ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ AC SOLIDÆ.

QVIBVS ACCEDVNT SELECTA

EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

AVCTORE

ANDREA TACQVET

SOCIETATIS IESV

Sacerdote & Matheseos Professore.

Quid noui in vtrisq; præstitum sit, præfatio ad Lectorem indicabit.

ANTVERPIÆ,
Apud IACOBVM MEVRSIVM.
ANNO M. DC. LIV.

ILLVSTRISSIMO
DOMINO
D. PHILIPPO EVGENIO
COMITI DE HORNES,
HOVTEKERCKE ET DE HERLIES,
VICE-COMITI FVRNENSI,
BARONI DE HONDSCOTE;
DOMINO DE LA BASSEE, L'ECLVSE,
Tranſloy, Braine le Chaſteau, Haut
Ittere, Stauele, Crombecque,
Eſtehain, Durry, Eſterpinij, &c.

Magno Imperij Venatori Hæreditario, Turmæ equitum pro Rege Catholico Ductori.

ILLVSTRISSIME DOMINE Matheſis ſcientiarum omnium naturalium eo titulo nobiliſſima, quòd inter omnes vna certiſſima, veriſſimaque ſit, honoratam ſe fuiſſe fatetur etiamnum, à nobiliſſima indole & ingenio Tuo: quando illam addiſcere, me inſtituente, atque ad ingens exemplum nobilitatis Belgicæ, & admirationem, gratulationemque non inanem auditorum omnium, annis ab hinc tribus præclarè tueri, publicè propositis Thesibus, me præsidente voluisti. Quamquam hoc quidquid tunc à me gestum est, honori datum est, non auxilio Tuo; cui satis superque subsidij erat à studio & ingenio suo, vt disciplinam illam securè defenderet, quam possideret. Tua ista merita cogitantem me impulêre, vt hæc Geometriæ Elementa non alteriquam Tuo Illustrissimo Nomini inscriberem. In quibus quid spectarim, quidúe assecutus sim, frustra hic exponam apud Te, qui pro Tui perspicacitate ingenij cognosces ilico, cum videbis.

Perge modò (patieris enim, scio, etiam nunc abs me admoneri Te de studio tam nobili & tam præclaro) Perge, inquam, æstimare & amare disciplinam, quam ego iudico excellente nobilitate dignam, quia

vnam,

vnam, eminentem suâ certitudine inter omnes; summis parem ingenijs, quia veram; quin & mihi homini etiam religioso conuenientem, quia bonam; hoc est omnino remotam à periculis illis, in quæ subinde disciplinæ aliæ discentium vitio & errore declinant. Habet sanè Geometria, quod & ego, & multi mecum experti sunt doctissimi iuxta & innocentissimi viri, quo hominis animum sibi deditum, ex contemplatione vnius, veri, boníque corporis attollat ad laudandum, amandumque vnum, verum, bonum, hoc est Deum incorporeum, & immensum dimensi corporis Architectum. Huc te meque ducant hæc Elementa Geometrica, quæ inscribo Tibi; cumque arcanam admirandamque & plusquam harmonicam variorum inter se corporum, & ipsius adeò Circuli sphæræq; consensionẽ animo suggerent, doceant hunc ipsum cum Deo, mente illa primâ & immensâ, & quodam quasi

 cir-

circulo omnia in ſe creata, & diuina complectente, conſentire. Hoc voueo, & finio cum lemmate, quod Emblemati præfixo fronte primâ, ex profano licet Horatio, non profanè ſubſcripſi

Hinc omne principium huc refer exitum.

Illuſtriſſime Domine

Dnis. Tæ. Illuſtriſſimæ

Seruus in Domino

ANDREAS TACQVET

SOC. IESV.

AMICE LECTOR.

CVm multis iam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuriâ laboratum eſſet, viſum denique eſt ad vſum ſtudioſæ iuuentutis cuius gratiâ hunc laborem qualemcunque ſuſcepi, nouam editionem adornare; in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. Inprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa coniunxi, ne (vt fit plerunque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida; quorum ſummè neceſſaria cognitio eſt.

2. Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoq; idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris à reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni vniuerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conueniet legere primum litteris prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.

3. Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum ferè vel nullus vſus eſt, aut certe non alius, quam vt per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori viâ poteram demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemq; ſeruo, quem bis mille annorum vſus probauit.

4. Demonstrationes vel nouas affero, vel antiquas breuiores plerunque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodest. Ea siquidem tardiores & hebetiores non iuuat, subtilibus autem & ingeniosis molesta est.

5. Quamuis autem breuis esse studuero, existimaui tamen, me à proposito non recedere, si ea adderem, quæ Geometriam discere volentibus futura vsui videbantur. Itaque Corollaria & scholia adiunxi non pauca, quæ vsu longo didici in elementis desiderari. Geometriæ practicæ fontes indico suis locis. Tum siquid illustre ad rem occurreret, non omisi. Varia deinde in quibus laboratum hucusque fuit, vel explicare vel demonstrare conatus sum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonstratur independenter ab vndecimo axiomate, quod non axioma, sed theorema est, & quidem non nisi difficulter ac longo circuitu demonstrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones solent, disposui ad eum fere modum, quo iam analystæ scribunt æquationes suas. Quem si exactè tenere voluissem, fuisset quidem res breuior; sed minus, vt arbitror, tyronibus accommodata.

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torsere omnes, soluuntur.

9. In quinto libro, proportionum doctrinam, vt quidem ab Euclide traditur, satis spinosam, efficere planiorem conatus sum. Itaque primum proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde huius libri sextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur ostendi non definitionem esse, sed theorema, & quidem difficilè & perobscurum; cuius etiam demonstrationem exhibemus, hactenus à nullo datam. Atque ita demonstrationes Euclidæas quæ hinc ducuntur omnes, si quis forte illas præ nostris probationibus desideret, stabiliuimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum assigno ac demonstro indicium vniuersale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propositiones demonstrare potuissem si hoc conducere discentibus iudicassem. Postremò de proportionibus non pauca scitu necessaria subiungo ac inprimis demonstro axioma illud percelebre seu potiùs theorema: proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometriâ fuit desideratum.

10. Librum duodecimum, cuius difficiles ac prolixæ demonstrationes discentibus terrori esse solent, aliâ viâ plus quam decies breuiori demonstraui. Quod ita se habere, qui hæc nostra cum Euclide eiusq; commentatoribus contulerit, deprehendet.

11. In libris quarto, sexto, vndecimo præstantur ea quæ vniuersim supra indicauimus.

12. Denique selecta ex Archimede theoremata aliâ similiter ac breuiori viâ demonstrata adiunxi; eximiamq; illius de cylindro ac sphæra doctrinam postremis tredecim propositionibus adiectis, ampliaui, quibus inter cætera demonstro sesquialteram proportionem ab eo in cylindro, sphæraq; repertam,

pertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quàm in ſuperficie continuari. Euclidi porro Archimedæa illa ſubnexui, non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque vſu eximia ſunt: tum deinde vt Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometræ inuenta admiranda aſſequi ſeſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poßit.

Tu hæc habe; & , ſi placuerint, lege ac diſce: inuenturus in his principia nobilißimæ & fortè omnium antiquißimæ ſcientiæ; quod oſtendet tibi, quam ſubnecto,

HISTO-

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progreßu Matheſeos.

MAthematum elementa traditurο, viſum eſt de illorum origine ac præſtantia præfari quædam, vt intelligant Matheſeos candidati, cuiuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt; & planum fiat aduerſus eos, qui, quę ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putauerint comparandas. Vſui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentia, qui ſcholarũ toto primo libro benè magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruuio, Gellio, Polybio, Tzetze, alijſq́uo accuratè copioſeq́ue conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Ioſepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. ſcribit Sethi nepotes Cælorum ordinem ac ſiderum curſus obſeruaſſe. Ne autem hæc inuenta ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus vniuerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, vnum diluuio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & vtrique ſua inuenta inſcripſerunt, vt ſi lateritiam diluuio

deleri

deleri contingeret, lapidea ſuperſtes, hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Aiunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam: quæ & noſtris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluuium primos mortalium Aſſyrios & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem Ioſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Aſſyria ad Ægyptios tranſlatæ ſunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo iubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcendum egregiâ eſſe, vt apud eundem Ioſephum eſt lib.1.cap.9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque, quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicauit. Quibus deinde ſtudijs adeò Ægyptij floruere, vt Ariſtoteles 1. Metaph. cap.1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto à ſacerdotibus publicâ vacatione fretis inuentas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare traijciens ad Græciæ Philoſophos peruenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584 primus Græcorum cum in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam

Græciam tranſtulit. Is ſanè, præter alia, primi libri propoſitiones, 5, 15, 26 inuenit. Eidem debentur 2,3,4,5, l.4. cuius inuenti lætitiâ elatus bouem immolaſſe dicitur. Idē Æquinoctia & ſolſtitia obſeruare cœpit Laertio teſte, & ſolis eclipſim, vt ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipſim lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius: ille philoſophorum antiquiſſimus, Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornauitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, vt omnis propè illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, vt refert Laertius à materia abſtraxit primus; in qua mentis elatione inuenit 32,44,47,48, lib.1. Sed inprimis ob inuentas 32 & 47 l.1. celebratur, & huius quidem inuentionis lætitiâ tantâ affectus eſt, vt teſte Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impensè & docuit & exercuit. Neque ſolum acutè & ſubtiliter multa inuenit, ſed etiam, ludum primus aperuit, in quo iuuentus tam honeſtas, tamque nobiles artes addiſceret.

Pytha-

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in amatoribus, vbi adoleſcentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Peloponneſo maiorem (nota Aſtronomiæ incunabula,) eundemque de habitationibus in lunâ nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12 & 23. l. 1. Hos excepêre Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentatâ circuli quadraturâ, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longè clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentauit per duas medias proportionales, quam viam vt ſingularem & vnicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab alijs inuenta ordinauerit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit, eius tum phyſica, tum fortè etiam Mathematica monumenta perierunt inuidiâ, (vt quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua vnius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam, Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtaurauit. Theodorus Cyreneus, licet eius inuenta Mathematica non extent, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando peruenimus, quo nemo alius ſplendorem maiorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificauit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inueniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile coniunctum cum Philoſophia eſſet, excitauit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; nullus Geometriæ expers accedito: illuſtri ſanè argumento quàm non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certè Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui eius monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia propè innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum ſtudijs Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas

tas Tarentinus, Theætetus Atheniensis; à quibus Mathemata egregiè sunt amplificata. Leodamas Analysim à Platone acceptā exercuit, eiusq; ope inuenisse multa à Laertio dicitur. Theætetum tum inuenta sua, inter quæ Elementa ab eo scripta & regularium corporum inscriptio celebrantur, illustrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inscripsit. Archytas Elementa scripsit etiam ipse, eiusque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cuius etiam illa singularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos vsus traduxerit ferè primus; vnde & lignea columba ab eo facta volasse legitur apud Gellium. Quem secuti Dædalus, alijque artifices fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patrijs bellis copijs ciuium suorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortassis discipulo illustrior quam inuentis suis. Leon sanè Mathematicæ vniuersæ elementa conscripsit, auxit, & ad vsum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores suo merito censeri debet.

Eudaxus Gnidius superiorum æqualis in Arithmeticis magnus & (si Scholiastæ Græco credimus) totum ei Quintum librum de-

bemus, Elementa item conscripsit, & generaliora effecit, & sectiones à Platone inchoatas auxit; insuper astronomicarum hypothesium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, vt supra Archytas, ad organicam ac mechanicam deriuauit. Amyclas Heracleotes & Menechmus, eiusque frater Dinostratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius; Philippus Mendæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem sectiones conicas inuenit, ac harum ope duas medias, cuius inuentio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt vniuersaliora & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philosophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Aristotelis magister, ipseque Aristoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cum auditor quidam esse vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, ansas enim Philosophiæ non habes.

De *Aristotele* verò quid dicam; libri illius omnes locis Mathematicis sunt referti, ex quibus in vnum collectis librum confecit Blancanus. Ex Aristotelis schola duo præcipuè celebrantur Eudemus, & Theophrastus. Hic scripsit de numeris libros duos, de

Geometria quatuor, de lineis indiuiduis vnum: ille historiam Mathematicam condidit, ex quo Proclus alijque sua mutuati sunt. Arysteo, Isidoro, Hypsicli Geometris subtilissimis solidorum libros maximè debemus. Denique Euclides aliorum inuenta collegit, ordinauit, auxit, demonstrauitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus iam vbique terrarum ad Mathematicam iuuentus instituitur. Obijt anno ante Christum 284. Euclidem secuti sunt centum ferè post annis Eratosthenes & Archimedes. Eratosthenis clarum inprimis nomen fuit, sed eius scripta periêre. Archimedis habemus multa, multa amisimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quendam humanæ subtilitatis, totiusque Mathematicæ disciplinæ absolutionem animo concipio. Eius inuenta admiranda prodidêre Polybius, Plutarchus, Tzetzes, alijque. Archimedi coæuus fuit Conon Geometra & Astronomus, cuius mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem interuallo non magno sequitur Appollonius Pergeus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor Conicorum subtilissimi libri. Eidem adscribuntur Euclidis libri 14 & 15, ab Hypsicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de subtensis in circulo hic 6, ille 12 libros primi conscripsêre, pro quo inuento tam vtili & necessario non parua vtrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis sphæricis libri tres. Theodosij tripolitæ vtilissimi sphæricorum libri tres in omnium manibus versantur. Atque hi quidem, si Menelaum excipias, ante Christum vixêre omnes.

Anno post Christum 70' venit in lucem Claudius Ptolomæus, astronomorum princeps, vir planè mirabilis, supraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is verò non Astronomiæ tantùm, sed etiam Geometriæ peritissimus fuit; quod testantur, tum alia multa ab eo scripta, tum in primis libri de subtensis, Menelai quidem 6, Hipparchi verò 12, ab illo ad 5 theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatissimi Philosophi extant Mathematica problemata. Iã Eutocij Ascalonitæ erudita in Archimedem cõmentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquam excellentium in Mathematicis Magistrorũ inuenta de duplicando cubo recensentur. Et Heronis quidem tam in mechanicis quam in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certè duplicatio ab eo tradita, à Pappo l.3.p.7. laudatur præ omnibus. Ctesibij A-

b 2 lexan-

lexandrini, cui antlias debemus nostras, admiranda opera à Vitruuio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen est, quem Euclidi ipsi Proclus in quibusdam præposuit.

Diophantus, & ipse Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides; verè totius numericæ subtilitatis magister; à quo reperta sit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hisce temporibus à Francisco Vieta, & Renato Cartesio multò perfectior & vniuersalior effecta est. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Musicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri sectione libris Geometris notissimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus ex doctissimis eius in Euclidem commentarijs, alijsque scriptis manifestum est. Atque hic opinor ille est, qui, vt refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, sub annum Christi 514, Vitaliani classem Constantinopolim obsidentis, optico speculorum artificio combussit. Theonis laudes verè magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, vt etiam libros, quos Euclidi hactenus adscripsêre omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior vbique in

Eucli-

Euclidem Ramus, neque vllo solido nixus fundamento, hic audiendus non erit. vt finis aliquando sit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres postremus, vt qui vixerit circa annum 400, sed nominis claritudine, omniq́ue laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypsiclem, Ctesibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheseos dedit. Scripsit collectionum Mathematicarum libros septem, è quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque varijs, ex omni propè genere Mathematum nobilissimis inuentis, vt inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus censeantur.

Habetis originis ac progressionis Mathematicæ historiam breuem. Ex qua Matheseos antiquitas, præstantia, ac dignitas apparet. Sanè Reip. litterariæ principes, ijdem qui Philosophiam, etiam Mathematicam genuêre, gemellas sorores partu velut vno, quas qui distrahere ab inuicem violentè velit, næ ille in natiuam illarum concordiam, cum insigni iniuria crudelis sit; quando, quod fieri in gemellis solet, vno vel loco vel morte sublato, languere, quin & contabescere alterum necesse sit.

APPRO-

APPROBATIO CENSORIS.

Elementa Geometriæ R. P. Andreæ Tacquet Societ. IESV, *ad instructionem illorum, qui scientiam illam sectantur, vtiliter imprimentur. Actum 9. Aprilis 1654.*

Guillielmus Bolognino S.Th.L. Canon.& Lib.Censor Antu.

FACVLTAS R.P.PROVINCIALIS.

Ego infrascriptus Societatis IESV *per Flandro-Belgicam Præpositus Prouincialis, potestate mihi factâ ab admodum* R. P. N. *Gosuvvino Nickel Præposito Generali eiusdem Societatis, facultatem concedo, vt Elementa Geometriæ planæ ac solidæ, demonstrata breui ac facili methodo, & tyronum captui magis accommodatâ, vnà cum selectis ex Archimede Theorematis, alijsq; nouis demonstrationibus, Auctore* P. ANDREA TACQVET, *omnia ab aliquot Societatis nostræ Mathematicis approbata, typis mandentur: in quorum fidem has manu nostra subscriptas, & solito officij sigillo munitas dedimus. Antuerpiæ 18. Martij 1654.*

IOANNES BAPTISTA ENGELGRAVE.

SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS Dei gratiâ, Hispaniarum, Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Austriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Serenissimus Belgarum Princeps, diplomate suo sanxit, ne quis librum, cui titulus est R. P. ANDREÆ TACQVET Elementa Geometriæ citra IACOBI MEVRSII voluntatem, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impressum, in Inferioris Germaniæ ditiones importet, venalémve habeat. Qui secùs faxit, confiscatione librorum & aliâ graui pœnâ mulctabitur, vti latiùs patet in Litteris datis Bruxellæ XXIV. Decemb. M.DC. LIII.

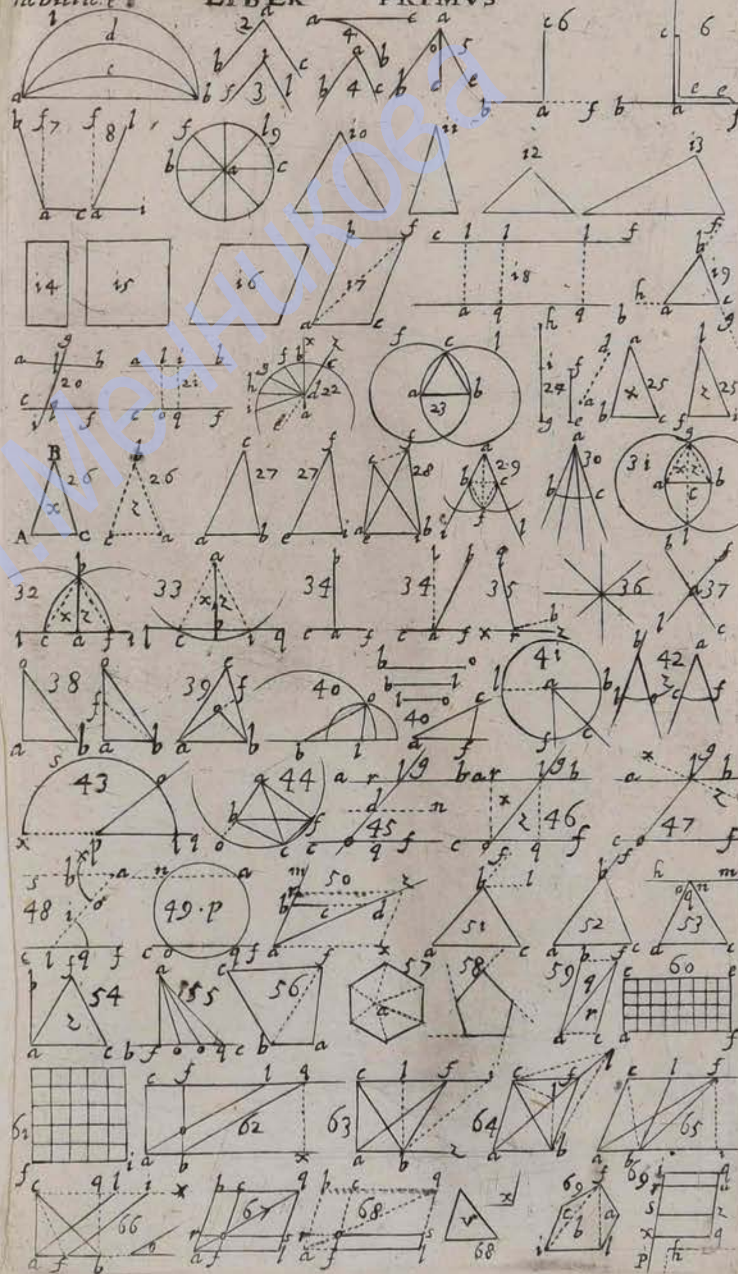
Signat

De Fren.

Tabulae

NOTA.

Amice Lector, licet ſumma cura adhibita ſit, irrepsêre tamen errata nonnulla, quæ ſub libri calcem diligenter collecta reperies. Ea vel ante lectionem emenda; vel certè, ſicubi hæſeris, conſule.



ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMVS.

SCientiæ proprium munus est, ex notionibus quibusdam simplicissimis, rationali naturæ à conditore Deo impressis, elicere aliquid, quod prius ignorabatur, atque inde rursum aliud ex alio; vt prior cognitio semper ad vlteriorem sit gradus. Quæ ratio si accurate teneatur, ex minimis, & per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemq; scientiæ, præ omnibus amplexæ sunt eæ disciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione versantur. Quo fructu id factũ sit, sciunt omnes, qui hisce studijs imbuti sunt. Et sanè Geometria (vt de alijs Matheseos partibus iam nihil dicam) mirum est, quam breui ex apertissimis ad obscurissima trahat; & ex humillimis ad altissima statim assurgat. Statuuntur primò simplicissima quædam facillimaq; principia, quibus nemo ratione præditus dissentire possit. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non sit de-

ductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu & cognitione remota, incredibili certitudine ac euidentiâ innoteſcunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis deriuatur, ſunt tria; Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1. PVnctum eſt ſignum in magnitudine indiuiduum.

Hoc eſt, quod diuidi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut vnitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantùm longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. tabulâ 1. 4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interiicitur.

Vel vt Archimedes : Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſiue eſt omnium breuiſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel vt Plato : Recta linea eſt, cuius extrema obumbrant omnia media.

Vnus omnium ſenſus eſt: Inſtrumentum quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ vtrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Iuxta regulam deſcribatur linea; tum regulam inuerſam, ſic vt extremitas priùs dextra, iam ſit ſiniſtra, rurſum applica lineæ priùs deſcriptæ, ſi planè cum illa congruat, recta eſt regula; ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantùm longa & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Planum, ſiue ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas iacet.

Vel vt Hero : ſuperficies plana eſt, cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel : plana ſuperficies eſt, cuius extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. *Idem ſenſus eſt omnium.*

Non definiuit hîc corpus, ſiue ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret; corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea vnam, punctum nullam.

8. Angulus planus eſt duarum linearum, in

in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Fig. 2. 4. *Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A se mutuo tangentes in A, sic vt non existant sibi mutuo in directum; hoc est, non efficiant vnam lineam.*

9. Latera seu crura anguli, sunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

Fig. 2, 4. 10. Vertex anguli est punctum (A) in quo crura sibi mutuo occurrunt.

Cum angulus est vnicus, vnâ litterâ ad verticem positâ designatur. Cum plures ad vnum punctum existunt, designantur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam subinde vnicâ lateribus propè verticem interpositâ. Sic Fig. 5. *in figura 5. angulus qui fit à lineis B A, C A designatur vel litteris tribus B A C, vel vnicâ O.*

Fig. 2. 3. 11. Anguli æquales, vel potiùs similes dicuntur; si, cum sibi inuicem vertices imponuntur, latera vnius congruant lateribus alterius. *Ad hoc non requiritur, vt latera sint æquè longa.*

12. Inæquales, seu dissimiles dicuntur anguli, cùm vertice & vno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille maior Fig 5. dicitur, cuius latus cadit extra. *Sic angulus B A E maior est angulo B A C.*

Angulus non minuitur vel augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione consistit, inclinatio autem linearum quantitas non est, neque angulus vllus quantitas erit. Et sanè eodem iure curuitas esset quantitas, quo angulus, cum ab inuicem non magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliisq; geometris angulos æquales esse dicemus, nihil aliud, quam inclinationum similitudo, hoc est, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi sumus post propositionem 16. l. 3.

13. Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt; curuilineus, quem curuæ; mixtus, quem recta & curua. Fig. 2. 4.

14. Cum recta (C A) super rectam (B F) consistens, in neutram inclinat partem, ac proindè angulos vtrimque facit æquales (C A B) & (C A F,) rectus est vterque æqualium angulorum: Recta autem (C A) alteri insistens dicitur perpendicularis, seu perpendiculum. Fig. 6.

Angulus rectus sic etiam definiri potest. Fig 6.

Rectus angulus is est (B A C) cui à parte altera æqualis oritur (C A F,) si vnum latus (B A) produxeris.

Duæ regulæ sic compactæ vt angulum rectum contineant, instrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inuentorem Vitruuius c. 2. l. 9. affirmat Pythagorã. Tanta vero anguli recti vis est in rebus omnibus construendis, dimetiendis, formandis, & firmandis, vt nihil ferè effici sine illo posit. Nor-

mæ Examen sic instituitur. Eius latus A E applicatæ rectæ lineæ A F, & iuxta latus alterum describatur recta C A. Conuersa deinde norma versus B, si vtroque suo latere congruat rectis C A, A B, scito esse legitimam & exactam. Ratio patet ex ipsa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtusus angulus est (B A C,) qui recto (F A C) maior est.

Fig. 8. 16. Acutus angulus est (L A I) qui recto (F A I) minor est.

17. Figura plana, est superficies plana, vnâ vel pluribus lineis vndique terminata.

Fig. 9. 18. Circulus est plana superficies, vnius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum intra contentum (A) omnes, quæ duci possunt rectæ lineæ, sunt æquales.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

Fig. 9. 20. Diameter circuli est recta per centrum ducta, (B C,) ad circumferentiam vtrimque terminata, & circulum bifariam diuidens.

Fig. 9. 21. Semidiameter, siue radius est recta (A F,) ex centro ad circumferentiam ducta.

Fig. 9. 22. Semicirculus est figura (B L C) comprehensa à diametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.)

Fig. 9. *Circulus ita generatur: si recta linea (A B) vno extremo suo (A) manente fixo, in orbem circumagatur,*

tur, recta ipsa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porro mira circuli indoles vel in ipso exortu suo apparet. Ad eius namq; genesim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea mouetur, & eius extremum quiescit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos absoluant, diuersa celeritate mouentur.

Tertio peripheria circulum ambiens, constat quodammodo ex contrariis, & extremis sine medio; ex concauo nimirum & conuexo, inter quæ rectum ita medium est, vt æquale inter magnum & paruum; idq; eo mirabilius est, quod ea contraria insint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Aristoteli visa sunt admiranda, ex quo illa deprompsimus. At prodigia circuli longè maiora aperuimus in dissertatione physico-Mathematica, quàm vna cum Cyindricis & annularibus in lucem emisimus anno 1652. isthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri solent in 360 æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: semicircumferentiam in 280, quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, est superficies plana, rectis lineis vndique terminata.

24. Triangulum, siue trilaterum, est plana superficies tribus rectis comprehensa. *Hæc figurarum rectilinearum prima ac simplicissima est, in quam ceteræ omnes resoluuntur.*

25. Triangulum æquilaterum, est quod Fig. 10.

tria latera habet æqualia.

Fig.11,12. 26. Triangulum Isosceles, seu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia.

Fig.13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig.13. 28. Rectangulum triangulum est, quod vnum angulum habet rectum.

Fig.12. 29. Obtusangulum triangulum est, quod vnum angulum habet obtusum.

Fig 10.11. 30. Acutangulum triangulum est, quod tres habet acutos angulos.

Fig.14.15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum est, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales: *siue latera æqualia sint, siue non.*

Fig.15. 32. Quadratum est, quod æquilaterum, & rectangulum est, *ac proinde æquiangulum.*

Omne quadratum est rectangulum, sed non contra.

Fig 16. 33. Rhombus est, qui æquilaterus, sed non æquiangulus est.

Fig.17. 34. Rhomboides, quæ aduersa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula est.

Fig.14.15.16.17. 35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera (A B, F C, & B F, A C) sunt parallela. Quid vero sint parallelæ, dicetur seq. defin.

Omne rectangulum, & quadratū est parallelogrammū: vt suo loco demōstrabitur. Sed nō cōtra.

36. Rectæ

36. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes sunt, quæ in eodem plano existentes, vtrimque in infinitum protractæ, æqualibus semper interuallis inter se distant. Fig.18.

Æqualia interualla desumuntur penes perpendiculares. Quare si omnes ad vnam ex duabus, parallelam A B, perpendiculares Q L æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, si recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B semper perpendiculariter moueatur, tunc enim eius extremum L describit parallelam C F.

Euclides definit parallelas esse, quæ vtrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidūt. Verum quia dantur lineæ quæ simul in infinitum productæ, licet ad se mutuo appropinquent ad interuallum quouis dato minus, ac proinde, licet non sint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cuiusmodi sunt hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundē axem descriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per se notū esse, duas rectas licet nunquā concurrāt, fore semper æquali interuallo dissitas, hoc est æquidistantes: posset enim quispiam obiicere, fieri fortassis posse, vt etiam ipsæ, licet ad se mutuo semper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclidæa definitio parallelismi naturam non satis explicat.

37. Parallelogrammi & cuiusuis quadrilateri diameter est recta (A F) per angu- Fig.17.
los

los oppoſitos ducta.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus, quam quatuor comprehenſæ, multilateræ ſeu multangulæ, ſeu græca voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figurã oritur.

Fig. 19. *Tales ſunt F B C, G C A, H A B. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos.*

Poſtulata.

Poſtulatum eſt, quod facile fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo, vt concedatur.

1. A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam in directum & continuum protendere.

3. Quouis centro ad quoduis interuallum circulum deſcribere.

Axiomata.

Axioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et quod vno æqualium maius aut minus eſt, maius quoque aut minus eſt altero æqualium: & conuerſim.

2. Si

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ eiuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ eiuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

7. Quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt.

Non rectè Clauius hoc Axioma conuertit.

Falſum eſt enim, ea quæ vniuerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuo congruere: Diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent. Quòd ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit conuerſa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuo congruent: & anguli ſi æquales fuerint, ſibi mutuo congruent.

9. Totum ſua parte maius eſt.

10. Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Euclidis axioma vndecimum eſt: Si in duas rectas A B, C F, incidens recta G I, angulos ad eandem partẽ interiores B L Q, F Q L, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ Fig. 20.

ctæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores.

Hoc vero non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet: si anguli B L Q, F Q L, fuerint duobus rectis æquales, rectæ A B, C F, numquam concurrent.

Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino & Proclo, alijsq; Geometris reiecimus: est enim non axioma, sed theorema, idque demonstrabimus post Propositionem 31. huius libri.

Ex defi. 36. *Eius loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma.*

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo vtuntur.

Hoc est, recta, quæ ad parallelarum vnam perpendicularis, est quoque perpēdicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales vtrimque intercipiunt partes (L I, O Q.)

13. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune: & omnes rectæ punctualiter se intersecant.

Fig. 22. *Rectæ A X occurrat recta Z D, ea si producatur non perget per D A, sed in E, sic vt rectam X B non nisi punctualiter intersecet. Axioma ex*

notione

notione ipsa rectæ lineæ euidentissimum est. Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, vt credant rectas lineas, aliquâ sui parte commisceri posse, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A X, A Z partem communem A D. Centro A describatur circulus, secans rectas in B, & C, tum accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, & intelligatur ducta esse recta F A.

Rectæ igitur C A & F A eundem prorsus situm habent respectu rectæ B A. Sed recta C A cum recta B A habere dicitur commune segmentum D A, ergo etiam recta F A habet cum B A commune segmentum D A.

Tres iam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A segmentum habent.

Sumatur rursum arcus F G æqualis prioribus B F, & C B, & intelligatur ducta esse recta G A. Rursum liquet rectas B A, G A, eundem habere situm respectu rectæ F A. Sed iam ostensum est rectam B A habere cum recta F A commune segmentum D A. Ergo etiam recta G A, cum F A commune habet segmentum D A.

Iam ergo rectæ quatuor C A, B A, G A, F A commune D A segmentum habent. Eodem prorsus modo ostendam si per totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æquales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad A vnum idemq; habituras commune segmentum D A. Hoc

tam

tam immane absurdum sequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ CA, BA habere segmentum commune. Impossibile est igitur vt duæ rectæ segmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in scholis argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis omnino indiuisibilibus numero finitis componi non posse: & est eiusmodi. Constent si fieri potest magnitudines ex punctis. Circa idem centrum descriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima seu maxima componi ex centies mille punctis, à quibus singulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate iam explicato certum est rectas illas nusquã commisceri, nisi in centro solo. Quare dũ omnes medias peripherias pertranseunt, in iis æquè multa designãt puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æquè multis punctis constant, ac proinde omnes inter se æquales erunt. Atque ita circumferentia, hac in charta descripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Alijs propè innumeris demonstrationibus hic error obruitur. Sed vnam illam hoc loco attuli præ ceteris, quòd passim sit decantata, & ex præsenti axiomate immediate pendeat.

Propositionum aliæ faciendum aliquid proponũt, & vocantur problemata; aliæ in sola contemplatione sistunt, quæ idcirco Theoremata inscribũtur.

PRO-

PROPOSITIONES.

Citationes requisitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propositiones, primus numerus designat propositionem, littera (L) cum numero sequenti librum denotat: vt si occurrat (per 5. l. 3.) ita leges (per propositionem quintam libri tertij.) Figura quærenda semper est inter figuras eius libri, in quo tum versamur: citationes reliquæ facilè intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones, primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propositiones illustriores sunt 32.35.37.41.44.45.47.

PROPOSITIO PRIMA.

Super datâ rectâ (AB) triangulum æquilaterum constituere. Fig. 23.

Centro A, interuallo AB a describatur circulus FCB, & centro B, interuallo eodem BA describatur circulus ACL, priorem secans in puncto C, ex quo ducantur rectæ CA, CB.

a Per postul. 3.

Dico triangulum ACB factum esse æquilaterum. Nam recta AC est b æqualis rectæ AB, cum sint eiusdem circuli FCB semidiametri; & recta BC etiam æqualis est eidem rectæ BA, cum ambæ sint semidiametri

b Per def. 18.

diametri circuli L C A. Ergo A C, B C
c Per axio. 1. c sunt æquales inter se: ac proinde omnia latera trianguli sunt æqualia. Ergo triangulum
d Per def. 25. d A C B & æquilaterum est, & super datâ rectâ A B constitutum, quod erat faciendum.

PROPOSITIO II.

Fig. 24. *AD datum punctum (A) datæ rectæ (E F) æqualem ponere.*

a Postul. 3. Accipe circino a interuallum E F, & trãsfer ex A in D, erit recta A D par datæ E F.

PROPOSITIO III.

Fig. 24. *Datis duabus rectis inæqualibus, de maiore (G H) minori (E F) parem auferre (G I.)*

b Postul. 3. Accipe circino b interuallum minoris datæ E F, & transfer in maiorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig. 25. *SI duorum triangulorum (X,Z) latus vnum (B A) vni (F L) & alterum (C A) alteri (I L) sit æquale, anguliq; (A & L) ab illis lateribus facti, etiam sint æquales; æquabuntur etiam & ba-*

ses

ses (B C, F I) & tota triangula (X, Z) & reliqui ad basim anguli (B, F & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur.

Nam si intelligamus triangulum Z triangulo X superponi, latera L F, L I perfectè congruent a sibi æqualibus lateribus A B, a Per axio. 8.
A C, sic vt puncta tria L, F, I, cadant super tria puncta A, B, C, ergo tum etiam basis F I tota cadet supra totam basim B C: Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula sibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Simili ferè ratiocinio, theorema sequens, cuius mox erit vsus, licebit demonstrare. Fig. 25.

Si duorum triangulorum X, Z, latera B C, F I æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adiacentes, nimirum B & C ipsis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua; & triangula ipsa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F, & I, si latus F I imponas lateri sibi æquali B C, illi d congruet. Tum verò ob æqualitatem d Per axio. 8.
angulorum F, B, & I, C etiam e F L cadet supra B A, & I L supra C A. Ergo etiam punctum, L, incidet in punctum A; (si enim caderet extra A, latera F L, I L, non inciderent in latera B A, C A.) Ergo omnia sunt per axioma 7. æqualia. e Per axio. 8.

B PRO-

PROPOSITIO V.

Fig.26. *Trianguli Isoscelis seu æquicruris ad basim anguli (A, C) æquales sunt.*

Intelligatur triangulum A B C bis positum, sed situ conuerso *c b a.* Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a*, ex hypothesi æquale est latus A B, lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam [b] ad basim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonstrandum, ijdem enim sunt anguli C &; *c.*

b Per 4. l.1.

Corollarium.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est.

PROPOSITIO VI.

Fig.26. *Si in triangulo (A B C) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiam latera (A B, C B) ijs opposita, æqualia erũt.*

Intelligatur triangulum A B C bis positum, sed situ conuerso *c b a.* Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* æquatur latus vnum A C, vni lateri *c a*, & angulus A angulo, *c*, & angulus C angulo, *a*; etiam reliqua omnia [c] erunt æqualia, ac proinde

c Per Schol. prop.4.

inde latus A B æquabitur lateri *c b*; quod erat demonstrandum, eædem enim sunt lineæ C B & *c b.*

Corollarium.

Æquiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum est.

PROPOSITIO VII.

Est propter 8, quæ sine illa seorsim proposita demonstrabitur.

PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuo æqualia (A C ipsi E F; C B ipsi F I; A B ipsi E I;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebũnt æquales (C ipsi F; A ipsi E; B ipsi I.) Fig.27.

Ponatur enim latus A B supra sibi æquale E I. Tum verò punctũ C vel incidet in punctum F vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli [a] æquales erunt. a Per axio. 7.

Si C, cadat extra F, ducatur F C. Quoniam per hypothesim latera E F, A C æquantur, erit [b] angulus E F C par angulo E C F. ergo I F C maior erit, quam E C F. ergo I F C multo maior erit, quam I C F. Rursum, quia per hypothesim I F, B C, æquantur, Fig.28. b Per 5. l.1.

c Per.5.l.1. quantur, erit I F C c par I C F. Ergo I F C & multò maior est quam I C F, & æqualis, quod est impossibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c.

Plures casus, quos hoc theorema admittit, consultò prætermisi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonstratio ex demonstratione iam posita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29. D*Atum angulum rectilineum (I A L) bifariam secare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales A B, A C; centris B ac C describe duos æquales circulos se secantes in F, ducaturque recta F A. Hæc angulum bisecabit.

Ducantur enim B F, C F; triangula F A B, F A C sunt sibi mutuo æquilatera; nam latera A B, A C ex constitutione æqualia sunt, & latera B F, C F, quia æqualium circulorum semidiametri, etiam æquantur; & A F vtrique triangulo commune est. Ergo

a Per.8.l.1. anguli B A F, C A F a æquales sunt. Bisectus est ergo datus angulus I A L. quod erat faciendum.

Corollarium.

HInc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos 4, 8, 16 &c. Angulus nimirum partes iterum bisecando.

Scholium.

M*Ethodum secandi angulos in æquales quotcunque, circino & regulâ hactenus nemo docuit.*

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curuas quasdam lineas, quadratricem videlicet & spiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli trisectio perficitur à Pappo l.4. prop.31. præsidio hyperboles, quod etiam obtineri potest ope parabolæ, vel conchoidis.

Mechanice datum angulum in quotcunque secabis æquales angulos, si ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum describas, eumq; diuidas in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per diuisionum puncta emissæ, angulum secabunt in partes totidem æquales. Fig.30.

PROPOSITIO X.

D*Atam rectam finitam (A B) secare bifariam.* Fig.31.

Super datâ A B fac triangulum æquilaterum a A G B. Angulum eius G b biseca per rectam G C. Eadem bisecabit rectam A B datam. a Per.1 l.1. b Per præced.

Nam in triangulis X, Z, latus C G est commune, & per constructionem G B, G A æqualia, anguliq; ijs contenti A G C, B G C æquales. Ergo bases A C, B C c æquantur. c Per.4.l.1.

quantur. Bisecta est ergo data A B. Quod erat faciendum.

Pro praxi satis erit centris A & B duos æquales circulos describere, se secantes in G & L, ac ducere rectam G L.

PROPOSITIO XI.

Fig. 32. *EX dato puncto (A) in data recta (L I) perpendicularem excitare.*

Circino cape æquales A C, A F. Centris C, & F describe duos æquales circulos se secantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim C B, F B. Triangula X, & Z, sibi mutuo æquilatera sunt. Ergo anguli C A B, F A B [a] æquales. Ergo B A [b] perpendicularis est. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

a Per 8. l. 1.
b Per defin. 14.

Praxis tam huius quam sequentis expeditur facillimè præsidio normæ.

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. *EX dato extra rectam infinitam (L Q) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A describe circulum, qui secet datam L Q in C & I. Rectam C I biseca [c] rectâ A B. Ea erit perpendicularis.

c Per 10. l. 1.

Ducan-

Ducantur enim A C, A I. Quoniam per constructionem triangula X & Z sunt mutuo æquilatera; erũt anguli [d] C B A, I B A æquales. Ergo A B perpendicularis [e] est. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

d Per 8. l. 1.
e Per def. 14.

PROPOSITIO XIII.

RECta (B A) super rectam (C F) consistens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales. Fig. 34.

Nam si B A insistat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli B A C, B A F, vtrimque recti. Si vero B A insistat obliquè, excitetur [a] perpendicularis A L. Quia tum anguli inæquales C A B, F A B eundem locum occupant, quem duo recti C A L, L A F, ac proinde ijs congruunt, erunt [b] his illi æquales. Quod erat demonstrandum.

a Per 11. l. 1.
b Per axio. 7.

Corollaria.

1. EOdem modo demonstrabitur si plures rectæ, quàm vna, eidem rectæ insistant, angulos effici duobus rectis æquales.

2. Duæ rectæ inuicem secantes B A C, F A L efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos. Fig. 37.

 3. Om-

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa vnum punctum constituti, conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. sunt enim quatuor recti in plures partes secti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (X R, Z R) ad idē vtrimque punctum rectæ Q R faciant angulos (X R Q, Z R Q) duobus rectis æquales; (X R, Z R) vnam rectam efficient.*

Si negas, faciant X R, B R vnam rectam. Ergo anguli X R Q, Q R B [b] conficient duos rectos, quod [c] est absurdum, cum ex hyp. X R Q, Q R Z duos rectos efficiant.

b Per 13. l. 1.
c Contra axio. 9.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37. *SI duæ rectæ (B C, F L) se secuerint in (A,) erunt anguli ad verticem (A) oppositi æquales.*

Nimirum L A B ipsi C A F, & B A F ipsi L A C. Nam quia B A insistit rectæ L F, erunt L A B, F A B, [a] pares duobus rectis. Et quia F A insistit rectæ B C, erunt [b] quoque F A C, F A B pares duobus rectis. Ergo [c] duo simul L A B, F A B æquantur duobus simul C A F, F A B. Ablato igitur communi F A B, remanent [d] æquales L A B, C A F. Eodem modo ostendam æquales esse B A F, L A C.

a Per 13. l. 1.
b Per eand.
c Per axio. 1.
d Per axio. 3.

PROPOSITIO XVI. XVII.

COntinentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 38. *IN omni triangulo angulus (A) maior est, qui maiori lateri (B O) opponitur: (B) minor, qui minori (A O.)*

Nequit A, esse par B, aliàs [a] latera B O, A O æquarentur contra hypothesin. Nequit etiam A minor esse quàm B. Nam si A minor est, B maior, poterit intra angulum B per rectam B F fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6. æquales erunt B F, A F, & si addas vtrique, O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor est quàm B O. Ergo etiam B F, F O minores sunt quàm B O, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ est omnium breuissima. Angulus igitur A nec minor est angulo B, nec æqualis. Ergo maior; quod erat demonstrandum.

a Per 6. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Fig 38. *IN triangulo latus (B O) maius est, quod opponitur maiori (A) angulo: (A O) minus, quod minori (B.)*

Est conuersa prioris. B O non est minus quam A O, alias per 18. angulus A esset minor angulo B contra hyp. Neque etiam B O æquale est A O, alias per 5. anguli A, B, æquarentur, rursus contra hyp. Ergo B O maius est quã A O. Quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo qualibet latera reliquo sunt maiora.

Est Archimedi instar axiomatis; immediate siquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quam vide supra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39. *SI à terminis vnius lateris (A B) intra triangulum duæ rectæ iunguntur (A O, B O) hæ lateribus trianguli (A C, B C) minores sunt, maiorem vero angulum (A O B) comprehendunt.*

I. Pars.

1. Pars. Produc A O in F. A C, C F sunt a maiores, quam A F. Additâ ergo communi F B, erunt A C, C B maiores quam A F, F B. Rursum O F, B F sunt b maiores quam, O B. Additâ ergo communi A O, erunt A F, F B maiores, quam A O, O B. Ergo A C, C B sunt multò maiores, quam A O, O B. a Per 20. b Per eand.

2. Pars demonstrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non vtemur.

PROPOSITIO XXII.

EX datis tribus rectis (B O, L B L O) quarum duæ qualibet reliquâ sint maiores, triangulum constituere. Fig. 40.

Assumatur datarum vna B L, atque vnâ eius extremitate B acceptâ pro centro, interuallo alterius datæ B O describatur arcus.

Deinde acceptâ pro centro extremitate alrerâ L, interuallo tertiæ L O describatur arcus priorem secans in O: ducanturque rectæ B O, L O. Dico factum.

Demonstratio patet ex constructione.

PROPOSITIO XXIII.

AD datum in rectâ punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.) Fig 40.

Ducatur vtcunque C F secans latera dati

ti anguli A. In data recta ex B accipe B L parem A F. Centro B interuallo A C describe circulum: item alium centro L interuallo F C qui priorem secet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus L B O par dato A.

Nam per constr. triangula sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum visum est hic nonnulla ad praxim angulorum necessaria proponere.

Fig. 41. *Anguli mensura est circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro describitur, vt patebit ex prop. vltima l. 6.*

Itaque quot gradus continebit arcus B C inter anguli B A C crura interceptus, tot graduum dicetur esse angulus B A C. Et quoniam rectum angulum B A F metitur quadrans peripheriæ B F, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus esse graduum 90. Similiter quia duos rectos mensurat dimidia circumferentia in 180 gradus secta, & quatuor rectos circumferentia tota secta in gradus 360, dicentur duo recti efficere gradus 180, & quatuor recti gradus 360. His prænotatis praxes angulorum sunt.

Fig. 42. *1. Ad datum in recta punctum B angulum statuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum describe C F.*

Centro B puncto dato, describe eodem interuallo arcum L Z: ex quo aufer L O parem C F. Per B & O duc rectam: erit L B O par dato A.

2. Dati anguli O P Q gradus examinare. Fit Fig. 43. *hoc facillimè per semicirculum corneum transparentem, in 180 gradus diuisum. Centrum semicirculi pone supra P verticem anguli, & semicirculi radium P L supra anguli latus P Q. Arcus L O inter anguli crura interceptus ostendet, quot graduum sit datus angulus.*

3. Angulum construere datos continentem gradus, vt 42. Duc rectam X Q, in qua signa punctum P. Super P pone semicirculi centrum eiusque semidiametrum P L supra P Q. Ab L numera gradus 42, vsque in O. per O ex P ducta recta dabit angulum O P L graduum 42.

Horum omnium demonstratio pendet ex vltima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

SI duo triangula (B A C, B A F) duo Fig. 44. ***latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; vnum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) maiorem habeat altero (B A C;) habebit quoque basim B F maiorem basi (B C.)***

Et si basim maiorem habuerit, habebit angulum maiorem.

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia A C, A F ponuntur æquales. Ergo B F cadit ſupra C. Iunge C F. Angulus B C F eſt maior angulo A C F; hoc eſt per 5. angulo A F C, hoc eſt multò maior angulo B F C. Ergo [a] B F oppoſita maiori angulo B C F maior, eſt quam B C oppoſita minori B F C.

a Per 19. l. 1.

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25.

SI duo triangula (X, Z) duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri (B ipſi F & C ipſi I,) & vnum latus vni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit (vt B C, F I) vel quod vni æqualium angulorum opponitur (vt A C, L I:) reliqua omnia erunt æqualia.

Ponantur primo æqualia eſſe latera B C, F I, inter æquales angulos poſita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera A C, L I æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 8. p. 32. quę ab hac non dependet. Ergo

Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXVII.

SI duas rectas (A B, C F) parallelas ſecuerit recta G O: erunt 1. æquales alterni anguli (R L O, Q O L, item B L O, C O L) 2. externus (G L B) æqualis interno ad eandem partem (L O F) (item G L R ipſi L O C.) 3. Duo ad eandem partē interni ſimul (A L O, C O L) æquales duobus rectis: item duo B L O, F O L duobus rectis æquales. Fig. 48.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares O R, L Q erunt [a] hæ ad vtramque parallelam A B, C F perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque [b] ex parallelis auferent partes R L, Q O. Ergo triangula, X, Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo [c] anguli R L O, Q O L alterni æqualibus lateribus R O, Q L oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos B L O, C O L æquales eſſe. Nam quia tam B L O, A L O, quàm C O L, F O L æquantur [d] duobus rectis; erunt B L O, A L O æquales ipſis C O L, F O L. ablatis ergo æqualibus R L O,

Fig. 46.
a Per axio. 11.
b Per axio. 12.
c Per 8. l. 1.
d Per 13. l. 1.

