauts jusqu'à celui qui est vis-à-vis le centre *exclusivè*.

SUR LES QUARREZ PAIRS.

VIII. IL n'y a point de cellule qui soit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la somme que font le premier & le dernier chiffre.

Et cette somme entiere s'appellera 2 *c*.

IX. LA moitié des bandes, sçavoir celles qui sont les plus hautes, contiennent les petits chiffres, & les plus basses les grands.

X. LES quatre cellules du milieu sont la 1.re enceinte.
Les cellules autour de ces quatre, la 2.e enceinte.
Celles autour de la seconde, la 3.e enceinte.
Et ainsi de suite.

XI. LES enceintes 1.re 3.e 5.e 7.e 9.e &c. soient aussi appellées *les enceintes impaires*.
Et les 2.e 4.e 6.e &c. *les paires*.

XII. LES petits chiffres sont,
1. Dans la bande d'enhaut de chaque enceinte.
2. Au côté gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.
3. Et de même au côté droit.

§. 3. PREPARATION.

XIII. LE plus grand mystere de la solution de ce Probleme consiste à marquer par lettres quelques-uns des petits chiffres de chaque bande.

QUARREZ IMPAIRS.

XIV. DANS toutes les enceintes generalement marquer

quer le coin à gauche de la bande d'enhaut par *e*.

Le coin à droit de la même bande par *o*.

Le milieu de cette bande par *m*.

La cellule à gauche qui est vis-à-vis le centre par *α*.

XV. Marquer de plus dans les enceintes paires

Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'*e*, l'autre d'*o*, par les mêmes lettres accentuées :

L'une par *è*.

L'autre par *ò*.

Et la cellule à gauche au dessous d'*e* par *ω*.

Et au côté droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis-à-vis le centre par *ϐ*.

Dans les Quarrez pairs.

XVI. Ne rien marquer dans les premiere & seconde enceintes.

XVII. Dans toutes les autres generalement marquer

Le coin à gauche d'enhaut par *e*.

A droit par *o*.

Le plus bas des petits nombres à droit par *α*.

Le plus bas des petits nombres à gauche par *ϐ*.

XVIII. Marquer de plus dans les enceintes impaires, à commencer par la 3.e (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut,)

4 cellules dans la bande d'enhaut, deux par { *è*. *ò*.

& deux par { *ê*. *ô*.

selon ce qui a été dit *sup.* 15.

A gauche marquer la cellule au dessous d'*e* par *ω*.

Et à droit celle au dessus d'*α* par *γ*.

§. 4.

§. 4. MAXIMES

POUR LA DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

Deux chiffres, l'un *petit*, l'autre *grand*, également distans du centre, & qui se joignent par une ligne passant par le centre, font une somme égale à deux fois le centre. XIX.

Quand un *petit* chiffre est marqué par une lettre, son grand soit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuscule de la même lettre, quoi qu'elle ne soit pas marquée. XX.

Ainsi *e*. E. font deux fois le centre.

Et de même *α*. A. ou *ϐ*. B. ou *o*. O.

Seconde Maxime.

Quatre chiffres dans la même bande, dont le premier est autant distant du 2.e que le 3.e du 4.e sont en proportion arithmetique. XXI.

Et par consequent la somme des extremes est égale à la somme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

e. *è*. :: *ò*. *o*. *Donc e. o.* = *è*. *ò*. XXII.

D'où il s'ensuit que partout où sont ensemble *è*. *ò*. ou bien *ê* *ô*. ou leurs majuscules E. O. on peut supposer, lors qu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'est comme si c'étoit *e*. *o*. E. O ; parce que si l'égalité s'y trouve en supposant que c'est *e*. *o*. elle ne sera pas troublée en mettant *è*. *ò*. en la place de *e*. *o* ; puisque les deux d'une part valent autant que les deux de l'autre.

Semblablement pour les Quarrez impairs en particulier, XXIII.

e. *m*. :: *m*. *o*. Donc *e*. *o*. = *m*. *m*.

V 6 Dans

Dans les Quarrez pairs.

XXIV. e.ω. :: ϐ.A. Donc e.A. ≡ ω.ϐ.
Pour trouver A voyez *ſup.* 20.

Troisiéme Maxime.

XXV. Lorsque 4 cellules ſont un Parallelogramme rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres ſont en proportion arithmetique. Et par conſequent la ſomme des extremes eſt égale à la ſomme de ceux du milieu.

Exemples.

Dans les Quarrez impairs.

XXVI. e.m. :: α.c. Donc e.c. ≡ m.α.
XXVII. m.o. :: α.c. Donc m.c. ≡ o.α.
XXVIII. ω.m. :: c.ϐ. Donc ω.ϐ. ≡ m.c.

Dans les pairs.

XXIX. e.o. :: ϐ.α. Donc e.α. ≡ o.ϐ.
XXX. ω.ϐ. :: o.γ. Donc ω.γ. ≡ ϐ.o.

§. 5. *Methode pour diſpoſer magiquement le Quarré naturel.*

XXXI. Cette methode conſiſte en fort peu de regles: les unes generales, les autres particulieres; ſelon leſquelles il faut tranſporter les chiffres du Quarré naturel dans le magique.

Pre-

Premiere Regle generale.

Il faut diſpoſer les chiffres par enceintes, ceux XXXII.
d'une enceinte en l'enceinte ſemblable; & tout le ſoin qu'on doit avoir d'abord, eſt de ſçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parce que la ſituation des *petits* donne celle des *grands*, ſelon les deux regles ſuivantes.

Seconde Regle generale.

Quand on a placé un *petit* chiffre dans un coin, XXXIII.
il faut placer ſon *grand* dans le coin diagonalement opposé.

Ainſi α étant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre A dans le coin droit de la bande d'embas.

Troisiéme Regle generale.

Hors les coins, il faut placer les grands vis à XXXIV.
vis des petits de la bande oppoſée.

C'eſt pourquoy il faut obſerver de ne mettre jamais deux petits en des bandes oppoſées vis à vis l'un de l'autre.

Corollaire de ces Regles.

Les chiffres étant diſpoſez ſelon ces regles, XXXV.
Il s'enſuit, 1. Que les chiffres de deux bandes oppoſées pris enſemble, valent autant de fois *c* qu'il y a de chiffres dans les deux bandes. Car un petit & un grand valent deux fois *c*. Or il y a autant de *petits* que de *grands*. Donc, &c.

Il s'enſuit, 2. Que lors qu'on a prouvé que les XXXVI.
chiffres d'une bande apres cette diſpoſition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande eſt égale à ſon oppoſée.

Il s'enſuit, 3. Que quand il y a autant de petits XXXVII.
 chiffres

chiffres dans une bande que dans l'opposée, & que la somme des uns est égale à la somme des autres, c'est une marque assurée que la bande est égale à la bande.

La preuve en est facile sans que je m'arrête à l'expliquer.

Quatriéme Regle generale.

XXXVIII. Il ne faut se mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui sont marquez par des lettres; car cela fait, le reste se trouve sans peine par cette raison:

Dans la bande d'enhaut, dans quelques Quarrez & quelques enceintes que ce soit, outre les cellules marquées par des lettres,

Ou il ne reste rien:

Ou il reste toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair; c'est à dire 4. 8. 12. 16. &c.

Et de plus, les chiffres de ces cellules sont toûjours 4 à 4 en proportion arithmetique.

Donc prenant les extremes & les mettant dans une bande, & ceux du milieu dans l'opposée, ils ne troubleront point l'égalité qui y étoit déja par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en est de même des deux côtez droit & gauche. Car les petits chiffres qui restent, (s'il en reste outre les marquez,) sont toûjours en nombre pairement pair, 4. 8. 12. 16. &c. & de 4 en 4 en proportion arithmetique.

Donc comme ci-dessus.

Il n'y a donc plus à se mettre en peine que de disposer les lettres. Ce qui se fait par les regles particulieres.

§. 6.

§. 6. *Regles particulieres pour les Quarrez impairs.*

Il y a deux regles pour ces Quarrez, l'une pour les enceintes impaires, & l'autre pour les paires. XL.