R L O, F O L, erunt reliqui B L O, C O L etiam æquales.

2. Pars. G L B æquatur ad verticem [e] opposito R L O. Sed R L O æquatur per 1. partem L O F. Ergo G L B externus æquatur interno L O F: quod erat alterum.

e Per 15. l. 1.

3. Pars. A L O per 1. partem æquatur F O L. Atqui F O L cum C O L [f] facit duos rectos. Ergo etiam A L O cùm C O L facit duos rectos. Quod erat tertium.

f Per 13. l. 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 47.

SI duas rectas (A B, C F) secans recta (G O) alternos angulos (A L O, F O L) æquales fecerit, erunt (A B, C F) parallelæ.

Si negas, sit ergo alia X L Z per punctum L ad C F parallela.

Ergo [a] angulus X L O par est alterno F O L; Quod fieri non potest, cùm per hyp. A L O par sit eidem F O L.

a Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 45. vel 46.

SI duas rectas (A B, C F) secans recta (G O) fecerit externum (G L B) æqualem opposito interno (L O F) vel duos ad easdem partes internos A L O, C O L pares duobus rectis, erunt (A B, C F) parallelæ.

Per 15. G L B æquatur A L O opposito ad verticem. Sed per hyp. G L B æquatur L O F. Ergo etiam A L O æquatur sibi alterno L O F. Ergo [b] A B, C F sunt parallelæ.

b Per præced.

Deinde C O L cum F O L facit duos rectos. Sed per hyp. idem C O L etiam cum A L O facit duos rectos. Ergo A L O, F O L alterni æquales sunt. Ergo rursum A B, C F [c] sunt parallelæ.

c Per præc.

Corollarium.

EX secunda parte patet omne rectangulum esse parallelogrammum.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45.

SI duæ rectæ (A B, C F) sint parallelæ ad eandem rectam (D N) erunt inter se parallelæ.

Patet per se, & ex præcedentibus. Nam si omnes secentur à recta G O, erit [a] angulus externus G L B par interno L D N. est vero L D N externus [b] respectu D O F, ac proinde æqualis. Ergo etiam G L B par est L O F. Ergo A B, C F sunt [c] parallelæ.

a Per 27. l. 1.

b Per 27. l. 1.

c Per præc.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. *Per datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (C F.)*

Ex A ducatur vtcunque A L, secans datam F C. Ad punctum A fiat a angulus L A S par angulo A L F. Erit A S parallela ad C F, vt patet ex 28, cum alterni anguli S A L, F L A sint æquales.

a Per 23. l. 1.

Praxis: ducta A L, centro L describe arcum I Q, & centro A eodem interuallo arcum O X; ex quo aufer O B parem I Q. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonstratio pendet ex 29. l. 3.

Fig. 49. *Aliter. Centro quopiam P describe circulum qui transeat per datum punctum A, & secet datam C F in Q, & O. Arcui Q A accipe æqualem O N, recta A N erit parallela.*

Demonstratio pendet ex 29, libri 3. & ex 28. huius.

Scholium.

Demonstrata iam igitur est parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, eiusque interpretes assumunt minus rectè; cum non sit axioma, sed theorema, cuius veritas nō magis per se appareat, quam ipsius 29. propositionis. Quia tamen deinceps sæpius adhibebitur, id hoc loco iam facilè ex præmissis demonstrabimus.

Theo-

Theorema.

Si recta M A incidens in rectas B C, A D, faciat angulos internos ad easdem partes B A D, A B C, duobus rectis minores, rectæ B C, A D concurrent versus eam partem, quam spectant anguli duobus rectis minores. Fig 50.

Quoniam per hyp. C B A, D A B duobus rectis sunt minores; fiant C B A, X A B duobus rectis æquales: Eruntq; B C, A X a parallelæ. Assumo tanquam axioma per se notum, inter rectas A D, A X in infinitum productas duci posse aliquam ad A M parallelam, puta Z X, quæ maior sit quam A B. Accipiatur ipsi Z X æqualis A R, & iunge Z R. Quoniam A R, Z X sunt parallelæ, erūt b alterni X Z A, R A Z æquales. Sunt autem & latera X Z, Z A æqualia lateribus R A, A Z, per constr. Ergo etiam c anguli R Z A, X A Z æquales sunt. Ergo R Z est d parallela ad A X. Sed etiam B C est parallela ad A X. Ergo R Z & B C sunt e parallelæ. Est igitur B C & parallela ad R Z, & inclusa triangulo A R Z. Ergo cum produci in infinitum posit, neceßariò occurret aliquando rectæ A Z, nam neque euadere potest per sibi parallelam R Z, neque pertingere in A, aliàs duæ rectæ haberent commune segmentum. Liquet ergo propositum.

a Per 29. l. 1.
b Per 27. l. 1.
c Per 4. l. 1.
d Per 28. l. 1.
e Per 30. l. 1.

Demonstratio Clauij est à parallelis independens, sed prolixißima & multùm operosa: Procli nititur hoc principio, quod recta vnam parallellam secans, etiam alteram sectura sit, si producatur. Ve-

rum

rum hoc per se notum non est, ob rationem datam ad def.36.

Corollarium.

Fig.50. *Hinc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def.36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc AX parallelam ad BC; erunt XAB, CBA duobus rectis* [o] *æquales. Ergo ZAB, CBA sunt duobus rectis minores. Ergo per theorema iam demonstratum BC, AZ concurrunt.*

o Per 27. l.1.

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig.51. *Omnis trianguli externus quiuis angulus (FBC) duobus internis oppositis (A & C) æqualis est.*

a Per 31. l.1. Per B duc [a] BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC secat FA, erit externus angulus FBL interno A [b] æqualis.
b Per 27. l.1. Et quia easdem parallelas BL, AC secat etiam recta BC, erit LBC sibi alterno C
c Per eand. [c] æqualis. Ergo totus FBC æquatur vtrique simul A & C. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

Fig.51. 1. Externus angulus (FBC) quolibet internorum oppositorum, A, vel, C, maior est.

2. An-

2. Angulorum (C & AOB) eandem basim (AB) habentium, maior est (AOB,) qui intra cadit. Fig.39.

Producatur enim AO, in F. AOB per hanc maior est quam OFB; & OFB per hanc eandem maior est quàm C. Ergo AOB multò maior est quàm C.

3. Si ab vno puncto (A) in vnam rectam (BC) incidant duæ rectæ altera (AO) obliquè, perpendiculariter verò altera (AF;) hæc cadet versus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, si fieri potest, versus obtusum AOC, puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus, respectu recti AQB, ac proinde illo maior per coroll.1. quod est absurdum. Fig.55.

PROPOS: XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres simul anguli, duobus rectis sunt æquales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc vnum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppositis A & C æqualis [a] est. Atqui [b] FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonstrandum. Fig.52.
a Per 1. partem huius.
b Per 13. l.1.

Aliter. Ducatur HM parallela lateri AC. Fig.53.

 AC.

A C. Anguli alterni tam O, C, quàm N, A æquales c sunt. Sed O, Q. N conficiunt d duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt : quod erat demonstrandum.

c Per 27. l. 1.
d Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. TRes simul anguli cuiusuis trianguli æquales sunt tribus simul cuiuscunque alterius.

5. Si in triangulo vnus rectus est, reliqui sunt acuti.

6. Si in triangulo vnus est rectus, reliqui duo simul etiam vnum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus est.

8. Cum scitur quot graduum sit vnus angulus, scitur etiam quot gradus faciant duo reliqui simul. Et cum scitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum summa, scitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in vno triangulo duo anguli aut singuli, aut simul, æquales sunt duobus angulis aut singulis, aut simul, in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit.

10. Cum duo triangula vnum angulum æqualem habent, etiam reliquorum summæ æquantur.

11. Cum in isoscele angulus æquis cruribus contentus est rectus, reliqui ad basim sunt

sunt semirecti. Et Isoscelis ad basim anguli semper sunt acuti.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias vnius recti. Facit enim tertiam partem duorum rectorum. Ergo duas tertias vnius.

13. Hinc anguli recti (B A C) facillima trisectio; si super A C fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum F A C sint duæ tertiæ vnius recti, erit B A F recti vna tertia. Fig. 54.

14. Perpendicularis A F est breuissima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci possunt. Quoniam enim angulus F rectus est, erit per coroll. 5 A O F acutus. Ergo f A F minor quam A O quælibet. Fig. 55.

f Per 19. l. 1.

15. Ex vno puncto ad vnam rectam tantum vna perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Scholium.

HVius pulcherrimi, fœcundissimique theorematis, cuius per Mathesim vniuersam vsus prope immensus, inuentor est Pythagoras teste Eudemo veteri geometrâ. Frequentissime eiusdem meminit Aristoteles, qui illud etiam exemplum statuit perfectissimæ demonstrationis. Sed quemadmodum ex hac propositione iam didicimus, quot rectis angulis, eius anguli æquivaleant, ita eiusdem beneficio cuiuslibet figuræ rectilineæ siue interni, siue externi

 anguli,

anguli, quot rectos conficiant, præclarè innotescet tribus sequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Fig.56. OMnis quadranguli quatuor simul anguli efficiunt quatuor rectos.

Nam si per oppositos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangula secabit, quo-
a Per 32.l.1. *rum anguli simul conficiunt* a *rectos quatuor.*

Theorema 2.

OMnes simul anguli cuiuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Fig.57. *Ex quouis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ secabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare*
a Per 32.l.1. *cum singula triangula* a *conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera.*
b Coroll.3. p.13.l.1. *Sed anguli circa punctum A,* b *conficiunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.*

Hinc patet omnes eiusdem speciei rectilineas figuras æquales habere angulorum summas; Quod admiratione dignum est.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: a producto aufer 4; restabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theore-

Theorema 3.

OMnes simul externi anguli cuiuscum- Fig.58.
que figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli figuræ interni anguli, cum singulis externis conficiunt duos c *rectos. Ergo interni simul* c Per 13.l.1.
omnes, cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Sed (vt in præced. ostendimus) interni simul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.

Mira sanè hæc figurarum rectilinearum proprietas est: ex qua illud etiam consequitur, omnes cuiuscumque speciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum summas. Itaque trianguli alicuius tres externi anguli æquales sunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorsus admiratione sunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

SI duas rectas æquales & parallelas Fig.59.
(AB, CF) iungant duæ aliæ (AC, BF) erũt etiam illæ æquales & parallelæ.

Parallelas AB, CF secet AF. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli BAF, CFA
a æquales. Ponitur autem latus AB æqua- a Per 27.l.1.
le

le lateri C F, & A F vtrique triangulo est
b Per 4. l.1. commune. Ergo b bases B F, A C æquantur (quod erat primum.) Et anguli ad basim A F B, F A C sunt æquales: ac proinde A F incidens in rectas A C, B F facit alternos A F B, F A C æquales. Ergo c A C,
c Per 28. l.1. B F sunt etiam parallelæ. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 59. *Parallelogrammi opposita latera & anguli æquantur, ipsumq́; à diametro bisecatur.*

a Per defin. 35. Quoniam A B, C F sunt a parallelæ, in easq́ue incidit A F, erunt alterni B A F,
b Per 27. l.1. C F A b æquales. Item quia A C, B F sunt
c Per def. 35. c parallelæ, in easq́ue incidit A F, erunt d alterni C A F, B F A æquales. Ergo totus
d Per 27. l.1. B A C toti B F C æqualis est. Eodem modo ostendam B & C æquales esse. Quod erat primum.

Quia verò iam ostendi triangula Q, R, quæ vnum latus A F commune habent, etiam angulos lateri A F adiacentes habere æquales, nimirum B A F ipsi C F A, &
e Per 26. l.1. C A F ipsi B F A. Erunt e etiam latera A B ipsi F C, & B F ipsi C A, æqualia, itemq́ue ipsa triangula.

Scho-

Scholium.

Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione Fig. 60. *libro 2. præmittendâ, facilè elicitur dimensio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum A F, A C. Sit exem. gr. A F pedum 8, A C, 4. Duc 8 in 4, proueniunt 32 pedes quadrati pro area rectanguli.*

Quadrati vero area habetur ex vno latere Fig. 61. *(F I) per se ipsum multiplicato: vt si latus (F I) sit 5 pedum; duc 5 in se, proueniunt 25 pedes quadrati pro area quadrati.*

Demonstratio ex hac prop. patet ductis per laterum diuisiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma super basi eadem Fig. 62. *(A B) vel æquali, & inter easdem parallelas (C Q, A X) constituta, sunt æqualia.*

Quia A L, B Q a sunt parallelæ, easq́ue a Per def. 35.
secat C Q; erit b externus C L A par inter- b Per 27. l.1.
no F Q B. Deinde quia tam C F quam L Q æquantur c eidem A B, erunt C F, L Q æ- c Per 34. l.1.
quales. Adde vtrisque F L; erunt totæ C L, F Q æquales. Insuper & A L, B Q

d æquales

d Per eand. *d* æquales sunt. Triangula igitur C L A,
e Per 4. l.1. F Q B æqualia *e* sunt. Ergo ablato communi F O L, plana F O A C, Q B O L remanent æqualia. Quibus vtrisque adde planum A O B, fiunt parallelogrāma tota A C F B, A L Q B æqualia. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio fiet vniuersalis p.1. lib.6. Obseruent hic tyrones, quamuis parallelogramma inter easdem parallelas sine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eadem basi AB, semper tamen manere æqualia ex vi demonstrationis iam datæ.

Scholium.

Fig. 62. *Ex hoc theoremate habetur dimensio parallelogrammi cuiuscunque. Illius igitur area producitur ex altitudine Q X seu C A ducta in basim A B.*

f Per schol. preced. *Nam area rectanguli C B parallelogrammo B L æqualis, fit* f *ex A C ducta in A B. Ergo &c.*

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 63. *Triangula (A C B, A F B) super basi eadem (A B) vel æquali, inter easdem parallelas (C I, A Z) constituta, sunt æqualia.*

Lateribus A C, A F duc parallelas B L,

B I.

B I. Parallelogramma A C L B, A F I B sunt *a* æqualia. Sed horum triangula data *b* sunt dimidia. Ergo triangula data *c* sunt æqualia. a Per præc. b Per 34. l.1. c Per axio. 6.

Hæc propositio fiet vniuersalis p.1 l.6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare iussimus prop. præced. de parallelogrammis.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig. 64. *Triangula æqualia (A C B, A F B) super eadem basi (A B) vel æquali, ad easdem partes constituta, sunt inter easdem parallelas (A B, C F.)*

Si negas, sit C L parallela ad A B, & ducatur B L. Igitur A L B æquatur *a* A C B. a Per præc. Sed ex hyp. etiam A F B ipsi A C B æquale est. Ergo A L B, & A F B æqualia sunt, pars & totum. Quod fieri non potest. Igitur &c.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 65. *Si triangulum (A F B) sit in iisdem parallelis cum parallelogrammo (A L) & basim eandem habeat (A B) vel æqualem, ipsius dimidium erit.*

d Per 37. & 38. l.1. Duc C B. Triangula A F B, & A C B *d* æquan-

quane Per 34.l.1. quantur. Sed e A C B est dimidium parallelogrammi A L. Ergo etiam A F B est dimidium A L. Quod erat demonstrandũ.

Scholium.

Fig 65. *Ex hac, & ex scholio prop. 35. discimus, aream trianguli (A F B) cuiuscunque produci ex dimidia altitudine F I ducta in basim (A B) vel ex dimidia basi in altitudinem. Quare noto vno latere trianguli, & altitudine, siue perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo opposito ducitur; habetur trianguli dimensio: vt si basis A B sit pedum 100. altitudo F I, 85; multiplica basis dimidium 50. per 85. prouenient 4250 pedes quadrati pro area trianguli A F B. Porro altitudo siue perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari potest, mechanicè innotescit, vti latera. Si area peragrari nequeat, inuenietur geometricè altitudo per 12. & 13. lib. 2. vt in scholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo est eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Huius ergo semissis ducta in latus alterum recto adiacens dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 66. ***Dato triangulo (A C B) æquale parallelogrammum facere habens angulum parem dato (O.)***

Ba-

Basim A B biseca in F. per C duc C X parallelam A B a. Fac b angulum B A L parem dato O. Duc F I parallelam A L. c Erit A L I F, quod quæritur. a Per 31. l. 1. b 23. l. 1. c Per 31. l. 1.

Ducatur enim F C. Parallelogrammum A I, angulum habet L A F parem dato, O; & est æquale triangulo dato A C B, cum tam d triangulum A C B, quàm e parallelogrammum A I, dupla sint eiusdem trianguli A C F. d Per 38. l. 1. e Per præc.

Corollarium.

Dato triangulo A C B habetur æquale rectangulum, si per C ducatur parallela lateri A B, & bisectâ A B in F, ex B erigatur perpendicularis B Q. Erit enim rectangulum sub F B, & Q B par triangulo A C B. Fig. 66.

PROPOSITIO XLIII.

In parallelogrammo (B L,) complementa (B O, O L) eorum, quæ circa diametrum existunt (R F & C S) sunt æqualia. Fig 67.

Si per diametri A Q, punctum quoduis O ducatur C F parallela lateri A B, & R S parallela lateri B Q; secatur totum B L in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum sunt, R F, C S, duo reliqua B O, O L, sunt horum complementa.

Ea

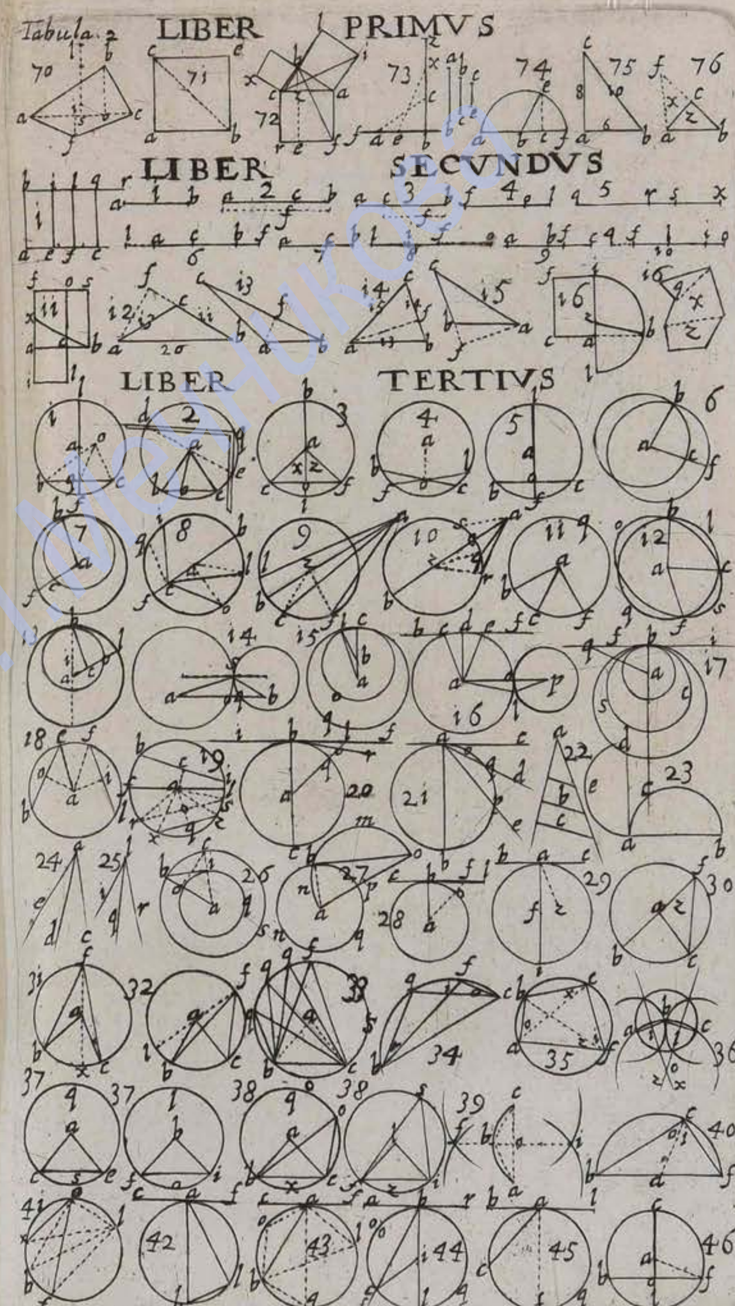
Ea esse æqualia sic ostenditur. Triangula
a Per 34.l.1. A B Q A L Q [a] æquantur, similiter A R O,
b Per eand. O C Q [b] æquantur A F O, O S Q. Ergo si ab æqualibus A B Q, A L Q, auferas æqualia, hinc A R O, O C Q, inde A F O, O S Q, æqualia remanent B O, & O L. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 68. *AD datam rectam (O S) parallelogrammum constituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

f Per 42.l.1. Fac *f* parallelogrammum R C dato V æquale, habens angulum R O C parem dato X, & pone latus R O in directum datæ O S. Per S duc S Q *g* parallelam O C,
g Per 31.l.1. cui occurrat B C producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat B R protractæ in A. Per A duc A L parallelam ad O S, cui occurrant C O, & Q S productæ in F & L. Parallelogrammum O L est quod petitur.
i Per prac. Nam O L *i* æquatur R C; hoc est per constructionem, dato triangulo V : & est
k Per 15.l.1. ad datam O S, habetque angulum *k* F O S parem angulo R O C, hoc est per const. parem dato X.

PRO-



PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo (C B A) æquale parallelogrammum construere ad datam rectam (I Q) & in dato angulo (H.) Fig.69.

Rectilineam resolue in triangula A,B, C ducendo rectas F L,F I.

Ad datam I Q in angulo dato ; H , fac *a* parallelogrammũ I V æquale triangulo, A, a Per 44.l.1.
Tum producatur IR infinitè versus P:& ad rectã R V, in angulo V R P fac *b* parallelogrammum R Z æquale trigono B. Rursum ad rectam S Z in angulo Z S P fac parallelogrammum S G æquale trigono C. b Per eand.
I G est parallelogrammum quæsitum.

Nam *c* angulus Z V R par est sibi alterno I R V. Sed *d* Q V R & I R V sunt æquales duobus rectis. Ergo etiam Q V R & Z V R duobus rectis æquantur. Ergo *f* Q V & Z V sunt in directum. Pari modo ostendam Q Z & G Z esse in directum. Ergo tota Q V Z G est vna recta , & quidem parallela ad I X, cum per const. Q V sit ad I P parallela. Est vero etiam *g* X G parallela ad I Q, cum X G sit parallela ad S Z, & S Z ipsi R V, & R V ipsi I Q. c Per 27.l.1. d Per eand. f Per 14 l.1. g Per 30.l.1.

Ergo *h* I G est parallelogrammum : esse autem quale petitur patet ex cõstructione. 35. h Per defin.

Scholium.

Adiungo problema vtile futurum ad praxim propositionis 14.l.2.

Fig.70. tabulâ 2. Dato quadrangulo B F, rectangulum æquale describere.

Resolue in triangula per rectam A C. Ex oppositis angulis demitte perpendiculares B O, F I. biseca A C in S. Ex S erige perpendicularem S L parem duabus B O, F I. Rectangulum sub L S, & S A æquatur dato B F. Demonstratio patet ex 41.

PROPOSITIO XLVI.

A Datâ rectâ (A B) quadratum describere.

Fig.71. Erige duas perpendiculares æquales datæ A B nempè A C, B E, & iunge C E. Dico factum.

a Per constr. Cum enim anguli A & B duo sint a re-
b Per 29.l.1. cti, erunt b A C, B E parallelæ: sunt verò
c Per constr. etiam c æquales. Ergo C E d A B sunt pa-
d Per 33.l.1. rallelæ & æquales. Ergo figura est parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes sunt recti (cum enim A, & B sint
e Per 34.l.1. e recti, etiam recti erunt f oppositi, E, & C.) Ergo figura A E, est quadratum.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (A B C) rectangulo, quadratum lateris (A C) quod recto angulo opponitur, æquale est duobus simul reliquorum laterum (A B, C B) quadratis. Fig.72.

Ducantur I C, B F, & B E parallela A F. Si angulis I A B, F A C rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis B A C, erunt toti I A C, F A B æquales. Sunt verò in triangulis I A C, F A B etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se
a æqualia, nempe, I A, C A, ipsis B A, F A, a Per defin.
alterum alteri. Ergo triangula I A C, F A B, quadrati.
b æquantur: Quæ, quia cum parallelogram- b Per 4.l.1.
mis A B L I & Z A F E consistunt in iisdem basibus I A, F A, & in iisdem paralle-
lis I A, L B C, & A F, E Z B sunt c eorum c Per 41.l.1.
dimidia. Ergo parallelogramma A B L I, Z A F E, vtpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se. Eodem discursu ductis rectis A X, B R ostendam parallelogramma, E C, B X æqualia esse. Totum igitur A R vtrisque I B, & B X æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Assumptum fuit L B C esse parallelam I A, adeòque L B, B C esse vnam rectam. Id

 verò

verò patet ex 14, cum anguli LBA, & CBA ambo recti sint per hypothesim.

Scholium.

Hoc theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras similes extendet) Pythagoricum appellatur passim, ab inuentore Pythagora; qui, vt testantur Proclus, Vitruuius, aliiq;, Musis victimas immolauit, quod se in tam præclaro inuento ab ijs adiutum putaret. Ignorabat videlicet scientiarum Dominum, verum & vnicum omnis sapientiæ auctorem Deum; aut certe si cognouit, non sicut Deum glorificauit. Frequens porro huius theorematis & eximius per Mathematicam totam vsus est; ac viam inprimis ad incommensurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ philosophiæ, cognoscendas aperit.

Quadrati latus esse diametro incommensurabile, celebratissimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem præsertim & Platonem, adeo vt qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem
Fig. 71. diceret. Notitia porro huius mysterij duxisse videtur originem ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus sit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC ac proinde duplum vnius. Quare cum quadratum diametri CB sit 2, & quadratum lateris AB, sit vnitas, erit diameter CB radix quadrata, 2; & latus AB radix quadrata vnitatis, siue ipsa vnitas, quarum proportio (vt suo loco demonstrabitur) numeris expli-

pari nequit, ac proinde incommensurabiles sunt.

Atque hoc vel vnico argumento, tametsi cetera omnia deficerent, euidentissimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse: alias enim nullæ essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

His subiungo tria problemata ex eadem propositione deducta, quorum vsus frequentior.

Problema 1.

Datis quotcunque quadratis, vnum omnibus Fig. 73.
æquale construere.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaq; transfer BA, & BC & iunge AC. erit ex AC quadratum æquale
a quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in a Per 47. l.1.
X: & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & iunge EX: erit quadratum ex EX æquale
b quadratis ex EB (seu EC) & ex BX: hoc est b Per eand.
æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE.

Problema 2.

Datis duabus rectis inæqualibus AB, BC, ex- Fig. 74.
hibere quadratum, quo quadratum maioris AB, excedit quadratum minoris BC.

Centro B interuallo BA describe circulum. Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peri-

pheriæ in E. Quadratum ex C E est excessus quæsitus.

Ducatur enim B E. quadratum B E, hoc est A B, æquatur [c] *quadrato B C, & quadrato C E. Ergo &c.*

c Per 47. l.1.

Problema 3.

Notis duobus quibuscunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum inuenire.

Fig. 75. *Latera rectum angulum ambientia sint A C, A B, hoc 6 pedum, illud 8: Oporteat inuenire quot pedum sit C B recto oppositum. Duc 6 & 8 in se ipsa: orientur laterum quadrata 36 & 64: quorum summa est 100. Radix quadrata 100, nempe 10 dat pedes lateris B C quæsiti. Demonst. patet ex 47. Nam summa quadratorum B A & A C æquatur quadrato B C. Ergo horum summæ radix eadem est cum radice seu latere B C.*

Nota sint deinde latera A B, B C, hoc 10 pedum, illud 6. Oporteat inuenire A C. Lateris A B quadratum 36 aufer ex 100, quadrato lateris B C. Residuum 64 erit quadratum lateris A C. Radix ergo 64. (nempe 8) dat pedes lateris A C.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 76. ***Si quadratum ab vno trianguli latere (A B) descriptum, sit æquale duobus reliquorum laterum (A C, B C) quadratis; angulus (A C B) quem reliqua latera continent, rectus erit.***

Si

Si negas, erit angulus A C B recto maior aut minor. Ergo (vt demonstrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum A B non erit æquale quadratis A C, B C, contra hypothesim.

Vel sic. Duc F C perpendicularem ad A C, & æqualem C B, & iunge A F. Quadratum A F æquale est [a] quadratis F C, C A; hoc est [b] quadratis B C, C A; hoc est per hyp. quadrato A B. Ergo rectæ A F, A B æquales sunt. Quoniam igitur trigona X, Z, sunt sibi mutuo æquilatera, anguli ad C [c] sunt æquales. Ergo [d] recti. Quod erat demonstrandum.

a Per 47. l.1.
b Per construct.
c Per 8. l.1.
d Per def. 14.

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ LIBER SECVNDVS.

HIc liber mole paruus, at præstantiâ ac vtilitate theorematum planè magnus. Tyrones, scio quod dico, nondum capient; sed esse verissimum vlterius prouecti, vsu ipso certissimè intelligent.

DEFINITIO.

Fig. 60. li. 1. PArallelogrammum rectangulum (A F) (quod rectangulum simpliciter sine vllo addito appellari solet) contineri dicitur sub duabus lineis rectis (A C, A F) rectum angulum comprehendentibus.

Nam earum altera A C altitudinem rectanguli, altera A F latitudinem determinat. Deinde si intelligatur latus A C ferri perpendiculariter per totam A F, aut A F per totam A C, producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, seu multiplicatione duarum laterum contiguorum.

Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum sub Fig. 2. lib. 2. (vel ex) A C, C B, vel breuitatis causa, rectangulum A C B, designatur rectangulum quod continetur

tinetur sub A C, & C B ad rectum angulum constitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum sub A B, C B, vel rectangulum A B C, designatur rectangulum contentum sub rectis A B, & B C rectum angulum comprehendentibus. Fig. ead.

Rectangulum porro aliud est oblongum, aliud quadratum. Oblongum est, quod latera contigua habet inæqualia, siue quod continetur sub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum est, quod sub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum æqualitatis in hoc libro est. Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint duæ rectæ (A B, A C) quarum altera secta sit in quotcunque partes (A E, E F, F C:) erit rectangulum sub illis duabus (A B, A C) comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub insecta (A B) & singulis sectæ partibus (A E, E F, F C) continentur. Fig. 1. lib. 2.

Statue A B perpendicularem ad A C, per B duc infinitã B R perpendiculare ad A B. Ex E, F, C erige perpendiculares E I, F L, C Q. Erit B C rectãgulũ sub A B & A C, & est æquale rectangulis B E, I F, L C; hoc est (quia tam I E, quàm L F sunt a æquales a Per 29. & 34. l. 1.

les A B) rectangulis sub A B, A E, sub A B, E F, sub A B, F C.

Scholium.

Decem prima huius libri theoremata etiam vera sunt in numeris, si ut lineæ diuidantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per se ipsum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. *Si recta (A B) secta sit vtcunque (in C) duo rectangula, sub tota (A B) & partibus (A C, C B) comprehensa, quadrato totius æqualia sunt.*

Accipiatur F æqualis A B.

b Per 1. l. 2. Rect. F A B. Æ. b { rect. F A C / rect. F C B }

hoc est, quia F & A B sunt æquales inter se

Quad. ex A B. Æ. { rect. B A C / rect. A B C }

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *Sit recta (A B) vtcunque secta (in C) erit rectangulum sub tota (A B) & partium alterutrâ (B C) comprehensum, æquale rectangulo sub partibus (A C,*

A C, C B) vna cum quadrato prædictæ partis (B C.)

Assume F æqualem C B.

Rect. A B F. Æ. d { rect. A C F / rect. C B F } d Per 1. l. 2.

hoc est, quia æquales sunt C B & F,

Rect. A B C. Æ. { rect. A C B. / quad. C B. }

PROPOSITIO IV.

Sit recta (F L) vtcunque secta (in O:) erit quadratum totius æquale quadratis partium (F O, O L) & bis rectãgulo sub partibus (F O, O L) contento. Fig. 4.

Quad. F L. Æ. e rect. F L O cum rect. L F O e Per 2. l. 2.

Atqui rect. F L O. Æ. f { rect. F O L / quad. O L } f Per 3. l. 2.

& rect. L F O. Æ. { rect. L O F / quad. F O } g Per eand.

Ergo quad. F L. Æ. g { rect. F O L / quad. O L / rect. F O L / quad. F O. }

Id est quad. F L. Æ. { rect. F O L bis / quad. O L / quad. F O. }

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *SI recta (QX) secta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S;) erit rectangulum sub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, vnà cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

b Per 1.l.2. Rect.QSX b Æ. { rect.QR,SX / rect. RSX }

Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX

Rect.QR,SX Æ. rect. RXS, id est

c Per 3.l.2. Æ. c { rect.RSX / quad. SX }

Ergo rect.QSX. Æ. { rect. RSX / quad. SX / rect. RSX }

Addatur vtrisque quad.RS. habebitur

e Per 4.l.2. { rect.QSX / quad. RS } Æ. { rect.RSX / quad. SX / rect.RSX / quad. RS } id est e quad. RX seu QR

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. *SI recta (AB) sit bifariam secta (in C,) eiq; recta quædam adijciatur (BF:) erit*

erit rectangulum sub tota composita (AF) & adiecta (BF) contentum, vnà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compositæ ex dimidia & adiecta.

Adde indirectum LA, æqualem adiectæ BF. Cum æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Vnde LF secta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect.LBF. / cum quad.CB } Æ. d quad.CF   d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF

rect.LBF. Æ. rect. AFB.

Ergo { rect.AFB. / quad.CB. } Æ. quad.CF

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit vtcunque secta (in C) erunt quadrata totius (AB) & segmenti alterutrus (AC) æqualia bis rectangulo contento sub tota (AB) & segmento dicto (AC) vnà cum quadrato segmenti alterius (CB.) Fig. 7.

Quad.AB, a Æ. { rect.BCA bis / quad. AC / quad.BC. }   a Per 4.l.2.

Adde

Adde vtriſque quad. A C. erunt

Quad. A B. / quad. A C Æ. rect. B C A bis / quad. A C bis / quad. B C

Atqui rect. B C A bis cum quadrato A C bis, æquatur [b] rectangulo B A C bis. Quare ſi pro B C A bis & quad. A C bis ſubſtituamus B A C bis; erit

b Per 3. l. 2.

Quad. A B. / quad. A C Æ. rect. B A C bis / quad. B C

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8.

SI recta (L F) fuerit ſecta bifariam (in I) eiq́; quædam recta adijciatur (F O) erit rectangulum (L I O) quod ſub (L I) dimidia, & (I O) compoſita ex dimidia & adiecta continetur, quater ſumptum, vnà cum quadrato adiectæ (F O) æquale quadrato totius compoſitæ (L O.)

a Per prac.

Quad. I O. / quad. I F [a] Æ. rect. O I F bis / quad. F O

hoc eſt, quia ex hyp. F I, L I, ſunt æquales, ac proinde quad. F I eſt quad. L I, & rect. O I F eſt rect O I L, ſeu L I O

quad. I O. / quad. L I Æ. rect. L I O bis / quad. F O

Quare ſi vtriſque æqualibus addas rect. L I O bis: Erit

quad.

quad. I O / quad. L I / rect. L I O bis

id eſt

[b] quad. L O. Æ. rect. L I O bis / quad. F O / rect. L I O bis

b Per 3. l. 2.

Id eſt

Æ. rect. L I O quater / & quad. F O

PROPOSITIO IX.

SI recta (A C) ſit diuiſa bifariam (in B) & non bifariam (in F:) erunt quadrata partium inæqualium (A F, F C) dupla quadratorum dimidiæ (A B) & partis intermediæ (B F.)

Fig. 9.

quad. A F. Æ. [a] rect. A B F bis / quad. A B / quad. B F.

a Per 4. l. 2.

Addito igitur vtriſque quad. F C,

quad. A F. / quad. F C Æ. rect. A B F bis / quad. A B / quad. B F / quad. F C

Sed rect. A B F eſt rect. C B F, quia A B, B C ſunt æquales ex hyp.

Ergo

$$\text{Ergo} \left\{\begin{array}{l} \text{quad. A F.} \\ \text{quad. F C} \end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l} \text{rect. C B F bis} \\ \text{quad. A B} \\ \text{quad. B F} \\ \text{quad. F C} \end{array}\right\}$$

b Per 7. l. 2. Atqui *b* C B F bis cum quad. F C æquantur quadrata B C, B F, seu A B, B F: quare si hæc illis substituas, erunt

$$\left\{\begin{array}{l} \text{quad. A F.} \\ \text{quad. F C} \end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l} \text{quad. A B} \\ \text{quad. A B} \\ \text{quad. B F} \\ \text{quad. B F} \end{array}\right\}$$

Id est

$$\left.\begin{array}{l} \text{quad. A B} \\ \text{quad. B F} \end{array}\right\} \text{bis}$$

PROPOSITIO X.

Fig. 10. *Si recta (F I) sit bisecta (in L) eiq; quædam recta adijciatur (I O:) erunt quadrata totius compositæ (F O) & adiectæ (I O) dupla quadratorum quæ describuntur super dimidiâ (F L) & super (L O) compositâ ex dimidia & adiecta.*

Adijciatur in directum Q F, æqualis I O. Quia ergo etiam F L, I L æquantur ex hyp. erunt totæ Q L, O L æquales, ac proinde Q O bisecta est in L, & aliter in I. Ergo

a Per præc.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{quad. Q I} \\ \text{quad. I O} \end{array}\right. \text{Æ.}^{a} \left.\begin{array}{l} \text{quad. Q L} \\ \text{quad. L I} \end{array}\right\} \text{bis}$$

Sed

Sed quad. Q I est quad. F O, & quad. Q L est quad. L O, & quad. L I est quad. F L

$$\text{Ergo} \left\{\begin{array}{l} \text{quad. F O.} \\ \text{quad. I O} \end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l} \text{quad. F L} \\ \text{quad. L O} \end{array}\right\} \text{bis}$$

PROPOSITIO XI.

Datam rectam (A B) ita secare (in C) vt rectangulum (A B C) sub totâ & vnâ parte contentum, æquale sit quadrato partis reliquæ (A C.) Fig. 11.

Ex A erige perpendicularem A F parem A B. A F biseca in X. Duc rectam X B; cui ex F A producta æqualem abscinde X I. Tum abscinde A C æqualem A I. Dico factum.

Perficiatur quadratum B A F S, & ductâ per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum F I L O. Quoniam F A bisecta est in X, eique adiecta est A I; Erit

$$\left\{\begin{array}{l} \text{rect. F I A.} \\ \text{quad. X A} \end{array}\right. \text{Æ.}^{d} \text{ quad. X I}$$ d Per 6. l. 2.

id est

$$\text{Æ.}^{e} \text{ quad. X B}$$ e Per cōstr.

Id est

$$\text{Æ.}^{f} \left.\begin{array}{l} \text{quad. B A} \\ \text{quad. X A} \end{array}\right\}$$ f Per 47. l. 1.

Auferatur vtrimque quad. X A. Erit rect. F I A seu F L. Æ. quad. B A; id est A S

 Quare

Quare ablato rursum communi A O
Erit A L. Æ. C S

Atqui A L est quadratum A C, cum A I, A C ex const. sint æquales : & C S est rect. A B C, cum B S sit par A B. Ergo rectang. A B C æquatur quadrato A C. Datam igitur rectã secuimus, vt petebatur.

Scholium.

Propositiones 10 primæ huius libri veræ sunt etiam in numeris. Hæc 11 numeris explicari non potest. Neque enim vllus numerus ita secari potest, vt productum ex toto in partem vnam, æquale sit, quadrato partis reliquæ. Porro mira vis est huius sectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12.

In trigono obtusangulo (A C B) quadratum lateris (A B) obtuso angulo oppositi, quadrata laterum reliquorum (A C, B C) excedit rectangulo (B C F) bis, quod comprehenditur sub (B C) latere alterutro obtusum angulum (A C B) continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis (A F;) & sub (F C) interceptã exterius linea inter perpendicularem & obtusum angulum.

Quad. A B. Æ. a quad. A F, quad. B F — a Per 47. l. 1.

Sed quad. B F est b æquale quadratis F C, C B, & rect. B C F bis. Ergo si hæc substituas pro quad. B F; erit — b Per 4. l. 2.

Quad. A B. Æ. quad. A F, quad. F C, quad. C B, rect. B C F bis

Atqui quadrata A F, F C æquantur quadrato c A C. Quare hoc pro illis substituto, erit — c Per 47. l. 1.

Quad. A B. Æ. quad. A C, quad. C B, rect. B C F bis

PROPOSITIO XIII.

Fig. 13. 14.

In triangulo quocunque (A C B) quadratum lateris (A B) acuto angulo (C) oppositi, à quadratis laterum reliquorum (A C, B C) exceditur rectangulo (B C F) bis, quod continetur sub (B C) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (A F) ab opposito (A;) & sub (C F) interceptã inter perpendicularem (A F) & acutum angulum (C.)

a Per 4. l. 2. Quad.B C. Æ. a rect.B F C bis, quad.B F, quad.F C

b Per 47. l. 1. Et Quad.A C. b Æ. quad. F C, quad.A F.

Quare duo { quad.BC., quad.A C } simul Æ. rect.B F C bis, quad.B F, quad. F C bis, quad.A F.

Atqui rectang. B F C bis cum quad. F C bis æquatur c rectangulo B C F bis.
c Per 3. l. 2.
Ergo hoc pro illis substituto

{ Quad.B C., quad.A C } Æ. rect. B C F bis, quad. B F, quad.A F.

Atqui quadrata A F, B F, sunt d quad. A B. Ergo hoc pro illis substituto
d Per 47. l. 1.

{ Quad.B C., quad. A C } Æ. rect. B C F bis, quad.A B

Hoc est, B C, A C quadrata, excedunt quad. A B rectangulo B C F bis.

Corollarium.

Fig. 15. VEra est propositio licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonstratio ferè eadem est.

Scholium.

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimensio cuiuscunque trianguli, cuius tria latera sint nota, licet

licet aream habeat inperuiam. Horum quippe theorematum beneficio innotescit perpendicularis, etiamsi eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semißem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, vt patet ex scholio propos. 41. l. 1.

Esto trigonum quodcunque A C B nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem A F ex dato angulo A in latus oppositum B C. Fig. 13. vel 14.

Quadratum lateris A B acuto C oppositi, aufer ex summâ quadratorum A C, C B. Per 13. residuum erit rectangulum B C F bis. Residui semissem (hoc est rectangulum B C F) diuide per notum latus B C. Proueniet recta C F. Quadratum rectæ C F aufer ex quadrato A C. Residuum dabit quadratum b A F, cuius radix quadrata dabit perpendicularem A F. b Per prob. 2. schol. post 47. l. 1.

Obtinere idipsum poteris etiam ex p. 12. Verum 13 sufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppositum, intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XVI.

DAto rectilineo (Q X Z) æquale quadratum construere. Fig. 16.

Rectilineo Q X Z fac æquale a parallelogrammum rectang. C I, cuius latera I A, C A, si æqualia fuerint, ipsum erit quadratum, quod petitur: si inæqualia sunt, latus maius I A produc in L, donec A L sit par a Per 45. l. 1.

A C.I L biseca in Z; quo centro per I & L describe circulum, & producatur C A, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ A B æquale est dato Q X Z.

Ducatur enim recta Z B. Quoniam I L secta est bifariam in Z, & aliter in A: erit

a Per 5. l.2. rect.I A L. Æ.[a] quad.Z L: hoc est quad.Z A

b Per constr. Æ.[b] quad.Z B: hoc est

c Per 47.l.1. Æ.[c] quad. Z A + quad. B A

Ablato igitur vtrimque quadrato Z A, communi, remanet

rect.I A L. Æ. quad.B A:

hoc est, quia A C, A L sunt æquales, erit

rect.C I. Æ. quad.A B

d Per constr. Id est [d] rectil. Q X Z.

Scholium.

Constructio Euclidæa requirit, vt per 45.l.1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum satis operosa sit, fortasse expeditius problema absoluetur hunc in modum.

Rectilineum datum resoluatur in tot quadrangula (Z,X) quot potest. Tum singulis quadrangulis fac [e] rectãgula æqualia. Si tunc supersit (vt hic contingit) vnum triangulum (Q,) illi quoque fac [f] æquale rectangulum, singulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis vnum æquale [g] fiat. Erit hoc æquale dato Q X Z.

e Per schol. p.45.l.1.
f Per coroll. p.42.l.1.
g Per prob. 1. schol. p.47.l.1.

ELE-

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER III.

Perfectissimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonstrantur. Libri vtilitas vel hoc solo innotescit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Mathesim vniuersam fonte vberrimo. Theoremata illustriora sunt 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

DEFINITIONES.

1. Circuli æquales sunt, quorum diametri seu semidiametri sunt æquales.

2. Recta (F B) circulum tangere dicitur, quæ circulo sic occurrit (in B) vt tamen producta circulum non secet. Fig.20.li.3.

3. Circuli tangere se dicuntur, cum sibi sic occurrunt, vt tamen non secent. Fig.13. & 14.

4. In circulo æqualiter à centro (A) distare dicuntur rectæ (B C, F L) cum perpendiculares (A I, A O) quæ ex centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Fig.18.

5. Segmenta, seu portiones circuli sunt Fig.37.

 partes,

partes, in quas circulum diuidit recta (C E) circulum secans,

Fig. 33. 6. Angulus in segmento est (B Q C) qui continetur sub rectis lineis, quæ ad vnum circumferentiæ punctum (Q) ex segmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 33. 7. Angulus (C Q B) insistere dicitur peripheriæ (B O C) quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8. Sector est pars circuli à duobus semidiametris (A B, AF) & arcu (B F vel B C F) quē semidiametri intercipiunt, cōprehensa.

PROPOSITIO PRIMA.

Dati circuli centrum inuenire.

Fig. 1. lib. 3. Ducatur in circulo recta B C vtcunque, quam biseca in Q. Per Q duc perpendicularem L F. Hanc biseca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum esto O extra rectam F L (nam in F L esse non poterit, cum vbilibet extra A diuidatur inæqualiter) ducanturq; B O, Q O, C O. Quoniam igitur vis O centrū esse, erūt B O, C O ęquales. Triāgula igitur B O Q, C O Q sibi mutuo æquilatera sunt, cum etiam ex constr. B Q, & Q C, sint pares, & Q O communis. Ergo [a] angulus O Q C æquatur angulo O Q B. Ergo O Q C [b] rectus est, ac proinde angulo L Q C per constr. recto æquatur, pars toti. Quod est absurdum.

a Per 8. l. 1.
b Per defin. 14 l. 1.

Corol-

Corollarium.

EX demonstratis patet, si in circulo recta (L F) aliam (B C) bifariam & perpendiculariter secat, in secante esse centrum.

Facillime per normam inuenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicata. Si enim recta D E iungentem puncta, D & E, in quibus normæ latera peripheriam secant, bisecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. huius. Fig. 2.

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta sumantur (B, C;) recta, quæ per illa ducitur, intra circulum cadit. Fig. 2.

Accipiatur in recta B C quoduis punctum O, & ex centro A ducantur A O, A B, A C. Quoniam A B, A C æquantur, etiam [a] anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus A O C [b] maior est interno B, maior erit quoque quam C. In triangulo igitur O A C, latus A C subtendens maiorem angulum A O C, maius est [c] latere A O subtendente minorem C. Cum igitur A C tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, A O non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem ostendetur de quouis alio puncto rectę B C. Tota ergo B C cadit intra circulum.

a Per 5. l. 1.
b Per corol. 1. p. 32. l. 1.
c Per 19. l. 1.

Ex

Ex ipsa etiam notione lineæ rectæ, & circularis, propositio est manifesta.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *SI in circulo recta per centrum ducta (B L) aliam (C F) non per centrum ductam secet bifariam, secabit quoque perpendiculariter. Et si secet perpendiculariter, secabit bifariam.*

1. Pars. Ex A centro ducantur A C, A F. Triangula X, Z sibi mutuo æquilatera sunt, nã C O, F O ex hypothesi, & A C, A F, quia ex centro, æquales sunt; A O verò communis est. Ergo *f* anguli A O C, A O F æquales. Ergo *i* recti. Quod erat primum.

f Per 8. l. 1.
i Per defin. 14. l. 1.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli A O C, A O F sunt recti, erit quad. A C *o* æquale quadratis A O, C O; & quad. A F æquale quadratis A O, F O. Cum igitur quadrata A C, A F æqualia sint, etiam duo simul A O, C O duobus simul A O, F O æqualia erunt. Quare ablato vtrimque communi quadrato A O, remanent C O, F O æqualia. Ac proinde etiam rectæ C O, F O, sunt æquales. Quod erat alterum.

o Per 47. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (B C, F L) non ambæ per centrum ductæ, se secent, non secabunt se mutuo bifariam. Fig. 4. & 5.

Nam si vna L F transeat per centrum, patet hanc non bisecari ab altera B C, quæ ex hyp. per centrum A non transit. Fig. 5.

Si neutra per centrum transit, ex A centro duc A O. Si iam ambæ B C, F L forent bisectæ in O, anguli quoque A O C, A O L essent *a* recti, ac proinde æquales, totum & pars. Quod fieri non potest. Fig. 4.

a Per præc.