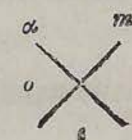
Pour les enceintes impaires.

Au coin gauche de la bande d'enhaut mettre *α*.

Au coin droit de la même bande. *m*.

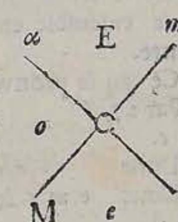
A la bande d'embas en quelque cellule que ce soit, hors les coins, *e*.

A la bande du côté d'*α*, *o*.



Demonstration.

Il est requis premierement à demontrer que dans la bande d'enhaut *α*. E. *m*. valent trois fois le centre. D'où il s'ensuivra qu'elle sera égale à la bande d'embas, par 36. *sup*. XLI.



Or (par 26.) *e*. *c*. $\equiv$ *α*. *m*.

Donc *e*. *c*. E. $\equiv$ *α*. E. *m*.

Or *e*. *c*. E. $\equiv$ 3 *c*. (par 20.)

Donc *α*. E. *m*. $\equiv$ 3 *c*. Ce qu'il falloit demontrer.

XLII. Requis secondement à demontrer que *α*. *o*. M. valent 3 *c*. D'où il s'ensuivra que cette bande sera égale à l'opposée, par 36.

Or (par 27.) *α*. *o*. $\equiv$ *m*. *c*.

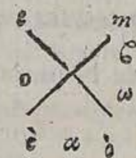
Donc *m*. *c*. M. $\equiv$ *α*. *o*. M.

Or

Or m.c.M. $\equiv$ 3 c. (par 20.)
Donc α.o.M. $\equiv$ 3 c.

Pour les enceintes paires.

XLIII. Il suffira de les figurer tout d'un coup.



DEMONSTRATION.

XLIV. REQUIS premierement à demontrer que la bande d'embas M. è. α. ò. E. $\equiv$ 5 c. C'est à dire qu'elle vaut ensemble cinq fois le centre.

Ce qui se prouve ainsi :
Par 27. α.o. $\equiv$ m. c.
Donc e.α.o. $\equiv$ e.m.c.
Donc e.m.c.M.E. $\equiv$ è. α. ò. M. E. (par 22.)
Or e.m.c.M.E. $\equiv$ 5 c. (par 20.)
Donc M. è.α.ò.E. $\equiv$ 5 c. Ce qu'il falloit demontrer.

XLV. REQUIS secondement à demontrer que dans la bande droite m.O.ϐ.ω.E. $\equiv$ 5 c.
Ce qui se prouve ainsi :
Par 23. e.o. $\equiv$ m.m.

Donc

Donc e.o.c. $\equiv$ m.m.c.
Or m.m.c. $\equiv$ m.ω.ϐ.
Parce que m.c. $\equiv$ ω.ϐ. (par 28.)
Donc e.o.c. $\equiv$ m.ω.ϐ.
Donc e.o.c.E.O. $\equiv$ m.ω.ϐ.E.O.
Or e.o.c.E.O. $\equiv$ 5 c. (par 20.)
Donc m.O.ω.ϐ.E. $\equiv$ 5 c. Ce qu'il falloit demontrer.

§. 7. *Pour les Quarrez pairs.*

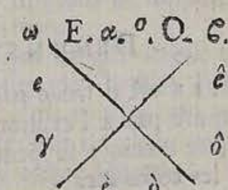
ON laisse à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere. XLVI.

Pour les autres enceintes impaires.

LA disposition s'en figure ainsi : XLVII.

DEMONSTRATION.

REQUIS I. à demontrer que les six chiffres de la bande d'enhaut dont quatre sont *petits*, & deux *grands* qui viennent de è & ò qu'on a mis en bas, valent six fois le centre. Ce qui se prouve ainsi : XLVIII.



α.

α. A. o. O. e. E. = 6 c. (par 20.)

Or ces six lettres sont égales aux six, ω. E. α. o. O. ϐ.

Car ôtant les mêmes qui se trouvent de part & d'autre, sçavoir α. o. O. E. il ne restera d'un côté que A. e: & de l'autre que ω. ϐ.

Or (par 24.) A. e. = ω. ϐ.

Donc les six lettres ω. E. α. o. O. ϐ. = 6 c.

XLIX. Requis 2. à demontrer que ω. e. γ. = ϐ. è. ò. Car si cela est, les grandes seront aussi égales aux grandes, & le tout au tout, (par 37.)

Supposant donc que è. ò. soient e. o. (*sup.* 22.) & ôtant e & e de part & d'autre, reste d'une part ω. γ. & de l'autre ϐ. o. qui font des sommes égales, (par 30.)

Donc ω. e. γ. = ϐ. è. ò.

Donc la bande est égale à la bande, (par 30.)

Pour les enceintes paires.

L. La disposition en est trés facile, & se figure ainsi:

Demonstration.

LI. Elle est si facile par 22. 29. & 37. que je ne m'amuse pas à l'expliquer.

Cette enceinte se peut encore faire en transposant les coins &c.

§. 8. *Regle particuliere pour la premiere & seconde enceinte des Quarrez pairs.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ces deux enceintes ne sont autre chose que le Quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux sortes de bandes. Quatre qui font la seconde enceinte, & qu'on peut appeller les bandes *exterieures*. Et quatre autres qui coupent le Quarré, & qu'on peut appeller *transversales*: sçavoir la 2.ᵉ & la 3.ᵉ de haut en bas. LII.

Et la 2.ᵉ & la 3.ᵉ de gauche à droit.

Ce qui est cause que ces deux enceintes ne se peuvent pas disposer par les regles de autres, c'est que les 4 chiffres du milieu faisant en divers sens quatre bandes de deux chacune en ligne droite, & deux en diagonale: les bandes droites ne sçauroient faire des sommes égales, mais seulement les diagonales. LIII.

Or ces 16 chiffres se pouvant disposer en tant de manieres que cela est presque incroyable, sçavoir en plus de 20 millions de millions: LIV.

20:922:789:888:000.

Il n'y en a proprement que 16 qui soient magiques, c'est à dire où toutes les bandes fassent des sommes égales, (car je ne compte pas pour differentes dispositions celles qui ne viennent que de la differente situation du même Quarré.)

Et voici comme on les trouve. LV.

Il faut prendre toûjours les chiffres 4 à 4 en cét ordre :

1. Les quatre du dedans ou interieurs.
2. Les quatre coins exterieurs.
3. Les deux du milieu de la bande d'enhaut, avec les deux du milieu de celle d'embas.
4. Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.

Or chacun de ces chiffres pris ainsi 4 à 4 (& qu'on nommera dans la suitte par 1. 2. 3. 4.) peuvent

Ou être laissez en leur même place ; ce qui se marquera par *o.*

Ou être transportez en croix S. André ; ce qui se marquera par *c.*

Ou directement de gauche à droit ; ce qui se marquera par *g.*

Ou directement de haut en bas ; ce qui se marquera par *h.*

LVI. Suivant ces remarques, & se souvenant de ce que signifient les 4 nombres (1. 2. 3. 4.) & les 4 lettres (*o. c. g. h.*) les deux Tables suivantes feront trouver sans peine les 16 dispositions magiques du Quarré de 4 : ou, ce qui est la même chose, des deux premieres enceintes de tous les Quarrez pairs.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

IX.

	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.
1.	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*h*	*o*	*h*	*o*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

De ces 16 dispositions magiques du Quarré de 4 il y en a deux, sçavoir la 1.re & la 6.e, où on ne change que 8 chiffres. LVII.

Deux, sçavoir la 11.e & la 16.e où on les change tous 16.

Et douze où on en change 12.

Voici un exemple de la 6.e disposition, & un autre de la 16.e On laisse à trouver les autres. LVIII.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Demonstration.

Chaque bande tant exterieure que transversale du Quarré de 4, (ou du Quarré composé LIX.

des

des 2 premieres enceintes de tous les Quarrez pairs,) eſt de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par conſequent la ſomme des extremes eſt égale à la ſomme des moyens.