PROPOSITIO V. & VI.

CIrculi se mutuo secantes, aut interius tangentes non habent idem centrum. Fig. 6. & 7.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis A B, A C F, essent A C, A F, (pars & totum) æquales, quia ambæ sunt æquales eidem A B.

PROPOSITIO VII.

SI in circulo quoduis aliud à centro (A) accipiatur punctum (C) ex quo rectæ plu- Fig. 8.

plures C B, C L, C O, C F) in circumferentiam cadant.

1. Maxima erit (C B) quæ per centrum transit.

2. Reliqua diametri pars (C F) minima.

3. Aliarum verò maior est ea, quæ maximæ (C B) propior.

4. Neque plures quã duæ ex dicto puncto (C,) quod à centro diuersum est, ad circumferentiam duci possunt æquales.

Pars 1. Ducatur ex A centro recta A L. Quoniam A L, A B æquales sunt, addita communi A C, erunt L A cum A C, & B C æquales. Sed L A, A C sunt maiores b quàm L C. Ergo etiam B C maior, quam L C. Eodem modo B C ostendetur maior quauis aliâ.

b Per 20. l. 1.

Pars 2. Ex centro duc A O rectam. A O, (hoc est A F) est minor b quàm A C, C O. Ablatâ igitur communi A C, remanet F C minor quam C O. Eodem modo erit C F minor, quauis aliâ.

b Per eand.

Pars 3. In triangulis C O A, C L A latera L A, A C æquantur lateribus O A, A C. Angulus vero L A C maior est angulo O A C. Ergo c basis L C, maior basi O C.

c Per 24, l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam si tres duci possent æquales, C O, C I, C Q, forent

forent

forent duæ C Q, C I ad eandem partem inter se æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 9. & 10.

SI à puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (A B, A C, A F) (A O, A Q, A R)

1. Earum quæ in cauam peripheriam incidunt, maxima est (A B) transiens per centrum (Z.)

2. Aliarum maior est ea, quæ maximæ (A B) propior.

3. Extra circulum minima est (A O) quæ producta per centrum transit.

4. Quæ minimæ propior, minor est remotiore.

5. Non plures quam duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci possunt æquales, siue intra circulum, siue extra.

Fig. 9.

Pars 1. Ex centro Z, duc Z C. Quia æquantur Z C, Z B; additâ communi A Z, erunt A Z, Z C ipsi A B æquales. Sed A Z, Z C maiores sunt a quam A C. Ergo etiam A B maior A C. Eodem modo erit A B maior quauis aliâ.

a Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc Z F. Latera C Z, Z A æquantur lateribus F Z, Z A. Angulus vero

C Z A

b Per 24. l.1. C Z A maior est angulo F Z A. Ergo [b] basis C A maior basi F A.

Fig. 10. c Per 20. l.1. Pars 3. Duc Z Q. Duæ A Q, Q Z maiores [c] sunt quàm A Z. Ablatis igitur æqualibus Z Q, Z O remanet A O minor quàm A Q. Eodem modo A O minor erit quauis aliâ.

d Per 21 l.1. Pars 4. Duc Z R. Rectæ A Q & Q Z, minores sunt [d] quam A R, R Z. Ablatis ergo æqualibus Z Q, Z R, remanet A Q minor quam A R.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. *Si ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quam duæ æquales ad ambitum duci possint; Id punctum centrum erit.*

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig. 12. *Circuli in duobus tantum punctis se mutuo secant.*

Secent enim si fieri potest in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli L Q ducantur ad B, C, F, rectæ A B, A C, A F. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum O S puncto A ductæ sunt tres æquales ad eius peripheriam, A B, A C, A F, erit

f Per præc. A [f] centrum quoque circuli O S. Ergo circuli L Q & O S se secantes habent idem centrum, quod repugnat propositioni 5.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli se intus tangant; recta per eorum centra (A, & I) ducta, transibit per contactum (B.) Fig. 13.

Si negas, habeant, si fieri potest, centra eum situm, vt recta per illa transiens, cadat extra contactum B, secans circulos in O, & L, sintque centra ipsa A, & C; ac iunge A B, C B. Quoniam igitur C B, C O, æquantur, additâ communi A C, etiam A C, C B, æquales erunt A O. Sed [b] A C, C B sunt maiores quàm A B; Hoc est [c] quam A L. Ergo etiam A O maior est quàm A L pars toto. Quod est absurdum. b Per 20. l.1. c Per defin. circuli.

PROPOSITIO XII.

Si circuli se tangant exterius, recta coniungens centra, per contactum transibit.

Si negas, sint si fieri potest centra ita posita, puta in A & B, vt recta per ipsa transiens, per contactum S non incedat, sed circulos secet in O, & Q, iunganturque A S, B S. Erunt igitur [a] A S, S B maiores quàm A B. Sed A S [b] est par A O, & B S par B Q. Ergo etiam A O, B Q sunt maiores quàm tota A B, pars toto. Quod fieri non potest. Fig. 14. a Per 20. l.1. b Per defin. circuli.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Circuli & ſeſe mutuo, & lineam rectam punctualiter tangunt.

Fig.15. Tangant enim ſe intra (ſi fieri poteſt) duo circuli in parte circumferentiæ C L. Per
b Per 11.l.3. centra A, & B ducta recta b tranſibit per contactum puta in C. Ducantur inſuper
c Quia ex centro. A L, B L. Quoniam igitur c B L, B C æquantur (ſunt enim ex centro B ad peripheriam O L C,) addita communi A B, erunt A B, B L æquales A C. Sed A C eſt par A L, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam Q L C.) Ergo etiam A B, B L ſunt æquales A L, contra 20.l.1.

Fig.16. Tangant ſe deinde exterius duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu O L. Recta A P cen-
d Per 11.l.3. tra A & P iungens d tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper A L, P L. Erunt igitur duo trianguli latera A L, P L æqualia ipſis, A O, P O, ſeu toti AP. Contra 20.l.1.

Fig.16. Denique recta B F & circulus ſe tangāt, ſi fieri poteſt, in parte aliqua C E. Ducantur ad centrum rectæ C A, E A. Erunt igitur
e Per coroll. 21.p.32.l.1. C A, E A æquales, ac proinde triangulum CAE eſt iſoſceles. Quare e anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad B F, ducta
f Per coroll. 3.p.32.l.1. ex A centro, cadet inter f C & E puta in D.

Erunt igitur tam A C, quam A E æquales perpendiculari A D, quod eſt abſurdum contra Coroll.14.p.32.l.1.

Corollarium.

Circuli qui habent centra in vna recta, eamque ſecant in eodem puncto B. ſe mutuo in puncto illo B, contingunt. Fig 17.

Cæterum hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curua circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diuerſæ curuaturæ, aut duæ conuexæ, ſecundum vllam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem ſi inuicem in tota parte aliquâ tangerent.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ (B C, L F) æqualiter à centro diſtant: & quæ diſtant à centro æqualiter, ſunt æquales. Fig.18.

Ex centro A ducantur A C, A F, item A O, A I ad angulos rectos ipſis B C, F L. Erunt a B C, F L biſectæ in O & I. a Per 3.l.3.

Cum ergo totæ B C, F L ponantur æquales, etiam dimidiæ O C, I F, adeoque & quadrata ipſarum æquantur. Iam vero quad. A C b æquale eſt quadratis O C, O A; & b quadratum A F æquatur quadratis I F, I A. b Per 47. l.1.

Cum igitur quadrata A C, A F æqualia sint, etiam duo quadrata O C, O A, duobus I F, I A æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis O C, I F (quæ ante ostensa sunt æqualia) quæ remanent, quad. O A, I A æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares O A, I A sunt æquales. Ergo B C, F L æquales, à centro distant [c] æqualiter. Quod erat primum. c Per defin. 4. l. 3.

E conuerso si distantiæ O A, I A ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium O A, I A, Eodem discursu ostendetur quadrata reliqua O C, I F fore æqualia, ac proinde & rectas O C, I F æquales esse, quæ cum sint [d] semisses rectarum B C, F L, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum. d Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 19.

Rectarum circulo inscriptarũ maxima est diameter. Cæterarum ea maior, quæ centro propior.

Sit quæuis R S alia à diametro F L. Ex centro duc A R, A S. Duæ A R, A S, æquantur diametro F L, & sunt [a] maiores quam R S. Ergo &c. a Per 20. l. 1.

Sit deinde B I propior centro quam X Z. Ex centro ad illas duc perpendiculares A C, A Q. Erit A Q [b] maior quam A C. Accipe ergo A O parem A C, & per O duc R S perpendicularem ad A O, quæ [c] par erit B I; iunganturque A R, A S, A X, A Z. Quia igitur A centrum est, erũt latera A R, A S æqualia lateribus A X, A Z. Angulus autem R A S maior est angulo X A Z. Ergo basis R S, hoc est B I, maior [d] est basi X Z. Quod erat demonstrandum. b Per defin. 4. l. 3. c Per præc. d Per 24. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 20.

Recta (I F) quæ per (B) extremitatem diametri (C B) perpendicularis est, tota cadit extra circulum, eumq; tangit (in B.) Neque inter ipsam & circulum alia recta ad contactum (B) duci potest, quin circulum secet.

Pars I. Accipiatur in recta I B F quoduis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam A L. In trigono L A B quoniam angulus A B L rectus est per hyp. erit A L B [a] acutus. Ergo A L opposita maiori angulo A B L, maior est, [b] quàm A B, quæ minori A L B opponitur. Sed A B tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo A L vltra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L, extra circulum est. Tota igitur I F extra circulum cadit. Quod erat primum. a Per coroll. 5. p. 32. l. 1. b Per 19. l. 1.

 Pars

Pars 2. Infra B F (si fieri potest) cadat R B tota extra circulum. Quoniam F B A rectus est per hyp. erit R B A acutus, ac proinde A B non est perpendicularis ad B R. Ducatur igitur ex A centro ad B R perpendicularis A O, quæ cadet [d] versus R, & secabit circulum in Q. Igitur A B opposita maiori angulo, nempè A O B recto, maior est quam A O, quæ opponitur minori, nempe acuto O B A. Sed A B par est A Q. Ergo etiam A Q maior est quam A O, pars toto.

d Per coroll. 3. p. 32. l. 1.

Corollaria.

Fig. 10. 1. Hinc rursum patet contactum rectæ lineæ & circularis esse punctualem.

Fig. 17. 2. Si centris in eadem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis describantur per B infiniti circuli tam minores primo B S C, quàm maiores; omnes tangent rectam I F in eodem vno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quâcunque datâ maiorem excrescentes, propiùs semper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in vnico contactus puncto, coniunguntur: quod quamuis euidentissimum sit, est tamen reuera admirabile.

Fig. 17. 4. Ex his manifestum est, lineam quamcunque in infinitum esse diuisibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta A Q. Infiniti circuli centra habentes in rectâ B A sine termino productâ rectam I F, per coroll. 2. hîc, & se mutuo per coroll. p. 13. tangunt in vno eodemque puncto, B, ac proinde nusquam vel inter se, vel cum recta I F, coniunguntur præterquam in B. Ergo necesse est vt rectam A Q dirimant in partes infinitas, hoc est in non tot quin plures.

5. Angulum contingentiæ seu contactus L B Q (cum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea potest diuidere. Fig. 10.

6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes secari potest ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum mysterium asymptoticum, hoc est lineæ rectæ ad Hyperbolam vnà secum in infinitum productam, accedentis ad interuallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclarè obseruauit & demonstrauit Marius Bettinus noster in Apiarijs, & ante illum Baroncius atque Cardanus ex Rabbi Moyse Narbonensi, cuius demonstrationem refert Cardanus de subtilitate lib. 16. Fig. 17.

Scholium.

Demonstratur & soluitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci solent.

ATque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta & mira & certa sunt. Quæ verò deduci ex eadem solent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare suspicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cuius ignoratio subtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet. Et planè, quod suspicatus sum, ita se habere, mihi tandem videor deprehendisse. Paradoxa quæ ex 16. inferri solent ex aliis multis, hæc ferè præcipua sunt.

Fig. 21. 1. Angulus contingentiæ (O A C) omni acuto minor est. Acutus esto P A C ab hoc auferri potest dimidius, & à residuo iterum dimidius, & sic deinceps sine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor, quantumuis tamen in infinitum minuatur, semper tamen residui anguli, exempli gr. anguli Q A C, latus vnum Q A a intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus O A C intra acutum continebitur, eiusq; pars erit, ideoq; illo minor.

a Per 16. l. 3.

2. Angulus semicirculi, licet recto minor sit, est omni acuto maior. Quia ob eandem causam, acutus quantumuis magnus, B A Q, intra semicirculi angulum B A Q comprehenditur.

Hæc

Hæc duo in ipso textu propositionis inferuntur. Quamuis nonnulli dubitent, Euclidis ea sint, an ab aliquo adiecta. Appollonius certè, magnus geometra, cum eandem affectionem in ellipsi, hyperbola & parabola demonstrat, has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus C A B (imò acutus quicunque C A Q) continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo est maior. Nam angulus C A B diuidi potest in acutos infinitos minores semper & minores, quorum nihilominus singuli sunt maiores b angulo contactus O A C.

b Per paradox. 1.

4. Angulus contactus C A O est vera pars anguli recti C A B; eundem quippe vna cum semicirculi angulo O A B constituit: nequit tamen vllâ sui multiplicatione suum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia sibi addita non efficiunt infinitum.

5. Transitur a minori ad maius & per omnia media, neque tamen per æquale; siue datur maius aliquô, & datur eôdem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam si recta, A B, fixo manente puncto A, moueatur, donec congruat cum tangente, describet acutos angulos B A P, B A Q, & omnes alios possibiles, qui quamuis semper augeantur, semper tamen erunt minores c semicirculi angulo B A O, quamprimum vero A B congruet tangenti C A, immediate habetur rectus C A B maior angulo semicirculi.

c Per paradox. 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. propositione deduci solent: quæ profectò, si ita, vt proponuntur, sese

habeant,

habeant, merito incomprehensibilia videri possent. Peletarius, vt his paradoxis se expediat, negat angulum contactus esse quantum. Rem confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cum inde infert omnes semicirculi angulos esse æquales, quod planè non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo asseruerat, omnibus angulis conuenire. Neque tamen Clauio nostro in sua illa aduersus Peletarium apologetica disputatione assentior. Meâ quidem sententiâ vterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem; ille dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alij se existimant hâc vna responsione omnes difficultates soluere, si dicant, curuilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati verò, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactus quantumcumq; multiplicatus nunquam potest æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cuius explicatio petebatur, quî nimirum fieri possit, vt angulus contactus anguli recti pars sit, & tamen quotiescumque multiplicatus eundem superare nequeat. Respondent angulum contactus non esse partem recti, quia eum non potest adæquare. At paradoxorum assertores replicant hinc solum sequi non esse partem recti aliquotam: veram tamen esse partem, eo quod cum semicirculi angulo rectum componat. Vnde qui hac via difficultates propositas volebant dissoluere, debuerant ostendere angulum contactus nullo sensu partem esse rectilinei

anguli,

anguli, neque addito sibi semicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidæâ definitione anguli pendere. Def.8.l.1. Hæc enim, si penitiùs expendatur, manifestè docet nullum angulum esse quantum, quo vno errore sublato, paradoxa omnia euanescunt. Sentio igitur.

1. Nullus angulus est quantitas, sed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8.l.1. Angulus planus est duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non est quantitas, sed modus quantitatis, cum enim curuitas non sit quantitas, cur inclinatio sit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde. Si angulus esset quantus, foret vel linea, vel superficies, vel corpus. Non esse lineam aut corpus patet. Sed neque superficies est, ea enim ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque potest Fig.22. dici angulum esse superficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus sit.

2. Quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quanti, eorum inter se comparatorum relatio, non est æqualitas & inæqualitas, sed similitudo & dissimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter se comparati æquales dicuntur aut inæquales, non aliud intelligi potest, quàm eos similes esse inter se aut dissimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi mo-

dum

dum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera superimposita congruunt. Dissimiles quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil est aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo similes anguli sunt inclinationes linearum similes. Non sunt autem inclinationes linearum similes, nisi ambæ sibi mutuo impositæ congruant. Ergo similes anguli sunt, quorum congruunt latera, dissimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifestum est nullum angulum curuilineum æqualem dari posse vlli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud est quam similitudo. per concluſ. 2. & 3. Similitudo angulorum est sola laterum congruentia per conclusion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curuilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus dum descriptis æqualibus semicirculis ita ratiocinatur: æqualium semicir-

Fig. 13. culorum anguli E A D, C A B æquales sunt. Ergo si his addatur communis angulus C A D, erit angulus E A C curuilineus æqualis rectilineo D A B. Fallitne ergo axioma, si æqualibus addas, vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas solùm pertinet; anguli porro quanti non sunt. Axioma vt in angulis valeat ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, si apponantur similibus angulis, similiterq; positis; qui tum orientur, erunt similes. At Proclus comparat angulos similes quidem: sed communis, qui

qui vtrisque additur, cum ab vnâ parte habeat latus rectum: ab altera curuum, dissimiliter vtrisque additur.

6. Quare cum tota essentia anguli sit linearum se tangentium inclinatio, non erit vnus angulus pars alterius, vna siquidem inclinatio pars alterius inclinationis non est: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio siquidem vna auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non sunt, sed superficiebus inter latera constitutis conueniunt.

7. Postremo ex iam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant, illæ locutionum formæ, quibus geometræ passim, atque ipse inprimis Euclides, vtuntur, cùm angulos secari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaq; similia asserunt. Hæc sanè existimabimus eos non propriè, sed analogicè tantùm angulis tribuere; itaq; eos loqui voluisse, quod id commodiùs, & expeditiùs esset, neque tamen obnoxium periculo, modò in angulis recti lineis maneatur. Angulum itaque diuidi rectâ D A, non aliud erit, quàm inter latera E A, Fig. 24.
C A aliam interponi lineam, quæ nouas duas cum vtroque latere inclinationes, hoc est duos nouos angulos efficiat. Angulum vero E A C esse duplum anguli E A D, nihil rursum aliud erit, quam inter lineas rectas E A, C A, aliam interponi, quæ ad vtramque similiter inclinetur, vnde fiat vt rectæ E A, D A rectis C A, D A, inclinationibus non mutatis, impositæ cōgruant. Quod si ita ratiocinentur: Fig. 24. & 25.

(An-

(Angulus E A D est æqualis angulo I L Q. & D A C est æqualis Q L R. Ergo totus E A C toti I L R æqualis est.) Idem erit, ac si dicatur; inclinatio rectarum E A D similis, seu eadem est inclinationi rectarum I L Q: & inclinatio rectarum D A C similis est inclinationi rectarum Q L R. Ergo etiam inclinatio rectarum E A C similis erit inclinationi rectarum I L R vel certè (quod recidet in idem, ex aßertione 4. supra) collectionem illam sic intellige: latera E A D congruunt lateribus I L Q; & latera D A C congruunt lateribus Q L R. Ergo latera quoque E A C congruent lateribus I L R. Quæ quidem consecutio æquè clara est, atque si æqualibus addas æqualia, tota æqualia esse. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum sint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facilè, veritate theorematum vbique saluâ, interpretabimur.

His ita constitutis, facilè paradoxa angularia dißoluemus; quæ sanè non aliunde enata sunt, quã quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. vt igitur simul omnia expediam, Dico paradoxa illa, si in proprio verborum sensu accipiantur, ad vnum omnia esse falsa. Sic enim accepta non conueniunt nisi quanto: anguli autem quanti non sunt, vt iam ostendimus.

Itaque angulus contactus neque maior est quouis acuto, neque pars est anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imò ne semel quidem: nihil enim horum linearum inclinationi potest competere, quæ tota anguli essentia est. Si verò non propriè, sed analogicè accipiantur, iam nihil continent, quod à communi sensu, ac ratione alienum sit. Sic enim angulum contactus O A C esse minorem quouis acuto, & semicirculi angulum O A B acuto omni maiorem, non aliud significabit, quam infra tangentem C A, nullam poße duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas est omnino digna, quam homines admirentur, est tamen eiusmodi quam poßimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans inuoluat. Non alius paradoxi tertij, quarti & quinti sensus erit. Atque ita vnius Euclidææ definitionis ductu, ritè perspectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ euanescunt. Fig. 21.

PROPOSITIO XVII.

A *Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (O Q) tangat.* Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta A B, secans peripheriam in O. Centro A describe per B alium circulum, B S, & ex O duc O C perpendicularem ad A B, quæ occurrat circulo B S in C. Duc C A, occurrentem circulo O Q in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum O Q.

Quia latera B A, I A, æquantur lateribus C A, O A, angulusque A communis est in trigonis I A B, O A C, etiam a anguli A O C, A I B — a Per 4. l. 1.

b Per constr. A I B æquales sunt. Sed b A O C rectus est. c Per 16. l. 3. Ergo etiam rectus est A I B. Ergo B I c tangit in I.

Scholium.

Fig. 27. *EX 31. sequ. pulchrè ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (B Q.)*

Centrum A & datum punctum O iungens recta bisecetur in P. Tum centro P, per A & O describe circulum occurrentem dato in B. Recta O B tanget.

Nam iunctâ A B, angulus A B O in semicirculo rectus est per 31. ergo per 16. O B tangit circulum B Q.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. *SI circulum tangat recta linea (C L) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis est.*

Si negas, sit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta A F: a secabit ea circulum in O. Quia ergo angulus A F B rectus ponitur, erit b A B F acutus. Ergo A B, (hoc est A O) maior c quam A F, pars toto.

a Per 1. part. p. 16. l. 3. b Per coroll. 1. p. 32. l. 1. c Per 19. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI recta (B C) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (A I) erit in ea centrum. Fig. 29.

Si negas, sit centrum extra A I in Z, & ab eo ad contactum ducatur Z A. erit d angulus Z A C rectus, ac proinde par angulo I A C, per hypoth. recto; hoc est pars toti.

d Per præc.

PROPOSITIO XX.

ANgulus ad centrum (B A C) duplus est anguli (B F C) ad peripheriam, cum idem arcus (B C) est basis angulorum. Fig. 30. 31. 32.

Triplex est casus. In primo latera B A, B F coincidunt. Tum vero quia A F, A C ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F, & C a æquales. Sed B A C b æqualis est duobus F & C. Ergo B A C duplus est vnius F. Fig. 30.

a Per 5. l. 1. b Per 32. l. 1.

In casu secundo B A, C A cadunt intra B F, C F. Tum vero ductâ F A X, per casum primum X A B est duplus X F B, & X A C duplus X F C. Ergo totus B A C duplus est totius B F C. Fig. 31.

In tertio casu B F secat A C, & anguli B A C, Fig. 32.

B A C, B F C ſunt extra inuicem. Ducatur F A L per caſum 1. totus L A C duplus eſt totius L F C, & ablatus L A B duplus eſt ablati L F B. Ergo & reliquus B A C duplus eſt reliqui B F C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig.33. *Anguli (B Q C, B F C,) qui in circulo, inſiſtunt eidem arcui (B O C,) ſiue qui in eodem ſegmento (B Q S C) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.*

Sit primò ſegmentum B Q S C maius ſemicirculo. Ex centro A duc A B, A C. Per præced. angulus B A C ad centrum, duplus eſt ſingulorum B Q C, B F C. Ergo omnes B Q C, B F C ſunt [a] æquales. Quod erat demonſtrandum.

a Per axio. 6.

Fig.34. Sit deinde ſegmentum B Q C æquale aut minus ſemicirculo. In triangulis B Q I, & C F I quia anguli ad verticem I oppoſiti, [b] æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & R ſummæ reliquorum F & O [c] æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales ſunt, vtpote eidem arcui Q F inſiſtentes, qui remanent Q F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

b Per 15. l. 1.
c Per corol. 10. p 32. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Quadrilateri circulo inſcripti (A B C F) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt. Fig.35.

Ducantur B F, C A. Angulus A B C, cũ duobus O & X facit [a] duos rectos. Sed O eſt [b] æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui B C; & X [c] eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui A B. Ergo A B C, cum duobus etiam, I, Z, hoc eſt cum toto oppoſito angulo A F C, facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum.

a Per 32. l. 1.
b Per 21. l. 3.
c Per eand.

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

Non ſunt neceſſariæ: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri.

PROPOSITIO XXV.

Datum arcum (A B C) perficere.

Subtendantur vtcunque duæ rectę A B, C B, quas biſeca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cuius portio eſt arcus A B C. Fig.36.

G Nam

b Per corol. p.1.l.3. Nam b centrum est & in recta I X, & in recta L Z. Ergo in communi ipsis puncto O.

Fig.36. *Praxis. Centro B sumpto in arcu, describe circulum, eodemq; interuallo, alijs in arcu centris, describe duos alios circulos quorum singuli priorem bis secent. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuo occurrentes in O dabunt centrum.*

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

Fig.37. *IN circulis æqualibus rectæ æquales (C E, F I) subtendunt arcus æquales; & si arcus sunt æquales, etiam subtensæ æquales erunt.*

* 1. Pars. Ad centra A & B ducantur C A, E A, F B, I B. Quia triangula C A E, F B I, sibi mutuo æquilatera sunt, etiam erunt sibi mutuo a æquiangula. Ergo cum circuli sibi mutuo imponentur, triangulum F B I congruere poterit triangulo C A E, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I, in puncta C, E. Cum igitur circuli sint æquales, etiam arcus F L I necessariò congruet arcui C Q E, & arcus F O I arcui C S E, ac proinde æquales b erunt etiam ipsi.

a Per 8.l.1.

b Per axio. 7.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus F L I, C Q E ponuntur æquales, sibi mutuo impositi congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & subtensa F I congruet subtensæ C E. Ergo F I, C E d æquales sunt.

d Per axio. 7.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig.38. *SI in circulis æqualibus anguli siue ad centra (B A C; F L I) siue ad ambitum (B O C, F S I) sint æquales, etiam arcus (B X C; F Z I) quibus insistunt, sunt æquales: & si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

Pars 1. Quoniam latera A B, A C, æquantur L F, L I, (sunt enim æqualium circulorum semidiametri) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt bases a B C, F I æquales. Ergo arcus B X C, F Z I etiam b æquales sunt.

a Per 4. l.1.

b Per præc.

Ponantur iam anguli B O C, F S I ad ambitum æquales. Quia igitur c horum dupli sunt B A C, F L I, etiam illi æquales erunt, ac proinde, vt iam ostensum, etiam arcus B X C, F Z I sunt æquales.

c Per 20.l.3.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum B X C, F Z I habetur per 27. æqualitas subtensarum B C, F I. Ergo quia etiam B A, A C, æquantur ipsis F L, L I, erunt e anguli A & L, ad centrum æquales: & quia i anguli O &

e Per 8. l.1.

i Per 20.l.3.

& S horum dimidij sunt, erunt etiam ipsi æquales.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 39. *Datum arcum (ABC) bisecare.*

Duc AC, quam biseca in O. Ex O perpendicularem duc OB, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Iungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per constr. æquantur lateribus, CO, OB, & anguli ad O sunt æquales, quia recti. Ergo bases AB, BC [a] æquales. Ergo etiam [b] æquantur arcus AB, CB.

a Per 4. l. 1.
b Per 26. l. 3.

Fig 39. *Praxis. Centris A & C describe pari interuallo arcus se secantes in punctis F, & I, per quæ ducta recta arcum ABC bisecabit.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 40. *Angulus (BCF) in semicirculo, rectus est: in segmento maiore minor recto: in segmento minore recto maior.*

1. Pars. Ex centro A duc AC. Quia æquales sunt AB, AC, anguli O, B, [a] æquales erunt. Ob eandem causam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF vtrique B, &, F, æqualis est. Cum igitur [b] tres simul conficiant duos rectos, semissis trium, angulus BCF, vnus rectus est.

a Per 5. l. 1.
b Per 32. l. 1.

2. Pars.

2. Pars. Sit segmentum LOBF semicirculo LOB maius, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor est angulo BOL, qui per 1. partem rectus est. Ergo &c. Fig. 41.

3. Pars. Esto segmentum LOX semicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic maior quàm BOL, qui rectus est. Ergo &c. Fig. 41.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 42. & 43. *Si recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem secet, erit angulus à tangente & secante factus, par angulo, qui fit in segmento alterno.*

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in segmento ALQB, & angulus FAB par angulo O, qui fit in segmento AOB.

Transeat primò secans AB per centrum. Per 18. CAB, rectus est. Et per 31. rectus est L. Ergo CAB & L æquales sunt. Fig. 42.

Transeat deinde secans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & iungatur BQ. Quia ABQ in semicirculo rectus est, faciet BQA cũ BAQ [a] rectum vnum. Sed etiam CAQ rectus [b] est. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Fig. 43.

a Per 32. l. 1.
b Per 18. l. 3.

CAQ. Ablato igitur communi BAQ. erit BQA (hoc c est L) æqualis CAB. Quod erat primum. c Per 21. l. 3.

Deinde, d FAB, CAB, faciunt duos rectos; & in quadrilatero BQAL e oppositi L, & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus simul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos iam ostendi æquales, erunt æquales reliqui FAB, & O. Quod erat alterum. d Per 13. l. 1. e Per 22. l. 3.

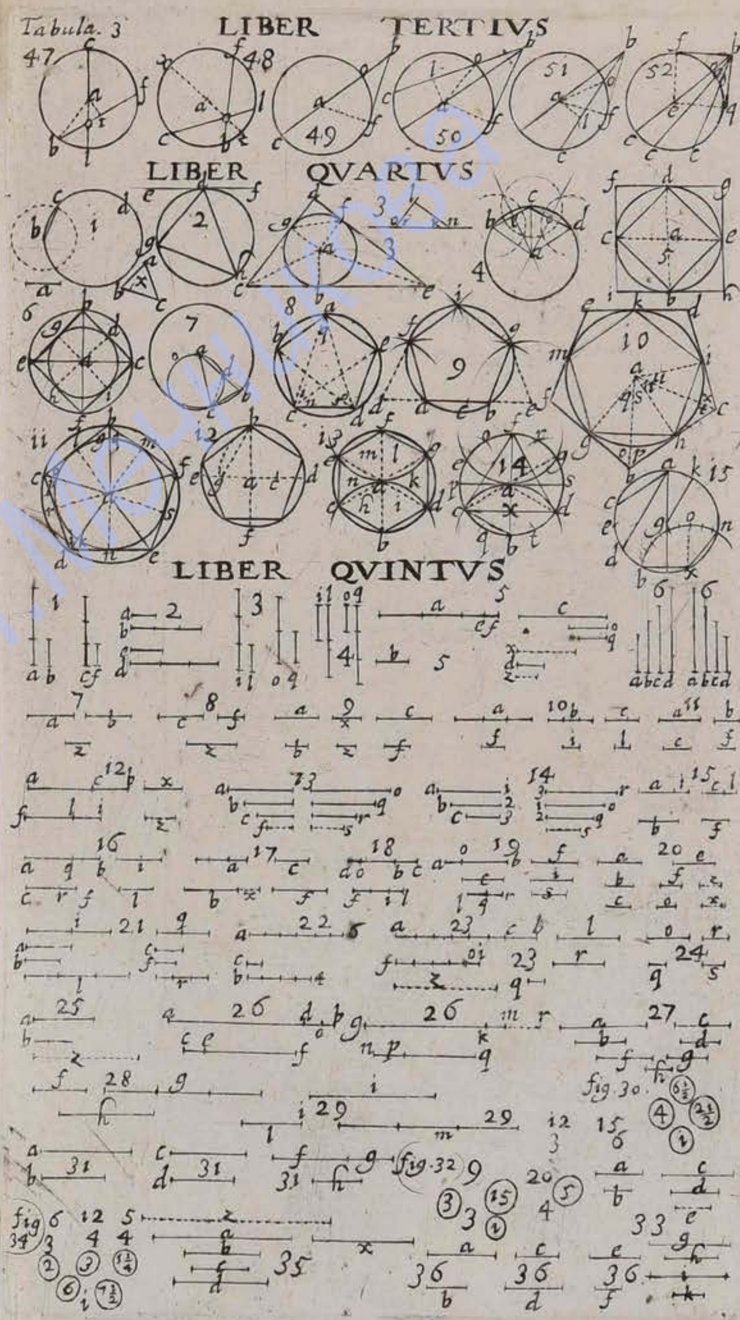
PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 44. *SUper data recta (BC) segmentum circuli construere, capiens angulum dato parem.*

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem a BCI, cuius latus secabit BL, in I. Centro I, per B, describe circulum, hic transibit per C (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B etiam latera CI, BI b æqualia sunt) capietque segmentum BQC angulum parem dato ABF. a Per 23. l. 1. b Per 5. l. 1.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis est, AB tanget d circulum, quem secat BC. Ergo e angulus in segmento BQC, æquatur angulo ABF. d Per 18. l. 3. e Per prae.

Quod



Quod si detur angulus obtusus R B C, eadem construe, eritque segmentum C O B quæsitum.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato circulo segmentum auferre capiens angulum dato parem. Fig 45.

Ad circuli diametrum F A duc perpendicularem B A L; ducatur item A C, f quæ f Per 23.l.1. faciat angulum B A C parem dato. Hæc auferet segmentum A Q C capiens angulum parem dato; vti patet ex 32.

PROPOSITIO XXXV.

SI in circulo duæ rectæ (C L, B F) se secuerint, rectangulum (C O L) sub segmentis vnius æquale est rectangulo (B O F) sub segmentis alterius comprehenso. Fig.46.47.48.

Si se intersecant in centro A, res patet.

Si vna C L transit per centrum A, & reliquam B F secat bifariam; secabit quoque a perpendiculariter, ac proinde quad. F O est rectangulum F O B. Ducatur A F; Quoniam C L bisecta est in A, & aliter in O; erit Fig.46. a Per 3.l.3.

{ rect. C O L. / quad. A O } Æ. b quad. A L; hoc est b Per 5.l.2.

c Per 47.l.1. quad. A F; hoc est c
{ quad. A O
quad. F O }

Dempto igitur communi quadrato A O, erit rect. C O L. Æ. quad. F O, hoc est rect. F O B.

Fig. 47. Si vna, C L, per centrum transit, & reliquam B F secat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta secet ipsam B F in I bifariam.
d Per 3.l.3. Igitur angulus A I B d rectus erit. Iam quia C L bisecta est in A & aliter in O, erit
e Per 5.l.2. { rectang. C O L.
cum quad. A O } Æ. e quad. A L; hoc est
f Per 47.l.1. quad. A B; hoc est f
{ quad. A I
quad. B I }

g Per eand. Sed quadratum A O æquatur g quadratis O I, A I. Ergo
{ rectang. C O L.
quad. O I
quad. A I } Æ. { quad. A I,
quad. B I. }

Dempto igitur communi quadrato A I, remanent
{ rect. C O L.
quad. O I } Æ. quad. B I

Atqui etiã quadratũ B I æquatur rectãgulo
i Per 5.l.2. i F O B cum quadrato O I, quia F B secta est bifariam in I & aliter in O. Ergo
{ rectang. C O L.
quad. O I } Æ. { rect. F O B
quad. O I. }

Dempto

Dempto igitur communi quadrato, O I, erit rect. C O L. Æ. rect. F O B.

Quod si neutra rectarum C L, F B per centrum transeat, per communem earum sectionem O per centrum A, ducatur recta X Z. Per modo demonstrata tam rectang. C O L quam rectang. F O B æquantur rectangulo Z O X. Ergo etiam C O L, F O B æqualia sunt inter se. Fig. 48.

PROPOSITIO XXXVI.

Si à puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, vna tangens (B F) altera secans (B C;) erit rectangulum (C B O) sub tota secante (C B) & parte (B O) inter punctum & circulum interiectâ comprehensum, æquale quadrato tangentis (B F.) Fig. 49. 50. 51.

Si secans B C transit per centrum A, iunge A F, faciet hæc a cum F B angulum rectum. Quoniam C O bisecta est in A, eique adiecta O B, erit Fig. 49. a Per 18. l.3.
{ rect. C B O, b
quad. A O } Æ. quad. A B hoc est c b Per 6.l.2. c Per 47.l.1.
{ quad. B F
quad. A F }

Ablatis ergo quadratis A O, A F, æqualibus, remanet
rect. C B O. Æ. quad. B F.

Quod

Fig. 50. 51. Quod si C B non transit per centrum A, ducantur A B, A F, A O, & A L ex centro ducta bisecet O C in L. Ergo angulus

d Per 3. l. 3. A L O *d* rectus erit. Item A F B *e* erit re-

e Per 18. l. 3. ctus. Quoniam vero C O bisecta est in L, eique adiecta est O B, erit

f Per 6. l. 2.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rect.CBO.}\\ \text{quad.LO}\end{array}\right\}\ \text{\AE.}^{f}\ \text{quad.LB.}$$

Addatur vtrimque quadratum A L, erit

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rect.CBO.}\\ \text{quad.LO}\\ \text{quad.AL}\end{array}\right.\ \text{\AE.}\ \left\{\begin{array}{l}\text{quad.LB}\\ \text{quad.AL}\end{array}\right\}$$

Sed quadrata L O, A L æquantur quadrato *g* A O seu A F; & quadrata L B, A L

g Per 47. l. 1. *i* æquantur quadrato A B. Ergo

i Per eand.

k Per eand.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rect.CBO.}\\ \text{quad.AF}\end{array}\right.\ \text{\AE.}\ \text{quad.AB; hoc est}^{k}\ \left\{\begin{array}{l}\text{quad.BF}\\ \text{quad.AF}\end{array}\right\}$$

Ablato igitur communi quadrato A F, remanet

$$\text{rect.CBO.}\ \text{\AE.}\ \text{quad.BF.}$$

Corollaria.

1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotuis ducantur secantes B C, omnia rectangula C B O, inter se æqualia sunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis B F.

2. Quæ

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, B F, B Q æquales sunt. Earum quippe quadrata æquantur singula eidem rectangulo C B O.

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum sub C B, & O B sit æquale quadrato B F, hæc circulum tanget in F. Fig. 52.

Ex B ducatur tangens B Q; & ex E centro ductis ad Q & F rectis E Q, E F, iungatur B E. Quoniam rectangulo C B O æquantur quadratum B F per hyp. & quadratum B Q per 36, hæc inter se æqualia sunt, adeoque & rectæ B Q, B F æquales. Igitur triangula F E B, Q E B sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo *b* anguli Q F, æquales b Per 8. l. 1.

erunt. Sed Q *c* rectus est. Ergo etiam F re- c Per 18. l. 3.

ctus est. Ergo B F *d* tangit. d Per 16. l. 3.

ELE-

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER IV.

HIc liber totus problematicus est, docet, quo artificio figuræ præsertim ordinatæ circulo inscribantur & conscribantur. Amplissimus est illius vsus in munitionibus extruendis: & ex illo quasi fonte eximiæ illæ sinuum, tangentium, & secantium tabulæ ingenti bono Matheseos fluxêre.

DEFINITIONES.

1. FIgura rectilinea circulo inscripta est, vel circulus figuræ circumscriptus, cum singulorum angulorum vertices in circumferentia existunt.

2. Figura rectilinea circulo circumscripta est, vel circulus figuræ inscriptus est, cum singula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata seu regularis est, quæ æquilatera & æquiangula est.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

CIrculo (B D) rectam datam (A) diametro non maiorem, inscribere. Fig. 1 l. 4.

Accipe in peripheria quoduis punctum B. Centro B interuallo datæ A describe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam B C. Dico factum.

PROPOSITIO II.

CIrculo triangulum inscribere dato (X) æquiangulum. Fig. 2.

Circulum tangat E F in D. Fiat angulus E D G par [o] angulo C, & F D H par B: [o] Per 23. l. 1.
iungaturque G H. Dico factum. Nam angulus H, æquatur [a] angulo E D G: hoc [a] Per 32. l. 3.
est [b] angulo C; & G æquatur [c] F D H; hoc [b] Per constr.
est [d] ipsi B. Ergo etiam G D H [f] æquatur A. [c] Per 32. l. 3.
Factum est igitur quod petebatur. [d] Per constr.
[f] Per corol. 9. p. 32. l. 3.

PROPOSITIO III.

CIrculo circumscribere triangulum æquiangulum dato H. Fig. 3.

Latus I K vtrimque producatur, vt fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A per 23. l. 1. angulos G A B, B A F pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum

tangant

tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum C D E est circulo circumscriptum & æquiangulum dato I L K.

In quadrilatero C G A B, anguli G & B sunt duo a recti. Ergo reliqui G A B, & C conficiunt simul etiam duos b rectos, ac proinde æquantur duobus simul O, I. Ablatis igitur G A B, & O æqualibus per cõstr. remanent æquales C, & I. Eodem modo ostenditur E æqualis esse K. Ergo D & L c etiam æquales erunt. Factum est igitur quod petebatur.

a Per 18.l.3.
b Per theor. 1 schol. post 32.l.1.
c Per corol. 9.p.32.l.1.

Quod autem tangentes concurrant, sic ostenditur. Anguli O, I, & K, N sunt æquales e 4 rectis, & I, K sunt minores duobus f rectis. Ergo O, N, (hoc est per construct. G A B & B A F) sunt maiores duobus rectis. Ergo G A F est minor duobus g rectis. Ergo recta G F cadit inter A & D. Ergo cum A G D, A F D sint recti, erunt D G F, D F G duobus rectis minores. Ergo i C G D, E F D concurrunt versus D. Simili ratione demõstrabis concurrere reliquas.

e Per 13 l.1.
f Per 32.l.1.
g Per corol. 3.p.13.l.1.
i Per schol. post 31.l.1.

PROPOSITIO IV.

fig.3.

TRiangulo circulum inscribere.

Duos angulos C & E biseca rectis C A, E A coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares A B, A G, A F. Circulus centro

tro A, per B descriptus, transibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim C A G, & C A B, quia anguli A G C, A B C, itemq; G C A, B C A per const. æquantur, & latus quoque A C est commune, etiam A G, A B a æqualia sunt. Pari modo ostendam paria esse A B, A F. Circulus ergo descriptus centro A transit per A, G, F: & quia anguli ad B, G, F sunt recti, tangit b omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

a Per 26.l.1.
b Per 16.l.3.

PROPOSITIO V.

TRiangulo circulum circumscribere: siue per tria data puncta (B, C, D) non ad vnam rectam posita, circulum describere. fig.4.

Puncta data B, C, D, binis rectis B C, C D connecte, quas biseca perpendicularibus O A, E A concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D transeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ A C, A D, A B. per constr. latera D O, A O æquantur lateribus C O, O A, & anguli ad O sunt recti. Ergo A D a æquatur A C. Eodem modo A B æquatur A C. Ergo etiam A D, A B b æquales. Ergo circulus centro A descriptus per B, transibit etiam per C & D. Quod petebatur.

a Per 4.l.1.
b Per axio.1.

Ad

Ad praxim tantum opus centris B,C,D, deſcribere tres æquales circulos ſe mutuo interſecantes, & per interſectiones ducere rectas, hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Fig 5. *Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere.*

Ducantur diametri B D, G E ſe mutuo ſecantes perpendiculariter; rectæ, quæ harum terminos iungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4.l.1.& ex 31.l.3.

Ducantur deinde quatuor tãgentes circulũ in B,C,D,E concurrentes in I,F,G,H. Figura I F G H quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18.l.3. ex coroll. 2.p.36.l.3;ex 28 & 34.l.1.

Scholium.

Fig.5. *Quadratum circumſcriptum circulo, duplum eſt inſcripti. Nam quia angulus B C D in ſe-*
d Per 31.l.3. *micirculo rectus d eſt; erit quadratum ex D B (hoc*
e Per 47. l.1. *eſt quadratum F I) æquale quadratis D C, B C, ac proinde duplum quadrati D C, hoc eſt quadrati C D E B.*

PRO-

PROPOSITIO VIII. & IX.

Quadrato (B E F C) circulum inſcribere & circumſcribere. Fig.6.

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E,F,C.

Deinde ex A duc A D perpendicularem ad C B. Centro A per D deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. quia ex hyp. C B, E B latera ſunt
æqualia, erunt anguli B C E, B E C a æqua- a Per 5. l.1.
les. Angulus autem C B E rectus eſt per hyp.
Ergo B C E, B E C b ſunt ſemirecti. Eodem b Per corol.
modo oſtendam C B F & reliquos eſſe ſe- 11.p.32. l.1.
mirectos, adeoque æquales inter ſe. Ergo in triangulo B A C cum duo ſint æquales an-
guli C B A, & B C A, erunt A B & A C
c æquales. Eadem ratione A B, A E, A F æ- c Per 6.l.1.
quales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per E,F,C.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper A G, A H, A I. Quoniam in triangulis G B A & D B A anguli ad D & G, itemq; ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque A B cõ-
mune, latera e A D, A G æqualia erũt. Eadẽ e Per 26.l.1.
ratione æqualia ſunt A G, A H, A I. Circulus ergo centro A per D tranſiens, tranſibit etiã

H per

f Per 16. l. 3. per G, H, I, tangetque latera f omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I sunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO X.

Fig. 7. *Triangulū isosceles cōstruere (B A C) in quo angulus ad basim (A B C, vel A C B, sit duplus anguli ad verticem (A.)*

Sumatur quæuis recta A B, quam ita seca a in D, vt rectangulum A B D sit æquale quadrato D A. Tum centro A per B describe circulum, cui inscribe B C b æqualem D A, & iunge A C. Erit triangulum B A C quæsitum.

a Per 11. l. 2.

b Per 1. l. 4.

Ducatur enim recta D C, & per C, D, A describe c circulum. Quoniam rectangulum A B D æquatur quadrato A D, hoc est B C, liquet B C tangere d circulum D O quem secat C D. Ergo angulus B C D æquatur e angulo A in segmento alterno: additoque communi D C A, erit B C A æqualis duobus A, & D C A. Sed quia latera A B, A C æquantur, A B C æqualis f est B C A. Ergo etiam A B C æquatur duobus A, & D C A. Sed etiam externus B D C g æquatur duobus internis A & D C A. Ergo A B C & B D C æquales sunt. Recta igitur D C æquatur h B C, hoc est per const. D A. Ergo anguli A & D C A k æquantur. Quare angulus A B C, qui duobus ostensus est æqualis, duplus erit vnius A. Factum igitur est, quod petebatur.

c Per 5. l. 4.

d Per 37. l. 3.

e Per 32. l. 3.

f Per 5. l. 1.

g Per 32. l. 1.

h Per 6. l. 1.

k Per 5. l. 1.

Corollarium.

Anguli ad basim singuli B & C in triangulo isoscelio iam constructo sunt duæ quintæ duorum rectorum, seu quatuor quintæ vnius recti, & reliquus A est vna quinta duorum rectorum seu duæ quintæ vnius. Patet ex propositione hac & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

Circulo pentagonum ordinatum inscribere. Fig. 8. & 7.

Describatur a triangulum B A C habens angulum ad basim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum G A D o inscribe circulo. Angulos ad basim A C D, & A D C seca bifariam rectis C E, D B, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E, rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inscriptum.

a Per prac.

o Per 2. l. 4.

Nam ex constructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales esse. Quare etiam arcus ijs subtensi, A E, E D, D C, C B, B A b sunt æquales. Itaque rectæ subtensæ b 28. l. 3.

c Per 27. l. 3. arcubus etiam æquales [c] erunt. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est vero etiam
d Per 29. l. 3. æquiangulum [d] quia eius anguli B A E, A E D, &c. insistunt arcubus æqualibus B C D E, A B C D, &c. Factum est igitur quod petebatur.

Corollarium.

Fig. 8. Angulus pentagoni ordinati facit sex quintas vnius recti, seu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm sint æquales, vtpote æqualibus arcubus B C, C D, D E insistentes, & medius per coroll. præced. sit duæ quintæ vnius recti, tres simul, hoc est ipse pentagoni angulus, conficient sex quintas vnius recti.

Scholium.

Ingeniosa est Euclidæa pentagoni inscriptio, sed multò expeditior illa Ptolomæi, quam tradit lib. 1. Almagesti, & est eiusmodi.

Fig. 12. *Ducantur diametri E D, B F se mutuo perpendiculariter intersecantes in A. Radium A D biseca in C. Centro C per B describe arcum, diametro E D occurrentem in G. Recta G B est latus pentagoni, & A G decagoni.*

Demonstratio hic dari nequit, pendet enim à lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clauium in scholio post p. 10. l. 13.

Problema.

Super datâ rectâ (A B) pentagonum ordinatum Fig. 9.
ita construes. Seca [e] A B, sic vt rectangulum e Per 11. l. 2.
A B C sit æquale quadrato A C. Ex A B vtrimque productâ aufer A D, B E æquales maiori segmento A C. Centris A & D, interuallo A B describe arcus duos se secantes in F: Item centris B & E, eodem interuallo se secantes in G. Rursum centris F & G, interuallo itidem A B, alios se secantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis iuncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc est æquilaterum, & æquiangulum) super datâ A B.

Æquilaterum esse patet ex constructione: æquiangulum esse sic demonstrabitur. Ducatur D F. Patet ex constructione triangulum A F D esse isosceles. Et basis A D est maius segmentum lateris D F, extrema & media ratione secti (est enim D F æqualis A B, & A D, æqualis A C.) Ergo angulus [o] D A F o Per corol.
est duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus p. 10. l. 4.
F A B est [p] tres quintæ duorum rectorum, siue sex p Per 13. l. 1.
quintæ vnius recti: ac proinde est [q] angulus penta- q Per corol.
goni ordinati. Eodem modo ostenditur angulum p. 11. l. 4.
G B A esse sex quintas vnius recti, ac proinde parem F A B. Vnde necesse iam est reliquos F, G, I, his æquales esse, vt patet ex 8. l. 1. si concipiatur subtendi recta F G.