Soit donc, par exemple, la ſomme des extremes de la bande d'enhaut appellée b: la ſomme des moyens qui lui eſt égale pourra être auſſi appellée b, & ainſi toute la bande ſera $b+b$.

Et par la même raiſon la bande d'embas pourra être $f+f$.

Cela étant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1.re en tranſpoſant les extremes de l'une à l'autre ſans changer les moyens. Car alors l'une deviendra $f+b$;

Et l'autre $b+f$; & ainſi ſeront égales.

La 2.e en tranſpoſant les moyens ſans changer les extremes. Car alors l'une deviendra $b+f$; & l'autre $f+b$; & ainſi ſeront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy à chacune de ces 16 diſpoſitions, & l'on verra que les tranſpoſitions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. *Divers moyens de varier les Quarrez Magiques.*

De ces moyens j'omets ceux qui ſont trop faciles à trouver, & je n'en marqueray que deux qui ſont plus importans, & qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez des Quarrez magiques.

PREMIER MOYEN.

LX. Nous avons ſuppoſé qu'on tranſporteroit les chiffres

chiffres de la premiere enceinte du Quarré naturel dans la premiere enceinte du Quarré magique; & ceux de la 2.e dans la 2.e ; & de la 3.e dans la 3.e &c. Mais cela n'eſt pas neceſſaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il ſuffit de ne les tranſporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui ſoit impaire, comme de la 5.e à la 1.re ; & d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6.e à la 4.e

SECOND MOYEN.

Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut tranſporter de quelque enceinte que ce ſoit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvû qu'on en prenne quatre enſemble qui ſoient en proportion arithmetique, & qu'on ait ſoin de mettre les extremes dans une bande, & les moyens dans la bande oppoſée. LXI.

CONCLUSION.

Je penſe pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'eſt pas poſſible de trouver une methode plus facile, plus abregée & plus parfaite pour faire les Quarrez magiques, qui eſt un des plus beaux Problemes d'Arithmetique. LXII.

Ce qu'elle a de ſingulier, c'eſt 1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on eſt toûjours aſſuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands Quarrez ne ſont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonſtration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode

de eſt ſi generale, que ſans y rien changer on pourroit reſoudre ſans aucune peine par la même voie cét autre Probléme qui paroiſt encore plus merveilleux :

Ayant mis dans un Quarré naturel tous les nombres que l'on voudra en progreſſion geometrique, comme 1. 2. 4. 8. 16. &c. les diſpoſer de telle ſorte dans un Quarré ſemblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres faſſent une ſomme égale à celle que font les nombres de toute autre bande multipliez auſſi les uns par les autres.

En voicy un exemple dans le Quarré de 3.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

FIN *de l'Explication des Quarrez Magiques.*

N.° 1. Pag. 480.

QUARRÉ NATUREL DE XI.

1 e	2	3	4	5	6 m	7	8	9	10	11 o
12	13 e	14 è	15	16	17 m	18	19	20 o	21 o	22
23	24 ω	25 e	26	27	28 m	29	30	31 o	32	33
34	35	36	37 e	38 è	39 m	40 o	41 o	42	43	44
45	46	47	48 ω	49 e	50 m	51 o	52 β	53	54 β	55
56 α	57 α	58 α	59 α	60 α	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

N.° 2. Pag. 480.

QUARRÉ MAGIQUE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

N.° 3. Pag. 480.

QUARRÉ NATUREL DE XII.

1 e	2 è	3	4	5	6	7	8	9	10	11 o	12 o
13	14 e	15 è	16 ê	17	18	19	20	21 ô	22 ô	23 o	24
25	26 ω	27 e	28 è	29	30	31	32	33 ô	34 o	35	36
37	38	39	40 e	41 è	42 ê	43 ô	44 ô	45 o	46	47	48
49	50	51	52 ω	53	54	55	56	57 γ	58	59 γ	60
61 β	62 β	63 β	64 β	65	66	67	68	69 α	70 α	71 α	72 α
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

N.° 4. Pag. 480.

QUARRÉ MAGIQUE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

77

15-

106

Нов [illegible]
25.6.82