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. **C***irculo pentagonum ordinatum circumscribere.*

Inscribatur pentagonum ordinatum per præced. G H I K M, ducanturque tangentes in punctis, G,H,I,K,M, quæ concurrant in B,C,D,E,F. Dico factum.

Ex centro duc rectas A G, A B, A H, A C, A I. Quoniam B G, B H ex vno puncto B, tangunt circulum, æquales a erunt. Trigona igitur G A B, H A B, sibi mutuo æquilatera sunt. Æquantur ergo b anguli O, P, item Q, S: ac proinde totus B duplus est ipsius P, & totus G A H duplus est S: Eadem de causâ anguli C & H A I dupli sunt ipsorum T, & N. Sed G A H, & H A I, æquales c sunt, quia insistunt arcubus æqualibus G H, H I, per constr. Ergo etiam eorum dimidij S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis B A H, C A H, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H d recti, latusque A H est commune, etiam e B H, C H, itemque anguli, P, T, æquales erunt. Eodẽ modo ostendã rectas B G, F G esse æquales. Igitur C B, F B duplæ sunt æqualium B G, B H, ac proinde æquales. Eodem modo ostendam reliqua latera pentagoni circumscripti

a Per corol. 2.p.36, l.3.
b Per 8. l.1.
c Per 29. l.3.
d Per 18. l.3.
e Per 26. l.1.

cumscripti esse æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: est vero & æquiangulum, quia cum iam ostensum sit angulos, B, & C, duplos esse æqualium, P, & T; etiam ipsi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumscripsimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumscribitur ordinata figura quæcunque, si prius illi similis circulo inscribatur.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

P*entagono ordinato circulum inscribere, & circumscribere.* Fig. 11.

Duos pentagoni angulos B, C, biseca rectis B N, C S concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem A L.

Circulus centro A per L descriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero descriptus centro A, per B, transibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis D C A, B C A, quia latera D C, C A, a lateribus B C, C A, itemque b anguli P, & O æquantur, etiam G, & I, æquales c erũt. Sunt vero a etiam toti B & D æquales. Quare cum d angulus G sit dimidius anguli, B, etiã, I, erit dimidius ipsius D. Igitur D quoque bisectus est rectâ D M. Ob eandem causam, reliqui pentagoni anguli

a Per hyp.
b Per constr.
c Per 4. l.1.
a Per hyp.
d Per constr.

guli E, F sunt bisecti : ac proinde omnes dimidij anguli inter se æquales erunt. Ducantur insuper perpendiculares A M, A S, A N, A R. Quoniam igitur in trigonis L B A, M B A, anguli G, & Q æquantur, & latus L B lateri M B *e* æquale est, latusque B A commune, etiam *f* A L, A M æquales erunt. Pari modo ostendam reliquas A M, A S, A N, A R inter se æquari. Circulus ergo centro A transiens per L, transibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R, recti sunt, per constr. tanget *g* quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

e Per corol. 2.p.36.l.3.
f Per 4.l.1.
g Per 16. l.3.

Pars 2. in trigono C A B, quia anguli O, & G, iam ostensi sunt æquales, erunt latera A C, A B *h* æqualia: eademque ratione æquantur etiam A B, A F, A E, A D; ac proinde circulus centro A transiens per B, transibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inscripsimus & circumscripsimus. Quod erat faciendum.

h Per 6.l.1.

PROPOSITIO XV.

In dato circulo Hexagonum ordinatum describere.

Fig. 13.

Ducatur diameter F A B. Centro B per centrum A, describe circulum, qui datum secet in C, & D. Item centro F per A describe circulum, qui secet datum in E, & G, sex

sex puncta B, C, E, F, G, D, rectis lineis connexa dabunt quæsitum.

Ex centro A emittantur rectæ A C, A E, A G, A D. Patet triangula H, I, M, L *a* esse æquilatera: deinde quia anguli C A B, E A F, singuli *b* efficiunt vnam tertiam rectorum duorum, ac proinde simul duas tertias, patet *c* E A C etiam esse vnam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur E A C, C A B æquales sunt, sunt autem & latera E A, A C, æqualia lateribus B A, A C. Ergo *d* basis E C basi C B, hoc est (vt iam ostensum) radio, A C, æqualis est. Quare etiam N æquilaterum est. Eodem modo ostenditur æquilaterum esse K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N, æquilatera sunt, Patet latera singula C B, B D, D G, G F, F E, E C æquari radio circuli A C, seu A B, ac proinde inter se. Hexagonum igitur æquilaterum est. Est vero & æquiangulum, cum singuli eius anguli E, C, B, D, G, F constent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inscripsimus, est ordinatum.

a Ex.1.l.1.
b Per corol. 12.p.32.l.1.
c Per corol. 1.p.13.l.1.
d Per 4.l.1.

Corollaria.

1. Latus hexagoni circulo inscripti æquale est radio.
2. Angulus hexagoni ordinati est quatuor tertiæ vnius recti, constat enim ex duobus

bus angulis trianguli æquilateri quorum
d Per corol. singuli conficiunt d duas tertias vnius recti.
12.p.32.l.1. 3. Si ducatur insuper diameter P S, per-
Fig.14. pendicularis alteri F B, & interuallo radij P A, centris P,&,S, sectiones fiant in O, & Q, in R, & T; puncta P,E,O,F,R,G,S,D, T,B,Q C, rectis lineis connexa dabũt duodecangulum ordinatum vnâ circini aperturâ circulo inscriptum. Id quod magno est vsui in Gnomonica.

Fig.14. 4. Ex demonstratis elicitur etiam descriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro F B, centro B per A centrum describe arcum C A D. Puncta C, F, D, rectis iuncta dant æquilaterum quæsitum.

5. Æquilateri trianguli latus (C X D) à diametro (B F) ad ipsum perpendiculari, quartam partem (B X) abscindit. Nam anguli A C X, B C X, æqualibus arcubus G D,
e Per 29. l.3. D B insistentes, æquales e sunt: & latera A C, C X æquantur lateribus B C, C X. Er-
f Per 4.l.1. go A X, B X f æquales sunt. Ergo B X est quarta pars diametri B F.

Scholium.

Problema.

Fig.13. t Per 1.l.1. *Hexagonum ordinatum super data recta (C B) ita canstrues. Fac t triangulum C A B æquilaterum supra datam C B. Centro A per B, & C describe circulum. Is capiet hexagonum super datâ rectâ C B. Patet ex propos. & corol. 1.*

Theorema.

Quadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum est quadrati ex semidiametro circuli, cui inscriptum est, adeoq; ad quadratum diametri est vt 3 ad 4.

Ducatur semidiameter A D. Quadratum F D, Fig.14.
æquatur quadratis s F A, D A, & rectangulo F A X s Per 12.l.2.
bis. Sed rectang. F A X bis est par quadrato semidiametri F A. seu D A (nam quia A X, X B æquales
t sunt, rectangulum F A X bis æquatur duobus re- t Per corol.
ctangulis nempe sub F A, A X, & sub F A, X B; hoc 5 præced.
est rectangulo u F A B; hoc est quadrato F A.) Ergo u Per 1. l.2.
quadratum F D triplum est quadrati ex semidiametro.

Quia autem quadratum totius diametri F B
quadruplum x est quadrati F A. Patet quadratum x Per 4.l.2.
F D esse ad quadratum diametri, vt 3 ad 4.

Hinc sequitur latus æquilateri trianguli esse ad diametrum, vt radix quadrata ternarij est ad 2, radicem nempe quadratam quaternarij, ac proinde esse lineas incommensurabiles.

PROPOSITIO XVI.

In circulo quindecagonum ordinatum Fig.15.
describere.

Cir-

a Per 11.l.4. Circulo inſcribe [a] latus pentagoni A C,
b Per corol. 4.p.15.l.4. & trianguli [b] æquilateri latus A D. Arcum C D biſeca in E. C E eſt latus quindecagoni.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15, erit arcus A C, 3, & arcus A D, 5. ac proinde arcus C D, 2, ideoque C E vnum.

Corollarium.

Fig. 15. HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera A C, A D circulo ſint inſcripta, arcuum differentia C D continebit tot latera nouæ figuræ ordinatæ, quot vnitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem nouæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Vt ſi A D ſit latus quadrati, & A C decagoni. Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus C D continet 6 latera figuræ nouæ. Ea vero eſt 40 laterum. Denominatores enim 4 & 10 inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, quâ ſolo circino & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17, &c. Cum illa inſcriptio figurarum dependeat à diuiſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentiâ in 360 partes diuiſâ, mechanicè figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.

Problema 1.

GRadus 360 (hoc eſt totam circumferentiam) diuide per denominatorem polygoni inſcribendi (exem. gr. nonanguli) quot vnitatibus conſtat quotiens (40) tot graduum fac in centro angulum A G K. A K erit latus figuræ quæſitæ (nonangulæ) circulo inſcribendæ. Fig. 15.

Problema 2.

AT ſuper data recta quamuis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis: Fig. 15.

Angulus rectus eſt ad angulum figuræ.

					differ.
In Pentagono	*vt*	5	*ad*	6...	1
Hexagono	*vt*	3	*ad*	4...	1
Heptagono	*vt*	7	*ad*	10...	3
Octogono	*vt*	2	*ad*	3...	1
Nonagono	*vt*	9	*ad*	14...	5
Decagono	*vt*	5	*ad*	8...	3
Vndecagono	*vt*	11	*ad*	18...	7
Duodecagono	*vt*	3	*ad*	5...	2

Oporteat igitur ſuper data recta X B heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X deſcribe circulum, Fig. 15.

culum, à quo abſcinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, vt 7 ad 10, & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7 arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot vnitates habet differentia. Per tria puncta B X N, de-

a Per 5. l. 4. ſcribe a circulum, hic capiet heptagonum datæ rectæ X B.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt 32, l.1. quo reperitur numerus rectorũ angulorum, quos efficiunt anguli cuiuſcunque rectilinei, qui numerus diuiſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6 triangula æquilatera, 4 quadrata, 3 hexagona, ſpacium replere poſſunt: Hoc eſt vnam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Vt aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpacium, requiritur vt anguli plurium eius ſpeciei figurarum circa vnũ punctum compoſiti, poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa vnum punctum poſſunt conſtitui, vt patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. vt triangula æquilatera poſſint replere ſpacium, re-

quiritur

quiritur, vt aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, circa punctum A compoſiti efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt, 6 anguli trianguli æquilateri (nam vnus facit duas tertias b vnius recti, ac proinde 6 faciunt 12 tertias vnius recti, hoc eſt 4 rectos;) item 4 anguli quadrati, vt patet; item 3 anguli hexagoni (vnus enim facit 4 tertias c vnius recti, ac proinde 3, faciunt 12 tertias vnius recti, hoc eſt rurſum 4 rectos.) Ergo &c.

Fig 13.

b Per coroll. 12. p. 32. l. 1.

c Per coroll. 2. p. 15. l. 4.

Quod autem id nulla alia figura poſſit, liquido conſtabit ſi angulum eius repertum, vt ſupra, quocunque numero multiplices: ſemper enim aut deficient à 4 rectis, aut excedent.

ELE-

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER V.

QVanti momenti in Geometria ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & ſexto libro. Sed quamuis illi cæteriſq; elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5.l.5. vertitur: vbi tradit Euclides, quid ſit quatuor magnitudines eſſe proportionales, ſiue duas rationes, eaſdem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rationes tum æquales dici ſeu ſimiles, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, conſequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis, ſemper vel ſimul æqualia ſunt, vel ſimul maiora, vel ſimul minora [a]. Atque ex ea definitione omnes deinde 5 & 6 libri demonſtrationes mediatè vel immediatè deducit. Hæc doctrinæ Euclideæ ſumma: quæ multiplicem, vt dixi, difficultatem habet. Nam inprimis certum eſt eâ definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, vt quandocumque ea demonſtrata fuerit de quibuſuis rationibus, inferre certò liceat æquales eas eſſe: vel is ſenſus illius eſt, vt per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo iam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, vt ex eâ rationum æqualitas certò poſſit inferri. Id verò minimè vulgare theorema eſt, quod neque Euclides, neque alius poſt Euclidem vllus demonſtrauit. Si ſecundum; ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſolutâ rationum æqualitate. Exemplum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclideâ demonſtratione rationē triangulorum A B C, & D E F æqualem eſſe rationi baſium A C, & D F, per rationum æqualitatem, ſolùm intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, baſium rationibus verè & abſolutè æquales eſſe, cum demonſtratum non ſit affectionem illam multiplicium cum abſolutâ & verâ rationum æqualitate neceſſariò eſſe connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5 ac 6 demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique vt ſibi conſtarent omnia; tamen

[a] Hæc definitio declaratur infra. poſt defin. 6.

Fig. 1. l. 6. tabulâ 4.

tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisq; semper displicuit, & tyronibus plurimum semper facessiuit negotij, quorum ita plerumq; mentes intricat, vt exitum vix reperiant. Quare vt doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & vniuersæ Matheseos est, ab ea labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

Primò ostendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur, eo ferè loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potius subinde aliquâ, quam demonstratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus, & perobscuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundò demonstrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æquè multiplices, consequentium quibuslibet æquè multiplicibus vel pariter maiores sunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes esse verè æquales, seu similes. Quo stabilito omnes Euclideæ demonstrationes, totaq; illius de proportionibus doctrina subsistet, vt qui nostris probationibus contentus non sit, ad Euclideas quamuis prolixas, iam tamen securas ac solidas se possit conuertere. Assignabimus item (ac demonstrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clarissimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propositiones, deducere poterit, qui voluerit.

Tertio. De proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione, tractatum subiungam peritioris Geometriæ studiosis planè necessarium, vbi etiam

etiam demonstrabimus axioma illud, seu potius theorema hactenus indemonstratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus satis erit definitiones & primam partem perlegere.

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. Pars aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, siue adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo vnius pedis est pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, est pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter, excedit.

2. Magnitudo magnitudinis multiplex est, cum minor metitur maiorem, ac proinde eius pars aliquota est; siue cum maior minorem aliquoties continet præcisè.

3. Ratio siue proportio est duarum eiusdem generis magnitudinum mutua quædam secundùm quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, siue is qui nominandi casu effertur: alter Consequens.

Cum antecedens & consequens sunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur esse proportio inæqualitatis.

4. Ratio seu proportio rationalis est, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest. Proportio irrationalis est, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest.

Porro commensurabiles quantitates sunt, quas aliqua communis mensura metitur; incommensurabiles quas nulla metitur mensura communis.

Fig. 1. l. 3. tabulâ 3. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) sunt similes, æquales, eædem; cum vnius antecedens (A) æquè seu eodem modo (hoc est nec magis, nec minus) continet suum consequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet suum consequens (F.)

Fig. 2. Vel quando vnius antecedens (A) eodem modo continetur in suo consequente (B,) quo (C) antecedens alterius in suo (D.)

Fig. 3. 6. Duæ rationes sunt dissimiles, siue vna ratio est maior alterâ, quando vnius antecedens (I) magis continet suum consequens

Fig. 4. (L,) quam alterius antecedens (O) contineat

neat suum consequens (Q;) vel quando antecedens vnius, minus continetur in suo consequente, quàm antecedens alterum contineatur in consequente suo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Qvid porro sit vnum antecedens æquè, vel magis continere suum consequens, quàm antecedens alterum contineat suum, si proportiones sint rationales, definiri & explicari vlterius potest per numeros, vt si A sit triplum B, & C triplum F, Fig. 1. *perspicuum erit, quid sit, A æquè seu eodem modo continere B, quo C continet E: vel si I sit triplum* Fig. 3. *L, O verò duplum, Q; constabit rursum, quid sit I magis continere L, quam O contineat Q. At si proportiones fuerint irrationales, ea res explicari vlterius nec potest, nec debet. Dentur magnitudines incommensurabiles A, B, perspicuum est A non so-* Fig. 5. *lum maius esse B, sed etiam certo quodam modo esse maius, (A quippe aliter continet B, quàm alia qualibet maior minorúe quam A:) neque tamen vlteriùs quæri, aut explicari debet, quis sit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitatibus non debet vlterius quæri, quid sit vnam certo modo continere alteram, ita neque cum dantur quatuor proportionales incommensurabiles, quæri debet vlteriùs, quid sit C eodem modo continere D, quo A* Fig. 5. *con-*

continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, vlterius est inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, vlterius inexplicabilis est.

Fig. 5. Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles sint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, maiores, minores, diuersis terminis constantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommensurabili secum quantitate, quoties potest, puta ter: & supersit E F: Sit deinde O tertia pars ipsius C, sit insuper quæpiam X ipsi C incommensurabilis, quæ maior sit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter, C verò continet X minus quam ter (nam C continet præcisè ter O minorem quam X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur iam Q, quarta pars C, & quæpiam esto Z, ipsi C incommensurabilis, quæ minor sit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus, quam quater; C verò continet Z plus quam quater (cum C præcisè quater contineat Q, maiorem quam Z) erit ratio irrationalis C ad Z maior ratione irrationali A ad B.

Iam verò, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rursum, quia C ad aliquam Z maiorem rationem habet quam A ad B; manifestum est etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z eandem habere rationem, quam A ad B. Quod quidem perindè clarum est lumine naturali,

rali, atque istud: dabile est maius quam P, & dabile est minus quam P, ergo dabile est æquale aliquod ipsi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidæâ desideretur.

QVod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales esse dicit, cum antecedentium quæcunque æque multiplices I, Q, consequentium quibuscumque æque multiplicibus L, R; vel simul maiores sunt, vel simul minores, vel simul æquales: hoc est cum I superante L, etiam Q semper superat R; & cum I superatur ab L, etiam Q semper superatur ab R; & cum I est æqualis L, etiam Q semper est æqualis R. Vbi benè notandum est, Euclidem non aßumere æque multiplicium excessus defectusq; proportionales, seu similes, sic enim ineptè idem per idem explicasset; sed excessus & defectus simpliciter. Nihilominus hic aliquid in summo Geometrâ desiderari iam supra declarauimus. Nam vel cupit hisce verbis rationes æquales definire, & sic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; euidens quippe est, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & sic demonstrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita semper esse connexam, vt hæc ex illâ certò poßit inferri. Quæ quidem connexio & perobscura & demonstratu Fig. 21.

difficilis est: vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quam simultaneum illum excessum defectumúe multiplicium; Et sic toto 5 ac 6 libro, cum quatuor magnitudines proportionales esse demonstrat, nihil sciemus aliud, quàm dictum excessum & defectum illis competere, incerti planè, vtrum magnitudines, de quibus agitur, sint verè proportionales.

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile assignatur.

Quod si rationum æqualium desideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale assignabimus, demonstrabimusq́; theor. 5. & 6. partis 2. estq́; eiusmodi:

Fig. 26. *Rationes o æquales sunt (A B ad C F; G M ad N Q) quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque, in antecedentibus æquali semper numero continentur.*

o Maioris inæqualitatu.

Vt si vna decima ipsius C F contineatur in A B ducenties, vna quoque decima N Q contineatur ducenties in G M, & si vna centesima C F contineatur millies in A B, etiam vna centesima N Q contineatur millies in G M, & sic deinceps in infinitum; erit A B ad C F, vt G M ad N Q.

Inæquales autem rationes sunt, quando aut consequentes ipsæ, aut consequentium aliquæ similes aliquotæ in antecedentibus inæquali numero cōtinentur. Et illa ratio maior est, cuius vel consequens

quens, vel consequentis aliquota, sæpius continetur in antecedente.

Vt si vna centimillesima C F sæpius contineatur in A B, quàm vna centimillesima N Q, in G M, erit ratio A B ad C F maior ratione G M ad N Q, quamuis innumeræ aliæ consequentium C F, N Q similes aliquotæ in antecedentibus A B, G M æquali numero continerentur. Fig. 26.

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties possunt, æquali numero sunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuò elucescit, cum sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata, consequentibus commensurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes sunt, quæ in suis totis æquè, seu eodem modo continentur, vt qualis pars sui totius est vna, talis pars sui totius sit altera. Quod sanè nihil aliud est, quam partes ad sua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur; vt si vtraque sit sui totius vna tertia, vna decima &c.

8. Magnitudines (A B C D) continuè proportionales dicuntur, cum medij termini (B, C) bis sumuntur; hoc est cum sunt consequens respectu præcedentis, & antecedens respectu sequentis. Fig. 6.

Continuas rationes sic efferimus, A est ad B, vt B ad

B ad C; & B eſt ad C, vt C ad D, & ſic deinceps.

9. Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cũ nullus terminus bis accipitur.

Fig.1. *Diſcretas rationes ſic efferimus A eſt ad B, vt C ad F. Cum plures fuerint proportionales magnitudines, quam tres, ſi proportionales dicantur, ſemper intelligitur diſcretim.*

Fig.6. 10. Cum magnitudines (A B C D) fuerint continuè proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam eius rationis, quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B:) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam, eius, quam eadem prima habet ad ſecundam (B) & ſic deinceps.

11. Homologo, ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus. Vt ſi A
Fig.1. eſt ad B, vt C ad F; homologæ erunt A, C,
& B,F.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex his 10. non alium vſum habent, quam vt reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igitur prætermiſſis, 15 reliquas proponemus ſolas, Euclidis ordine non mutato. Porro huius libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omnino quantitatibus conueniunt. Lineæ igitur, quibus hic vtimur, omne genus quantitatis repræſentant.

Axioma.

Axioma.

Datis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO 1. 2. 3. 4. 5. 6.

IN noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO VII.

*SI quantitates A & B fuerint æqua- Fig.7.
les, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, vt B eſt ad Z.*

& Z erit ad A, vt eadem Z eſt ad B.

Hæc propoſitio vti & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

PROPOSITIO VIII.

*SI quantitates (C & F) fuerint inæ- Fig.8.
quales; maior C ad tertiam Z maiorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z.*

Et Z ad maiorem C minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt quam C.

PRO

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales sunt A & B.*

Et si eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rursum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig 8. *SI C ad Z maiorem rationem habeat, quam F ad Z, erit C maior quam F.*

Et si Z ad F maiorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C, erit F minor quam C.

PROPOSITIO XI.

Fig. 9. *RAtiones, quæ eidem rationi sunt æquales, eædem, similes, (idem omnia significant) sunt æquales, eædem similes inter se.*

Vt si tam ratio A ad B, quam ratio C ad F, sint æquales rationi X ad Z, erũt quoque rationes A ad B, & C ad F æquales inter se. Siue si A sit ad B, vt X ad Z, & C sit ad F, vt X ad Z: erit quoque A ad B vt C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus sunt æquales, inter se sunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO XII.

SI singulæ magnitudines quotcunque (A, B, C,) eandem habuerint proportionem ad singulas totidem (F, I, L:) quam proportionem habent singulæ ad singulas, siue vna (A) ad vnam (F;) eandem habebunt omnes (A, B, C) simul sumptæ, ad omnes (F, I, L) simul sumptas. Fig. 10.

Rem per se manifestam exemplo tantum aliquo rationali declaro; vt si singulæ A, B, C, singularum F, I, L, sint triplæ (hoc est si singulæ ad singulas eandem habeant rationem quam 3 ad 1;) etiam A, B, C simul sumptę, simul sumptarum F, I, L triplæ erũt, (hoc est, etiam A, B, C simul sumptæ ad F, I, L simul sumptas rationem habent eandem, quam 3 ad 1. In proportione irrationali res æquè clara est.

PROPOSITIO XIII. XIV.

IN nostra methodo sunt superfluæ.

PROPOSITIO XV.

ALiquotæ similes (F, I) eandem inter se rationem habent quã tota (A, B.) Fig. 10.

Et

Fig.11. *Et vniuersim partes similes (C,F) sunt inter se vt tota (A,B.)*

Verè instar axiomatis haberi potest, si rectè intelligatur, quid sint partes similes. Vide defin.7.

PROPOSITIO XVI.

Fig.11.vel 1. *SI prima (A) sit ad secundam (B,) vt tertia (C) ad quartam (F;) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C,) vt secunda (B) ad quartam (F.)*

Ponantur B & F esse minores quam A & C, nam si æquales sint res patet. Quoniam A ponitur esse ad B, vt C ad F, erunt per defin.7. B & F, totorum A & C partes similes, ac proinde per præced. quam proportionem inter se habent tota A, C, eam quoque habent partes similes B, F; hoc est, A est ad C, vt B ad F.

Scholium.

SI A est ad B, vt C ad F, etiam inuertendo erit vt B ad A, sic F ad C. Per se patet.

Apud Euclidem hoc est corollarium prop.4. quæ cum in nostra methodo tanquam superflua, sit omissa, visum est corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens vnum (A B) sit ad consequens (C B,) vt antecedens alterum (F I) ad consequens alterum (L I;) etiam diuidendo erit (A C) excessus antecedentis primi supra suum consequens, ad idem consequẽs (C B,) vt (F L) excessus antecedentis secundi supra consequens secundum, ad secundum consequens (L I.) Fig.12.

Axiomatis instar assumi potest: si tota A B, F I eandem rationem habeant, ad X & Z, etiam similibus partibus mulctata eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc est, adhuc A B sic mulctata erit ad X, vt F I sic mulctata ad Z. Id vero est quod asserit propositio. Nam quia ponitur A B esse ad C B, vt F I ad L I, erunt [a] C B, L I similes partes totorum A B, F I; & A C, F L, erunt tota similibus partibus mulctata. Cum ergo tota habuerint ad C B, L I, eandem rationem, etiam A C, F L, (hoc est tota similibus partibus mulctata) pergent ad C B, L I eandem inter se habere rationem, hoc est adhuc erit A C ad C B, vt F L ad L I.

a Per def.7. l.5.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12. *SI antecedens vnum (A C) sit ad consequens vnum (C B,) vt antecedens alterum (F L) ad consequens alterum (L I;) etiam componendo erit (A C cum B C) primum antecedens cum suo consequente, ad idem consequens (C B,) vt (F L cum L I) secundum antecedens cum suo consequẽte, ad consequens (L I.)*

Rursum enim instar axiomatis assumi poterit: si duæ quantitates A C, F L, eandem ad X & Z habeant rationem, etiam A C, F L similiter, seu proportionaliter auctæ pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc est adhuc erit A C sic aucta ad X, vt F L sic aucta ad Z. Id verò est quod propositio asserit. Nam ponitur A C esse ad C B, vt, F L, ad L I. Quare si ipsis A C, F L, addantur C B, L I; erunt A C, F L proportionaliter, seu similiter auctæ. Cum igitur A C, F L eodem modo se habeant ad C B, L I, etiam cum similiter fuerint auctæ (hoc est ipsæ iam A B, F I) pergent ad easdem C B, L I, eodem modo se habere; hoc est adhuc A B erit, ad C B, vt F I ad L I.

Corollarium 1.

SI antecedens vnum (A B) fuerit ad consequens (C B,) vt antecedens alterum (F I) ad consequens alterum (L I,) etiam antecedens primum (AB) erit ad (A C,) excessum suum supra consequens, vt antecedens alterum (F I) est ad (F L) excessum suum supra consequens alterum (L I.) Fig. 12.

Cum enim A B sit ad C B, vt F I ad L I, erit diuidendo a A C ad C B, vt F L ad L I: & inuertendo b B C ad C A, vt I L ad L F: & componendo c B A ad C A, vt I F ad L F.

a Per 17. l. 5.
b Per schol. p 16. l. 5.
c Per 18. l. 5.

Hæc argumentatio vocatur conuersio rationis.

Corollarium 2.

SI A C est ad A B, vt F L ad F I, erit quoque A C ad C B, vt F L ad L I; & A B ad C B, vt F I ad L I. Fig. 12.

Cum enim sit vt A C ad A B, sic F L ad F I, erit inuertendo B A ad C A, vt I F ad L F: & diuid. d B C ad C A, vt I L ad L F: & rursum inuertendo A C ad C B, vt F L ad L I: & compon. e A B ad C B, vt F I ad L I.

d Per 17. l. 5.
e Per 18. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI vt totum (A B) est ad totum (F I,) ita ablatum (C B) sit ad ablatum (L I,) Fig. 12.

etiam vt totum est ad totum, ita reliquum (A C) erit ad reliquum (F L.)

Omnino clarum est per se. Potest tamen ex præcedentibus sic ostendi: quoniam A B est ad F I, vt C B ad L I, erit permutando [a] A B ad C B, vt F I ad L I. Ergo per conuersionem rationis A B est ad A C, vt [b] F I ad F L. Ergo permutando [c] vt A B ad F I, ita A C ad F L.

a Per 16. l. 5.
b Per corol. 1. præced.
c Per 16. l. 5.

PROPOSITIONES XX. XXI.

IN *nostra methodo sunt superflua.*

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

SI *fuerit A ad B, vt O ad Q; & B ad C, vt Q ad R, & sic deinceps: erit ex æquo vt A prima ad C vltimam, ita O prima ad vltimam R.*

Ponantur C, R esse minores quam B, Q: eadem foret ostensio, si maiores ponerentur. Quoniam [a] B est ad C, vt Q ad R; erunt C, R totorum B, Q, [b] partes similes. Cum igitur A, & O ad B & Q, eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C & R, quæ sunt ipsorum, B, & Q, partes similes, eandem rationem. Instar enim axiomatis est, si duæ quantitates ad alias duas eandem inter se habuerint rationem, etiam ad partes earum similes, eandem inter se habere rationem.

a Per hyp.
b Per defin. 7. l. 5.

Si plures fuerint vtrimque quantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

SI *fuerit vt A prima ad B secundam, ita O prima ad Q secundam; & vt B secunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit ex æquo vt A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q secundam.*

Fig. 14.

Vt B est ad C, ita [o] potest Q esse ad aliam quampiam S. Iam quia vt B ad C, sic [p] R est ad O, & vt B ad C [q] sic Q est ad, S; erit R ad O, [a] vt Q ad S. Igitur permutando [b] R est ad Q, vt O ad S. Deinde, quia O est ad Q, vt [f] A ad B, & Q est ad S, [i] vt B ad C; ex æquo erit O ad S vt [c] A est ad C. Sed iam ostendi R esse ad Q, vt O est ad S. Ergo etiam [d] R est ad Q, vt A ad C.

o Per axi. ante 1. l. 5.
p Per hyp.
q Per constr.
a Per 11. l. 5.
b Per 16. l. 5.
f Per hyp.
i Per constr.
c Per præc.
d Per 11. l. 5.

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

SI *fuerit vt A ad B, ita C ad F; & vt I ad B, ita L ad F: erit vt A cum I ad B, ita C cum L ad F.*

Fig. 15.

Quoniam I per hyp. est ad B, vt L ad F; erit quoque a inuertendo B ad I, vt F ad L. Cum igitur A sit ad B, b vt C ad F, & B ad I, vt F ad L; ex æquo erit c vt A ad, I, sic C ad L. Igitur d componendo vt A I est ad, I, sic C L est ad L: I verò est ad B, e vt L ad F. Rursum igitur f ex æquo A I est ad B, vt C L ad F.

a *Per schol. p.16.l.5.* b *Per hyp.* c *Per 22.l.5.* d *Per 18.l.5.* e *Per hyp.* *Fig.22.l.5.*

PROPOSITIO XXV.

Fig.16.

SI quatuor magnitudines (A B, C F, I, L) fuerint proportionales, maxima (A B) & minima (L) duabus reliquis (C F, I) maiores erunt.

Sit A B ad C F, vt I ad L. Ex maxima A B sumatur A Q æqualis I; & ex C F sumatur C R par minimæ L. Erit igitur A B tota ad totam C F, vt ablata A Q ad ablatam C R. Ergo reliqua Q B est ad reliquam a R F, vt tota A B ad totam C F. Sed A B maior b est quam C F. Ergo & Q B maior quam R F. Iam verò quia A Q ipsi I, & C R ipsi L, æquales sunt, etiam A Q cum L, ipsi I cum C R æquales erunt. Quare si ad A Q cum L, addatur maius Q B, & ad I cum C R addatur minus R F, erit totum A Q B cum L, maius toto, I, cum C R F. Quod erat demonstrandum.

a *Per 19.l.5.* b *Per hyp.*

Quæ

Quæ sequuntur non sunt propositiones Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, aliisq; desumptæ ob frequentem earum vsum Euclidæis subiungi solent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig.17.

SI prima, (A) ad secundam (B) maiorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit inuertendo (B) secunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam.

Quoniam ponitur A habere ad B maiorem rationem, quam C ad F. Igitur A ad o aliquam B X (quæ a maior erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Inuertendo igitur erit B X ad A, vt F ad C, ac proinde b B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

o *Per axio. ante 1.l.5.* a *Per 10.l.5.* b *Per 8.l.5.*

PROPOSITIO XXVII.

Fig.17.

SI A habet ad B maiorem rationem quam C ad F, etiam permutando A ad C maiorem rationem habebit, quam B ad F.

Quoniam ratio A ad B ponitur maior ratione C ad F, erit o ratio A ad aliam B X (quæ necessario maior est quam a B) æqualis

o *Per axio. ante 1.l.5.* a *Per 10.l.5.*

b Per 16. l. 5. lis rationi C ad F. Iam igitur *b* permutando A erit ad C, vt B X ad F. Sed B X ad
c Per 8. l. 5. F est in maiori ratione, *c* quam B ad F. Ergo etiam A est ad C in maiori, quã B ad F.

Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 18.

SI A B ad B C maiorem rationem habet, quam F I ad I L; etiam componendo A C, ad B C maiorem rationem habet, quam F L ad I L.

Quoniam ponitur A B ad B C esse in maiori ratione, quam F I ad I L. Ergo
o Per axio. ante. 1. l. 5. *o* alia O B (quæ necessario erit minor, *a* quã
a Patet ex 10. l. 5. A B) est ad B C, vt F I ad I L. Ergo *b* componendo O C est ad B C, vt F L ad I L. Ergo
b Per 18. l. 5. A C est ad B C in *c* maiori, quam F L
c Per 8. l. 5. ad I L.

Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 18.

SI A C ad B C maiorem rationem habet, quam F L ad I L; etiam diuidendo A B ad B C maiorem habet rationem, quam F I ad I L.

Qui

Quia ponitur A C ad B C maiorem habere rationem, quam F L ad I L; Ergo *o* alia O C (quæ necessario minor erit, *a* quã A C) erit ad B C, vt F L ad I L. o Per axio. ante. 1. l. 5.
Iam igitur erit diuidendo *b* O B ad B C, vt F I ad I L. Ergo A B est ad B C in *c* maiori, quam F I ad I L. a Per 10. l. 5. b Per 17. l. 5. c Per 8. l. 5.

Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18.

SI A C ad B C maiorem rationem habet, quam F L, ad I L; conuertendo habebit A C ad A B minorem, quam F L ad F I.

Quoniam A C est ad B C in maiori, quam F L ad I L, erit diuidendo *a* A B ad B C in a Per 29. l. 5.
maiori, quam F I ad I L. Ergo inuertendo b Per 26.
b C B ad B A, est in minori, quam L I ad l. 5.
I F. Ergo componendo *c* C A est ad B A c Patet ex 28. l. 5.
in minori, quam L F ad I F.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19.

SI A B ad C maiorem rationem habeat, quam F ad I; & C ad L Q maiorem rationem habeat, quam I ad S, & sic deinceps; etiam prima A B ad vlti-

vltimam L Q maiorem rationem habebit, quam prima F ad vltimam S.

Quoniam A B est ad C in maiori, quam F ad I; Ergo alia [o] quæpiam O B (quæ necessario minor [a] erit quam A B) est ad C, vt F ad I. Et quia C est ad L Q in maiori quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam L R (quæ erit necessario maior quam L Q) est vt I ad S. Igitur ex æquo [c] O B est ad L R vt F ad S. Ergo O B est ad L Q in maiori quam [d] F ad S. Ergo A B est ad L Q [e] in multo maiori, quam F ad S.

o Per axio. a Per 10.l.5. c Per 22.l.5. d Per 8.l.5. e Per eand.

PROPOSITIO XXXII.

Fig.19.

SI A B ad C maiorem rationem habet, quàm I ad S; & C ad L Q maiorem, quàm F ad I; etiam ex æquo habebit maiorem rationem A B ad L Q, quam F ad S.

Demonstratio eadem quæ præcedentis, sed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig.12.

SI tota (A B) ad totam (F I) maiorem rationem habuerit, quam ablata (C B) ad ablatam (L I,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (A C) ad reliquam (F L.)

Quia

Quia A B est ad F I in maiori, quàm C B ad L I; erit [a] permutando etiam A B ad C B in maiori, quam F I ad L I. Ergo conuertendo [b] A B est ad A C in minori, quam F I ad F L. Ergo etiam permutando [c] A B est ad F I, in minori, quam A C ad F L.

a Per 27.l.5. b Per 30.l.5. c Patet ex 27.l.5.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig.20.

SI rationes (A ad C, & E ad O) sunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ & sic deinceps, æquales sunt etiam ipsæ.

Quia ratio A ad C duplicata est rationis A ad B, erit [a] vt A ad B, sic B ad C. Ob eandem causam erit vt E ad F, sic F ad O. Cum ergo sit vt A ad B, sic per hyp. E ad F; & vt B ad C, sic F ad O (nam vt B ad C, sic A ad B, hoc est E ad F, hoc est F ad O) igitur [b] ex æquo erit, vt A ad C, sic E ad O.

a Per defin. 10.l.5. b Per 22. l.5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig.20.

RAtiones æquales A ad C & E ad O, sint duplicatæ, aut triplicatæ, & sic deinceps, rationum A ad B, & E ad F; etiam hæ æquales erunt.

Si negas, sit vt A ad B, sic E ad aliam Z inæqualem ipsi F, & fiat vt E ad Z, sic Z ad ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ c sunt rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X, æqualis erit d rationi A ad C; hoc est per hyp. rationi E ad O. Ergo e æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales esse. Ergo A est ad B, vt E ad F seu Z. Quod erat demonstrandum.

c Per defin. 10. l. 5.
d Per præc.
e Per 9. l. 5.

Ex contradictorio assertionis directè illata est assertio.

PARS SECVNDA.

Euclidæa per multiplices definitio æqualium rationum, demonstratur, exhibeturq; ac demonstratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis methodo (nisi fallor) commodiori explicatis, reliquum est, vt quod secundo loco supra promiseram, præstare aggrediar. Hoc igitur loco (quod à nullo hactenus factum est) demonstrabimus, nihil assumendo, nisi quod per se lumine naturali sit manifestum, duas rationes inter se æquales esse, quando antecedentium quælibet æquè multiplices, consequentium æquè multiplicibus, semper sunt vel pariter maiores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cuius quidem negotij cum satis ardua, atque prolixa sit

sit demonstratio, vt iam reipsa cognoscemus, facilè apparebit præpostere egisse Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium sumi voluit ex hac multiplicium indemonstratâ hactenus proprietate, cuius tam remota & obscura sit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma 1.

SIt A ad B, vt C ad F; & sint antecedentium, A, C, quælibet æquè multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & sic deinceps. Sint item consequentium B, F quælibet æquè multiplices L, R. Fig. 21.

Erit quoque vt I ad L, sic Q ad R.

Quoniam enim A est ad B, vt C ad F, etiam I dupla ipsius A erit ad B, vt Q dupla ipsius C est ad F: &, I, tripla A erit ad B, vt Q tripla C, ad F. Et sic in infinitum. Quod quidem æquè est per se clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I est ad B, vt Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipsius B, vt Q ad R duplam ipsius F; & vt I ad L triplam ipsius B, ita Q ad R triplam F: Et sic in infinitum, quod rursus tam clarum est, quam axioma quodcunque. Liquet ergo propositum.

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem mensuram C; erit A toties sumpta, quoties est C in B, æqualis quantitati B toties sumptæ, quoties C est in A. Fig. 22.

Pona-

Ponatur C contineri in B quater, & in A sexies, ac proinde B esse 4.C, & A esse 6.C. Igitur 6.C (hoc est A) ducta in 4.C (hoc est toties sumpta quoties C est in B) efficiunt 24.C. Similiter 4.C (hoc est B) ducta in 6. C (hoc est toties sumpta quoties C est in A) efficiunt etiã 24.C. Ergo A toties sumpta quoties C in B, æquatur B toties sumptæ quoties C in A.

Theorema 1.

Fig. 23. *SI ratio AB ad FI maior sit ratione L ad R, tales sumi possunt antecedentium (AB & L) æquè multiplices, tales item æquè multiplices consequentium (FI, & R,) vt multiplâ antecedentis AB rationis maioris excedente multiplam consequentis (FI) multiplex antecedentis L, rationis minoris non excedat multiplicem sui consequentis (R.)*

Sit ratio AB ad FI maior ratione L ad R, & sint AB, & L, maiores rationum termini. Quoniam igitur AB ad FI maiorem habet rationem quàm L ad R; alia quædam quantitas Z [a] *habebit ad FI eandem rationem, quam L ad R. Quia iam igitur ratio Z ad FI æqualis est rationi L ad R, ponitúrq; ratio AB ad FI maior ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad FI maior ratione Z ad FI, ac*

[a] Per axio. ante. 1 l.5.

ac proinde AB maior est quam Z: quæ omnia per se sunt manifesta. Igitur ex AB sumi poterit AC par Z; eritq; etiam AC ad FI, vt L ad R. Auferatur residuum BC ex AC quoties potest, puta ter; tum seca AC in tot æquales partes exem: gr. in 6, donec earum vna possit auferri sæpius ex FI, quam BC ex AC, puta quater, & residuum esto OI, quod erit minus vnâ particulâ. Hoc quoque fieri posse per se est manifestum, & patet ex p.1. l.10. quæ à proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas esto Q.

Quoniam igitur Q est mensura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties sumpta, quoties Q est in FO, nempe quater, æquatur FO toties sumptæ, quoties Q est in AC, nempe sexies. Deinde quia residuum OI est minus vnâ particulâ, hoc est quam Q erit OI toties accepta, quoties Q est in AC, nempe sexies, adhuc minor quam AC. Vlterius quia BC minus sæpè auferri potest ex AC, quam Q ex FI (positum quippe fuit BC ex AC auferri tantum posse ter, Q verò quater ex FI,) Manifestum est BC toties sumptum, quoties Q in FI, nempe quater, maius fore quam AC, ac proinde multo maius esse quam OI sumptum sexies, quod ostendi supra esse minus quam AC. Atqui ostensum est AC sumptum quater, & FO sumptum sexies esse æqualia. Quare si AC sumpto quater addatur BC quater, & ad FO sexies sumptum addatur OI sexies, erunt 4 AC & 4 BC, hoc est 4 AB maiora, quam 6 FO & 6 OI, hoc est quam 6 FI.

6 FI. Quia vero 4 AC æqualia erant 6 FO, erunt 4 AC minora 6 FI. Sed vt AC ad FI, ita ponebatur supra L esse ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4 L minora sunt quam 6 R. Acceptæ sunt igitur antecedentium AB, & L æquè multiplices, nempe quadruplæ, item æquè multiplices consequentium FI & R, nempe secuplæ, & tamen ostensum est multiplam antecedentis AB (nempe 4 AB) superare multiplicem cōsequentis FI (nempe 6 FI:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4 L) non excedere multiplicem consequentis R (nempe 6 R.) Quod erat demonstrandum.

Theorema 2.

Fig. 21.

SI antecedentium (A, C) qualibet æquè multiplices; quibuslibet consequentium (B, F) æquè multiplicibus, sint vel simul maiores, vel simul minores, vel simul æquales; ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.

Si negas, sit ratio A ad B maior ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C sumi tales æquè multiplices, item tales consequentium B, F æquè multiplices, vt multiplá antecedentis A excedente multiplam consequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam consequentis F, quod est absurdum, quia euertit hypothesim. Ergo &c.

In

In hac demonstratione, vti & in sequentibus ex solum propositiones ex quinto libro adhibentur, quæ per se æquè sunt manifestæ, atque ipsa axiomata.

Theorema 3.

SI sumi possint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemq; tales æquè multiplices cōsequentium (Q, S,) vt multiplâ antecedentis vnius (O) superante multiplam consequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam sui consequentis (S;) erit ratio (O ad Q) cuius antecedentis multiplex superat multiplicem consequentis, maior ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales esse sic ostendo. Si essent æquales, quæcunque antecedentium æque multiplices (vt patet à fortiori ex lemmate primo) quibuscunque æque multiplicibus consequentium vel simul maiores eßent, vel simul minores, quod est absurdum, quia euertit hypothesim.

Quod autem ratio O ad Q maior sit, cuius antecedentis multiplex superat, sic ostendo. Si negas, sit ratio R ad S maior ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi possunt antecedentium R & O æque multiplices, talesq; item æque multiplices consequentium S & Q, vt multiplâ antecedentis R rationis

tionis maioris excedente multiplam conſequentis S, multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: quod eſt abſurdum, cum euertat hypotheſim.

Theorema 4.

Fig. 25. *CVm proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis vlli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſq́ ſpectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumptæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales, ſimultaneo exceſſui & defectui, æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, iam omnes eius quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infalli-

bile

bile indicium eſſe æqualitatis rationum: non quidem per ſe immediatè, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, prius ritè intellectâ.

Verum quia indicium per multiplices, quantumuis iam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hic aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema 5.

SI conſequentes (C F, N Q) & conſequentium quælibet aliquotæ ſimiles (puta & decimæ & centeſimæ & milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (A B, G M) æquali ſemper numero contineantur, rationes (A B ad C F, & G M ad N Q) æqales erunt. Fig. 26.

Nota æquali numero contineri dicuntur, cum, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt vtrimque numerus ablatarum.

Demonſt. Si negas, erit ratio alterutra, puta A B, ad C F, maior ratione G M ad N Q. Quoniam igitur A B ponitur ad C F maiorem habere rationem quam G M ad N Q, manifeſtum eſt aliquam (puta A D) minorem quam A B, æqualem habere rationem ad C F, quam G M ad N Q. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius C F aliquotam (ex: gr:

L vnam

vnam trigesimam) esse minorem differentia D B. Sit C E vna trigesima ipsius C F, & auferatur ex A B quoties potest exemp. gr. millies, totumq; ablatum sit A O. Quoniam igitur A O est 1000 C E, & C F est 30 C E, erit A O ad C F vt 1000 ad 30.

Sumatur iam ex N Q aliquota N P, similis alteri C E, nempe etiam vna trigesima. Quoniam ex hyp. C E, N P æquali numero in A B, G M continentur, & C E ablata ex A B quoties potuit, ablata fuit millies, etiam N P ex G M auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum G K est 1000 N P, & N Q est 30 N P, erit G K ad N Q vt 1000 ad 30, hoc est vt A O ad C F. Quia vero C E ablata ex A B quoties potuit, reliquit O B, erit O B minus quam C E. Sed C E, nempè vna trigesima C F, est minor posita quam D B. Ergo O B est multò minor quam D B. Ergo A O est maior quam A D. Ergo A O ad C F maiorem rationem habet quam A D ad C F. Sed ponebatur esse A D ad C F, vt G M ad N Q. Ergo A O ad C F maiorem rationem habet, quam G M ad N Q: hoc est multò maiorem quam G K ad N Q. Quod est absurdum, quia ostendi supra A O esse ad C F vt G K ad N Q. Non possunt igitur rationes datæ A B ad C F & G M ad N Q esse inæquales. Æquales igitur sunt. Quod erat domonstrandum.

Theore-

Theorema 6.

SI aut consequentes (C F, N Q) aut consequentium aliquæ similes aliquotæ (ex: gr. decimæ) inæquali numero in antecedentibus (A B, G M) contineantur, rationes (A B ad C F; & G M ad N Q) inæquales erunt, & erit illa maior, cuius consequentis aliquota sæpius continetur. Fig. 16.

Contineatur C E decima vna ipsius C F, in A B millies, & sit A O 1000 C E; tum vero residuum O B erit minus quam vna C E. Deinde N P vna decima N Q. contineatur in G M tantum nongenties nonagies septies & sit G K, 997 N P; patet residuum K M fore minus vna N P, ac proinde 1000 N P fore maiores quam G M. Sit ergo G R, 1000 N P. Quoniam igitur A O est 1000 C E, & G R, 1000 N P; C F vero, 10 C E, & N Q, 10 N P; erit A O ad C F vt G R ad N Q. Ergo A B est ad C F in maiori ratione, quam G R ad N Q; ac proinde in multo maiori, quam G M ad N Q. Quod erat demonstrandum.

Habemus iam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales, inæqualesque certò liceat discernere. Et possemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non sint, l. 5, propositiones, quas per multiplices Euclides demonstrat, multò expeditius demonstrare, nisi magis ex vsu discentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte vsi iam sumus, proponere.

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione.

I.

Proportionis Diuisio.

PRima diuisio est in rationalem & irrationalem, vt dictum def. 4. vtraque diuiditur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis diuiditur in rationem maioris inæqualitatis, quæ habet antecedens maius consequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus consequente.

Rationalis proportio inæqualitatis maioris diuiditur in quinque species, quæ sunt; multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens.

Ratio multiplex est quando maior minorem aliquoties continet, vt bis, ter, quater &c. diciturq; ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio superparticularis est, quando maior minorem continet semel, & vnam eius partem aliquotam: vt ratio 3 *ad* 2, *vel* 6 *ad* 4 *quæ dicitur sesquialtera, quia maior minorem continet semel & eius dimidium: ratio* 4 *ad* 3, *siue* 16 *ad* 12, *quæ dicitur sesquitertia, quia maior minorem continet semel, & tertiam eius partem, & sic deinceps.*

Ratio superpartiens est, cum maior minorem continet semel, & plures eius aliquotas, non conficientes vnam aliquotam. Talis est ratio 8 *ad* 5, *vel* 14 *ad* 10, *quia* 8 *continet* 5 *semel, & insuper* 3, *hoc est tres quintas eiusdem numeri* 5, *quæ tamen simul sumptæ non conficiunt vnam aliquotam ipsius* 5. *Similiter* 14 *continet* 10 *semel & bis* 2, *hoc est duas quintas numeri* 10, *quæ tamen simul sumptæ (nempè* 4*) non conficiunt vnam aliquotam ipsius* 10. *Additur porrò,* non conficientes vnam aliquotam, *quia aliàs esset ratio superparticularis.*

Ratio multiplex superparticularis est, cum maior minorem aliquoties continet, & insuper vnam eius aliquotam, vt ratio 5 *ad* 2, 10 *ad* 4 *&c.*

Ratio multiplex superpartiens est, cum maior minorem aliquoties continet, & adhuc plures eius aliquotas non conficientes vnam aliquotam, vt ratio 8 *ad* 3, 16 *ad* 6 *&c.*

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

Denominator proportionis rationalis est qui distinctè & clarè exprimit habitudinem vnius numeri ad alterum; siue qui ita se habet ad vnitatem, vt maior ad minorem, ac proinde ostendit, quoties maior minorem contineat, & quoties minor contineatur à maiore. Rationis 27 ad 9 denominator est 3, quia 3 ita est ad vnitatem, vt 27 ad 9, ac proinde ostendit quoties consequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cuiuscumque rationis denominator inuenitur, si maior terminus diuidatur per minorem, nam quotiens diuisionis erit denominator. Ratio est, quia quotiens ita est ad vnitatem, vt diuidendus ad diuisorem, hoc est vt maior ad minorem.

Exempl. detur ratio 60 ad 6. Diuide 60 per 6; quotiens 10 est denominator. Detur rursum ratio 60 ad 16. diuiso 60 per 16 fit quotiens $3\frac{3}{4}$, hic est denominator.

III.

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

Cum rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune consequens habentes, communis consequentis antecedentia, erunt rationum denominatores, & commune consequens munus ac locum explet vnitatis.

Proportionis nullius irrationalis, si sola sit, exhiberi potest denominator. At si duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam sensu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum ostendant, quomodo vna ratio ad alteram se habeat. Id quod egregiè obseruauit P. Gregorius à S. Vincentio, operis sui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclarissimis, & propè innumeris inuentis Geometriam auxit; tum inprimis libro 8. eiusdem operis de proportionalitatibus ita scripsit, vt nouam de proportionalitatibus scientiam condidisse censeri meritò debeat. Datæ sint rationes irrationales A, Fig. 17.
ad B, & C, ad D, quæ reuocentur ad rationes F H, G H, habentes commune consequens, H, sic vt ratio F ad H sit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune consequens H munus explebit vnitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc est rationum A ad B, & C ad D,) quia ostendunt quomodo

modo vna ratio sese habeat ad alteram, sicuti enim F est ad G, ita ratio F H est ad rationem G H, hoc est ratio A B ad rationem C D.

IV.

Axiomata.

Fig 28. AX. I. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes consequens (H) eam inter se proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) est prop. 2. P. Gregorij à S. Vinc. l. 8. quadr.

Hoc est ratio G, ad H, tanto maior est ratione F ad H, quanto G maior est quam F.

Fig. 29. Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter se habent consequentium proportionem. est propos. 7. P. Gregorij à S. Vinc. lib. 8. quadr.

Hoc est ratio I ad L est ad rationem I ad M, vt reciprocè est M consequens, ad consequens L: siue ratio I ad L tantò maior est ratione eiusdem I ad M, quanto L fuerit minor, quam M, ac proinde quanto M fuerit maior quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter se rationem habent, quā denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quarum denominatores sunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. [a] denom. ratio 12 ad 3 est eadem cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 est eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1. Sed ratio 4 ad 1 est ad rationem $2\frac{1}{2}$ ad 1, vt [b] 4 est ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12 ad 3 est ad rationem

a Num. 2.

b Per axio. 1. hic

nem 15 ad 6, vt denominator 4 est ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

Additio perficitur, si rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum summa ad vnitatem, est rationum datarum summa quæsita.

Dentur ratio 12 ad 3 & 15 ad 6, earum denominatores 4 & $2\frac{1}{2}$ additi sibi mutuo faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$ ad 1 est par rationi 12 ad 3 & rationi 15 ad 6. Patet ex ax. 1. & 3. Fig. 30.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris à maiore, nam ratio residui ad vnitatem, est ratio quæ remanet post minorem rationem à maiori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12 ad 3, & 15 ad 6. Harum denominatores sunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$ à maiori 4 remanent $\frac{3}{2}$ ratio $\frac{3}{2}$: ad 1, est ea quæ remanet, vbi rationem 15 ad 6 seu $2\frac{1}{2}$ ad 1 detraxeris ex ratione 12 ad 3, seu 4 ad 1.

VI. Ra-

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31. Rationes datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune consequens (H.) Antecedentia F & G: sibi addita sunt F G. Ratio F G ad H est summa rationum F ad H, & G ad H, hoc est rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, si rationes datæ ad commune consequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur à maiori F; ratio enim residui ad H, est ea quæ remanet postquam rationem G ad H, seu C ad D subtraxeris à ratione F ad H, seu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium multiplicatio & Diuisio.

Denominatores rationum per inuicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur. Hoc est ratio quam ad vnitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, est ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex

ex ax. 1 & 3. Nam multiplicatio rationum est vnius ad alteram additio sæpius repetita. Hanc autem perfici repetitâ sæpius antecedentium additione (hoc est multiplicatione) patet ex iam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9 ad 3 & 20 ad 4, denominatores 3 & 5 multiplicati faciunt 15. Ratio 15 ad 1 est ea, quæ ex multiplicatione rationum 9 ad 3 (seu 3 ad 1) & 20 ad 4 (seu 5, ad 1) producitur. Fig. 32.

Diuisio rationum perficitur, si denominator maioris diuidatur per denominatorem minoris. Nā ratio quotientis ad vnitatem, est ea quæ habetur ex diuisione rationis datæ maioris per rationem minorem. Patet ex 1 & 3 axiomate. Cum rationis per rationem diuisio, sit subtractio vnius ab alterâ sæpius repetita.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ sint rationes A ad B, & C ad D, per inuicem multiplicandæ. Fiat vt A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 33.

Hæc operatio est Gregorij à S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipse, nec alius quisquam demonstrat.

Hunc

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, vt patebit ex demonſtratione numeri 12, ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diuiſio rationum irrationalium.

Fig. 33. *DAta ſit ratio C ad E diuidenda per rationem A ad B. Fiat vt A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.*

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, vt patebit ex demonſtratione num. 12, ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diuiſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur diuidenda.

X.

De Compoſitione rationum, eius Definitio.

RAtio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5 d. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcumque quarum denominatores ſint 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2 per 3 denom. fit 6 denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6 ad 1 eſt compoſita ex rationibus 6 ad 3, & 12 ad 4. Quod ſi denominatorem 6 multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$, fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Fig. 34.

XI.

Compoſitio rationum non aliud eſt, quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

NAm vt patet ex axiomatis n. 4. & ex nu. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad vnitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad vnitatem ſeu conſe-

conſequens commune: Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

VT numeri ſequentis demonſtratio clarius percipiatur, obſeruandum eſt multiplicari ac diuidi magnitudines per inuicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum vt eſt vnitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita planè magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cum vt quæpiam recta pro vnitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum; ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum diuidi dicitur, quando vt vnus eſt ad alterum, ita vnitas fit ad alium, qui quotiens nominatur; ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur diuidi, quando aſſumptâ quantitate aliquâ pro vnitate, vt vna ſe habet ad alteram, ita vnitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunq; quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inuentus eſt. Vnde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quâ inter theoremata referri poſſit.

Vniuerſalem igitur huius rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig. 35.

Fiat vt B ad C, ita X ad B. Eruntq; rationes A ad B: B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X & conſequens commune B [a] munus explet vnitatis, quæ eſt com- a Per n. 5.
mune

mune consequens respectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque si velimus magnitudines A, X per inuicem multiplicare, oportebit b facere vt B vnitas est ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, seu X per A; planè ac si cupias inuicem multiplicare numeros R, S, fit vt vnitas ad vnum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui est productum multiplicationis.

b Schol. præced.

Quoniam igitur quantitas Z est productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio c huius producti Z ad B vnitatem, seu commune consequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorsus vt in rationum numericarum multiplicatione, numero 7 ostendimus euenire, in qua si denominatores inter se multiplicentur, ratio producti ad vnitatem ea est, quæ fit ex rationum multiplicatione.

c Per defin. num. 10.

Atqui per constr. ratio X ad B est ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationū A ad B; B ad C. Quia vero per constr. vt B est ad X, ita A est ad Z, etiam inuersim Z ad A, vt X ad B, hoc est per constr. vt B ad C. Igitur permutando vt Z est ad B, ita A est ad C. Sed iam ostensum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B; & B ad C. Atqui num. XI. ostensum est rationes componi ex iisdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad

ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonstrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et sic deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

Demonstratur in numeris.

EAndem prorsus demonstrationem valere in numeris iam ostendam, vnde etiam veritas illius, ac soliditas magis stabilietur.

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati sint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat vt 4 ad 8, ita, 1 ad 2, & vt 4 ad 3, sic 1 ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1, item rationes 4 ad 3, & 1 ad $\frac{3}{4}$ inter se æquales; eritq; ex æquo a etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$. a Per 22. l. 5.

Fiat deinde vt $\frac{3}{4}$ ad 1, ita 1 ad $\frac{4}{3}$: eruntq; rationes 2 ad 1, & 1 ad $\frac{3}{4}$ (hoc est rationes 8 ad 4 & 4 ad 3) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1, habentes commune consequens vnitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt b rationum 8 ad 4, & b Patet ex 4 ad 3 denominatores. Multiplicentur iam per num. 2. inuicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$, hoc est fiat vt 1 ad $\frac{4}{3}$, ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4, & 4 ad 3, inter se multiplicatis. Ergo ratio huius pro-

M duEti

c Patet ex num. 7.

ducti $\frac{8}{3}$ ad 1 eſt ea, c quæ producitur ex multiplicatione rationum 8 ad 4, & 4 ad 3. Iam vero quia per conſt. vt 1 eſt ad $\frac{4}{3}$, ita 2 eſt ad $\frac{8}{3}$, erit etiam inuerſim $\frac{8}{3}$ ad 2 vt $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rurſum per conſt. $\frac{4}{3}$ ſunt ad 1, vt 1 ad $\frac{3}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$ ſunt ad 2, vt 1 ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$ ſunt ad 1 vt 2 ad $\frac{3}{4}$. Sed iam oſtendi rationem $\frac{8}{3}$ ad 1 eſſe eam quæ producitur ex multiplicatione rationum 8 ad 4, & 4 ad 3. Ergo etiam ratio 2 ad $\frac{3}{4}$ eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8 ad 4, & 4 ad 3. Sed oſtenſum eſt ſupra rationem 2 ad $\frac{3}{4}$ parem eſſe rationi 8 ad 3. Ergo etiam ratio 8 ad 3 producitur ex multiplicatione rationum 8 ad 4, & 4 ad 3. Igitur per num. XI. ratio, 8 ad 3 ex rationibus 8 ad 4 & 4 ad 3 compoſita eſt. Quod erat demonſtrandum.

8
4
3
25
73

Eodem modo demonſtrabitur ſi plures dentur numeri quam tres, rationem 8 ad 25 componi ex rationibus 8 ad tria (hoc iam eſt ex rationibus 8 ad 4, & 4 ad 3) & ex ratione 3 ad 25: & rationem 8 ad 73 componi ex rationibus 8 ad 25 (hoc iam eſt ex rationibus 8 ad 4, 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25 ad 73. & ſic in infinitum.

XIII.

XIII.

Si dentur quotcumque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus compoſita.

Fig. 36.

SI fiat vt A ad B, ita quæpiam G ad H, & vt C ad D, ita H ad I, & vt E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, vt num. præced. demonſtrauimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

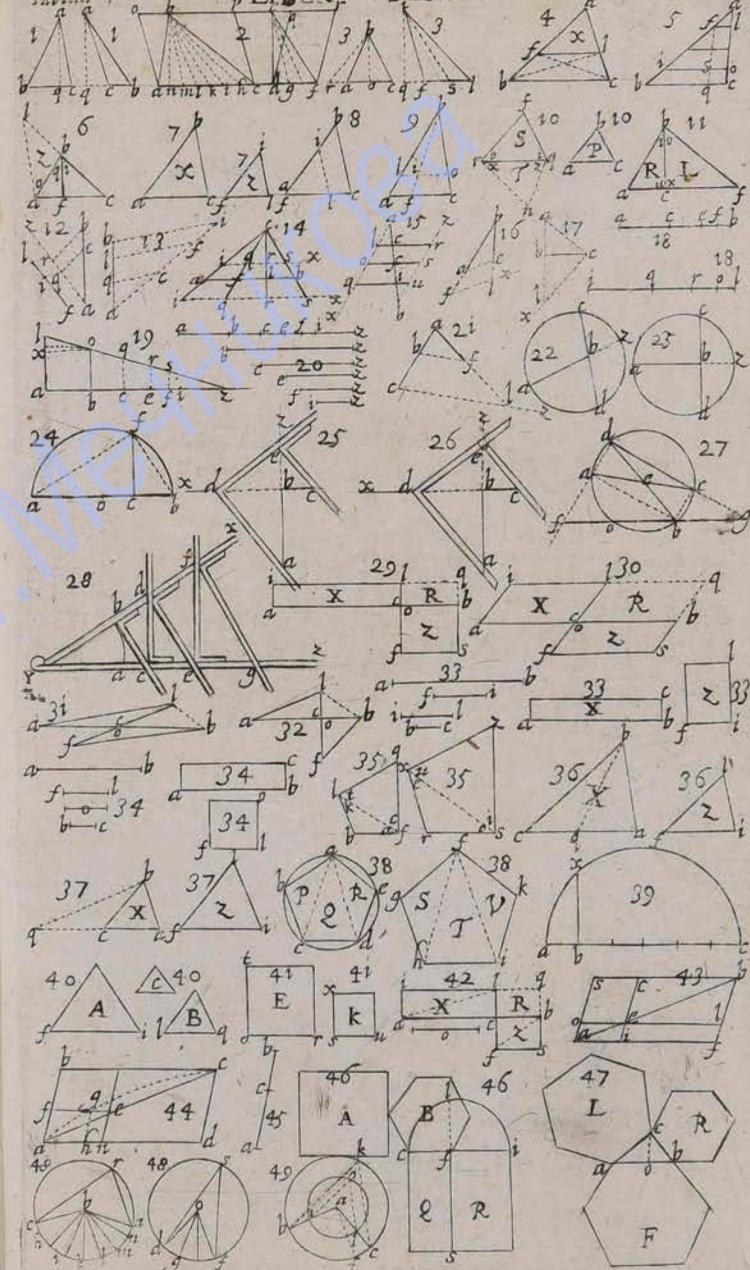
XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 36.

INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, ſiue illæ ſint continuè proportionales ſiue non: ratio primæ G ad vltimā K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis ſit compoſita. Nam ex iis componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutua, vt oſtenſum eſt num. XI. Cum igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter ſe multiplicatis, vt ex demonſtratione num. 12. patet, non poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumptæ æquales eſſe rationi G *ad K, nisi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Vt igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ sibi mutuo addendæ, vt traditur num. 5, & 6: ex qua additione proueniet ratio illis omnibus æqualis; quæ ferè semper, vt dixi, erit diuersa ab illa, quæ ex earundem rationum compositione, hoc est multiplicatione exsurget.*

ELE-



ELEMENTORVM
GEOMETRIÆ
LIBER VI.

PRoportionum doctrina libro quinto vniuersim exposita, in sexto figuris planis applicatur. Et sunt quæ hoc libro traduntur adeò scitu necessaria, vt sine illis arcana Geometriæ penetrare; fructusq; suaues Matheseos percipere nemo possit. Ad propositiones propè singulas oporteret encomium texere: tanta omnium vtilitas est.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos existunt, vel quæ sunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Vt triangula X, Z dicentur similia, si angulus A sit æqualis angulo F, & angulus B, angulo L, & angulus C angulo I: atque insuper si A B sit ad F L, vt B C ad L I; & B C ad L I, vt C A ad I F; & C A ad I F, vt A B ad F L; Comparando semper la- Fig. 7. l. 6, tabulâ 4.

 tera

tera æqualibus angulis opposita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium similitudo explicabitur.

Fig. 29. 2. Reciprocæ figuræ ſunt, cum in vtraque antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

Vt in parallelogrammis X,Z,

ſi AC ſit ad CB,

vt FC ad CL

antecedentia ſunt AC & FC, quorum in vtrâque figurâ vnum eſt; & conſequentia ſunt CB & CL, quorum ſimiliter in quâque figurâ vnum eſt: parallelogramma proinde X,Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

3. Altitudo figuræ eſt perpendicularis à vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidi 4.

Fig. 1. *Vt trianguli ABC altitudo eſt perpendicularis AQ, à vertice cadens in baſim BC, vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem & vertex aſſumuntur ad libitum.*

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Vt ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 2. ***T**Riangula (ABC, DEF) & parallelogramma (AOPC, DQRF) quæ eandem habent altitudinem, ſiue inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AC, DF.)*

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imò quidquid vſpiam de figuris ſiue planis, ſiue ſolidis per proportiones demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu huius libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baſeos DF quæuis pars aliquota, ex. gr. DG vna tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, vt colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE ſunt conſequentium [a] ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde DG ex baſi AC quoties poteſt, puta ſexies, ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi DG, etiam ſex triangula CBH, HBI &c. triangulo DEG æqualia [b] erunt ſingula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties triangulum DEG continetur in antecedente ABC. Eodem diſcurſu oſten-

a Per defin. 7. l. 5.

b Per 38. l. 1.

ostendam quascunque consequentium (baseos D F & trianguli D E F) similes aliquotas in antecedentibus, (basi A C & triangulo A B C,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis secundæ lib. 5. vt basis A C ad basim D F, ita triangulum A B C ad triangulum D E F. Quod erat demonstrandum.

c Per 41. l. 1. Quoniam vero parallelogramma A P, D R sunt dupla c triangulorum A B C, D E F, etiam illa erunt inter se vt bases.

Corollarium.

Fig. 3. Triangula (A B C, F I L) & parallelogramma, æquales bases (A C, F L) vel eandem, habentia, eam inter se rationem habent quam altitudines (B O, I Q.)

Fiant enim Q S, O R æquales æqualibus basibus F L, A C. Erunt igitur etiam Q S, O R inter se æquales. Duc S I, R B. Si in triangulis O B R, Q I S accipiantur B O, I Q tanquam bases, erunt O R, Q S, eorum altitudines: quæ cum sint æquales, erunt triangula O B R, Q I S inter se, vt a bases B O, I Q. Sed quia ex constr. O R par est A C, & Q S par F L, triangula O B R, Q I S æquantur b triangulis A B C, F I L. Ergo etiam triangula A B C, F I L sunt inter se vt B O ad Q I.

a Per. 1. l. 6.

b Per 38. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si ad vnum trianguli latus (B C) ducta fuerit (F L) parallela, hæc secabit proportionaliter latera, (hoc est A F erit ad F B, vt A L ad L C.) Fig. 4.

Et si recta (F L) secuerit latera (B A, C A) proportionaliter, erit ad reliquum latus (B C) parallela.

Pars 1. Ducantur B L, C F. Quoniam F L ponitur parallela B C, erunt triangula F B L, L C F, eandem basim F L habentia, inter a se æqualia. Ergo triangulum X, ad vtrumque eandem b habet rationem, hoc est trianguli X est ad triang. F B L, vt triangul. idem X est ad triang. L C F. Sed triangulum X est ad triang. F B L, vt c A F ad F B: & triangulũ X est ad triang. L C F, vt d A L ad L C. Ergo o etiam A F est ad F B vt A L ad L C. Quod erat demonstrandum.

a Per 37. l. 1.
b Per 7. l. 5.
c Per prac.
d Per eand.
o Per 11. l. 5.

Pars 2. Vt A F est ad F B, ita triangulũ X e est ad triangulum F B L; & vt A L est ad L C, ita f triangulum X est ad triang. L C F. Sed iam ponitur A F ad F B, vt A L est ad L C. Ergo triang. X est k ad triang. F B L, vt idem X est ad L C F. Ergo g triangula F B L, L C F, eandem habentia basim,

e Per prae.
f Per eand.
k Per 11. l. 5.
g Per 9. l. 5.

æquani Per 39.l.1. æquantur. Ergo F L, B C *i* sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Fig. 5. SI ad vnum trianguli latus (B C) ductę fuerint plures parallelæ (I O, F L,) erunt omnia laterum segmenta, proportionalia.

Ducatur F Q parallela A C. Rectæ F S, o Per 34.l.1. S Q æquantur *o* L O, O C. Sed B I est ad b Per 2.l.6. I F, vt *b* Q S ad S F. Ergo etiam B I est ad I F, vt C O ad O L.

PROPOSITIO III.

Fig. 6. *SI recta (B F) angulum trianguli bifariam secans, etiam secet basim (A C,) habebunt basis segmenta (A F, F C) eandem proportionem quam reliqua latera (A B, C B.)*

Et si baseos partes (A F, F C) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (A B, C B) recta (B F) basim secans, angulum oppositum (A B C) bisecabit.

Pars 1. Produc C B, donec B L sit par B A, & iunge A L. Quoniam in triangulo a Per 5.l.1. Z, latera L B, A B æquantur, anguli *a* quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus

ternus A B C duobus *b* internis L, O æqualis est; angulus I, qui per hyp. ipsius A B C dimidius est, æquabitur angulo, L. Ergo A L, F B sunt *c* parallelæ. Ergo in triangulo A C L, A F est ad F C, *d* vt L B (hoc est A B) ad B C. Quod erat demonstrandum. b Per 32.l.1. c Per 29.l.1. d Per 2.l.6.

Pars 2. Produc iterum C B donec L B sit par A B. Quoniam ponitur vt A F est ad F C, ita A B (hoc est L B) esse ad B C, erunt A L, F B *e* parallelæ. Ergo externus I, est par *f* interno, L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia L B, A B æquales sunt, anguli *o* L & O sunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales sunt. bisectus ergo est A B C. Quod erat demonstrandum. e Per 2.l.6. f Per 27.l.1. o Per 5.l.1.

PROPOSITIO IV.

TRiangula sibi mutuo æquiangula, sunt similia; hoc est, o etiam latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia. o Def. 1.l.6.

IN triangulis X, Z, angulus A sit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I. Dico A B esse ad F I, vt A C ad F L; & A C esse ad F L, vt C B ad L I; & C B esse ad L I, vt B A ad F I. Fig. 7.

Dem. si angulus F ponatur supra sibi æqualem A, latera F I, F L, cadent supra latera Fig. 7. & 8.

tera

s Fig. 8. Sola. tera A B, A C. Et quia s angulus externus A I L per hypoth. par est interno B, erunt a Per 29. l. 1. a I L, B C parallelæ. Ergo b B I est ad I A, b Per 2. l. 6. vt C L ad L A, Ergo c componendo B A c Per 18. l. 5. est ad I F vt C A ad L F. Quod si angulus L imponatur Angulo C, eodem modo ostẽdam A C esse ad F L, vt B C ad I L: & si angulus I, imponatur angulo B, ostendetur pari modo, B C esse ad I L, vt A B ad F I, Liquet ergo propositum.

Corollaria.

Fig. 8. 1. SI in triangulo ducatur vni lateri (B C) parallela (L I) erit triangulum L F I simile toti C F B; ac proinde C F est ad L F, vt B C ad L I.

Nam quia L I, B C, parallelæ sunt, erunt q Per 27. l. 6. q externi F I L, F L I, pares internis B & C; F verò vtrique triangulo est communis. Ergo sunt æquiangula. Ergo latera C F, L F opposita æqualibus angulis B & F I L, sunt r Per præc. r proportionalia lateribus B C, L I, quæ opponuntur communi angulo F.

Fig. 9. 2. Si in triangulo parallelas A C, L O secet recta B F, ab angulo opposito B ducta, secabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. A F est ad L I, vt F B ad I B; & F C quoque est ad I O, vt F B ad d Per 11. l. 5. I B. Ergo A F est ad L I vt d F C ad I O. Igi-

tur permutando A F est ad F C e vt L I e Per 16. l. 5. ad I O.

PROPOSITIO V.

Fig. 10. *SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuo proportionalia, etiam sibi mutuo æquiangula erunt.*

Hoc est, si A B sit ad R F, vt A C ad R Q; & vt A C ad R Q, sic C B ad Q F; & vt C B ad Q F, sic A B ad R F: dico angulos antecedentibus oppositos æquari angulis, qui opponuntur consequentibus. Nimirum C ipsi I; B ipsi F; A ipsi O.

Ang.	Antec.	Conseq.	Ang.
C.	A B	R F	I
B	A C	R Q	F
A	C B	Q F	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur b B & N b Per coroll. 9 p. 32. l. 1. æquales erunt. Quia ergo triangula P, T, sunt æquiangula, erit o A B ad R N, vt A C o Per præc. ad R Q. Sed ex hyp. etiam est A B ad R F, sicut A C ad R Q. Ergo A B est ad R F, vt eadem A B ad R N. Ergo R N, R F c æquantur. Pari modo ostendam æquari c Per 9 l. 5. Q N & Q F. Triangula igitur T, S, sibi mutuo sunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquand Per 8. l.1. æquantur *d* angulis Z, N, X, (hoc eſt per conſtr.) angulis C,B,A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig.10. ***SI duo triangula (P, S) habeant vnum angulum (A) æqualem vni (O) & latera (AB, AC; RF, RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia; triangula erunt ſimilia.***

Angulis A,C fiant æquales X,Z,& latera e Per coroll. 9.p.32.l.1. coëant in N. Igitur anguli quoque *e* B & N æquales erunt. Oſtendam, vt in præcedenti, æquales eſſe RF, RN. Eſt vero RQ vtriſque triangulis S, T communis; Anguli quoque O & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A; X per conſt. O o Per 4. l.1. per hyp. Ergo etiam I & F *o* æquantur ipſis Z & N. Triangulum igitur, S, æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt per conſtr. d Per 4.l.6. triangulo P. Ergo S,P *d* ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

VIx vllius eſt vſus.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo perpendicularis (B C) ab angulo recto in baſim ducta ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles.

In triangulis A B F,& L, angulus F communis eſt, anguli vero A B F, & X per hypotheſim ſunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam *a* æquales erunt. Ergo *b* triangula A B F & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula A B F & R, angulumque I, parem angulo F. Ex quo iam patet etiam R & L ſimilia eſſe, cum æquales ſint anguli I & F : O & A : V & X. Quod erant demonſtrandum. Fig.11. a Per coroll. 9.p 32.l.1. b Per 4.l.6.

Corollaria.

PRimo B C eſt media proportionalis inter A C, C F.

Cum enim ſint in triangulis R & L

æqu.ang.	I.	F.	æqu.ang.	A.	O
lat.opp.	A C.	C B	lat.opp.	C B.	C F.

Patet *c* A C eſſe ad C B, vt C B eſt ad C F. c Per 4.l.6.

2. B F eſt media proportionalis inter A F & C F. Item A B eſt media inter F A, & C A.

Nam in triangulis A B F & L ſunt

æqu.

æqu.ang. A B F. X. | æqu.ang. A. O.
lat. opp. A F. B F. | lat.opp. B F. C F.

d Per eand. Ergo A F est d ad B F; vt B F ad C F. Similiter quia in triangulis A B F, & R, sunt

æqu.ang. A B F. V | æqu. ang. F. I.
lat. opp. A F. A B | lat. opp. A B. A C.

Erit rursum A F ad A B, vt A B ad A C.

PROPOSITIO IX.

Fig. 12. *Datam rectam (A B) diuidere secundum datam proportionem (F I ad I L.)*

Ducatur infinita A Z. Ex qua sume A Q, Q R æquales F I, I L. Ex R duc R B. Huic ex Q duc Q C parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Datam rectam (A B) similiter secare, vt altera data (A I) fuerit secta (in F, C.)*

Extremitates sectæ & insectæ iungat recta I B. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectæ secandæ A B occurrentes in L, & Q. Dico factum.

Patet ex corollario p. 2. l. 6.

Scho-

Scholium.

Ex hac propositione discemus rectam datam in quotuis æquales partes secare. Cum rectâ secandâ A B, faciat quemuis angulum rectâ quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes A C, C F, F I, in quot secare placuerit A B. Duc rectam I B, eiq; parallelas F L, C Q. Dico factum. Fig. 13.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum: Sit A B trisecanda. Duc ad A B parallelam I X infinitam, supra vel infra. Ex I X, si est infra A B; cape circino tres æquales partes I Q, Q R, R S, quæ simul maiores sint quam A B, minores vero si I X est supra. Per I & A, item per S & B duc rectas; quæ concurrant in C. Ex C ad Q & R, ductæ rectæ datam A B trisecabunt. Demonstratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 14.

Rursum cum Maurolyco aliter idipsum ita obtinebimus. Sit quatrisecanda A B. Duc infinitam A X, eiq; parallelam B Z etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales A L, L O, O Q, & B V, V S, S R, in singulis nempè vna pauciores, quam desiderentur in A B, tum rectæ ducantur L R, O S, Q V. Hæ quatrisecabunt datam A B. Fig. 15.

Nam quia per constr. L O, R S parallelas & æquales, iungunt L R & O S, etiam hæ erunt a parallelæ. Pari modo O S, Q V sunt parallelæ. Ergo cum A Q sit secta in tres æquales partes, etiam erit A I secta b in tres æquales. Similiter erit B C secta a Per 33. l. 1. b Per corol. p. 2. l. 6.

N

cta in tres æquales, tota igitur A B secta est in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes sunt faciliores Euclidæâ, quia pauciores ducendæ sunt parallelæ.

PROPOSITIO XI.

Fig.16. *DAtis duabus rectis (A B, B C) tertiam proportionalem inuenire.*

Duc rectam A C. Ex B A producta accipe A F parem B C. Per F ad A C duc parallelam F X infinitam, cui in L occurrat producta B C. Dico A B est ad B C, vt B C ad C L.

c Per 2. l.6. Nam A B est ad A F, c vt B C ad C L.
d Per constr. Sed A F est d par B C. Ergo A B est ad B C, vt B C ad C L, adeoq; C L est tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Fig.17. STatuantur A B, B C ad angulum rectũ. Iunge A C. Ex C duc C X perpendicularem ad A C infinitam, cui in L occurrat A B producta; Dico A B est ad B C, vt B C ad B L. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

POterit verò proportio data non solum per tres terminos, sed etiam per infinitos continuari, & tota

tota infinitorum proportionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumq; adeò Geometricæ progreßionis negotium Gregorius à S. Vincentio prosecutus est toto libro 2 sui operis. Nos in gratiam studiosorum succinctam rei propositæ constructionem, ac demonstrationem hic exhibebimus.

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis L O ad L R semper continuetur, venietur ad quantitatem quâuis datâ maiorem. Fig.18. secunda.

Sit L O ad L R, vt L R ad L Q, &c. Igitur a inuertendo, vt Q L ad R L, sic R L ad O L. Ergo diuid. b Q R ad R L, vt R O ad O L: & permut. c Q R ad R O, vt R L ad O L. Sed R L est maior quam O L. Ergo etiam Q R maior quam R O. Pari modo ostendam I Q esse maiorem quam Q R & sic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem L O ad L R, ad primam, L O, semper accedunt partes O R, R Q, Q I &c. perpetuò crescentes, patet veniri ad quantitatem quâuis datâ maiorem. Quod erat demonstrandum.

a Per schol. p. 16. l. 5.
b Per 17. l. 5.
c Per 16. l. 5.

Lemma 2.

SI ratio quæcunque maioris inæqualitatis A B ad C B semper continuetur, ad quantitatem venietur quâuis datâ minorem. Fig.18. vtraque.

Data sit L O quantumuis parua. Fiat a vt B C ad B A, sic L O ad L R. Poterit d ratio L O ad L R toties

a Per 9. l. 6.
d Per lem. 1.

toties continuari, vt aliquis terminus habeatur, puta L I maior quam AB. Quoties vero continuata iam est ratio L O ad L R, per totidem terminos C B, E B, F B continuetur ratio A B ad C B. Erit F B minor quam O L.

Nam ex const. patet I L, Q L, R L, O L esse proportionales ipsis A B, C B, E B, F B. Igitur ex æquo, vt e I L ad O L, sic A B ad F B: & permutando f vt I L ad A B, sic O L ad F B. Sed I L est maior g quã A B. Ergo etiam data O L, est maior quam F B. Quod erat demonstrandum.

e Per 22. l. 5.
f Per 16. l. 5.
g Per constr.

Problema.

Fig. 19.

DAta sit ratio maioris inæqualitatis A B ad B C. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium summam exhibere.

Erigantur perpendiculares A L, B O, æquales datis A B, B C, & per L O ducatur recta concurrens cum A B C productâ, in Z. Dico 1. si ex C eri-gas perpendicularem C Q; erit C Q tertia proportionalis. Q C transfer in C E, & ex E erige E R, erit hæc quarta. E R transfer in E F, & erige F S; erit hæc quinta: atque ita ratio A B ad B C, hoc est A L ad B O, per terminos A L, B O, C Q, E R, F S &c, siue A B, B C, C E, E F, F I &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (vt F S) poterit auferri ex residuo F Z; cum enim L A (hoc est A B) sit minor quam A Z, etiam F S erit b minor quam F Z.

b Patet ex corol. 1. p. 4. l. 6.

Dico 2. A Z est æqualis toti summæ infinitarum proportionalium.

1. Pars A Z est ad B Z, vt c A L ad B O; hoc est vt A B ad B C: Igitur permutando, o A B est ad A Z, vt B C ad B Z. Ergo A Z est ad B Z d vt B Z ad C Z. Sed vt A Z est ad B Z, sic L A est ad O B, & vt B Z ad C Z, ita O B ad Q C. Ergo etiam L A est ad O B, vt O B ad Q C. Eodem modo ostendam O B esse ad Q C, vt Q C ad R E, & sic deinceps in infinitum.

c Per idem corol.
o Per 16. l. 5.
d Per coroll. 2. p. 18. l. 5.

2. Pars. Tota summa infinitorum terminorum, neque minor est quam A Z, neque maior; Ergo æqualis. Non est maior, quia, cum iam ostenderim supra, Q C esse minorem quam C Z, & R E quam E Z, & S F quam F Z, & sic deinceps sine termino, poterunt omnes termini Q C, R E, S F &c. sine fine constitui iuxta inuicem in recta A Z, sic vt numquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor quam A Z: quia iam ostendi supra A Z, B Z, C Z esse continuè proportionales, & eodem modo idem ostenditur de reliquis E Z, F Z &c. Cum igitur transferendo proportionales Q C, E R, F S &c. in C E, E F, F I, residua E Z, F Z, I Z &c. semper sint continuè proportionalia, vt iam ostendimus, venietur tandem ad residuum e dato minus, ac proinde summa proportionalium superabit quantitatem omnem, quæ minor sit quam A Z, vnde ipsa non potest esse minor quã A Z. Quoniam igitur nec maior est, nec minor, quã A Z, eidem æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

e Per lem. 2.

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium summa, sunt continuè proportionales.

Fig.19. In superiori figura ducatur O X parallela ad A Z, Igitur L X erit differentia primi termini A L, seu A B, & secundi B O, seu B C. Quoniam X O est parallela ad A Z. Erit L X ad X O, vt f L A ad A Z. Sed X O est A B, & L A etiam est A B. Ergo L X differentia, est ad A B primum terminum, vt A B primus terminus ad A Z totam summam. Quod erat demonstrandum.

f Per coroll. 3 p.4.l.6.

Fig.20. Idem vniuersaliter & breuissimè demonstrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcunque (etiam numeri) A Z, B Z, C Z &c. quæ transferantur omnes in primam A Z. Erunt igitur A B, B C, C E, E F &c. proportionalium differentiæ, quæ vna cum postrema quantitate I Z, æquatur primæ A Z. Quia verò, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas per lem.2. euanescit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ A Z. Deinde, quia est A Z ad B Z, vt B Z ad C Z, & sic deinceps, erit diuidendo A B ad B Z, vt B C ad C Z. & p conuertendo vt A B prima differentia ad A Z primam quantitatem, ita B C secunda differentia ad B Z quantitatem secundam, & sic deinceps. Ergo vt A B prima differentia ad

p Per corol. 3 p.18. l.5.

A Z primam quantitatem, q ita omnes differentiæ (hoc est, vt iam ostendi, prima quantitas A Z) ad omnes quantitates, hoc est ad totam summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum. q Per 12.l.5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (A B, B C, A F) quartam proportionalem inuenire. Fig.21.

Disponantur datæ rectæ vt figura mōstrat, & duc rectam B F: cui parallela fiat C Z infinita. Ipsi C Z occurrat A F producta in L.

Dico A B est ad B C, vt A F ad F L vt patet ex p.2.huius. Ergo F L est quarta proportionalis quæsita.

Scholium.

PVlchrè Bettinus noster in suo Ærario Mathematicæ philosophiæ. Ex 35.l.3. & 14.huius, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Si tres dentur rectæ; secunda C B & tertia B D ponantur in directum, quas prima B A, tangat in B sub quouis angulo. Per puncta C, A, D describe a circulum, cui A B prima occurrat in Z. B Z est quarta proportionalis. Fig.22. a Per 5.l.4.

b Per 35. l. 3. *Cum enim rectangula A B Z, C B D b æqualia sint, erit A B ad B C, vt B D ad B Z per 14. huius, quæ ab hac, vt dixi non dependet.*

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ A B, B C; secundæ B C apponatur in directum B D æqualis B C. Dein ipsam C B in B tangat prima A B sub quouis angulo. Tum reliqua vt supra. Erit B Z tertia proportionalis quæsita.*

Demonstratio similis est, cum enim rectangula A B Z, C B D sint æqualia, erit A B ad B C vt B D (hoc est vt B C) ad B Z.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. ***Datis duabus rectis (A C, C B) mediam proportionalem inuenire.***

Tota composita A B bisecetur in O, & centro O describatur circulus per A & B, ex C erige perpendicularem C F, occurrentem peripheriæ in F.

Dico A C est ad C F, vt C F ad C B.

Ducantur enim A F, B F, triangulum a A F B rectangulum est, & à recto angulo ducta est perpendicularis F C in basim. Ergo A C est ad C F, vt b C F ad C B.

a Per 31. l. 3.

b Per corol. 1. p. 8. l. 6.

Corollarium.

Hinc patet si ex quouis peripheriæ puncto (F) ducta sit ad diametrum perpendicularis (F C) eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta (A C, C B.)

Scholium.

Hic locus omnino exigit, vt de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inueniendis etiam breuiter dicamus aliquid. In huius problematis solutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ summo studio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archim. varij recensentur subtilißimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratosthenis, Philonis Bysantij, Heronis, Apollonij Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt, Vernerus, P. Gregorius à S. Vincentio, Renatus Cartesius. Ex omnibus visum est tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

Oporteat inter datas A B, B C, duas medias inuenire. Fig. 25.

Ponantur A B, B C, ad rectum angulum & producantur infinitè versus X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noster; Plato enim vnicâ normâ vtitur, sed a cuius lateri D E inserta sit regula mobilis per D E) & vnius normæ angulus D applicetur rectæ B X, eâ lege, vt & latus vnum transeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam B Z, applicata norma secun-

a Vide Fig. 26.

ſecunda, tranſeat per C. Dico B D, B E duas eſſe medias inter datas A B, B C : hoc eſt vt A B eſt ad B D, ſic eſſe B D ad B E, & B E ad B C.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam A D E rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit D B. Ergo per dictum coroll. vt A B ad B D, ſic B D ad B E: Et ob eandem cauſam, vt B D, ad B E, ſic B E ad B C. Inter datas igitur A B, B C repertæ ſunt duæ mediæ B D, B E. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byſantij.

Fig. 27. DVæ datæ A B, B C iungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulum A B C D & producantur D A, D C infinitè, ducanturq́; diametri B D, A C, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod angulus A B C rectus ſit, tranſibit b per A & C. Tum regula ſic applicetur ad punctum B, vt interceptæ B G, O F, ſint æquales. Dico A F, G C eſſe duas medias inter datas A B, B C; hoc eſt vt A B eſt ad A F, ſic A F eſſe ad G C, & G C ad C B.

b Patet ex 31. l. 3.

Demonſt. Quia G B, O F, c æquantur, etiam O G, B F æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula O G B, B F O, hoc eſt rectangula d D G C, D F A. Ergo eſt vt G D ad D F, e ſic reciprocè A F ad G C. Sed G D, eſt ad D F, f vt B A ad A F. Ergo vt B A eſt ad A F, ſic A F eſt ad G C. Rurſum quia iam oſtendi A F eſſe ad G C, vt B A eſt ad A F, eſt verò B A

c Per conſtr.
d Per coroll. 3 p. 36. l. 3.
e Per 14. quæ ab hac non pendet.
f Per corol. 1. 4. l. 6.

B A ad A F, vt G D ad D F, hoc eſt vt G C ad C B; erit quoque A F ad G C, vt G C eſt ad C B. Omnes igitur quatuor B A, A F, G C, C B, ſunt cōtinuè proportionales; ac proinde inter datas A B, B C inuentæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

Hi duo modi quamuis ſint ingenioſi & faciles; tamen, quia debita normæ, & regulæ applicatio, non niſi tentando fit, Geometrici non ſunt.

Modus Carteſii.

PAretur inſtrumentum huiuſmodi. Duæ regulæ Fig. 28. aperiri poſſint & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B, C, D, E, F, G, eâ lege vt dum regulæ Y X, Y Z aperiuntur, norma B C impellat normam C D in regulâ Y Z, & norma C D impellat normam D E in regulâ Y X, & D E impellat E F, & E F impellat F G, & ſic deinceps: Dum verò regulæ Y X & Y Z clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in vnum idemq́; punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolum duæ, ſed etiam quatuor & ſex, imò quotuis mediæ reperientur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos vllos ab auctoribus ſupradictis inuentos obtineri poteſt.

Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4, normis 5, & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam Y X, & ſit Y B; maior in regulam alteram Y Z, & ſit Y E. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemq́;

demq; firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico Υ C, Υ D, esse duas medias inter datas Υ B, Υ E; hoc est Υ B esse ad Υ C, vt Υ C est ad Υ D, & Υ D ad Υ E.

Demonstratio manifesta est ex coroll, 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura instrumenti, in trigono Υ C D angulus ad C rectus est, ab eoq; cadit C B perpendicularis in basim Υ D. Ergo per dictum coroll. vt Υ B est ad Υ C, sic Υ C est ad Υ D. Rursum, quia in trigono Υ D E angulus ad D rectus est, ab eoq; cadit perpendicularis D C in basim Υ E, erit vt Υ C ad Υ D, sic Υ D ad Υ E. Sunt igitur Υ B, Υ C, Υ D, Υ E quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur Υ B, Υ E inuentæ sunt duæ mediæ Υ C, Υ D. Quod erat faciendum.

Si inter datas Υ B, Υ G, petantur 4 mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus F G transeat per G. Erunt Υ C, Υ D, Υ E, Υ F quatuor mediæ inter Υ B, Υ G. Demonstratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamuis organum sit Platonico illo operosius, planè eximius est, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4 & 6, imò quotcunque medias se extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione o augentur, vel minuuntur, quemadmodum idipsum in figuris planis efficitur p per vnam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam vt singularem & vnicam, omnis Geometrarum posteritas amplexa est.

o *Vide schol. post 18. l. 12.*
p *Vide corol. 3. p. 20. l. 6.*

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Parallelogramma æqualia (X, Z) quæ vnum angulum (C) vni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est A C est ad C B, vt F O ad O L.) Fig. 29. 30.

Et si latera sic habent reciproca, parallelogramma sunt æqualia.

1. Pars. I L & S B productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X est ad parall. R, vt A C a ad C B: & Z est ad b R, vt F O ad O L. Sed quia per hyp. X & Z æqualia sunt, X est c ad R, vt Z est ad R. Ergo etiam A C est ad C B, o vt F O ad O L. Quod erat demonstrandum.

a *Per 1. l. 6.*
b *Per eand.*
c *Per 7. l. 5.*
o *Per 11. l. 5.*

Dem. 2. pars. Vt A C ad C B, sic d X est ad R, & vt F O ad O L, sic e Z ad R. Sed iam per hyp. A C est ad C B, vt F O ad O L. Ergo X est ad R o vt Z est ad R. Ergo X & Z æqualia q sunt.

d *Per 1. l. 6.*
e *Per eand.*
o *Per 11. l. 5.*
q *Per 9. l. 5.*

PROPOSITIO XV.

Æqualia triangula (A C L, F C B) quæ vnum angulum (C) vni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales Fig. 31. 32.

quales angulos habent reciproca, (hoc est A C est ad C B, vt F O ad O L.)

Et si latera sic habent reciproca, triangula sunt æqualia.

Ducatur recta L B; reliqua demonstratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases & altitudines sunt æqualia: Et è conuerso.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 33. *SI quatuor rectæ (A B, F I, I L, B C) fuerint proportionales (hoc est si A B sit ad F I, vt I L ad B C.) Rectangulum (X) sub extremis (A B, B C) æquale est rectangulo (Z) sub mediis F I, I L.)*

Et si rectang. sub extremis æquatur rectangulo sub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. est A B ad F I, vt reciprocè I L ad C B. Ergo [a] X & Z æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

[a] Per 14. l. 6.

2. Pars.

2. Pars. Quoniam X & Z iam ponuntur æqualia; Ergo [b] circa æquales angulos B & I, est A B ad F I, vt reciprocè I L ad B C. Quod erat demonstrandum.

[b] Per eand.

PROPOSITIO XVII.

SI tres rectæ (A B, F L, B C) fuerint proportionales, rectangulum sub extremis (A B, B C) æquale erit quadrato mediæ (F L.) Fig. 34.

Et si rectangulum sub extremis æquatur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ F L accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. A B est ad F L, vt F L ad B C, estque O par F L. Erit quoque A B ad F L, vt O ad B C. Ergo [o] rectang. sub extremis A B, B C æquatur rectangulo sub medijs F L & O, hoc est quadrato F L.

[o] Per præc.

2. Pars. Demonstratur similiter ex secundâ parte præcedentis.

Corollarium.

EX hac & ex 13. patet, si in circulo sit F C perpendicularis diametro, rectangulum A C B æquale esse quadrato F C. Fig. 2. 45

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 35. *Super data recta (RS) dato polygono (BQ) simile similiterq́; positum describere.*

Polygonum datum BQ resolue in trian-
a Per 23.l.1. gula. Super data recta RS fac a angulos R,
O æquales angulis B,A. Coibũt latera in X.
Super XS fac angulos V, I æquales angulis
T,C. Coibunt latera in Z. Dico factum.

Nam quia anguli R,O æquantur angulis
b Per corol. B,A, etiam E, K b æquales erunt: & quia
9.p.32.l.1. etiam c V æquatur T, totus EV toti KT
c Per constr. æqualis erit. Similiter quia d singuli O, I
d Per constr. æquantur singulis A & C, toti OI, AC
æquales erunt. Et quia e V & I, æquantur
e Per constr.
f Per coroll. T & C, etiam Z & Q æquales f sunt. Poly-
9.p.32.l.1. gona igitur RZ, BQ sibi mutuo æquian-
gula sunt. Reliquum est vt ostendatur et-
iam latera esse proportionalia. RS est ad
g Per 4.l.6. BF g vt SX ad FL: & rursum SX est ad
h Per eand. FL, h vt SZ ad FQ. Ergo ex æquo i RS
i Per 22.l.5. est ad SZ, vt BF ad FQ. &c.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 36.37. *Triangulorum (X, Z) similium proportio est duplicata proportionis laterum (AC, FI) æqualibus angulis subtensorum.*

Hoc

Hoc est; si a fiat vt AC ad FI, sic FI ad a Per 11 l.6.
tertiam AQ; triang. X est ad triang. Z, vt
AC prima ad tertiam proportionalem
AQ. Vide defin.10.5.

Quoniam triangula X,Z sunt similia, erit
BA ad LI, b vt AC ad IF. Sed per constr. b Per 4.l.6.
vt AC ad IF, sic IF ad AQ. Ergo etiam
BA est ad LI, c vt IF ad AQ. Ergo in c Per 11.l.5.
triangulis QBA & Z, latera circa angulos
A, I, qui per defin. triangulorum similium
æquales existunt, sunt reciproca. Æquantur
igitur d QBA & Z. Atqui triangulum X ad d Per 15.l.6.
QBA est vt e basis AC ad basim AQ. Er- e Per 1.l.6.
go etiam X est ad Z, vt AC ad AQ. Quod
erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona (ABCDE, FGHIK) diuiduntur (1) in similia triangula (P, S & Q, T, & R, V) numero æqualia: (2) & totis proportionalia: (3) & polygonorum proportio duplicata est proportionis laterum (AB, FG) inter æquales angulos (B, G & BAE, GFK) existentium. Fig. 38.

1. Pars. Quoniam polygona sunt simi- a Per def. 1.
lia, erunt a sibi mutuo æquiangula, eruntq́ue l.6.
bini binis æquales anguli BAE, GFK, &

O B,G,

B,G,& B C D,G H I,& C D E, H I K, & E,K. Quia igitur A B est ad B C, b vt F G ad G H, anguliq; B & G æquales sunt, similia c sunt triangula P,S. Similiter demonstrabitur similia esse R & V. Deinde quia toti B C D,G H I,& ablati B C A, G H F æquales sunt, etiam reliqui A C D, F H I æquales erunt. Eodem modo ostendam æquari A D C,F I H. Ergo d tertius C A D tertio H F I æqualis est. Quare e etiam Q & T triangula similia sunt. Liquet ergo 1. Pars.

b Per eand.
c Per 6. l. 6.
d Per corol. 1. p. 32. l. 1.
e Per 4. l. 6.

Pars 2. Quoniam similia sunt P & S, ratio P ad S duplicata est f rationis C A ad H F. Sed ob eandem causam etiam ratio Q ad T duplicata est rationis C A ad H F. Ergo P est ad S vt g Q ad T. Eodem modo ostendam vt Q est ad T, ita R esse ad V. Ergo vt i vnum antecedens P est ad vnum consequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R simul sumpta, ad omnia consequentia S, T, V simul sumpta, hoc est polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

f Per prac.
g Per 34. l. 5.
i Per 12. l. 5.

3. Pars. Ratio P ad S est * duplicata rationis A B ad F G. Sed ratio polygoni ad polygonum est eadem cum ratione P ad S, vt iam ostendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis A B ad G F. Quod erat tertium.

k Per prac.

Corol-

Corollaria.

1. Omnes figuræ ordinatæ seu regulares, vt æquilatera triangula, quadrata, pentagona &c, sunt inter se in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ sunt similes inter se, vt patet ex def. 1. 6.

2. Si figurarum quarumuis similium latera A B, F G inter æquales angulos posita, sint nota, etiam proportio figurarum innotescet. Sit ex. gr. A B 2 ped, & F G 6 pedũ, fiat vt 2 ad 6, ita 6 ad alium numerum nempe 18. Figura minor est ad maiorem, vt 2 ad 18, seu vt 1 ad 9. Inuenitur autem tertius proportionalis numerus, si secundus datorum multiplicetur per seipsum, & productus per primum diuidatur.

Fig. 38.

3. Ex eadem propositione elicitur methodus præclara, figuram quamuis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data: vt si velim pentagoni, cuius latus est A B, aliud facere quintuplum. Inter terminos rationis datæ A B, B C, inueni m mediam proportionalem B X. super hac construe n pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

Fig. 39.
m Per 13. l. 6.
n Per 18. l. 6.

Nam per 20 pentagonum A B est ad sibi simile B X, vt A B prima ad B C tertiam.

Porro cum etiam circulorum proportio sit duplicata proportionis diametrorum, (vt

O 2 osten-

ostendetur p.2.l.12, Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40.

Figuræ (A, B) quæ eidem (C) similes sunt, etiam sibi mutuo similes sunt.

Patet ex defin.16, ex axiom.2.l.1. & propos.11.l.5.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. & 41.

Si quatuor aut plures rectæ (FI, LQ; & OR, SV) proportionales fuerint, figuræ similes, similiterq́ ab iis descriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt. Et è conuerso.

a Per 19. & 20.l.6.

Demonstratio primæ partis patet ex 34.5. Quoniam enim a rationes A ad B, & E ad K sunt duplicatæ rationum FI ad LQ. & OR ad SV, ex hypothesi æqualium, etiam ipsæ æquales erunt,

Pars 2. patet ex 35. l.5.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 42.

Æquiangula parallelogramma (X, Z) inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum (A C ad C B, & L C ad C F.)

Hoc

Hoc est, si fiat C B ad O, vt L C ad C F; X est ad Z, vt A C ad O. Vide quæ demonstrauimus l.5. parte 3. num. 13.

Concurrant I L, S B in Q. Parallelogrammum X est b ad parallelogrammum R vt A C ad C B: & R est ad Z, c vt L C ad C F (hoc est vt C B ad O.) Ergo d ex æquo X est ad Z, vt A C ad O. Quod erat demonstrandum.

b Per 1.l.6.
c Per eand.
d Per 22.l.5.

Corollaria.

Fig. 42.

Hinc & ex 34.l.1. patet primo. Triangula quæ vnum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compositam ex rationibus rectarum A C ad C B, & L C ad C F æqualem angulum continentium.

Patet 2. rectangula, ac proinde & parallelogramma quæcunque, rationem inter se habere compositam ex rationibus basis ad basim & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi possit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum bases A C, C B, altitudines C L, C F. fiat e vt C L altitudo ad altitudinem C F, ita basium altera C B ad O. parallelogrammum X est ad parallelogram. Z vt A C est ad O.

Fig. 42.
e Per 12.l.6.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 45. *IN omni parallelogrammo (S F) quæ circa (A B) diametrum ſunt parallelogramma (C L, O I) & toti & inter ſe ſimilia ſunt.*

Per 27. 1. æquales ſunt anguli C, S, & L, F. Per eandem E eſt par I, hoc eſt per eandẽ ipſi A; B verò & toti S F, & parti C L cõmunis eſt. Igitur totum S F & pars C L æquiangula ſunt. Reliquum eſt, vt etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis B C E, B S A, eſt C E parallela ad S A, erit *e* B C ad C E, vt
e Per corol. 2. p 4. l. 6. B S ad S A: & C E eſt ad E B, vt *e* S A ad A B. Quia vero in triangulis quoque
e Per idem corol. E L B, A F B, E L eſt parallela ad A F, erit
i Per idem corol. E B ad E L, vt *i* A B ad A F. Ergo ex æquo
f C E eſt ad E L, vt S A ad A F. Igitur
f Per 22. l. 5. *l* C L & totum S F ſimilia ſunt. Eodem
l Per defin. 1. l. 6. modo oſtendam O I eſſe ſimile toti S F.
Ergo *n* C L & O I ſunt etiam ſimilia inter
n Per 21. l. 6. ſe. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46. *POlygonum datum (A) in aliud dato (B) ſimile tranſmutare.*

Siue

Siue polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super C F latere polygoni B, cui ſimile
a Per 44. l. 1. petitur, fac rectangulum Q *a* æquale B. Deinde
b Per eand. inde ſuper F S fac *b* rectangulum R æquale A. Manifeſtum eſt C F & F I eſſe in dire-
c Per 13. l. 6. ctum. Inter C F, F I inueni *c* mediam pro-
d Per 18. l. 6. portionalem F L. Super hac fac *d* polygonum ſimile dato B. erit hoc etiam æquale dato A.

Nam cum per conſtr. ſint tres proportionales C F, F L, F I, polygonum B eſt ad ſi-
e Per 20. l. 6 & defin. 10. l. 5. mile ſibi polygonum ſuper F L factum, *e* vt C F ad F I; hoc eſt *i* vt Q ad R. Igitur
i Per 1. l. 6. permutando vt polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper F L eſt ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper F L, ſimile ipſi B, æquatur R, hoc eſt per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur quod petebatur.

PROPOSITIO XXVI.

PArallelogramma ſimilia (B D, F N) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum exiſtunt.

Duc rectas A E, C E, ſi negas A E C eſſe Fig. 44.
diametrum communem parallelogrammorum

rum B D, & F N; ipsius B D diameter esto recta alia A G C secans F E in G, & duc parallelam G H. Parallelogramma igitur F H, B D existent circa communem diametrum A G C, ac proinde [a] erunt similia. Ergo vt B A ad A D, [b] sic F A ad A H. Sed etiam vt B A ad A D, sic F A ad A N, cum B D, F N similia sint per hyp. Ergo F A est ad A H, vt F A ad A N. Quod est absurdum.

a Per 24. l.6.
b Per defin. 1.l.6.

PROPOS. XXVII. XXVIII. XXIX.

Tronibus facessunt negotium, & nullius fere sunt vsus.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45.

Datam rectam (A B) ita secare, vt tota (A B) sit ad vnum segmentum (A C,) sicut idem segmentum est ad reliquum (C B)

Hoc est (vt loquuntur Geometrę) lineam extremâ ac mediâ ratione secare.

Per 11. 2. ita seca A B in C, vt rectangulum sub A B, C B, sit æquale quadrato A C. Dico factum.

Erit enim per 17, vt A B ad A C, sic A C ad C B.

Huius

Huius sectionis vis admirabilis est in corporum regularium inscriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 47.

Si à lateribus trianguli rectanguli (A C B) figuræ similes quæcunque describantur, erit ea quæ opponitur recto angulo duabus simul reliquis (L, R,) æqualis.

Propositio igitur 47. l. 1. hic redditur vniuersalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis C O. Quoniam A B, B C, B O sunt [a] tres proportionales, erit F ad sibi similem R, [b] vt A B prima ad B O tertiam. Rursum quoniam [c] B A, A C, A O, sunt proportionales, erit F ad sibi similem, L, vt [d] B A prima ad A O tertiam. Quia igitur est F ad R, vt A B ad B O, & F ad, L, vt A B ad A O, erit quoque F ad R & L simul sumptas, vt [e] A B ad B O, A O simul sumptas. Sed A B duabus B O, A O æqualis est. Ergo etiam F, duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

a Per coroll. 2. p. 8. l. 6.
b Per 20. l. 6. & per def. 10. l. 5.
c Per corol. 2. p. 8. l. 6.
d Per 20. l. 2. & defin. 10. l. 6.
e Per 24 l. 5

Corollarium.

Ex hac propositione facilè dabitur quotcunque figuris similibus rectilineis quibuscunque

buſcunque vna omnibus æqualis & ſimilis, eâdem prorſus methodo, quâ probl. 1. ſcholij poſt 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis vnum æquale. In demonſtratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

Vix habet vſum, nec quidquam habet notabile.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 48. *In æqualibus circulis; vel eodem; anguli, ſiue ad centra (vt A B C, F O D) ſiue ad peripheriam (vt A R C, F S D) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (A K C, F G D) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus.*

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo prop. 1. huius libri demonſtratum eſt triangula æquè alta eſſe vt baſes. Tantum vbi iſthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29. lib. 3.

Quoniam verò ad peripheriam anguli R & S dimidij ᵃ ſunt angulorum ad centrum A B C, F O D, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis. a Per 20. l. 3.

Corol-

Corollaria.

1. Angulus centri (B A C) eſt ad quatuor rectos, vt arcus B C cui inſiſtit, ad totam circumferentiam. Fig. 49.

Nam vt B A C eſt ad rectum B A F, ita per hanc 33 arcus B C ad quadrantem B F. Ergo angulus B A C eſt ad 4 rectos, vt arcus B C eſt ad 4 quadrantes, hoc eſt ad totam peripheriam.

2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C, qui æquales ſubtendunt angulos, ſiuè ad centra vt I A L, & B A C, ſiue ad peripheriam, ſunt ſimiles.

Nam arcus I L eſt ad ſuam peripheriam, ᵇ vt angulus I A L, hoc eſt vt B A C, ad 4 rectos; & arcus B C eſt ad ſuam peripheriam, ᶜ vt idem angulus B A C ad 4 rectos. Ergo I L eſt ad ſuam peripheriam, vt B C ad ſuam. Ergo ᵈ ſunt ſimiles arcus I L & B C. b Per coroll. 1. c Per idem corol. d Per defin. 4. l. 6.

3. Duæ ſemidiametri (A B, A C) à concentricis peripherijs, arcus auferunt ſimiles I L, B C. Patet ex coroll. 2.

4. Segmenta (B K C, I O L) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) ſimilia ſunt.

Nam per coroll. 2. arcus B C, I L, ac proinde etiam arcus B K C, I G L, ſimiles ſunt.

E L E-

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

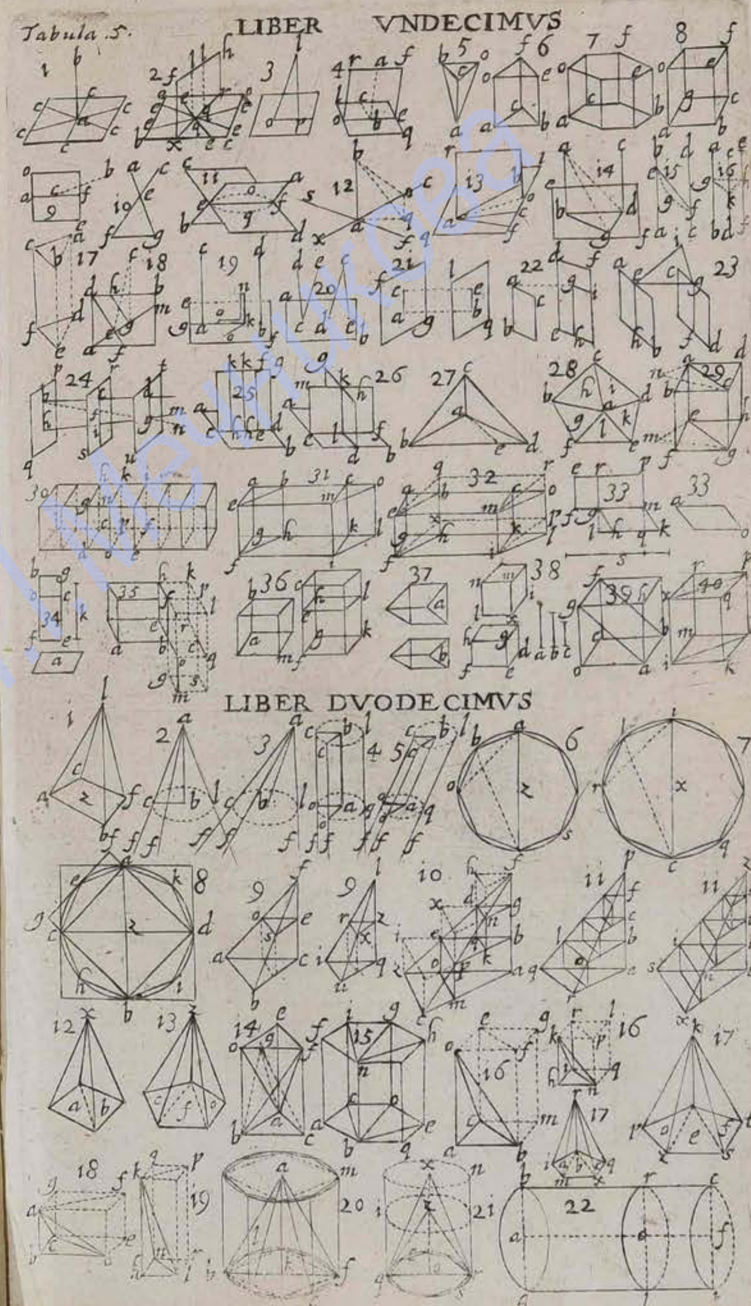
LIBER VNDECIMVS;

NOBIS SEPTIMVS.

S Ex libris primis subiungit Euclides elementa numerorum tribus sequentibus septimo, octauo & nono comprehensa, quibus etiam decimum de quātitatibus incommensurabilibus adiungit. Nos à planis immediatè transimus ad solida. De numeris seorsum tractaturi. Id, opinor, discentibus commodius erit, si elementa Geometriæ nullâ aliâ tractatione interrupta, simul omnia habeantur. Nihilominus eum citabimus propositiones huius & sequentis libri, eos nō septimum & octauum, sed vndecimum & duodecimum appellabimus, ne, si ab ordine Euclidæo vbiq; recepto discedamus, propositionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima iaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est corporum doctrina vniuersa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

DE-



DEFINITIONES.

1. Solidum siue corpus est, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum est superficies.

3. Linea recta (A B) est ad planum (C C) recta siue perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (C A) in plano (C C) ductas, à quibus illa tangitur, angulos rectos facit (B A C, B A C.) Fig. 1. l. 11. tabulâ 5.

4. Planum ad planum rectum siue perpendiculare est, cum omnes rectæ lineæ (L Q,) quæ communi planorum sectioni (X R) perpendiculares ducuntur in planorum vno, rectę sunt alteri plano (A B C O.) Fig. 2.

5. Si recta linea (O L) plano insistat non ad rectos angulos, & à sublimi eius puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis L P iungaturque P O; angulus L O P dicitur inclinatio lineæ O L ad planum. Fig. 3.

6. Si planum (R E) plano (L Q) non insistat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio est acutus angulus (A B C,) qui continetur à rectis lineis, (A B & B C) quæ in vtroque plano ad communem sectionem (O E) ducuntur perpendiculares. Fig. 4.

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum,
quando

quando dicti inclinationum anguli sunt æquales.

8. Parallela plana sunt, quæ in omnem partem producta æqualibus semper interuallis distant.

9. Similes figuræ solidæ rectilineæ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

Fig.5. 10. Angulus solidus rectilineus est, qui pluribus, quã duobus planis angulis (B A C, C A O, O A B) non in eodem existentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

11. Æquales solidi anguli sunt, qui intra inuicem positi congruunt.

Quemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita solidus angulus est inclinatio superficierum. De vtroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Consule scholium post prop. 16. l. 3.

Fig.6.7.8. 12. Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum aduersa duo (O F E, A C B) sunt parallela, æqualia & similia.

Fig.8. 13. Parallelepipedum est solidum sex quadrilateris, ex aduerso parallelis comprehensum.

14. Si sex plana ex aduerso parallela sint quadrata, solidum iis comprehensum, cubus erit.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars vna (A C) nequit esse in subiecto plano (O E) altera (C B) extra planum. Fig.9.

Per se clarum est ex definitione plani, & lineæ rectæ vide defin. 5. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Omne triangulum in vno est plano. Et duæ rectæ se mutuo secantes in eodem plano sunt. Fig.10.

Prima pars per se clara est, cum triangulum nihil sit aliud, quam plana superficies, tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Si duo plana (A B, C D) se mutuo secant; (E F) communis eorum sectio est recta linea. Fig.11.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen sic demonstrare: si E F sectio communis non est recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F.

duæ

duæ igitur rectæ E O F, E Q F claudent ſpacium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO IV.

Fig.12. *Si recta (B A) duabus rectis (C A X, F A S) ſe mutuò ſecantibus, perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.*

Si negas, alia recta B Q plano rectarum A C, A F ſit perpendicularis. Iunge A Q, & huic in plano F A C duc perpendicularem Q O. Hæc producta, neceſſario ſecabit [o] aliquam rectarum C A X, F A S vel vtramque, vbicunque tandem fuerit punctum Q. ſecet ergo C A X in O, iungaturque B O. Quoniam ergo angulus B A O per hyp. rectus eſt.

o Colligitur ex ſchol. poſt 31. l.1.

a Per 47. l.1. erit quad. B O. Æ. [a] quad. B A, quad. A O.

ſed quia B Q ponitur recta plano F A C, ac proinde [b] rectum facit cum A Q angulum B Q A, eſt

b Per defin. 3. l.11.

c Per 47. l.1. quad. B A. [c] Æ. quad. B Q, quad. A Q.

Et quia angulus A Q O per conſt. rectus eſt;

o Per eand. quad. A O. Æ. [o] quad. O Q, quad. A Q.

Ergo

Ergo quad. B O. Æ. quad. B Q, quad. O Q, quad. A Q bis.

Ergo quad. B O maius eſt B Q & O Q, ac proinde [d] angulus B Q O rectus non eſt. d Patet ex eadem.

Ergo B Q non eſt recta [e] plano C A F. Liquet ergo quæſitum. e Patet ex defin. 3. l.11.

Scholium.

Ex eo quod ponebatur B Q eſſe recta plano F A C, directè eſt demonſtratum B Q non eſſe rectam plano F A C: ac proinde ex eo quod negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directè probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Ioannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

Si tres rectæ (B A, C A, F A) eidem rectæ (A R) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares; tres illæ erunt in vno plano. Fig.13.

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum vna B A in alio plano R O, quod ſecet L Q planum duarum reliquarum C A, F A, rectâ A O. Quoniam R A per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus C A, F A, plano L Q recta [a] erit. Ergo cum A O rectum facit [b] angulum R A O. Sed etiam ex hyp. angulus

a Per præc. b Per defin. 3. l.11.

P R A B

RAB rectus est. Ergo anguli, RAB & RAO æquales sunt. Quod est absurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14. *Lineæ rectæ (AB, CD) quæ eidem plano (EF) sunt perpendiculares, inter se sunt parallelæ.*

Postulari poterat vt per se notum; licebit tamen sic demonstrare.

Iunctâ BD, fac in plano FE, lineam DG normalẽ ad BD & parem BA, iunganturq́; DA, GA, GB. Rectę BD, DG æquãtur BD, a BA; & anguli BDG, b DBA sũt recti. Ergo AD, BG c sunt æquales. Igitur triangula ABG, GDA sibi mutuo æquilatera sunt, ac proinde anguli ABG, ADG æquales. Sed ABG e rectus est. Quare & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex cõstr. & CDG definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD, recta est. Ergo CD cum AD, BD est in vno i plano, sed etiam AB cum AD, BD o in vno plano est. Ergo AB, CD sunt in vno plano. Ergo cum anguli ABD, CDB, sint p recti, erunt AB, CD q parallelæ. Quod erat demonstrandum.

a Per constr.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 4. l. 1.
e Per defin. 3. l. 11.
i Per prac.
o Per 2. l. 11.
p Per defin. 3. l. 11.
q Per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Fig. 15. *Recta (EF) secans rectas (AB, CD) positas in eodem plano, in vno est cum ipsis plano.*

Postulari poterat. Qui volet sic demonstret.

Planum rectarum AB, CD secet aliud planum per puncta E, F, si iam EF non est in plano AB, CD, non erit EF communis sectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF a est linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt spacium. Quod est absurdum.

a Per 3. l. 11.

Corollarium.

Hinc sequitur si EF secat parallelas AB, CD, in eodem esse cum ipsis plano; omnes enim parallelæ b sunt in vno plano.

b Per defin. 36. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 14. *Si parallelarum (AB, CD) vna (AB) plano (EF) sit recta, etiam altera (CD) eidem plano erit recta.*

Poterat postulari. Si demonstratio quæritur, ferè similis ea est demonstrationi propositionis 6.

P 2 PRO-

PROPOSITIO IX.

Fig.16. *Recta (A B, E F) quæ sunt eidem recta (C D) parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam sunt inter se parallelæ.*

Quamuis postulari posset, licebit tamen sic demonstrare.

In plano parallelarum A B, C D, duc G K normalem ad C D. Item in plano parallelarum E F, C D, duc H K normalem
a Per 4.l.11. ad C D. Ergo a C K recta est plano G K H. Ergo cum A G, E H sint parallelæ ad C K
b Per 8.l.11. erunt A G, E H b rectæ plano G K H. Ergo
c Per 6.l.11. A G, E H c sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Fig.17. *Si duæ rectæ (A C, B C) sint parallelæ duabus rectis D F, E F; licet non sint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt.*

Fiant C A, C B æquales F D, F E, & ducantur D E, A B, D A, F C, E B. Cum A C, F D sint parallelæ & æquales, etiam
a Per 33.l.1. A D, C F a parallelæ sunt & æquales. Similiter ostendam B E, C F esse parallelas & æquales. Ergo etiam A D, B E, sunt b parallelę & c æquales. Æquantur d ergo A B, D E. Cum igitur triangula B A C, E D F sibi mutuo sint æquilatera, anguli C & F e æquales erunt. Quod erat demonstrandũ.

b Per præc. c Per axio.1. d Per 33.l.1. e Per 8.l.1.

PROPOSITIO XI.

Fig.18. *Ad planum datum (A B) à dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.*

Constr. in plano A B, duc quamuis D F, ad quam ex C perpendicularem describe C E. Ad eandem per E, in plano A B perpendicularem duc A E M. Tum ad A M ex C perpendicularem demitte C G. Dico C G plano A B rectam esse.

Per G ponatur H G parallela ad D F.

Per const. D E recta est ad C E, & E M. Ergo D E recta a est plano C E M: adeoque & b H G. Ergo c C G recta est ad H G. Sed & C G ex const. recta est ad E M. Ergo C G d recta est plano A B. Quod erat propositum.

a Per 4.l.11. b 8.l.11. c Per defin. 3.l.11. d Per 4.l.11.

PROPOSITIO XII.

Fig.19. *Ex dato plani (E F) puncto (A) rectam ad datum planum erigere.*

A quouis extra planum E F puncto D, a Per prac. fac D B ad planum ª E F rectam, Iunctaque B A, duc A C parallelam D B. Dico factum. Demonstratio patet ex 8.

Scholium.

PRactice per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, si norma O K N ad datum punctum applicetur.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 10. *LIneæ ex eodem puncto ductæ (D C, E C) nequeunt ambæ ad idem planum (A B) esse rectæ.*

Alias enim per 6 forent parallelæ, Quod fieri non potest.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 21. *SI eadem recta (A B) ad duo plana (F G, L Q) perpendicularis est, plana erunt parallela.*

Sumatur in planorum alterutro F G, quoduis punctum C, ex quo ducatur C E parallela ad A B, occurrens plano L Q in
a Per 8. l. 11. E. Erit C E etiam ª recta plano vtrique F G, L Q. Quare si iungantur rectæ A C,
b Per defin. 3. l. 11. B E, erunt anguli A, B ᵇ recti. Ergo A C, B E sunt ᶜ parallelæ. Ergo A C E B paral-
c Per 29. l. 1. lelogrammum est, ac proinde C E, quam iam

iam ostendi vtrique plano esse perpendicularem, æquatur ᵈ A B. Eodem modo osten- d Per 34. l. 1.
dam omnes vtrique plano perpendiculares esse æquales. Ergo plana ᵉ sunt parallela. e Per defin. 8. l. 11.
Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

SI rectæ duæ se mutuo tangentes (B A, C A) ad duas alias se mutuo tangentes (E D, F D) sint parallelæ, etiam plana per ipsas ducta erunt parallela. Fig. 22.

Ex A ducatur A G recta ad planũ E F, ponanturque G H, G I, parallelæ ad D E, D F. Erunt hæ ª parallelæ etiam ad A B, a Per 9. l. 11.
A C. Cum igitur anguli I G A, H G A, sint ᵇ recti, erunt etiam ᶜ C A G, B A G re- b Per defin. 3. l. 11.
cti. Ergo G A, quæ ad planum E F est re- c Per 27. l. 1.
cta, etiam recta ᵈ est plano B C. Ergo plana d Per 4. l. 11.
ᵉ B C, E F sunt parallela. Quod erat demon- e Per prac.
strandum.

PROPOSITIO XVI.

PLanum (E H F G) secans parallela plana (A B, C D) in iis facit sectiones (E H, G F) parallelas. Fig. 23.

Si non: cum sint in eodem plano secante, conuenient ᵒ alicubi in I. Quare cum o Per schol. post 31. l. 1.
totæ

z Per 1.l.11. totæ H E I, F G I sint a in planis A B, C D, producti, etiam hæc conuenient in I. Quod est absurdum contra definitionem 8. huius.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 24. *PArallela plana rectas lineas (BD & HG) proportionaliter secant.*

Ducantur in planis P Q, T V rectæ B H, D G, item B G occurrens plano R S in F, iunganturque F C, F I. Planum trianguli B G D secans parallela plana, facit sectiones
a Per præc. C F, D G a parallelas. Ergo est B C ad C D,
b Per 2. l. 6. vt b B F ad F G. Rursum triangulum B H G secans parallela plana facit, sectio-
c Per præc. nes c B H, F I parallelas. Ergo est H I ad
d Per 2. l. 6. I G, vt d B F ad F G; hoc est (quod iam ostendi) vt B C ad C D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 25. *SI recta linea (F E) sit ad planum (A B) recta, omnia, quæ per ipsam ducuntur plana, sunt eidem plano (A B) recta.*

Ductum sit per F E planum aliquod G C faciens cum A B sectionem C D. In hoc ducantur H K normales ad C D sectionem com-

munem. Cum igitur etiam o F E, recta sit ad C D; erunt K H a parallelæ ad F E. Sed F E ponitur recta plano A B. Ergo & H K rectæ b sunt plano A D. Ergo G C planum c plano A B rectum est.

o Per hyp. & defin. 3. l. 11.
a Per 29. l. 1.
b Per 8. l. 11.
c Per defin. 4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (M F, G D) se secantia, sint ambo recta eidem plano (A B:) erit etiam communis illorum sectio (KL) recta plano (A B.) Fig. 26.

Quoniam planum M F ponitur rectum plano A B; ex def. 4. patet ex puncto L posse in plano M F duci rectam perpendicularem plano A B, eam nempè quæ ex L esset in plano M F perpendicularis ad communem sectionem E F. Similiter, quia planum G D ponitur perpendiculare ad A B, ex def. 4. patet in plano G D posse duci ex puncto L perpendicularem plano A B. Sed ex puncto L tantū a vna potest duci perpendicularis plano A B. Ergo necesse est, vt recta quæ ex L perpendicularis est plano A B, existat in vtroque plano M F & G D, ac proinde sit ipsa planorum M F & G D communis sectio L K. Quod erat demonstrandum. a Per 13. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Fig.27. *SI angulus solidus (A) tribus planis angulis (B A C, C A D, D A B) continetur, horum duo quilibet reliquo sunt maiores.*

Si tres plani sunt æquales, patet assertio, si inæquales, maximus esto B A D. Hic nihilominus minor est duobus reliquis. Ex maximo enim B A D abscinde B A E parem B A C, fiantque æquales A C, A E. Per E ducatur recta occurrens ipsis A B, A D in B & D; iunganturque B C, D C. Quoniam anguli º B A E, B A C æquales sunt, & latera B A, A E, æqualia lateribus B A, A C, etiam bases B E, B C, æquales ª erunt. Quoniam verò B C, C D º maiores sunt quam B D, ablatis æqualibus B E, B C, remanet C D maior quam E D. Sed latera E A, A D, æquantur lateribus ᵇ C A, A D. Ergo angulus ᶜ C A D maior est quam E A D. Cum igitur B A C par sit ostensus B A E. Erunt duo simul B A C, C A D maiores toto B A D. Quod erat demonstrandum.

º Per constr.
ª Per 4. l.1.
º Per 20. l.1.
ᵇ Per constr.
ᶜ Per 25. l.1.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

PLani anguli, solidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis sunt minores. Fig.28.

Esto solidus angulus A, planis angulis illum componentibus subtendantur rectæ B C, C D, D E, E F, F B in vno plano existentes. Quo facto constituitur pyramis, cuius basis est polygonum B C D E F, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt solidum A. Iam vero quia duo anguli A B F, A B C ª maiores sunt vno F B C, & duo A C B, A C D maiores vno B C D & sic deinceps, erunt triangulorum G, H, I, K, L, circa basim anguli simul sumpti omnibus simul angulis baseos B, C, D, E, F maiores. Sed anguli baseos vna cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, ᵇ quot sunt latera, siue quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa basim anguli, vna cum quatuor rectis conficiunt amplius quam bis tot rectos, quot sunt triangula. Sed ijdem anguli circa basim, vna cum angulis qui componunt solidum, componunt bis ᶜ tot rectos quot sunt triangula. Liquet ergo angulos solidum angulum A componentes quatuor rectis esse minores. Quod erat demonstrandum.

ª Per præc.
ᵇ Per theor. 2. schol. post 32. l.1.
ᶜ Patet ex 32. l.1.

Corol-

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatis colligitur ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint maiores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX hac eàdem propoſitione demonſtratur celebre theorema: tres tantùm figuræ planæ ordinatæ, & æquales, corpus continere poßunt, nimirum æquilatera triangula vel 4 vel 8, vel 20; Quadrata 6; pentagona 12. Ac proinde quinque tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyramis, quæ 4, Tetraëdrum quod 8, Icoſaëdrum quod 20 æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6 quadratis, Dodecaëdrum quod 12 æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonſt. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in vnum punctum coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaëdri; ex quinque, angulus ſolidus Icoſaëdri, cum æquilateri trianguli anguli tum 3, tum 4, tum 5, ſint 4 rectis minores, vt colligitur ex corollario 12. p. 32. l. 1.

Quoniam

Quoniam vero tres anguli pentagonici b ſunt 4 rectis minores, poterunt tria pentagona in vnum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempè Dodecaëdri.

b Colligitur ex corol. p. 11. l. 4.

A tribus quadratis in vnum punctum coëuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4 rectos. vnus enim facit duas o tertias recti: ac proinde ſex tales efficient 12 tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo, à ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multo minùs à pluribus.

o Per corol. 12. p. 32. l. 1.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multò minus à pluribus per ſe patet.

Anguli pentagonici 4, ſunt 4 rectis maiores, ſinguli enim efficiunt 6 quintas e recti. Ergo à quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minus à pluribus.

e Per corol. p. 11. l. 4.

Nec ſanè ex aliis figuris quibuſlibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f ſunt 4 rectis æquales, vnus enim facit 4 tertias recti, ac proinde tres faciunt 12 tertias recti hoc eſt 4 rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minus à pluribus.

f Per corol. 2. p. 15. l. 4.

Cum vero tres anguli hexagonici ſint 4 rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono maiorum, vt ſeptagoni, octagoni, &c. 4 rectis maiores erunt. Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas, omnes eſſe ineptas vt ſolidum angu-

lum

lum constituant, adeoq; præter iam dicta 5, nulla ordinata corpora dari posse.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

ADmodum *prolixæ sunt ac molestæ tyronibus, & ferè vsu non veniunt.*

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 29. PLana *parallelepipedum continentia (1.) sunt parallelogramma, (2) quæ ex aduerso, sunt similia & (3) æqualia.*

1. Pars. Planum A F secans plana B D, F H ex defin. 13. parallela facit [a] sectiones B A, F E parallelas. Rursum planum A F secans plana A H, B G per defin. 13. parallela, facit [b] sectiones A E B F parallelas. Ergo B E F A parallelogrammum est. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana sunt parallelogramma.

a Per 16. l. 11.
b Per eand.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet A B, B C parallelas esse E F, F G, erunt [c] anguli A B C, E F G pares. Quare cum & latera alternis sint paria, similia sunt parallelogramma aduersa B D, F H. Eodem modo probatur de cæteris oppositis.

c Per 10. l. 11.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

SI *parallelepipedum (G F D I) aut quoduis prisma plano (N P) secetur aduersis planis parallelo; erit vt basis (D C P O) ad basim (O P F E) ita solidum (G P) ad solidum (N F.)* Fig 30.

Demonstrabitur eodem modo, quo 1. 6.

Corollarium.

Prisma sectum plano aduersis planis parallelo, sectionem habet similem & æqualem planis aduersis.

PROPOSIT. XXVI. XXVII.

NOn *sunt necessariæ.*

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum *per aduersorum planorum diametros (A C, E G) transiens, parallelepipedum secat in duo æqualia prismata.* Fig 29.

Quoniam [a] B G, B E sunt parallelogramma; C G, A E æquidistãt eidem B F. Ergo & [b] inter se sunt parallelæ, ac proinde in vno sunt plano. Ergo rectæ A C, E G

a Per 24. l. 11.
b Per 9. l. 11.

c in

a Per 7. l. 11. *e* in vno sunt plano: Iam verò planum per illas ductum secare parallelepipedũ in duo prismata æqualia. Sic ostendo. Intelligatur prisma A E G C D H supra planum suum E A C G ita constitui, vt anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifestum est tum adhuc fore inter parallela plana B A D C, F E H G. Tum verò necesse est, vt

d Per 27. l. 1. D cadat in B, & H in F. Cadat enim D extra B, si fieri potest, in, N, Angulus B A C æquatur *d* angulo D C A. Sed D C A æquatur N A C (est enim vnus idemque angulus.) Ergo B A C & N A C æquales sunt: quod est absurdum. Ergo D incidit in B, &

e Per ax. 7. pari de causa H *e* in F. Ergo prisma A E G C D H congruit prismati A C G E F B ac proinde *e* æqualia sunt.

PROPOSIT. XXIX. & XXX.

Fig. 31. *Parallelepipeda (F E A G K I M C & F E B H L O M I) quæ eandem habent basim (E F I M) & altitudinem eandem, ac proinde existunt inter parallela plana (E F I M, G A O L) æqualia sunt.*

Vel enim existunt inter lateralia parallela plana E A O M, & F G L I, vel non. Esto primum. Ex 24. huius, & 8. l. 1. patet triangula A E B, C M O, item G F H, K I L sibi mutuo

mutuo æquilatera & æquiangula esse. Quare vt in præcedenti, ostendam prismata C M O L I K, A E B H F G sibi mutuo imposita congruere, ac proinde *a* æqualia esse. a Per axio. 7.

Quare addito communi solido F E B H K C M I, tota parallelepipeda F E A G K I M C, F E B H L O M I æqualia erunt. Quod erat dem.

Sit deinde parallelepipedum F X Q E M I P R non inter eadem lateralia plana parallela existens cum parallelepipedo F E A G K C M I. Quoniam ex hypothesi G K, A C, R P, Q X sunt in vno plano ad basim E F I M parallelo, R P, Q X secent G K in L & H; A C verò in O & B, iunganturque E B, M O, F H, I L; facile ostensu est plana solidum F E B H L O M I cõtinentia parallelogramma esse ex aduerso æquidistantia, adeoque solidum illud *c* esse parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda F X Q E M I P R, & F E A G K C M I, sunt æqualia. Ergo etiam sunt equalia inter se. Quod erat dem. Fig. 32. c Per defin. 13. l. 11.

Scholium.

Hæc propositio similis est propositioni 35. lib. 1. affirmat enim de solidis, quod illa de planis. Quare similis etiam erit reliquorum casuum demonstratio.

Q PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33. *Parallelepipeda super æqualibus basibus (AO & EG) & in eadem altitudine (S) sunt æqualia.*

Habeant parallelepipeda primò latera ad baſes normalia. Ad latus F G productum fiat parallelogrammum G M K H æquale ſimile parallelogrammo A O, perfectoque parallelogrãmo G M P R, rectæ P M, R G occurrant ipſi K H in Q & L. Iam verò intelligantur ſuper G K, G Q, G P, conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium cõmunis ſit. S. ſolidum E G S eſt ad ſolidum G P S, vt E G *b* ad G P; hoc eſt (quia E G, A O per hyp. æquantur) vt A O ad G P; hoc eſt per conſtr. vt G K ad G P; hoc eſt vt *c* G Q ad G P; hoc eſt *d* vt ſolidũ G Q S eſt ad idem ſolidum G P S. Quoniam igitur ſolida E G S & G Q S eandem habent rationem ad ſolidum G P S, erit ſolidum E G S *o* æquale G Q S; hoc eſt ſolido *e* G K S; hoc eſt (quia baſes G K, A O ſunt *f* æquales & ſimiles) ſolido *i* A O S. Quod erat propoſitum. *Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta.*

b Per 25. l. 11.
c Per 35. l. 1.
d Per 25. l. 11.
o Per 9 l. 5.
e Per 29. l. 11.
f Per conſtr.
i Patet ex 29. l. 11. imò per ſe.

Habeant deinde parallelepipeda data E G S,

E G S, A O S latera ad baſes E G & A O obliqua. Fiant ſuper E G. A O parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Parallelepipeda quæuis æquè alta, ſunt inter ſe vt baſes. Fig. 34.

Baſes ſint G O, & A ſuper C O fac parallelogrammum O E par ipſi A.

Super B C, O E intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt vnius parallelepipedi B E K. Ergo *a* parallelepipedum O E K eſt ad parallelepipedum B C K, vt baſis O E ad baſim B C; hoc *b* eſt vt baſis A ad baſim B C. Sed quia baſes O E & A ſunt æquales, parallelepipeda O E K & A K *c* æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum A K eſt ad parallelepipedum B C K, vt baſis A ad baſim B C. Quod erat demonſtrandum.

a Per 25. l. 11.
b Per conſtr.
c Per præc.

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in libro 12 de pyramidibus prop.6; de quibuſlibet priſmatis in corollario 1. poſt p.9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig.55. *Similia parallelepipeda (H A, & C M) ſunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (A B, B C.)*

Sint parallelepipeda A H, C M ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia [a] ſunt; adeoque A B ad B C [b] eſt vt E B ad B O; & vt F B ad B G, ſic E B ad B O. Inſuper & anguli [c] planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida A H, C M vt æquales anguli C B O, A B E ſint oppoſiti, & latera A B, C B indirectum; tum vero etiam [d] E B, O B indirectum erunt. Cogitentur iam ſuper planis B Q & E C facta ſolida, ſic vt ſolida K B, H A, ſint vnum parallelepipedum, & K B, P O faciant vnum ſimiliter parallelepipedum, & P O, C M vnum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum H A eſt ad ſolidum K B [e] vt A E ad B R; hoc eſt vt [f] A B ad B C; hoc eſt (vt per hyp. oſtendi ſupra) vt E B ad B O; hoc eſt vt [g] E C ad B Q; hoc eſt vt ſolidum [i] idem K B ad

a Per defin. 9.l.11.
b Per defin. 1.l.6.
c Per eand.
d Patet ex 15.l.1.
e Per 25. l.11.
f Per 1.l.6.
g Per eand.
i Per 25. l.11.

ad ſolidum P O. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida H A, K B, P O. Iam vero ſolidum K B eſt ad ſolidum P O, vt [k] baſis B R ad baſim B Q; hoc eſt vt [l] E B ad B O; hoc eſt vt [m] F B ad B G, hoc eſt, [n] vt planum F C ad planum B S; hoc eſt, vt idem [o] rurſus ſolidum P O ad C M ſolidũ. Quatuor ergo ſolida H A, K B, P O, C M, ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi H A ad quartum C M eſt [p] triplicata rationis primi H A ad K B ſecundum; hoc eſt rationis [q] A E ad B R; hoc eſt [r] rationis homologorum laterum A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

k Per eand.
l Per 1.l.6.
m Oſtendi ſupra ex hyp.
n Per 1.l.6.
o Per 25. l.11.
p Per defin. 10.l.5.
q Per 25. l.11.
r Per 1.l.6.

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12 demonſtrabitur de pyramidibus propoſ.8. de quibuſlibet priſmatibus, coroll.2. poſt p.9. de conis & cylindris p.12. de ſphæris p.18.

PROPOSITIO XXXIV.

Si parallelepipeda æqualia ſunt (B M, C K,) reciprocãt baſes & altitudines (hoc eſt, baſis A M eſt ad baſim F K, vt reciprocè altitudo F C ad altitudinem A B.) Fig.36.

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

1.Pars. Sint primo latera ad baſes recta. Si iam ſolidorum B M, C K altitudines ſint pares, res patet.

Si altitudines ſint inæquales, à maiori F C abſcinde F E parem B A: & per E duc planum E L ad F K parallelum. Baſis A M eſt ad baſim F K, vt ſolidum [b] B M ad ſolidum E K; hoc eſt (quod ex hyp. paria ſint ſolida B M, C K) vt ſolidum C K ad E K Solidum; hoc eſt vt [c] C G ad E G; hoc eſt vt [d] C F ad E F; hoc eſt ex conſtr. vt C F reciprocè ad B A. Quod erat demonſt.

b Per 32. l. 11.
c Per 25. l. 11.
d Per 1. l. 6.

Sint deinde latera ad baſes, obliqua. Erigantur ſuper ijſdem baſibus in altitudine eâdem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua [e] parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent baſes & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum.

e Per 29. & 30. l. 11.

2.Pars. Sint altitudines inæquales, lateraque ad baſes recta, & ex maiori C F ipſi B A ſume parem E F. Solidum B M eſt ad ſolidum E K, vt [f] A M ad F K; hoc eſt ex hyp. vt C F ad B A; hoc eſt ex conſtr. vt C F ad E F; hoc eſt vt [g] C G ad E G; hoc eſt vt ſolidum [i] C K ad ſolidum idem E K. Ergo ſolida B M & C K eandem habent rationem ad E K. Ergo ſunt paria. Quod erat demonſtrandum.

f Per 32. l. 11.
g Per 1. l. 6.
i Per 25. l. 11.

Corol-

Corollaria.

Quæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29. 30. 31. 32. 33. 34, etiam conueniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, vt patet ex p. 28. Igitur

1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt vt baſes A, B. Fig. 37.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

4. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes; & altitudines; & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

Quod hîc propoſ. 34 oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro 12 de pyramidibus p. 9 de priſmatis quibuſcunque coroll. 3. poſt. p. 9. de conis & cylindris. p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

Valde prolixa, ſeruit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelepipedum (D H) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum Fig. 38.

æqua-

æquatur parallelepipedo (IN) facto à mediâ (B) & æquiangulo priori.

Parallelepipedi D H, basis F D, habeat latus E F æquale A, & latus alterum E D æquale C: latus vero E G basi insistens, æquale mediæ, B. Erit parallelepipedum D H factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde, I N, tria latera L X, I X, X M (ac proinde omnia reliqua) sint æqualia mediæ B; & angulus solidus X sit æqualis angulo solido E. Erit parallelepipedum I N factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam esse æquale.

Cum enim per hyp. & constr. sit vt F E ad L X, ita reciprocè I X ad D E, erunt
a Per 14. l.6. *a* bases D F, I L æquales. Iam quia anguli solidi ad E & X sunt æquales, sponantur
b Per defin. 11. l.11. intra inuicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum E G, X M, puncta M, G, coincident. Quare vna erit vtriusque solidi altitudo, perpendicularis nempè à punctis M, G, iam congruentibus, in planum baseos demissa.
c Per 31. l.11. Solida *c* igitur D H, I N æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Hic porro obseruabimus, id quod magnum habet vsum, ex tribus lineis quomodocunque inter se ductis, eiusdem magnitudinis solidum gigni.

ABC.

ABC. CAB. BCA.
1 2 3

In schemate hic apposito duæ primæ litteræ designant basim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum secundo.

Basis A B est ad basim C A per 2.6. vt B latus ad C latus: hoc est reciproce vt B altitudo ad C altitudinem. Ergo per 34.

ABC. Æ. CAB.

Eodem modo ostendes primum tertio, & tertium secundo esse æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda similia, similiterque à lineis proportionalibus descripta, etiam ipsa sunt proportionalia: & è conuerso.

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum per 33. huius erunt duplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Conuersa patet ex 35. l. 5.

Propositio vera est de quibuscunque similibus corporibus, quæ patebit l. 12. duplicatam habere laterum rationem.

PRO-

PROPOS. XXXVIII. & XXXIX.

Nihil continent memorabile, & vix vllius sunt vsus.

PROPOSITIO XL.

Fig. 39. & 40. *Si fuerint duo prismata triangularia æqualis altitudinis (A B F G O C & I K L P X Q) quorum vnum basim habeat parallelogrammam (O B) duplam baseos alterius (I K L) quæ triangula sit; prismata erunt æqualia.*

Nam si perficiantur parallelepipeda K R & C H, erũt hæc æqualia [a] ob basium C A, M K & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam prismata ipsorum [b] dimidia æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

a Per 31. l. 11.

b Per 28. l. 11.

Scholium.

Ex hactenus demonstratis habetur dimensio prismatum triangularium, & quadrangularium, seu parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in basim, vt si altitudo sit 10 *pedum, basis verò pedum quadratorum* 100, *(mensurabitur autem basis per schol. p. 36. vel 41 l. 1.) multiplica* 10 *per* 100, *proueniunt* 1000 *pedes cubici pro soliditate prismatis dati.*

Do-

Demonstratio facilis est. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in basim. Ergo etiam quoduis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ducta, cum per 31 æquale sit parallelepipedo recto super eadem basi ad eandem altitudinem constituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam basim; semissis parallelepipedi (hoc est prisma triangulare per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam basim, triangulum nempè I L K.

ELE-

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER DVODECIMVS;

NOBIS OCTAVVS.

Qvod in libris præcedentibus hactenus præstare conati sumus, vt Mathematum elementa ad faciliorem ac breuiorem methodum reuocaremus; id inprimis præstandum erit in hoc libro duodecimo, cuius doctrina cum maximè sit neceßaria, demonstrationes adeò sunt prolixæ, vt tyrones in desperationem plerumque conijciant. Huic incommodo ita mederi propositum nobis est; vt tamen à rigore Geometricæ demonstrationis non recedamus. Quod vtrum simus aßecuti, lector intelliget, si hæc nostra cum Euclidæâ prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig 1. l. 12. tabulâ 5. 1. PYramis est solidum (Z L) triangulis (A L C, C L F, F L B, B L A) comprehensum ab vno plano (Z) ad vnum punctum (L) constitutis.

Planum Z basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel quæuis alia

alia figura; ex cuius lateribus singulis triangula surgunt, in vnum punctum L, quod vertex dicitur, coëuntibus.

Vt triangulū inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter solidas prima & simplicißima est.

2. Si extra planum alicuius circuli (C L) acceptum fuerit punctum (A) ab eoque ducatur recta infinita (A F) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli conuertatur, donec in eum locum (A C F) redeat, vnde moueri cœperat; superficies à recta linea (A C F) descripta, dicitur conica superficies, corpus verò quod hac superficie & circulo (C L) continetur, conus vocatur. Fig. 2.

Vertex coni est A.

Basis coni est circulus C L.

Axis coni est recta (A B) ex vertice ad baseos centrum ducta.

Latus coni est recta (A C) à vertice ad baseos circumferentiam ducta, quam esse totam in coni superficie, ex eius genesi est manifestum.

Conus [a] rectus est, cum axis (A B) est basi rectus. a Fig. 2.

Conus [b] scalenus, seu obliquus est, cùm axis (A B) non est ad basim rectus. b Fig. 3.

Fit etiam conus rectus à triangulo rectangulo (C B A) circa vnum latus perpendiculare (A B) in orbem ducto vide Fig. 2.

3. Si

Fig. 4. 5. 3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (C L, O Q) recta linea infinita (C O F) conuertatur, donec in locum redeat, vnde moueri cœpit, sic vt mota sibi ipsi semper parallela maneat; superficies à recta (C O F) descripta dicitur cylindrica superficies: corpus vero quod hac superficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur.

Bases cylindri sunt circuli (C L, O Q)

Axis cylindri est recta (A B) basium centra connectens.

Latus cylindri est recta (O C) in cylindri superficie vtramque basim tangens.

Fig. 4. Rectus cylindrus est cum axis ad bases rectus est.

Fig. 5. Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad bases non est rectus.

Fit etiam cylindrus rectus à rectangulo (O C B A) circa vnum latus (B A) in orbem ducto vide Fig. 4.

Fig. 10. & 21. 4. Similes coni & cylindri sunt, quorum axes (A K, Z O) & basium diametri (B F, Q R) sunt proportionales.

5. Sphæra est solidum comprehensum vnâ superficie, ad quam omnes rectæ lineæ à quodam puncto intra ipsam posito ductę, sunt æquales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter est recta per centrum

trum ducta ad superficiem vtrimque pertingens.

Generatur sphæra si semicirculus circa diametrum (A F) immotam conuertatur. Fig. 6.

6. Magnitudines figuræ alicui inscriptæ, aut circumscriptæ, siue figurâ minores vel maiores, in figuram desinere dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt quantitate minori quâcunque datâ, seu quantumuis paruâ.

Itaque si ea, quæ figuræ alicui inscribuntur, ab eâ tandem deficiant defectu minori quocunque dato, inscripta dicentur in figuram desinere: Et si ea quæ alicui figuræ circumscribuntur, excedant eam tandem excessu minori quocunque dato, dicentur rursum circumscripta desinere in figuram.

PROPOSITIO PRIMA.

Polygonorum similium circulo inscriptorum proportio est duplicata proportionis diametrorum (A F, I C.) Fig. 6. & 7.

Ducantur [a] A O, B F; I R, L C. Quia polygona ponuntur similia, æquales erunt anguli O B A, R L I, & latera O B, B A, proportionalia lateribus R L, L I. Ergo in triangulis O A B, R I L, [b] anguli O & R æquantur. Ergo etiam B F A & L C I, qui, iisdem arcubus B A, L I, insistunt, sunt [c] æqua-

a Per defin. 1. l. 6.

b Per 6. l. 6.

c Per 21.l.3. c æquales. Anguli vero F B A, C L I in se-
d Per 31. l.3. micirculis sunt d recti, ac proinde æquales.
e Per corol. 9.p.32.l.1. Ergo reliqui B A F, L I C e æquantur. Quoniam igitur triangula F A B, C I L, sibi mu-
f Per 4.l.6. tuo æquiangula sunt, erunt f similia, eritque B A ad L I, vt A F ad I C. Iam quia per hyp. polygona sunt similia, erit proportio
i Per 20.l.6. eorum duplicata i proportionis laterum B A, L I; hoc est vt iam ostendi duplicata proportionis diametrorum A F, I C. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Fig. 6. & 7. Polygonorum similium circulo inscriptorum ambitus sunt inter se, vt diametri.

Cum ostensum iam sit A B esse ad L I, vt A F ad I C, etiam O B, erit ad R L, vt A F ad I C, & sic de cæteris lateribus. Ergo per 12.5. omnia simul latera, ad simul omnia, hoc est ambitus ad ambitum sunt vt A F ad I C.

Lemma.

Fig. 8. Polygona circulo inscripta in circulum desinunt.

Inscribe quadratum A C B D. Cum
a Per schol. post 6. & 7.l.4. hoc dimidium sit quadrati a circulo conscripti, erit maius dimidio circuli. Quare si hoc auferatur è circulo, auferetur plus quã dimidium. Deinde singulis arcubus bisectis in

in E, K, I, H, inscribe octogonum: & in E tangat F G, cui B C, D A occurrant in G & F: erit C F parallelogrammum, cuius cum dimidium sit triangulum b C E A, erit hoc b Per 41.l.1.
plus quam dimidium segmenti C E A. Eodem modo singula triangula A K D, D I B &c. singulorum segmentorum plus sunt quã dimidia. Ergo omnia triangula omnium segmentorum plus quam dimidia sunt. Hæc ergo si ex illis, hoc est ex residuo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento si inscribantur circulo polygona duplo semper plurium laterum ostendam è residuo circuli semper auferri plus quam dimidium. Ergo residuum erit tandem c mi- c Patet ex lem. 2. Schol. post. 11.l.6.
nus quocunque dato, ac proinde polygona inscripta tandem à circulo deficient quantitate minori, datâ quâcunque, hoc est in circulum o desinent. Quod erat demonstr. o Per defin. 6.l.12.

PROPOSITIO II.

Circulorum proportio est duplicata proportionis diametrorum.

Polygonorum similium circulo sine fine Fig. 6. & 7.
inscriptorum proportio semper duplicata a est proportionis diametrorum. Atqui po- a Per 1.l.12.
lygona circulo in infinitum inscripta, in cir- b Per lem.
culum b desinunt. Ergo per porisma vniuersale sequens, etiam circulorum proportio,

duplicata est proportionis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

Porisma vniuersale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inscribuntur, in ipsas desinant, quam proportionem inter se semper habent inscripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X.Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarũ A, B, eandem esse cum ratione X ad Z, quã semper habent ea, quæ figuris inscribuntur, sit ratio A ad B primo maior ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, vt X ad Z. Quoniam inscripta per hyp. desinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inscripta, quæ ab ipsis deficiant [a] minori quantitate, quam R deficiat à figura B. Sint ea, C & F. Ergo C erit maius quam R. Ergo C est ad B in [b] maiori, quam R ad B; hoc est (vt ponebatur) quam X ad Z, hoc est per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C est ad B in maiori proportione, quàm ad F, erit B figura minor [c] sibi inscripto F, totum sua parte. Eodem modo ostendetur rationẽ B ad A, non posse esse maiorem ratione Z ad X. Er-

a Per defin. 6.l.12.

b Per 8.l.5.

c Per 10.l.5.

X. Ergo ratio A ad B æqualis est rationi, X ad Z. Quod erat demonstrandum.

PROPOSIT. III. & IV.

SVnt Prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent vsum, quàm vt per eas demonstretur quinta, quam nos sine illis multò facilius demonstrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

SI duæ pyramides triangulares secentur planis (O S E, R X Z) ad bases (A B C, I Q V) parallelis, quæ diuidant latera (C F, Q L,) proportionaliter (in E & Z:) erunt (O S E, R X Z) inter se vt bases (A C B, I Q V.) Fig. 9.

Quoniam parallela plana O S E, A B C secantur à planis B F C, A F B, A F C, erũt sectiones communes S E, B C, & O S, A B, & O E, A C [a] parallelæ. Ergo anguli O S E, A B C, & S O E, B A C, & O E S, A C B, bini & bini, æquales [b] sunt. Quare sectiones O S E, A B C [c] sunt similes. Eodem modo similes esse ostendã sectiones R X Z, I V Q. Ergo ratio sectionis A B C ad O S E est duplicata [d] rationis laterum B C ad S E; & ratio sectionis I V Q ad R X Z duplicata est rationis V Q ad X Z. Atqui rationes B C ad S E, & V Q ad X Z sunt eædem (est

a Per 16. l.11.

b Per 10. l.11.

c Per 4. l.6.

d Per 19. l.6.

e Per corol. 1.p.4.l.6. enim B C ad S E, vt *e* C F ad E F; hoc est per hyp. vt Q L ad Z L; hoc *f* est vt V Q ad X Z.) Ergo ratio A B C, ad O S E eadem est *i* cum ratione I V Q ad R X Z. Quod erat propositum.

f Per idem corol.

i Per 35 l. 5.

I I.

Fig. 10. *PYramidi (Z C A F) triangulam habenti basim, prismata in infinitum inscripta, desinunt in ipsam pyramidem.*

Diuidatur latus pyramidis in aliquot æquales partes A B, B G, G F, & per B, G factis sectionibus G D N & B E P basi Z A C parallelis, inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia B E P M A O, & G D N K B Q. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi esse circũscripta prismata C I B A, P X G B, N H F G. Excessus circumscriptorum supra inscripta sunt solida I M, X K, H G, quæ simul sumpta æquantur prismati C I B A: nam H G est *o* æquale D B, ac proinde H G cum X K æquatur P X G B, hoc est *p* M E B A. Ergo tria H G, X K, I M æquatur toti C I B A. Atqui si A F in plures sine fine partes æquales diuidatur, ac proinde prismatum numerus in infinitum multiplicetur, A B fiet *a* quauis data minor. Ergo etiam *b* prisma C I B A fiet quouis dato minus. Ergo prismatum circumscriptorum (multo-

o Per 25. l.11.

p Per eand.

a Collig. ex lem. 1. Schol. post. 11. l. 6.

b Patet ex 25. l.11.

(multoque magis pyramidis Z C A F, quæ pars est prismatum sibi circumscriptorum.) Excessus supra inscripta prismata, fiet quouis dato minor. Ergo inscripta prismata in pyramidem *c* tandem desinunt. Quod erat demonstrandum.

c Per defin. 6. l.11.

PROPOSITIO V.

PYramides triangulares æquè altæ, eam inter se proportionem habent, quam bases (A Q R, E S X.) Fig. 11.

Pyramidum altitudines æquales referant latera A P, E Z, quibus in quot placuerit, æquales partes, sed æquè multas, vtrimque, diuisis, factisque per diuisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur vtrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æquè multa & æquè alta. Iã verò quia prismata L A, I E sunt æquè alta, erit prisma L A ad prisma I E, vt *a* basis L O B ad basim I N K hoc est *b* vt basis Q R A ad basim S X E. Eodem modo ostendam singula prismata pyramidi Q P A R inscripta, esse ad singula inscripta pyramidi, S Z E X, vt basis Q A R ad basim S E X. Ergo etiam *c* simul omnia sunt ad omnia, vt basis ad basim. Quare cum ea tandem desinant *d* in ipsas pyramides, etiam ipse erunt *e* vt bases. Quod erat demonstrandum.

a Per corol. 1.p.34. l.11.

b Per lem. 1.

c Per 12, l. 5.

d Per lem. 2.

e Per porism. vniuers. post p. 2. l.12.

PROPOSITIO VI.

Fig.12. & 13. *PYramides quæcunque æquè altæ, eam inter se rationem habent, quam bases (AB, CFO.)*

Resoluantur bases in triangula A, B, C, F, O; pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX est ad pyramidem OZ, vt a A ad O; & pyramis b BX est ad pyramidem OZ, vt B ad O. Ergo pyramides simul AX, BX (hoc est tota ABX) sunt ad pyramidem OZ, vt A, B c simul ad O. Eodem discursu pyramis ABX est ad pyramidem FZ, vt d AB est ad F: Et ABX est ad CZ, vt e AB est ad C. Ergo ABX f est ad tres simul OZ, FZ, CZ, hoc est ad totam pyramidem OFCZ, vt AB ad OFC. Quod erat demonstrandũ.

a Per prac. b Per eand. c Per 24. l.5. d Per prac. e Per eand. f Per eand.

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eandem basim & altitudinem.

Fig.14. Sit primò pyramis trigona BGAC, in eadem basi & altitudine cũ prismate BACFEO, ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO sunt a paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA b æqualis est. Ob eandem causam pyramis OEAF par est pyramidi OBAF, hoc est pyramidi BOFA, sunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales sunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, siue BOFA sunt pares. Ergo tres simul vnius BFCA triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc est c BGAC, triplum est. Quod erat demonstrandum.

a Per 34. l.1. b Per 5.l.12. c Per 5. l.12.

Fig.15. Sit deinde pyramis quæuis eandem habens basim & altitudinem cum prismate AEFH ductis lineis BC, BO, BE & NI, NG, NH, resolue prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonstratio ex prima parte. Nam singulæ partes prismatis triplæ erunt singularum partium pyramidis. Ac proinde totum prisma totius pyramidis triplum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

SImilium pyramidum (OACB, KHIN) proportio est triplicata eius, quã habent homologa latera (AB, HN.) Fig.16.

Sint primo trigonæ; perfectis parallelogrammis A M & H Q, super his constituæ parallelepipeda A G, H L, in altitudine pyramidum; quæ cum pyramides sint similes, etiam patet similia *a* esse. Ducatur iam E F, R P, & per E F, C B, item per R P, I N secabuntur *b* parallelepipeda in duo prismata æqualia: singula horum *c* tripla sunt pyramidum O A C B, & K H I N. Vtraque ergo simul; hoc est tota parallelepipeda, A G, H L, sextupla sunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales sunt. Sed horum ratio *d* triplicata est rationis laterum A B, H N. Ergo & illarum. Quod erat demonstrandum.

a Defin. 9. l. 11.
b Per 28. l. 11.
c Per prac.
d Per 33. l. 11.

Fig. 17. Quod si pyramides similes fuerint poligonæ, resoluantur in triangulares A R, B R, C R, & O K, E K, F K. Facilè *e* ostendes etiam A R ipsi O K, & B R ipsi E K, & C R ipsi F K esse similes. Ergo per 1. partem ratio pyramidum A R, O K est triplicata rationis I M ad P Z: & ratio pyramidum B R & E K triplicata est rationis M X ad S Z; hoc est denuo per hyp. rationis I M ad P Z: & ratio pyramidum C R, F K est triplicata rationis X Q ad S T, hoc est rursum I M ad P Z. Cum ergo ratio singularum ad singulas sit triplicata rationis I M ad P Z, etiam ratio *e* omnium ad omnes (hoc est ratio totius pyramidis A B C R ad totam

e Ex 20. & 5. l. 6. & ex defin. 9. l. 11.
e Per 12. l. 5.

totam O E F K) triplicata erit rationis I M ad P Z. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

ÆQuales pyramides reciprocant bases, & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æquales. Fig. 18 & 19.

1. Pars. Sint primò pyramides trigonæ B A C O, H K N L: perfectis parallelogrāmis B E, H R, super his sint parallelepipeda B F, H P. Erunt hæc (vt ostendimus in 8) pyramidum ex hyp. æqualium sextupla, ac proinde æqualia inter se. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines H K, B A, eædem, quæ pyramidum: bases vero B E, H R duplæ *o* sunt basium pyramidalium B C O, H N L, ac proinde ijs proportionales. Cum igitur ob parallelepipedorū æqualitatem, sit vt B E ad H R, ita *a* reciprocè H K ad B A, etiam erit vt basis B C O ad basim H N L, ita reciprocè altitudo H K ad altitudinem B A. Quod erat demonstrandū.

o Per 34. l. 1.
a Per 34. l. 11.

Quod si pyramides habeant bases polygonas, retentis ijsdem altitudinibus reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides sic reductæ per iam demonstrata reciprocant bases & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ

gonæ reciprocant bases & altitudines. Quod erat demonstrandum.

2. Pars. Quoniam iam ponitur esse B C O ad H N L, ut H K ad B A, erit quoque B E ad H R, ut H K ad B A. Ergo parallelepipeda B F, H P b sunt æqualia, ergo & sextæ eorum partes, nempè pyramides B A C O, H K N L. Quod erat demonstrandum.

b Per 34. l.11.

Corollaria.

QVæ de pyramidibus demonstrata sunt p.6,8,9, etiam conueniunt quibuscunque prismatis; cum hæc tripla c sint pyramidum eandem basim & altitudinem habentium. Igitur

c Per 7. l.12.

1. Prismatum æquè altorum eadem est proportio, quæ basium. Id enim ostensum est de pyramidibus p.6.

2. Similium prismatum proportio est triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim ostensum est de pyram. p.8.

3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines, & quæ reciprocant sunt æqualia. Id enim de pyramidibus ostenditur p.9.

Mirum est hæc ab Euclide prætermissa, cum præcipua sint, quæ de solidis rectilineis tradi possunt.

Scholium.

Scholium.

EX hactenus demōstratis elicietur dimensio quorumcunque prismatum ac pyramidum.

Prismatis soliditas producitur ex altitudine in basim ductâ, pyramidis vero ex tertiâ altitudinis parte ductâ in basim.

Vt si prismatis altitudo sit 5. pedum, basis vero 25. pedum quadratorum, multiplica 25. per 5. proueniunt 125 pedes cubici pro soliditate prismatis.

Esto enim prisma polygonum A H. Eius basi A E intelligatur æquale esse triangulum B A C, superq; eo prisma B E æquè altum ac A H. Erunt c B E, A H æqualia prismata. Sed B E prisma d producitur ex altitudine sua in basim B A C, hoc est e AE. Ergo etiam prisma A H fit ex altitudine suâ, quæ altitudini prismatis B E æqualis ponitur, in basim A E.

Fig. 15. & 14.

c Per corol. 1. præced.

d Per schol. p.40. l.11.

e Per constr.

Hinc vero & ex 7 patet demonstratio partis secundæ.

Lemma ad P. 10.

PYramides & prismata, quæ conis & cylindris in infinitum inscribuntur, in conos & cylindros desinunt.

Demonstratur vt lemma propositionis 2, adminiculo propositionis 6 & corollarij 1. post p.9; si vt istic plana circulo inscripta, ita hic pyramides & prismata, quæ super planis illis tanquam basibus consistunt, à cono & cylindro auferantur.

PRO-

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem basim & altitudinem habentis.

Fig. 20. Basi C L intelligatur inscribi polygonũ regulare quotcunque laterum, & super illo tanquam basi, cono quidem pyramis, cylindro autẽ prisma inscribi. Erit pyramis [a] tertia pars prismatis. Et si rursum inscribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, superque eo inscribatur cono pyramis & cylindro prisma; iterum erit pyramis tertia pars prismatis; Atque hoc semper eueniet. Quare cum pyramides in conum, [b] prismata in cylindrum desinant, etiam [c] conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonstr.

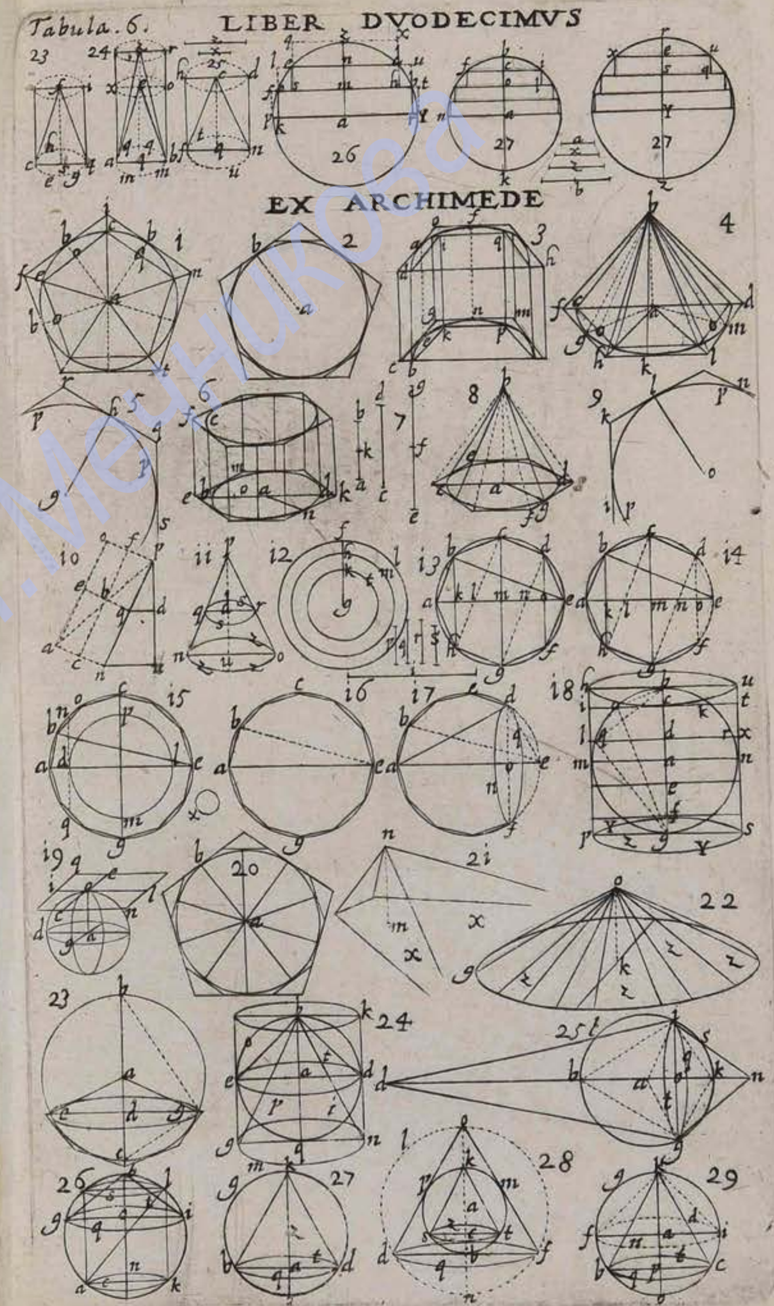
a Per 7. l.12.
b Per lem. prec.
c per poris. vniu. post 2. l.12.

PROPOSITIO XI.

Fig. 20. & 21. ***Conorum æquè altorum (B A F, Q X R) proportio eadem est, quæ basium (C L, S E.) Idem accidit cylindris æquè altis.***

Pyramides conis æquè altis inscriptæ sunt, [d] vt bases. Atqui [e] pyramides tandem in conos desinunt. Ergo etiam [f] coni sunt vt bases. Cum vero cylindri conorum eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium sint

d Per 6. l.12.
e Per lem. ante 10. l.12.
f Per poris. vniu.



sint tripli, etiam ipsi erunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

EOdem modo demonstrabitur etiam prismata & cylindros æquè alta esse inter se vt bases, imò quælibet corpora cylindriformia æquè alta hoc est quæ producuntur ex quibuscunque planis in eandem altitudinem ductis, esse inter se vt bases. Eodem modo de pyramidibus & cono æquè altis, & conicis quibuscunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

COnorum similium B A F & QZR) proportio est triplicata proportionis diametrorum (B F & QR) quæ sunt in basibus. Idem cylindris similibus accidit. Fig. 20. & 21.

Similium conorum basibus inscribe polygona ordinata, quæ proinde similia erunt. Pyramides super his polygonis inscriptæ conis, etiam similes sunt; quod facilè ostenditur. Ergo earum proportio est triplicata a proportionis laterum B L, QE; hoc est b proportionis diametrorum B F, QR. Quare cum pyramides c in conos desinant, etiam conorum proportio d est triplicata proportionis diametrorum B L, Q E. Quod erat demonstrandum.

a Per 8. l. 12.
b Est demonst. in 1. l. 12.
c Per lem. ante 10. l. 12.
d Per poris. vniu.

De

De cylindris patet theorema cum sint tripli conorum.

PROPOSITIO XIII.

Fig 22. *SI cylindrus (B I) secetur plano (R L) basibus (B Q, C I) parallelo; erit pars (B L) ad partem (R I) vt axis segmentū (A O) ad segmentum axis (O F.)*

Demonstratur vt prima sexti.

Theorema eodem modo verum est de superficie.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 23. & 24. *CYlindri (A R & C I) basibus (M Q, G H) æqualibus, sunt inter se vt altitudines (L Z, S F.) Idem conis accidit.*

Abscinde ab altiori cylindro A R cylindrum A O, altitudinis L E eiusdem cū S F.
a Per 11. l. 12. Igitur cylindri A O, C I a æquales sunt. Cum igitur cylindrus A O sit ad cylindrū
b Per præc. A R, vt b L E ad L Z, etiam C I erit ad A R, vt L E ad L Z, hoc est (quia L E &
c Per constr. S F c æquantur) vt S F ad L Z. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

THeorema etiam verum est de prismatis, itemque de pyramidibus, & demōstratio planè similis. Sed de prismatis ex corol. 1.

rol. 1. p. 9. l. 12. & 25. l. 11. eiusque coroll. De pyramidibus ex hoc, & ex. 7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

ÆQuales cylindri (A R, D F) reciprocant, bases & altitudines; & si reciprocant, æquales sunt. Idem conis accidit. Fig. 24. & 25.

Demonstratur vt P. 34. lib. 11, sed pro 32 & 25 isthic citatis, hic adhibebitur prop. 11, & 13, lib. 12.

Scholium.

CVm nihil attulerit Euclides de ratione composita in corporibus, eam breuiter hoc loco demonstrabimus.

1. Cylindrus ad cylindrum, & prisma ad prisma, rationem habent compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Sunto cylindri F D, & A R. Ab altiori A R (nam in æquè altis res per se patet) abscinde A O æquè altum ac F D. Sit etiam vt basis V T ad basim M Q, ita F N ad X, & vt altitudo N D, seu B O, ad altitudinem B R, ita X ad Z. Oportet igitur ostendere, cylindrum F D esse ad cylindrum A R, vt F N est ad Z. Cylindrus FD est ad cylindrum A O, vt a basis V T ad basim M Q hoc est b vt F N ad X. cylindrus autem A O est ad cylindrum A R, vt c B O ad B R; hoc est vt d X ad Z. Igitur ex e æquo cylindrus F D est ad cylindrum A R, vt F N ad Z. Fig. 25. & 24.

a Per 11. l. 12. b Per constr. c Per 13. l. 12. d Per constr. e Per 22. l. 5.

De prismatis res eodem modo demonstrabitur,

sed

sed ex corollario 1.p.9. & coroll.p.14.

2. *Etiam conus ad conum & pyramis ad pyramidem rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem.*

c Per 10. ac 7.l.12. *Sunt enim* c *cylindrorum ac prismatum partes tertiæ.*

PROPOSITIO XVI. XVII.

HAe propositiones omnium prolixissimæ non alium vsum habent, quam vt demonstretur P.18, quam nos aliâ faciliori viâ demonstrabimus.

Lemma ad P.18.

CYlindri hemisphærio inscripti in hemisphærium desinunt.

Fig. 26. Sit P Z Y maximus hemisphærij semicirculus, sitque radius A Z perpendicularis diametro P Y. Seca A Z in aliquot æquales partes A M, M N, N Z; ductisque per diuisionum pūcta M, N, perpendicularibus, &c. Inscribantur semicirculo rectangula O B R K, E D H S, quibus deinde extra circulum continuatis, semicirculo circumscripta intelligantur rectangula F T Y P, L V B O, Q X D E. Eruntque omnia æquè alta, excessus autem circumscriptorū supra inscripta, sunt plana F K, L S, X E, V H, T R, quę simul sumpta cōficiunt rectangulū F T Y P: Nam quia X E æquatur D S, erunt L S, V H,

V H, X E simul, æqualia rectangulo L B, hoc est O R. Quare si adijcias vtrimque plana F K, T R, erūt simul omnia F K, L S, X E, V H, T R æqualia rectangulo F T Y P. Si iam intelligatur semicirculus cum rectangulis circa radium immotum A Z, circumagi, inscripta rectangula E H, O R producent cylindros hemisphærio inscriptos, & rectangula circumscripta producent cylindros hemisphærio circumscriptos, sibi mutuo insistentes; & sicut rectangulorum circumscriptorum excessus, supra inscripta rectangula erat rectangulum F Y, ita etiam cylindrorū circumscriptorum excessus supra inscriptos erit cylindrus à rectangulo F Y genitus. Atqui huius cylindri altitudo fiet quāuis datâ minor, adeoque etiam ipse quouis dato b euadet minor, si radio in plures sine fine partes diuiso rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus sine fine multiplicetur. b Patet ex 13.l.12. Ergo cylindrorum circumscriptorum, multoque magis ipsius hemisphærij, quod cylindrorum circumscriptorum pars est, excessus supra inscriptos cylindros fiet tandē quouis dato minor. Ergo cylindri hemisphærio in infinitum inscripti tandem desinunt c in hemisphærium. Quod erat demonstrandum. c Per defin. 6.l.12.

Corollarium.

EOdem modo demõstrabitur cylindros, cono, conoidi, sphæroidi &c. inscriptos, in ipsa desinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27. *Sphærarum proportio est triplicata proportionis diametrorum* (*B K, R Z*)

Radijs A B, Y R in quot placuerit æquales partes, sed æquè multas, diuisis, ductisque per diuisionum puncta perpendicularibus &c. Intelligantur maximis sphærarum semicirculis, inscripta esse rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos A B, Y R circumacta, inscribant vtrique hemisphærio cylindros æquè multos, sibi inuicem insistentes. Quia K C *o* est ad C F, vt C F ad C B, Erit ratio K C ad C B duplicata *a* rationis K C ad C F, hoc est rationis F C ad C B. Similiter erit ratio Z E ad E R, duplicata rationis X E ad E R. Sed per constr. est K C ad C B, vt Z E ad E R. Ergo etiam *b* F C est ad B C, vt X E ad E R. Sed B C est ad C O per constr. vt R E ad E S. Igitur ex æquo *c* F C est ad C O, vt X E ad E S. Cylindri igitur *d* F L, X Q similes sunt, ac proinde eorum ptoportio est triplicata *e* proportionis diametrorum F I, X V,

o Per coroll. p. 17. l. 6.
a Per defin. 10. l. 5.
b Per 35. l. 5.
c Per 22. l. 5.
d Per defin. 4. l. 12.
e Per 12. l. 12.

X V, seu semidiametrorum F C, X E, quæ sunt in basibus. Sed proportio F C ad X E eadem est cum proportione quæ est inter diametros sphærarum B K, R Z (nam vt iam ostendi F C est ad X E, vt C O ad E S; hoc est vt B K ad R Z, ipsarum C O, E S per constr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum F L, X Q est triplicata rationis diametrorum B K, R Z. Eodem modo demõstrabimus singulos cylindros hemisphærio vni inscriptos, ad cylindros singulos inscriptos alteri hemisphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum B K, R Z. Ergo etiam ratio simul omnium, ad omnes simul *i* triplicata est rationis diametrorum B K, R Z. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemisphæria *k* desinant, hemisphæriorum quoque, ac proinde & sphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

i Per 12. l. 5.
k Per lem. præced.
n Per porism. vniuers.

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiam sphærarum proportio innotescit, vt si minoris diameter sit vnius pedis, maioris 10, cõtinuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1, 10, 100, 1000 vt 1 ad 1000 quartum terminũ, ita sphæra minor ad maiorẽ.

Conorum, Cylindrorum, sphæræ dimensio dabitur libro seq. ex Archimede.

Scholium.

Qvemadmodum similes planæ figuræ per mediam proportionalem vnam, ita corpora similia non nisi per medias duas, in proportione data augentur vel diminuuntur.

Data sit sphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cuius radius siue latus sit A. Data item sit proportio quæcunque, A ad B vt dupla. Oporteat exhibere corpus, & duplum dati & simile.

Inter terminos rationis datæ A & B; inueniantur duæ mediæ proportionales X, Z vt docuimus in scholio post 13. l. 6. sphæra cuius radius est X, siue corpus dato simile, factum super latere X, erit duplum dati.

Nam corpora similia quorum radij, seu latera sunt A & X, rationem inter se habent triplicatam a rationis A ad X, hoc est, eandem, b quam A habet ad B.

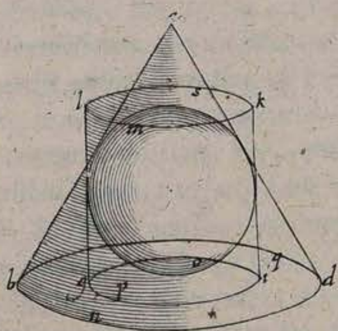
a Corol. 2. p. 9. & per 12 ac 18. l. 12.

b Per defin. 10. l. 5.

Atque hoc est celebratissimum illud problema, quod Deliacum à Deliaco Apolline dictum est, quod is lue sæuissimâ Athenas populante consultus respondisset, pestem cessaturam, si eius ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8.

ANDREÆ TACQVET E SOCIETATE IESV SELECTA EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

Via faciliori ac breuiori demonstrata, & nouis inuentis aucta.



VNA TRIBVS RATIO EST

ANTVERPIÆ,
Apud IACOBVM MEVRSIVM.

LECTORI.

QVamuis in Mathematicis disciplinis complures summi & admirabiles viri extiterunt: prima tamẽ gloria communi quodam consensu Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Causæ, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas, sermonis ex Græco translati obscuritas nonnulla, demonstrationes prolixæ & arduæ. Putaui igitur ex studiosæ iuuentutis vsu futurum, si elementis iam illustratis, hæc à me selecta ex Archimede theoremata, & viâ multò faciliori ac breuiori demonstrata subnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & vtilitatis habent; viamq́; in demõstrando eam tenui, vt sperem, eum, qui elementa perceperit; hæc summi Geometræ præclarissima inuenta negotio haud magno assecuturum. Sub finem adiectis tredecim propositionibus, Archimedis de cylindro & sphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonstro sesquialteram proportionem in tribus corporibus, sphærâ, cylindro, & æquilatero cono, vtroque sphæræ Circumscripto, continuari. Varia insuper sparsim, inter quæ propositio 12, & corollaria prop. 14. præcipua sunt, & scholia omnia adieci. Fruere istis, quisquis Geometriæ candidatus es; & quantùm ex

Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumq; in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, euehiq; sursum persenseris, mentem ab infimis hisce rebus feliciter iam auulsam attolle etiam altius, atque dirige ad veritatem primam æternam, immensam, quæ Deus est, cuius ineffabili visione nos futuros aliquando æternum beatos confido. Vale.

D E-

DEFINITIONES

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus B E C G, cuius centrum A diameter B C, quam ad rectos angulos secet recta E G non per centrum videlicet in D. Ex centro autem educantur radij A E, A G. His positis. *Fig. 23. tab. 6. ex Archim.*

1. Sector sphæræ est, qui à sectore circulari A E C G seu A E B G, circa diametrum B C in orbem acto, producitur.

2. Segmentum seu portio sphæræ, est quę à circulari segmento E C G, seu E B G, circa eandem diametrum B C in orbem acto, describitur.

3. Portionis sphæricę (E B G) vertex est diametri immobilis extremitas B: Basis est circulus à rectâ E G descriptus: Axis est diametri pars B D inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4. Cum sphæricæ portionis aut corporis ei inscripti, aut coni superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & dum cylindri superficiem dico intelligo similiter absque basibus; nisi adiungatur (*tota*) tunc enim accipiuntur & bases.

Rur-

Rursum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

Fig. 1 & 16. 1. POlygoni circulo inscripti ambitus minor est circuli peripheriâ.

Fig. 1. 2. Polygoni circulo circumscripti ambitus circuli peripheriâ maior est.

Fig. 16. 3. Quod si polygonum circulo inscriptum circa diametrum (A E) vnà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies minor sphæræ superficie. Et si polygonum circulo circumscriptū circa diametrum vnà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies maior superficie sphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter ambitus polygoni inscripti segmento circulari (D A F) minor est peripheriâ segmenti (D A F.) Et si polygonum segmento inscriptum vna cum segmento, circa segmenti axem (A O) circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies minor superficie portionis sphęricę (D AF.)

Fig 5. & 6. 5. Superficies prismatis cylindro inscripti minor est cylindri superficie; circumscripti verò maior.

Fig. 4. & 8. 6. Et superficies pyramidis cono inscriptę minor est coni superficie; circumscriptæ autem maior.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

DAtæ sint figuræ quæcunque, seu planæ seu solidæ, A. B. Sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B semper minùs ac minùs excedendo, in ipsas [a] desinant, & tamen semper inter se æquales sint. [a] Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras, A, & B æquales esse.

Si non, alterutra maior erit: sit ergo A maior quam B excessu X.

E.	F.	
A.	B.	X.

Per hypothesim dantur magnitudines, E, F inter se æquales, quæ excedant figuras A, B excessu minori, quam X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quā A. Sed F per hypothesim est æqualis E. Ergo etiam E minor est quam A; quod est absurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse maiorem quam A. Ergo cum neutra sit maior alterâ, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO II.

Datæ sint figuræ A & B; sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ à figuris datis semper minùs ac minùs deficiendo, in ipsas b *desinant, & semper inter se æquales sint.* b Defin. 6. l.12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z. Si non, alterutra minor
O. P. erit. Esto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypothesim dari possunt magnitudines O, P, inter se æquales, quæ deficiant à figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P maior est quàm A. Sed P per hypothesim est æqualis O. Ergo etiam O maior est quam A, quod repugnat hypothesi, quâ statuitur O minor quam A. Eodem modo ostendam B non esse minorem quàm A. Quare cum neutra sit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumscriptorum, & inscriptorum, desinūt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinunt.

Si nimirum arcubus sine fine bisectis, plura semper ac plura latera circulo circumscribantur & inscribantur. Fig. 1. tab. 6. ex Archim.

1. Pars. Intelligantur circulo inscripta & circumscripta polygona ordinata, siue vt traditur p.12.l.4. siue vt in hac figura, perinde erit. Manifestum est a F I esse ad E C (hoc est b totum ambitum circumscriptum ad totum ambitum inscriptum) vt I A est ad C A. Atqui I C excessus rectæ I A supra C A, fit tandem quâcunque datâ minor, si plura semper ac plura in infinitum latera circumscribi & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum tandem fiet quouis dato minor. Ergo multò c magis excessus ambitus circūscripti supra peripheriam fiet quocunque dato minor. Similiter, quia iam ostendi defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quouis dato minorem, multò o magis defectus inscripti ambitus à peripheriâ fiet quouis dato minor. Ambitus igitur tam inscripti quam conscripti in peripheriam d desinunt. Quod erat primum. Hæc vlteriùs demonstrare operæ pretium non est, cum satis sint manifesta.

a Per corol. 1. p 4. l. 6.
b Per 12 l. 5.
c Patet ex axio. 1.
o Patet ex axio. 1.
d Defin. 6. l. 12.

2. Pars. Quia iam ostensum est excessum

sum lateris F I supra latus E C fieri tandem quouis dato minorem (est enim F I ad E C, vt I A ad C A) etiam excessus quadrati F I, supra quadratum E C fiet quouis dato minor. Sed vt quadratum F I ad quadra-
e Per 22. l.6. tum E C, ita e polygonum circumscriptum ad polygonum inscriptum. Ergo etiam excessus polygoni circumscripti supra inscriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis excessus polygoni circumscripti supra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inscripti defectus à circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inscripta quam cir-
i Defin.6. l.12. cumscripta in circulum i desinunt. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1.
o Defin.3. l.4. **P***olygonum o ordinatum circulo conscriptum (F I N T R) æquatur triangulo, cuius basis est ambitus polygoni, altitudo vero circuli radius:*

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum æquatur triangulo, cuius basis est polygoni inscripti ambitus, basis vero perpendicularis (A O) in latus vnum ex centro ducta.

1. Pars.

1. Pars. Radius A B ad contactum du- a Per 18. l.3.
ctus a est perpendicularis ad tangentem I F. Quare si ductis rectis A F, A I, A N &c. polygonum resoluatur in triangula, erit radius A B communis omnium altitudo; adeoque triangula ipsa liquet esse æqualia. Ergo triangulum basim habens parem summæ laterum F I, I N, N T &c. altitudinem vero A B, æquabitur illis b omnibus, hoc est b Patet ex 1. l.6.
toti polygono circumscripto.

2. Pars. Simili ferè ratiocinio concludetur.

PROPOSITIO V.

C*irculus est æqualis triangulo, cuius* Fig. 2.
basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter.

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem vero radium circuli, semper sunt a æqualia. Atqui polygona cir- a Per praec.
culo in infinitum circumscripta, in circulum b desinunt: similiterque triangula (vt mox b Per 3. huius.
ostendam) quę pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine vero radium AB, tandem desinunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium A B. Ergo c circulus, & triangulum c Per 1. huius.
pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium A B, æqualia sunt.

Quod

Quod autem triangula sub ambitu polygoni, & radio, desinant in triangulum sub peripheriâ & radio, sic ostendo. Triangula sub ambitu circumscripti polygoni & radio A B sunt ad triangulum sub peripheria & radio A B, vt [i] basis ad basim; nempè vt ambitus polygoni ad peripheriam; cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam [k] desinit. Ergo & triangula desinet in triangulum.

i Per 1. l. 6.

k Per 3. huius.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l. 1. patet rectangulum sub radio & dimidiâ circumferentia esse æquale circulo: sub radio & totâ circumferentiâ esse duplum: sub totâ diametro & totâ circumferentiâ esse quadruplum circuli.

2. Circulus est ad quadratum sibi inscriptum vt circumferentia dimidia (C D E) ad diametrum; ad quadratum verò circumscriptum, vt quarta circumferentiæ pars ad diametrum.

Fig. 5. lib. 4. tab. 3.

Nam rectangulum sub C D E & radio C A seu C F (hoc [d] est ipse circulus) est ad rectangulum G F C E nimirum sub F G & C F; (hoc est ad quadratum inscriptum B C D E) vt [e] C D E dimidia circumferentia est ad F G seu C E diametrum; quod erat primum; ac proinde circulus est ad duplum

d Per corol. præced.

e Per 1. l. 6.

duplum rectanguli G F C E (hoc est ad F H quadratum circumscriptum) vt C D E ad duplam diametrum C E, siue vt quadrans C D ad diametrum C E.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quam ter & vnam septimam (seu $\frac{22}{7}$) plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$.

Ad huius theorematis demonstrationem assumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumscriptum, inscriptum alterum, vtrumque 96 laterum. Deinde ostendit 96 latera circulo circumscripta continere diametrum minùs quam ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiam quæ ipsis minor est, etiam continere diametrum minùs quã ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96 circumferentiæ inscripta (ac proinde & circumferentiam quę ipsis maior est) amplius continere diametrum quam ter & $\frac{10}{71}$. Porro longior est huius rei demõstratio quã vt hoc loco adferri debeat. Quod si ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites iam statutos arctare poterimus, magis magisque sine termino, atque ita propius in infinitum ad veram propor-

T tionem

tionem accedere. Præstitum est hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, alijsque. Proportiones præcipuas hactenus inuentas hic subiicio.

Prima est Archimedis huiusmodi

Diameter 7

Circumfer. 22 maior verâ.

Diameter 71

Circumf. 223 minor verâ

Rationes 22 ad 7, & 223 ad 71. Si ad commune consequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones reuocantur ad eundem denominatorē) rationes orientur 1562 ad 497 & 1561 ad 497.

Positâ igitur diametro partium 497 erit circumferentia maior verâ 1562 & circumferentia minor verâ 1561

Vtraque igitur à verâ differt quantitate minori, quam sit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quod si rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantnr ad commune consequens, prouenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Positâ igitur circūferentiâ partium 4906. erit diameter minor verâ 1561. diameter maior verâ 1562.

Vtraque igitur à verâ diametro differt quantitate minori, quam sit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio est Archi-

medæâ multò accuratior. Iuxta hanc est

Diameter 113,

Circumf. 355.

Inter omnes paruis numeris constantes nulla veræ propinquior: ex hac enim positâ diametro 10,000, 000, prouenit circumferentia 31,415,929, quæ à verâ solùm penes notam primam 9 differt excessu paulò maiore, quam sint duæ particulæ decimillionesimæ diametri.

Sed vtrâque multò exactior est gemina illa Ludolphi à Ceulen: prioris termini constant notis 21, posterioris vero notis 36.

Diameter

100000000000000000000

circumf. maior verâ

314159265358979323847.

circumf. minor verâ

314159265358979323846

Differentia vtriusque circumferentiæ est particula vna diametri denominata à numero, qui constat vnitate & 20 cifris, ac proinde tam hæc quam illa à verâ circumferentiâ differt minori quantitate quam sit diametri particula dicta, videlicet centies millionesies millionesies millionesima

Diameter

10000000000000000000000000

0000000000

Circumf. maior verâ.

31415926535897932384626433 8
327950289
Circumf. minor verâ.
31415926535897932384626433 8
327950288.

Differentia vtriusque circumferentiæ, inter quam vera existit, est diametri particula vna, denominata à numero, qui constat vnitate & 35 cifris, quæ particula ad diametrũ minorem habet proportionem, quam arenula vna ad orbem terræ. Non enim constat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Frustra igitur sit vlterius progredi. Progrediere nihilominus vltra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cuius methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

PRoportionis iam traditæ fructus eximij, sunt hi qui sequuntur.

Inuentio Diametri ex circumferentiâ.

MAiorem terminum vnius è proportionibus iam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio, his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæsita diameter.

Vt si detur circumferentia maximi circuli terræ milliaria

milliaria continere Belgica vnius horæ 8640, & quæratur terræ diameter, sic stabunt termini

355 —— 113 —— 8640 ——

multiplica iam secundum per tertium, & productum diuide per primum; prouenient milliaria Belgica 2750 $\frac{5}{7}\frac{4}{1}$ pro diametro orbis terræ.

Inuentio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor vnius è proportionibus supra traditis statuatur primo loco: maior secundo: Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis, Is dabit quæsitam circumferentiam.

Vt si detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica vnius horæ 2750 $\frac{5}{7}\frac{4}{1}$, & quæratur ambitus; termini ita stabunt.

113 —— 355 —— 2750 $\frac{5}{7}\frac{4}{1}$ ——

Tunc secundum multiplica per tertium & productum diuide per primum: prouenient milliaria Belgica 8640 pro ambitu orbis terræ.

Quam modicè hæc circumferentia veram excedat, dictum est supra, excessu videlicet paulo maiore, quam sint diametri terrestris duæ particulæ decimillionesimæ hoc est 9 circiter aut 10 pedibus Rhynlandicis, quorum 18000 constituunt milliare horarium. Quod si vtamur proportione Ludolphinâ etiam priori, cuius termini constant 21 notis; inuenietur circumferentia insensibiliter à verâ differens non solum diametro datâ milliariorum Belgicorum 2750, qualis est terræ; verum etiam licet diameter ponatur centum milliarium eorundem milliariorum, qualis fortasse est diameter firmamenti: hâc enim positâ proueniet circumferentia minori quantitate à verâ differens, quàm vna centimillionesimâ particula pedis Rhynlandici. Quod si ad inuestigandam circumferentiam orbis terræ vtamur proportione Archimedis, interuallum circumferentiarum verâ maioris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non est igitur adhibenda Archimedæa proportio, nisi in quantitate paruâ: imò semper expediet Metianâ vti, quæ & modicis constat terminis, & plusquam millies exactior est.

Circuli dimensio.

Semidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll.1.p.5.huius.

Vt si semidiametrum orbis terræ, quæ neglectâ fractione continet milliaria Belgica 1375, multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; prouenient milliaria Belgica quadrata 5,940,000 pro circulo maximo terræ. Differentia inuentæ circularis areæ à verâ, habetur si differentia inuentæ circumferentiæ dimidiæ, à dimidiâ verâ, ducatur in semidiametrum datam, aut si differentia semidiametri inuentæ à vera, ducatur in datam semicircumferentiam.

Dimensio cylindrorum & Conorum.

Eam hic appono, quod à circuli dimensione pendeat.

Cylindrus igitur & prisma quoduis producitur ex altitudine multiplicata per basim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in basim ductâ, sunt enim partes tertiæ cylindrorum ac prismatum, eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium, per 10 & 7.l.12.

Sit basis Cylindri aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50; proueniunt 5000 pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50: proueniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate coni.

PROPOSITIO VII.

Circulorum peripheriæ eam inter se proportionem habent, quã diametri. Fig. 6.1. 12.tab.5.

Nam polygonorum similium circulo sine fine inscriptibilium ambitus sũt inter se semper vt [a] diametri A F & I C. Sed hi [b] ambitus in peripherias desinunt. Ergo [c] etiam peripheriæ sunt inter se vt diametri. Quod erat demonstrandum.

a Per corol. p.1.l.12.
b Per 3. huius.

PROPOSITIO VIII.

SVperficies prismatis cylindro tam circumscripti, quam inscripti æquatur rectangulo, cuius altitudo est latus cylindri, basis vero æqualis perimetro basis prismaticæ.

Fig 3. 1. Pars. Prismatis conscripti superficies tangit cylindrum secundùm lineas E A, N F &c. quæ sunt cylindri latera ; hæc autẽ (quod ex hypot. cylindrus sit rectus) ad planum baseos recta sunt, ac proinde etiam c recta ad lineas C G, G M &c. Sunt verò & æqualia inter se. Igitur vnum cylindri latus communis est omnium rectangulorum C O, O M, M H &c. altitudo. Conscripti igitur prismatis superficies æquatur f rectangulo sub ambitu basis prismaticæ & prismatis seu cylindri latere contento.

c Per defin. 3. l. 11.

f Patet ex. 1. l. 6.

Eadem est ratio secundæ partis, nam latus cylindri, communis rursum est altitudo rectangulorum B D I K, K I Q P &c. quæ constituunt superficiem prismatis inscripti.

PROPOSITIO IX.

Fig 4. *PYramidis ordinatæ, cono recto circumscriptæ superficies, æqualis est triangulo,*

triangulo, cuius basis est baseos pyramidalis circumferentia (F H L D) altitudo autem latus coni (B G.)

Et pyramidis ordinatæ cono recto inscriptæ superficies æquatur triangulo, cuius basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (B O) à vertice in latus baseos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ B G, B K, B M. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis B A a rectus est basis plano F K D, etiam planũ b G B A plano F K D rectum erit. Atqui H G perpendicularis c est ad A G communem sectionem planorum F K D & G B A. Ergo H G etiam d recta est plano G B A. ac proinde perpendicularis quoque est ad e ipsam B G. Ergo B G latus coni, est altitudo trianguli F B H. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum H B L, L B D &c. Igitur triangulum circumferentiâ F H L D, & latere coni comprehensum, æquatur superficiei pyramidis circumscriptæ absque basi. Quod erat primum.

a Per hyp.

b Per 18. l. 11.

c Per 18. l. 11.

d Collig. ex ead.

e Per defin. 3. l. 11.

2. Partis similis ferè demonstratio est.

PRO-

PROPOSITIO X.

Superficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti desinit a in cylindri superficiem: & pyramidis cono recto circumscriptæ superficies in coni superficiem desinit.

a defin. 6. l. 12.

Fig. 3. & 4. 1. Pars. Prismatũ ordinatorũ cylindro sine fine conscriptorũ & inscriptorum superficies habebunt tandem inter se differentiam datâ minorem, vti facilè patebit ex 8 & 3 huius. Multò igitur magis superficies circumscripti prismatis à superficie cylindri inter inscriptam & circumscriptam mediâ, differet differentiâ minori quâcunque datâ, hoc est, b definet in cylindricam superficiem, minùs semper ac minùs excedendo.

b Defin. 6. l. 12.

2. Pars. Eodem modo ostenditur ex 9 & 3 huius.

In figuris tantum exhibentur cylindri & coni semisses, ne multitudo linearum confusionem pareret. Cæterum cogitandi sunt cylindrus & conus integri, quos prismata & pyramides circumscriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas superficies circumscriptas esse maiores ex 3 axiomate.

Lem-

Lemma ad sequen.

Sint AB, CD, EF proportionales, sitq; KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt. Fig. 7.

Recta KB est ad AB, vt EF ad EG. Rectangulum ergo KB, EG æquatur per 16. l. 6. rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par est quadrato CD. Ergo per 17. l. 6. KB, CD, EG, sunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cuius radius (GH) est medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baseos diametrum (BD,) æqualis est superficiei cylindricæ. Fig. 5. & 6.

Intelligantur circulis ABN, GPH, circumscripta esse ordinata polygona, adeoq; similia NM, RS, & super NM polygono erectum esse prisma, cylindro circumscriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. sunt proportionales, etiam AD (seu AN) GH & dupla BC o proportionales erunt. o Per lem.
Iam triangulum sub AN & ambitu polygoni MN contentum a æquatur polygono a Per 4. huius.
conscripto NM: rectangulum verò sub

BC

B C seu E F & eodem ambitu N M (hoc est *b* triangulum sub ambitu N M & dupla B C) æquale est *c* superficiei prismatis cylindro conscripti. Atqui triangulum sub ambitu N M & A N, est ad triangulum sub ambitu N M & dupla B C: *o* vt A N ad duplam B C. Ergo etiam polygonum N M est ad superficiem prismatis cylindro conscripti vt A N ad duplam B C. Sed quia iam ostendi A N, G H, duplam B C, esse proportionales, ratio A N ad duplam B C est duplicata *d* rationis A N ad G H. Ergo polygonum N M ad superficiem prismatis rationem habet duplicatam rationis A N ad G H. Sed etiam polygonum N M ad simile sibi polygonum G R Q S, rationem habet duplicatam rationis A N ad G H, vt facile colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum N M ad superficiem prismatis, & ad polygonum G R Q S eandem habet rationem; quæ proinde æqualia *e* sunt. Eodem modo ostendam, prismaticas superficies cylindro in infinitum circumscriptibiles sempes æquales esse polygonis, quæ circulo G P H in infinitum circumscribi possunt, Quare cum & superficies prismaticæ *f* in cylindri superficiem & polygona *i* in circulum G P H desinant, etiam cylindri superficies circulo G P H æqualis *k* erit. Quod erat dem.

b Patet ex 41. l. 1.
c Per 8. huius.
o Per 1. l. 6.
d Per defin. 10. l. 5.
e Per 9. l. 5.
f Per 10. huius.
i Per 3. huius.
k Per 1. huius.

Ex

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis superficiei cylindricæ.

Corollaria.

1. *Superficies cylindri recti, æqualis est rectangulo sub latere B C, & baseos peripheria contento.* Fig. 5. & 6.

Dupla B C (vt ostensum supra) est ad G H, vt G H ad B A, seu A N; Hoc est, vt *n* peripheria P ad peripheriam B N. Ergo triangulum sub primâ, nempè duplâ B C, & quartâ, nempè peripheriâ B N æquatur *p* triangulo sub secundâ, G H, & tertiâ, peripheriâ scilicet P. Sed triangulum sub G H & peripheriâ P, æquale *q* est circulo G P H, hoc est, *r* superficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum sub dupla B C & peripheriâ B N (hoc est *s* rectangulum sub B C & peripheria B N) cylindricæ superficiei æquale erit. Quod erat demonst.

Ex hoc corollario manifestum est rectangulorum proprietates, superficiebus cylindricis rectis esse communes. Esto igitur corollarium.

2. Cylindricæ superficies (B M, Q N) æquè altæ, sunt inter se vt basium diametri (B F, Q R.) Fig. 10. & 11. l. 12. tab. 5.

Nam rectangula sub peripherijs C L, S E,

n Per 7. huius.
p Patet ex 16. l. 6.
q Per 5. huius.
r Per 11. huius.
s Patet ex 41. l. 1.

S E, & rectis æqualibus F M, R N comprehensa, quibus cylindricæ superficies *d* sunt æquales, sunt inter se *e* vt bases peripheriæ videlicet C L, S E; hoc est *f* vt diametri B F, Q R.

d Per corol. 1.
e Per 1. l. 6.
f Per 7. huius.
Fig. 13. & 14. l. 12. tab. 6.

3. Cylindricæ superficies (C I, A R) quæ bases habent æquales, sunt inter se vt altitudines (T I, B R.)

Rectangula enim sub æqualibus per hyp. peripherijs G H, M Q, & lateribus T I, B R contenta, quibus superficies *g* cylindricæ sunt æquales, sunt inter *i* se vt T I, B R.

g Per corol. 1.
i Per 1. l. 6.
Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.

4. Similes cylindricæ superficies (B M, R I) rationem habent duplicatam eius, quā habent basium diametri (B F, Q R.)

Cum cylindri ponantur similes, erit M F ad I Q, *o* vt B F ad Q R, hoc est *k* vt peripheria C L ad peripheriam S E. Quare etiam rectangula sub peripherijs C L, S E, & lateribus M F, I Q contenta, similia erunt, ac proinde rationem inter se habebunt *l* duplicatam eius, quam habet M F ad I Q, hoc est B F ad Q R. Ergo & cylindricæ superficies &c.

o Defin. 4. l. 11.
k Per 7. huius.
l Per 20. l. 6.
Fig. eadem.

5. Cylindricæ superficies (B M, R I) rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (F M, I Q) & diametrorum (B F, Q R) quæ sunt in basibus.

Fig. 24. & 25. l. 12. tab. 6.

6. Si æquales sunt cylindricæ superficies (A R, F D) erit vt diameter A B, ad diametrum

metrum F N, ita reciprocè altitudo F H ad altitudinem R B: & è conuerso.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ superficiei dimensio, si nimirum altitudo ducatur in baseos peripheriam, vt si altitudo sit pedum 20, peripheria basis pedum 6; multiplica 20 per 6, proueniunt 120 pedes quadrati pro cylindrica superficie.

PROPOSITIO XII.

Fig. 6. & 5. tab. 6. Archim.

Cylindri recti superficies est ad basim (A B N) vt cylindri latus (C B) ad (B O) quartam partem diametri baseos.

Sit G H media proportionalis inter B C & B D diametrum basis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter B A seu A N, & duplam B C. Circulus G P H radij G H æquatur curuę superficiei *b* cylindricæ C D. Sed circulus G P H ad cylindri basim A B N, rationem habet duplicatam *c* rationis G H ad A N; hoc est *d* candem, quam dupla B C ad B A radium, hoc est eandem quam B C ad B O quartam diametri partem. Ergo etiam superficies cylindrica est ad basim A B N, vt B C ad B O quartam partem diametri B D. Quod erat demonstrandum.

a Per lem. antep. 11. huius.
b Per 11. huius.
c Per 2. l. 12.
d Per hyp. & defin. 10. l. 5.

Corol-

Corollarium.

SVperficies cylindri habentis latus diametro basis æquale, baseos quadrupla est. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri, basi æqualis erit. Vtrumque ex propositione manifestum est.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 9. & 8. *Circulus, cuius radius (O L) est medius proportionalis inter coni recti latus (B C) & basis radium (A C,) æqualis est superficiei conicæ.*

Intelligantur circulis A C G, O P L, circumscripta esse polygona ordinata E F, I N, & super polygono E F erectam esse pyramidem cono circumscriptam.

Quoniam per hyp. A C seu A G est ad O L, vt O L ad B C, erit ratio A G ad B C duplicata [a] rationis A G ad O L. Sed vt A G ad B C ita triangulum sub A G & ambitu E F est ad triangulum sub B C & eodē ambitu E F. Ergo ratio trianguli sub A G, & ambitu E F ad triangulum sub B C & eodem ambitu est etiam duplicata rationis A G ad O L. Sed triangulum sub A G & ambitu E F æquale est [b] polygono E F, & triangulum sub B C & eodem ambitu E F æquale [c] est superficiei pyramidis circumscriptæ.

a Defin. 10. l. 5.

b Per 4. huius.

c Per 9. huius.

scriptæ. Ergo ratio polygoni E F ad superficiem pyramidis etiam est duplicata rationis A G ad O L. Atqui etiam ratio polygoni E F ad polygonum sibi per constr. simile I N est duplicata [d] rationis A G ad O L. Ergo polygonum E F, ad superficiem pyramidis & ad polygonum I N eandem habet rationem, quæ proinde æqualia [e] erunt. Eodem modo ostendam superficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magisque polygonæ circumscribi possunt, semper æquales esse polygonis quæ circulo O P L possunt circumscribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum [f] superficies in coni superficiem, & polygona in circulum [i] O P L tandem desinant, etiam coni [k] superficies & circulus O P L erunt æqualia. Quod erat Dem.

d Per 1. l. 12.

e Per 9. l. 5.

f Per 10. huius.

i Per 3. huius.

k Per 1. huius.

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus superficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

I. *REcti coni superficies æqualis est triangulo, sub coni latere (B C) & baseos peripheria (C G) comprehenso.* Fig. 8. & 9.

Sit OL radius media proportionalis inter AC & B C. Quia peripheria CG est ad peripheriam P, vt [a] radius A G ad radium O L; hoc est per hyp. vt O L ad B C: erit triangulum sub prima, nempè peripheriâ C G & sub

a Per 7. huius.

b Patet ex 16.l.6. sub quarta B C b æquale triangulo sub secunda, nempè peripheriâ P, & tertiâ O L; o Per 5. huius. hoc est o circulo O P L, hoc est d superficiei conicæ B C D. Quod erat Dem. d Per hanc. 13.

Ex hoc corollario liquet superficies conicas triangulorum subire leges. Itaque

Fig.20.& 21.l.12. tab.5. 2. Superficies conicæ B A F, Q X R æqualia latera B A, Q X, habentes, sunt inter se, vt basium diametri B F, Q R.

Fig.23.& 24.l.12. tab.6. 3. Et (C F T, A Z B) quæ bases habent æquales, sunt inter se vt latera (C F, A Z.)

Fig.20.& 21.l.12. tab.5. 4. Et quæ similes sunt (B A F, Q Z R) duplicatam habent rationem eius, quæ est inter basium diametros.

Fig. eadē. 5. Et quælibet, rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (B A, Q Z) & diametrorum (B F, Q R) quæ sunt in basibus.

6. Et quæ æquales sunt reciprocant latera & basium diametros; & quæ reciprocant, sunt æquales.

Quæ omnia demonstrantur ex coroll. 1. vt supra corollaria de cylindrica superficie deduximus ex corollario isthic primo.

Fig.25.l.12. tab.6. 7. Metiemur denique conicam superficiem, si latus F C per baseos peripheriam dimidiam multiplicemus. Vt si latus sit pedum 5, peripheria baseos pedum 20, duc 5 per 10, proueniũt 50 pedes quadrati pro conica superficie. Dem. patet ex eodẽ 1. coroll.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Coni recti superficies est ad basim, vt latus (B C) ad basis radium (A C.) Fig.8.& 9. Archim. tab 6.

INter latus B C & basis radium A C, sit media proportionalis O L. Ergo ratio B C ad A C est duplicata e rationis O L ad A C. Iam circulus radij O L f est æqualis superficiei conicæ C B D. Sed huius ratio ad coni basim A C G est duplicata g rationis O L ad A C, ac proinde eadem cum ratione B C ad A C. Ergo etiam ratio superficiei conicæ C B D est ad basim A C G, vt B C ad A C. Quod erat dem.

e Defin. 10. l. 5. f Per 13. huius. g Per 1. l. 12.

Corollaria.

1. *SVperficies coni recti à triangulo æquilatero circa perpendicularem K A, circumacto geniti, baseos Q T dupla est.* Fig.27.

Est enim K B latus æquale B D, adeoque duplum semisseos A B, quæ baseos radius est.

2. *Superficies coni à rectangulo triangulo æquicruri E B D producta est ad basim, vt in quadrato diameter ad latus.* Fig.24.

 Du-

Ductâ enim perpendiculari B A, a angulus rectus B biſecatur, adeoque A B D ſemirectus eſt; eſt autem & A D B b ſemirectus. Ergo D A, B A c æquales ſunt ac proinde B D eſt diameter quadrati A K latus vero A D. Eſt vero eadem A D ſemidiameter baſeos P T, cum perpendicularis A B, ſecet d bifariam E D. Ex quibus & hac 14 patet corollarium.

a Patet ex 26.l.1.
b Per corol. 11.p.32.l.1.
c Per 6. l.1.
d Patet ex 26.l.1.

Fig.24.

3. *Superficies cylindri recti (G K) eſt ad ſuperficiem coni recti (G B N,) vt cylindri latus ad dimidium latus coni.*

Nam ſuperficies coni G B N eſt ad baſim M I, vt latus B N ad e ſemidiametrum baſis Q N; hoc eſt vt dimidium lateris B N ad quartam partem diametri G N. Eſt autem baſis M I ad ſuperficiem cylindri G K, vt i quarta pars diametri ad N K cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica G B N eſt ad ſuperficiem cylindricam G K, vt dimidium latus coni ad cylindri latus N K. Quod erat dem.

e Per 14. huius.
i Per 22. huius.

Lemma ad ſequen.

Fig.10.

In triangulo N P V ducta ſit Q D parallela ad N V.

Dico rectangulum ſub P N & N V, æquari rectangulo ſub P Q, Q D, vna cum rectangulo ſub N Q & duabus ſimul ſumptis N V, Q D.

Duc

Duc lateri N P perpendicularem N A æqualem N V, completoque N O rectangulo, ducatur diameter P A. Tum ex Q parallela Q E ad N A ſecet P A in B. Per B ducatur C F parallela ad N P. Quoniam A N eſt par N V, patet etiam a Q B eſſe parem Q D. Igitur rectangulum O N eſt rectang. P N V, & F Q eſt P Q D. Reſtat vt probemus rectangula O B, E C, B N æquari rectangulo ſub N Q & duabus N A, Q B, hoc eſt ſub N Q & duabus N V, Q D. Id verò eſt manifeſtum: rectangulum enim ſub N Q & N A, Q B, æquatur b his tribus rectangulis ſub N Q & C A (hoc eſt ſpacio E C) ſub N Q, & N C (hoc eſt ſpacio B N) ſub N Q & Q B; hoc eſt rurſum ſpacio B N, ac proinde ſpacio O B, quod ipſi B N c æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

a Ex corol. 1.p.4.l.6. & ex 11.l.5.
b Per 1.l.2.
c Per 43. l.1.

PROPOSITIO XV.

Fig.11. & 12.

SI conus rectus ſectus ſit plano Q S R baſi N Z O parallelo; Dico circulum G H M, cuius radius G H eſt medius inter partem lateris N Q & circulorum Q S R, N Z O, radios Q D, N V ſimul ſumptos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos Q S R, N Z O interceptæ.

 Inter

Inter P N & N V media sit G F. Item inter P Q & Q D sit media G K, describanturque circuli G F L, G K T. Erit hic
b Per 13. huius. *b* æqualis superficiei conicæ Q P R, ille superficiei *c* N P O.
c Per eand. d Per lem. Rectangulum P N V æquatur *d* rectangulo P Q D, vna cum rectangulo sub N Q & N V, Q D simul sumptis.
e Per constr. Sed quia *e* G F media est proportionalis inter P N, N V, rectang. P N V est æquale
f Per 17. l. 6. *f* quadrato G F, & quia G K est *i* media
i Per const. l Per 17. l. 6. inter P Q. Q D, rectang. *l* P Q D æquatur
k Per hyp. quadrato G K: & quia G H media *k* est inter Q N, & Q D, N V simul sumptas, rectangulum sub Q N & Q D, N V simul
n Per 17. l. 6. sumptis, æquale est *n* quadrato G H. Ergo quad. G F par quoque est quadratis G H,
o Per 2. l. 12. G K. Ergo cum circuli sint inter se vt *o* quadrata radiorum, erit quoque circulus G L F æqualis duobus circulis, G K T & G H M.
p Per 13. huius. Atqui circulus G L F est æqualis *p* superficiei conicæ N P O. Ergo etiam superficies conica N P O æquatur duobus circulis G K T & G H M. Atqui superficiei
r Per eand. N P O pars vna Q P R *r* æqualis est circulo G K T. Ergo reliqua, inter parallelos circulos Z Z, S S comprehensa, æquatur circulo G H M. Quod erat demonstrandum.

Lem-

Lemma ad sequen.

Fig. 13.

Recta (B H, C G) quæ in circulo æquales arcus (B C, H G) intercipiunt, sunt parallelæ.

Ducatur enim C H. Quoniam arcus B C, H G per hyp. sunt æquales etiam *a* anguli B H C, G C H alterni æquales erunt. Ergo *b* B H & C G sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

c Per 29. l. 3.
b Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 13.

Inscribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera; Ducaturq; E B ab extremitate diametri ad, B, terminum lateris diametro proximi, angulos vero æqualiter distantes ab A, iungant rectæ B H, C G, D F.

Dico rectangulum quod diametro A E, & subtensa E B continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere vno figuræ inscriptæ (A B, vel B C &c.) & ex omnibus iungentibus B H, C G, D F simul sumptis.

Duc C H, D G; quoniã B H, C G, D F intercipiunt arcus *a* æquales B C, H G; C D, G F; erunt *b* parallelæ. Pari argumento paralle-

a Per 26. l. 3.
b Per lem. præc.

læ

e Per 27. & 15. l. 1. læ ſunt B A, C H, D G, E F. Omnia igitur triangula c B A K, K H L, L C M, M G N, N D O, O F E æquiangula ſunt. Ergo d vt B K ad K A, ſic H K ad K L; & vt H K ad K L, ſic C M ad M L; & vt C M ad M L, ſic G M ad M N; & vt G M ad M N, ſic D O ad O N; & vt D O ad O N, ſic F O ad O E. Ergo e vt vna antecedentium B K ad vnam conſequentium K A; ſic omnes antecedentes B K, K H, C M, M G, D O, O F; (hoc eſt omnes iungentes B H, C G, D F) ſunt ad omnes cōſequentes A K, K L, L M, M N, N O, O E, hoc eſt ad diametrum A E. Sed vt B K ad i A K, ſic E B ad B A. Ergo vt omnes ſimul B H, C G, D F ad A E, ſic E B eſt ad B A. Ergo k rectangulum ſub omnibus iungentibus B H, C G, D F, & ſub B A æquatur rectangulo ſub A E & E B. Quod erat dem.

d Per 4. l. 6.

e Per 12. l. 5.

i Per 8. l. 6.

k Per 16. l. 6.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14.

Segmento circuli D A F, cuius baſis D F perpendicularis ſit diametro A O E, inſcribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturq́ue, vt in præcedenti recta E B.

Dico rectangulum ſub E B & parte diametri A O, quæ ſegmenti axis eſt, comprehenſum, æquari rectangulo ſub latere vno figuræ inſcriptæ, & omnibus iungentibus B H, C G vnà cùm D O dimidio baſis D F ſimul ſumptis cōprehenſo.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Lemma 1. ad ſequent.

Fig. 13.

Inſcripta ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cuius latera quaternarius metiatur, circa axem A E conſiſtens: Quo manente, circulus cum figura circumagatur.

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quod B A, H A, item D E, F E deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies manifeſtum o eſt. Deinde quia lineæ C B, G A & G F, C D concurrunt productæ in eodem vtrimque puncto diametri A E ſimiliter pertractæ, quæ iungentes ſecat normaliter: etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quos in ſphærica ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D.

o Vide defin. 2. l. 12.

Lemma 2.

Fig. 14.

Segmenti ſphæræ, cuius axis A O, ſectio maxima eſto D A F. Huic inſcripta ſit figura æquilatera demptâ baſi, quæ circa axem A O in orbem conuertatur.

Dico

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiebus contentum.

Probatur vt lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 13. *Ponantur eadem quæ in primo lemmate. Et ducatur recta E B, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi.*

Dico omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis æqualem esse circulum, cuius radius (I) potest [a] *rectangulum A E B, comprehensum videlicet, sub diametro A E, & subtensâ E B.*

a Potentia rectæ est quadratum eius.

Hoc est, [b] cuius radius (I) est medius proportionalis inter A E & E B.

b Per 17. l. 6.

Quoniam rectæ B H, C G, D F æquantur rectis B K, C M, D O bis sumptis, erit [c] rectangulum sub latere vno figuræ inscriptæ maximo circulo (videlicet sub A B, vel B C, vel C D, vel D E) & sub omnibus simul iungentibus B H, C G, D F æquale rectangulo sub A B & B K, sub B C & compositâ ex B K & C M, sub C D & compositâ ex C M & D O, sub D E & D O; sic enim rectæ B K, C M, D O singulæ fuerũt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub A B &

c Per 1. l. 2.

& omnibus iungentibus B H, C G, D F simul sumptis æquatur [d] rectangulo A E B, hoc est [e] quadrato I. Ergo quadratum I æquale est rectangulis sub A B & B K, sub B C & compositâ ex B K, C M, sub C D & compositâ ex C M, D O, sub D E & D O. Sint iam inter A B & B K media proportionalis P; inter B C & compositam ex B K, C M media Q; inter C D & compositam ex C M, D O, media R; inter D E & D O media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia [f] rectangulis supradictis. Quare cum quadratum I iam ostenderim ijsdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli sint inter se [g] vt quadrata radiorum, etiam circulus radio I descriptus omnibus simul circulis quorum radij, P, Q, R, S, æqualis [i] erit. Atqui circuli radiorum, P, & S, æquantur [k] superficiebus conicis quas produxerunt latera A B, E D, siquidem P est media proportionalis inter A B coni latus, & B K radium baseos; S verò media est inter E D, & D O; & circulus radij Q est æqualis segmento [n] superficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum C G, B H, quia Q media est inter B C, & compositam ex B K, C M; & ob eandem causam circulus radij R æquatur segmento superficiei conicæ inter parallelos

d Per 16. huius. e Per hyp. f Per 17. l. 6. g Per 2. l. 12. i Patet ex 22. l. 6. & 24. l. 5. k Per 13. huius. n Per 15. huius.

los circulos diametrorum C G, D F interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus, æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphæræ inscriptis. Quod erat dem.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 14.

Ponantur eâdem quæ in 2. lemmate, & ducatur recta E B ab extremitate diametri A E ad terminum lateris A B diametro proximi.

Dico omnibus superficiebus conicis segmento sphærico D A F inscriptis æqualem esse circulum, cuius radius est medius proportionalis inter E B, & segmenti axem A O.

Demonstratio plane eadem, quæ præcedentis: sed pro P. 16, citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Fig. 15.

Superficies conicæ sphæræ inscriptæ, in sphæræ superficiem desinunt.

Data sit superficies quantumuis parua X. manifestum est intra sphæricam superficiem A C E G dari aliam posse concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quã sit X. Ambarum plano sectarum per centrum

trũ maximi circuli sint A C E G, D P L M. Ducatur diameter A D E, & in D tangat N Q. Si arcus A E bisecetur in C, & resi, duum bisecetur rursus & sic deinceps, relinquetur [a] tandem arcus A B minor arcu A N. huic si subtendatur recta A B, manifestum est eam non pertingere ad peripheriam P D M L, esseque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo C A G E inscriptæ, cuius nullum latus pertingat ad peripheriam P D M E. Quare si circa diametrum A E in orbem agantur omnia, patet superficiei sphæricæ exteriori inscribendas esse conicas superficies, quæ includant superficiem sphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ sint [b] maiores. Quoniam igitur sphærica superficies D P L M, deficit à superficie sphericâ A C E G quantitate minori quam sit data X; multò magis superficies conicæ ab eâdem sphericâ A C E G, deficient quantitate minori quam sit data X, ac proinde [c] in A C E G superficiem desinent. Quod erat demonstrandum.

a Patet ex lem. 2. schol. post 11. l. 6.

b Per axio. 3. huius.

c Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17.

Conicæ superficies segmento sphærico D A F inscriptæ in ipsam segmenti sphæricam superficiem desinunt.

Demonstrabitur eodem ferè ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig.16. *Demonstratum est propos. 18, circulum cuius radius est medius proportionalis inter diametrum A E, & recta E B, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris A B diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis.*

o Vide defin. 6.l.12. *Dico hunc circulum desinere* o *tandem in circulum, cuius radius est A E sphæræ diameter.*

Nam si plura semper ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa A E in orbem acta conicas producunt superficies) patet latus AB fieri tandem quauis datâ rectâ minùs, ac proinde subtensam E B, ad diametrum A E accedere ad interuallum etiam quouis dato minùs; vnde fit vt differentia ipsarum A E, B E etiam fiat quâuis datâ minor. Ergo multo magis media proportionalis inter A E, B E, quæ semper maior est quam B E, differet ab A E tãdem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus cuius semidiameter est media inter A E, & B E, à circulo, cuius radius est A E, tandem differet

ret defectu minori, quocunque dato: hoc est in i ipsum desinet. Quod erat dem. i Defin. 6. l.12.

Hæc per se satis clara, non est necesse operosius demonstrare.

PROPOSITIO XXIII.

Demonstratum est propos. 19, circulum, cuius radius est medius proportionalis inter E B & A O segmenti axem, æqualem esse omnibus superficiebus conicis portioni sphæricæ D A F inscriptis. Fig.17.

Dico hunc circulum desinere in circulum, cuius radius est recta A D, à segmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui basis est segmenti.

Nam quia iam ex præced. demonst. liquet E B desinere tandem in A E, patebit quoque mediam proportionalem inter E B & A O, desinere tandem in mediam proportionalem inter A E & A O; hoc n est in ipsam A D. Manifestum est igitur & circulum cuius radius est medius proportionalis inter E B & A O etiam desinere in circulum radij A D. Quod erat demonstrandum. n Per corol. 2.p.8.l.6.

Lem-

Lemma ad sequen.

S*I diameter diametri dupla est, circulus Circuli, quadruplus erit.*

Patet ex propos.2.l.12.& defin.10.lib.5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig.16. C*Viuscunque sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eiusdem sphæræ.*

HOc nobilissimum Archimedis theorema ex iam præmissis expeditè demonstrabimus hunc in modum.

Circulo sphæræ maximo circa diametrum A E intelligatur inscripta esse figura ordinata, cuius latera quaternarius metiatur. Quæ circa A E in orbem ducta, producat conicas superficies, superficiei sphæricæ inscriptas, ducaturque E B. Demonstratum
a 18. huius. iam supra [a] est, omnes conicas superficies sphæræ inscriptas æquales esse circulo, cuius radius potest rectangulum A E B, hoc est cuius radius est medius proportionalis inter A E, & E B. Atque hoc semper eueniet inscriptionibus in infinitum continuatis. Quare
b Per 20. huius. cum inscriptæ conicæ superficies [b] tandem desinant in sphæricam superficiem, circulus vero cuius radius est medius inter A E,
c Per 22. huius. & E B, desinat [c] in circulum, cuius radius A E,

A E, ipsa quoque sphærica superficies [d] æqualis erit circulo radij A E, hoc est [e] quadruplo maximi circuli A C E G. Quod erat demonstrandum. d Per 2. huius. e Per lem. præc.

Viam, quá in theoremate nobilissimo demonstrando hactenus vsi sumus, Archimedæá multò breuiorem & clariorem esse sciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphæricæ, is nimirum cuius semidiameter est sphæræ diameter, siue cuius diameter dupla est diametri sphæræ.

Scholium.

E*Xpedita iam erit dimensio superficiei sphæricæ, principis inter omnes curuas. Duplex est modus.*

1. *Mensuretur circulus sphæræ maximus (vt traditur in scholio post P.6.huius.) Et multiplicetur per 4. Vt si maximus orbis terræ circulus inuentus sit continere quadrata milliaria vnius horæ siue Belgica 5,940,000, hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica, 23,760,000, quæ in superficie orbis terræ continentur.*

2. *Diameter sphæræ multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet sphæræ superficiem. Vt si terræ diametro dentur milliaria vnius horæ* $2750\frac{14}{17}$ *atque inde maximi circuli circũferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri omissâ fractione multiplicati per inuicem dabunt rursum quadrata milliaria vnius horæ, 23;760,000 totam orbis terræ superficiem constituentia.*

Demonstratio patet ex primo corol. p. 5. huius; rectangulum enim sub diametro sphæræ, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. est quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *CViuscunq; portionis sphæricæ (DAF) superficies æqualis est circulo, cuius radius est recta (AD) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN) qui portionis est basis.*

Portionis maximæ sectioni inscripta cogitetur circa axem A O figura æquilatera & parilatera basi demptâ; quæ, circa A O in orbem acta, portioni inscribet conicas superficies. Ducatur quoque recta E B, vt
o In 18. & 19. huius. o supra. Omnes conicæ superficies segmento sphærico iam inscriptæ æquantur a circulo cuius radius est medius proportionalis
a Per 19. huius. inter E B, & segmenti axem A O. Atque hoc multiplicatis in infinitum inscriptionibus

bus semper continget. Quare cum & conicæ superficies segmento inscriptæ, desinant b in sphæricam segmenti superficiem, b Per 21. huius.
& circulus cuius radius inter E B & A O medius est, desinat c in circulum radij A D; c Per 23. huius.
etiã d sphærica portionis superficies D A F, circulo radij A D æqualis erit. Quod erat demonstrandum. d Per 1. huius.

Hoc alterum est ex Archimedis inuentis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, viâ multò, quam ipse, breuiori ac clariori iam demonstrauimus.

PROPOSITIO XXVI.

CYlindri recti sphæræ circumscripti (HPSV) superficies, æqualis est superficiei sphæræ. Fig. 18.

Et si cylindrus ac sphæra secentur planis ad axem (BG) rectis, erunt singula superficiei cylindricæ segmenta segmentis singulis superficiei sphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus H P æquale est o P S diametro basis, erit cylindrica superficies H S, quadrupla a baseos, hoc est maximi circuli sphæræ cylindro inscriptę; cuius cum etiam b quadrupla sit sphæræ superficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat dem.
o Per hyp. a Per corol. p. 12. huius. b Per 24. huius.

 2. Pars.

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG *i* rectus est in semicirculo, ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit *c* BO media proportionalis inter GB, & BC, hoc est inter IT & HI. Ergo circulus radij BO *d* æqualis est superficiei cylindricæ HT. Sed idem circulus æqualis *e* est etiam segmento superficiei sphæricæ OBK. Æquales igitur sunt superficies, cylindrica HT, & sphærica OBK.

i Per 31. l.3.
c Per corol. 2. p. 8. l.6.
d Per 11. huius.
e Per præc.

Deinde quia eodem modo ostenditur cylindrica HX æquari sphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ sphæricæ QOKR, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de segmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

Segmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis diuisæ eam inter se proportionem habent, quam segmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos rectæ.

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphæricæ superficiei segmenta OBK, QOKR, MQRN, &c. *a* æqualia cylindricis, HT, IX, LN &c. Atque hæc eandem

a Per præc.

dem inter se rationem habent, *b* quam axeos segmenta BC, CD, DA &c. Ergo & illa. Quod erat dem.

b Per 13. l.12.

Scholium.

Ex hac innotescit proportio zonarum & climatum inter se. Sunt enim ad inuicem vt segmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula sinuum.

Ex eâdem habetur dimensio segmentorum superficiei sphæricæ. Nam quia & tota sphæræ superficies nota est ex scholio prop. 24, & segmentorum proportio, vtpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet segmenta singula innotescere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ sequuntur, omnino singularia atque admiranda sunt, planeq́; digna, ad quæ intelligenda Geometriæ studiosi ardenti studio incumbant.

Lemma ad sequent.

Si sphæram tangat planum (QN in O,) recta (AO) ex centro ad contactum ducta est plano tangenti perpendicularis. Fig. 19.

Secentur planum tangens QN & sphæra, per tactum O duobus planis, quę in sphęra quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. l.3, AO perpendicularis est ad vtramque

IO,CO. ac proinde per 4.l.11. recta plano QN. Quod erat dem.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 20. 22. & 21. *OMnis sphæra æqualis est cono (Z O) cuius altitudo (K O) par est radio sphæræ; basis verò (Z) superficiei sphæræ æqualis.*

Intelligatur sphæræ circumscriptum esse corpus aliquod poliëdrum, cuius solidi anguli nouis planis sphæram tangentibus abscindantur. Quo facto orietur aliud corpus poliëdrum sphæram continens, minùs priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compositam. Si poliedri huius solidi anguli nouis planis tangentibus iterum abscindantur, & tertij poliëdri inde nati similiter; atque ita in infinitum: fiet tandem vt & poliëdrum excedat sphæram solido minori quocunque dato, & superficies eius ex planis tangentibus (quæ, vt dixi, sine termino & minora, & plura erunt) composita, sphæricam superficiem, excedat quoque plano minori, dato quocunque. Quod vtrumque, licet demonstrari posset, tamen quia per se satis clarum, postuletur studio breuitatis. His ita constitutis, quæsitum ita concludemus.

Po-

Poliëdrum iam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphæræ, bases verò sunt plana tangentia, quæ poliëdri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ, ad plana a singula perpendiculares sunt, erunt omnium pyramidum, quibus constat poliëdrum, æqualis altitudo, ipse nimirum A B radius sphæræ. Si iam igitur planum, X, ponatur æquale superficiei ipsius poliëdri, superque eo erecta sit pyramis ad altitudinem M N etiam æqualem sphæræ radio A B, manifestum est b omnes pyramides supradictas, hoc est totum poliëdrum, æquari pyramidi X N. Ad eundem modum reliqua omnia poliëdra sphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ solidorum angulorum, alia atque alia nascentur in infinitum, semper æqualia erunt pyramidibus (per X N repræsentatis) quarum altitudines (M N) sunt radius sphæræ, bases vero (X) æquales superficiebus poliëdrorum sphæram ambientibus. Quare cum tandem, & poliëdra (vt dixi supra) in sphæram, & pyramides X N (vt mox ostendam) in conum Z O desinant, etiam c sphæra cono æqualis erit. Quod erat dem.

a Per lem. præc.

b Per 6. l.12.

c Per 1. huius.

Quod autem pyramides X N d desinant in conum sic ostendo. Poliëdrorum superficies

d Defin. 6. l.12.

X 4

ficies desinunt in sphæræ superficiem vt postulatum supra. Atqui bases X pyramidum X N, semper æquales ponuntur superficiebus poliëdrorum, & Z basis coni Z O per hyp. æqualis est superficiei sphæræ: ergo etiam bases, X, desinent in basim Z; ac proinde cum pyramides X N sint ad conum ex hyp. æquæaltum, vt c basis X ad basim Z, etiam pyramides in conum desinent. c Per corol. p. 11. l. 12.

Demonstratio iam allata huius propositionis & sequentis, penitus diuersa est ab eâ, quâ vsus est Archimedes; quæ quidem valdè subtilis & ingeniosa est, sed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifesta & propositiones vndecim, præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipsum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphæræ, altitudinem verò radium.

Scholium.

Ex hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimensio. Nā si diametri sexta pars, siue tertia semidiametri multiplicetur per sphæræ superficiem iam notam per scholium prop. 23, proueniet sphæræ soliditas.

Inuenta sit sphæræ terrestris superficies cōtinere quadrata vnius horæ milliara 23,760,000, & semidiameter esto milliarium horariorum 1375, cuius tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplica 458 omissâ fractione per 23,760, 000 prouenient 10, 882, 080, 000 cubica vnius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ.

Cum enim sphæra sit æqualis a cono, cuius altitudo est radius sphæræ; basis vero superficies sphæræ; coni autem soliditas b producatur ex parte tertiâ altitudinis, (hoc est radij sphæræ) ductâ in basim, (hoc est in sphæræ superficiem;) etiam sphæræ soliditas obtinebitur ex tertia parte radij ductâ in superficiem. a Per hanc 28. b Per schol. p. 6. huius.

PROPOSITIO XXIX.

Omnis sector sphæræ æqualis est cono, cuius altitudo est radius sphæræ, basis vero sectoris sphærica superficies.

Esto primum sector (A E C G) hemisphærio minor. Intelligatur sectori circumscriptum esse poliëdrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum instituatur, vt in præcedenti, eodem modo concludetur quæsitum. Id solum oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem poliëdri ex planis sphæricam superficiem E C G vndequaque tangentibus compositam, esse maiorem superficie E C G. Quod ita fiet. Cogitetur superficiei E C G apponi alia æqua- Fig. 23.

æqualis & similis, planis tangentibus eo-dem prorsus modo cincta, quo prior. Erit
c Per axio. 3. huius. iam tota c superficies ex planis composita, maior totâ sphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis composita dimidiâ sphæricâ E C G maior erit.

Esto deinde sector (A E B G) maior hemisphærio. Vterque sector simul sumptus
d Per prac. æqualis d est cono cuius altitudo est radius
e Patet ex 11. l. 12. sphæræ, basis autem tota superficies; hoc est e duobus conis, quorum altitudo eadem, bases vero pares superficiei sphæricæ segmentis E C G, E B G. Atqui sectorũ vnus A E C G hemisphærio minor, per 1. partem æquatur cono, cuius altitudo est radius, basis vero superficies E C G. Ergo alter A E B G æquatur cono reliquo, cuius altitudo est radius, basis verò superficies reliqua E B G. Quod erat dem.

Corollarium.

o Per 25. huius. CVm superficies E C G sit æqualis o circulo radij C G, & superficies E B G æqualis circulo radij B G, erunt sectores A E C G, & A E B G æquales conis, quorum altitudo est radius sphæræ, bases vero circuli radiorum C G, & B G.

Scho-

Scholium.

EX his habetur dimensio & sectorum, & segmentorum sphæræ; sectorum quidem, si multiplicetur p *tertia pars radij per sphæricam sectorum superficiem, iam notam ex scholio prop. 27. siue per circulum radij C G, vel B G: segmentorum verò, si mensuretur conus E A G, & à sectore, si minor est hemisphærio, auferatur; si maior, eidem adijciatur.* Fig. 23. p Patet ex schol p. 6. huius.

Segmentum (M Q R N) quod inter duos circulos siue parallelos siue non parallelos interijcitur mensurabis, si segmenta Q B R & M G N, iã nota auferãtur à totâ sphærâ, iã etiam notâ ex scholio prop. 28. Fig. 18.

PROPOSITIO XXX.

HEmisphærium (E O B D) coni (E B D) eandem secum basim & altitudinem habentis, duplum est. Fig. 24.

Conus cuius basis est superficies hemisphærica E O B D, altitudo autem radius A B, est ad conum E B D, a vt basis ad basim, hoc est vt superficies hemisphærica E O B D ad maximum circulum P T. Ergo cum superficies hemisphærica E O B D dupla b sit maximi circuli, etiam conus pro basi habens superficiem E O B D, pro altitudine radium A B, duplus est coni E B D. Atqui hemisphærium æquatur c cono habenti a Per 11. l. 12. b Per 24. huius. c Per 28. huius.

benti

benti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam E O B D. Ergo etiam hemisphærium coni E B D duplum est. Quod erat dem.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25. *Sphæra sit diuisa in duo segmenta I L B G, I S K G, plano I Q G T, per centrum A non transeunte: diameter autem plano secanti recta sit B O K.*

Vt altitudo O B segmenti I L B G est ad radium sphæræ A B, ita O K altitudo segmenti alterius fiat ad aliam K N.

Pari modo vt O K altitudo segmenti I S K G est ad radium A K seu A B, ita altitudo O B segmenti alterius fiat ad aliam B D.

Dico 1. Coni I N G & I D G quorum altitudines sunt O N, O D, basis vero communis I Q G T, segmentis sphæricis sunt æquales.

2. Segmentorum eadem est proportio, quæ rectarum D O, N O.

3. Segmentum I S K G est ad maximum sibi inscriptum conum I K G, vt N O ad K O, & segmentum I L B G est ad

ad sibi inscriptum conum maximum I B G, vt D O ad B O.

Pars 1. Sphæra & coni secentur plano per diametrum B K. Producentur in sphærâ circulus maximus B L K G, in conis verò triangula B I G, I K G. Et quia B O K diameter *a* recta est circulo Q T, erit angulus I O B *b* rectus. Angulus quoque B I K *c* in semicirculo rectus est. Quoniam igitur in triangulo B I K ab angulo recto ducta est I O perpendicularis in basim B K, erit B I ad I O, vt *d* B K ad K I. Ergo ratio duplicata B I ad I O æqualis est rationi duplicatæ B K ad K I; hoc est (quia B K, K I, K O, *f* sunt tres proportionales) æqualis rationis B K ad K O.

a Per hyp.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 31. l. 3.
d Per 8. l. 6.
f Per corol. 2. p. 8. l. 6.

Deinde quia est vt O K ad radium A B, ita *o* O B ad B D; erit quoque inuertendo D B ad B O, vt A B ad O K: & permut. D B ad B A, vt B O ad O K: & compon. D A ad B A, vt B K ad O K. Quoniam igitur iam ostendi rationem B K ad O K duplicitam esse rationis B I ad I O, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radijs B I, I O descriptorum, erit quoque D A ad B A vt circulus radij B I ad circulum radij I O. Igitur conus sub altitudine D A, & basi circulo radij I O, hoc est circulo Q T, æqualis est *g* cono sub altitudine B A, & basi

o Per hyp.
p Per 2. l. 12.
g Per 15. l. 12.

basi circulo radij B I; hoc est sectori sphærico A I B G. Quare si tam sectori A I B G, quam cono sub D A & circulo Q T, addatur idem conus I A G, tota erunt æqualia; videlicet segmentum Sphæricum I L B G æquabitur duobus conis, quorum vnus est, qui fit sub basi Q T & altitudine D A, alter I A G, sub eâdem basi Q T, & altitudine O A. Sed hi duo coni k conficiunt conum I D G. Ergo segmentum I L B G cono I D G æquale erit. Quod erat demonstr.

i Per corol. p. 29. huius.

k Patet ex 14. l. 12.

Eodem discursu erit segmentum I S K G æquale cono I N G, eo solum mutato, vt conus I A G qui priùs addebatur, iam auferatur.

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni I D G & I N G sunt inter se n vt D O, & N O. Ergo & segmenta I L B G, I S K G conis illis æqualia, sunt inter se, vt rectæ D O, N O.

n Per 14. l. 12.

Pars 3. Patet similiter ex primâ. Nam conus I D G est ad conum I B G, q vt D O ad B O. Ergo & segmentum I L B G, cono I D G æquale, est ad conum I B G, vt D O ad B O.

q Per eand.

Scho-

Scholium.

Ex prima parte huius theorematis, habetur alia, eaq; facillima segmentorum sphæricorum dimensio; si nimirum coni I D G, I N G mensurentur, quod fiet si s tertiæ partes rectarum D O, N O ducantur in circulum Q T.

s Vide schol. post 6. huius.

PROPOSITIO XXXII.

Cylindrus rectus (G K) sphæræ, cui circumscribitur, & soliditate & superficie totâ sesquialter est.

Fig. 24.

Communis sphæræ ac cylindri axis esto B Q, conus vero maximus hemisphærio E O B D inscriptus sit E B D. Quia cylindrus E K, (semissis totius G K) triplus a est coni E B D; hemisphærium vero b eiusdem coni duplum, patet cylindrum E K esse ad hemisphærium, vt 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus G K est ad totam sphæram Q E B D, vt 3 ad 2. Quod erat primum.

a Per 10. l. 12.

b Per 30. huius.

Deinde quia cylindri latus K N est æquale basis diametro G N, erit eius superficies absque basibus c quadrupla baseos M I, ac proinde cum basibus, hoc est tota cylindri superficies erit secupla baseos M I, quæ par est maximo sphæræ circulo. Atqui sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli.

c Per corol. p. 12. huius.

Ergo

Ergo tota cylindri G K superficies est ad sphæræ superficiem, vt 6 ad 4, siue vt 3 ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus sphæræ sibi inscriptæ & soliditate & totâ superficie sesquialter est. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

QVanti hoc theorema fecerit Archimedes argumento est, quod tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortaße inter alia tam multa & præclara inuenta sua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & superficierum corpora ipsa continentium eadem eßet atque vna rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumq; superficies demonstrauimus lib. 4. Cylindricorum & annularium prop. 13. 14. 15. sed & ipsâ in sphærâ aliud mihi huius rei exemplum illustre sese obtulit. Deprehendi siquidem, quemadmodum sphæra ad cylindrum rectum, se ambientem (qui neceßario æquilaterus erit) est tã soliditate quam superficie, vt 2 ad 3; ita sphæram ad æquilaterum conum se ambientem & soliditate similiter & superficie eam habere proportionem quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud consequitur, sesquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & sphæra repertã, in tribus solidis, sphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Vtriusque demonstrationem, pluraq; alia theoremata nostra, quibus sphæræ natura mirabilis amplius innotescet, tredecim sequentibus propositionibus comprehensa, subiungam.

PROPOSITIO XXXIII.

SVperficies sphæræ dupla est superficiei cylindri quadrati sphæræ inscripti. Fig. 26.

Quadratum maximo sphæræ circulo inscriptum, à quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, esto A K L, ducaturque A L, diameter quadrato & sphæræ communis. Quoniam quadratum A L par *a* est quadratis æqualibus A K, K L erit duplum vnius A K. Ergo etiam circulus diametri A L, duplus *b* est circuli, cuius diameter A K, circuli nempe C N. Atqui superficies sphæræ quadrupla *c* est circuli, cuius diameter A L, is enim est maximus sphæræ circulus, cum A L sit sphæræ diameter. Ergo sphæræ superficies octupla est circuli C N. Sed quia L K, K A, *d* æquales sunt, cylindrica superficies A C L quadrupla *e* est circuli C N. Ergo cum sphæræ superficies eiusdem circuli octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat dem.

a Per 47. l. 1.
b Patet ex 2. l. 12.
c Per 24. huius.
d Per hyp.
e Per corol. p. 12. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

SPhæræ superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3. Fig. 26.

Ponantur eadem, quæ demonst. præced. Quoniam cylindri latus L K & basis diameter A K f æquales sunt, erit superficies cylindrica C L g quadrupla basis C N, ac proinde tota cylindri superficies ad vtramque basim C N & S L est vt 6 ad 2. Atqui sphæræ superficies est ad vtramque simul basim C N, S L vt 8 ad 2. cùm in præced. ostensa sit esse ad vnam basim, vt 8 ad 1. Ergo sphæræ superficies est ad cylindricam C|L superficiem vt 8 ad 6, siue vt 4 ad 3. Quod erat demonst.

f Per hyp.
g Per corol. p.12. huius.

Corollarium.

TOta cylindri recti sphæræ circumscripti superficies, est ad totam superficiem cylindri æquilateri inscripti, vt 2 ad 1. Nam circumscripta est ad sphæricam vt 12 ad 8 per 32. huius. Sphærica autem est ad inscriptam, vt 8 ad 6 per hanc. Ergo ex æquo circumscripta est ad inscriptam, vt 12 ad 6, siue vt 2 ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 26. vel 25.

CViuscunque sectionis sphæricæ superficies (I L B G) ad superficiem coni maximi inscripti, eam rationem habet, quam coni latus (B G) ad basis radium (G O.)

Quoniam portionis I L B G superficies a æqualis est circulo radij B G, erit proportio eius ad circulum Q T, basim nempè suam & coni, duplicata b rationis B G ad G O; hoc est c rationis superficiei conicæ I B G ad basim eandem Q T. Ergo liquet o superficiem I L B G esse ad superficiem conicam I B G, vt eadem conica I B G est ad basim Q T. Quare cum conica I B G sit ad basim Q T, d vt B G ad G O, etiam portionis superficies erit ad conicam I B G sibi inscriptam vt B G ad G O. Quod erat dem.

a Per 25. huius.
b Per 2. l. 12.
c Per 14. huius.
o Per defin. 10. l. 5.
d Per 14. huius.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 24.

HEmisphærij superficies (E O B D) ad coni maximi siue recti inscripti superficiem (E B D) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem vero coni similis circumscripti, vt latus in quadrato ad diametrum.

1. Partis demonstratio ex præcedenti est manifesta; est enim portionis cuiuscunque, ac proinde & hemisphęrij superficies E O B D ad conicam inscriptam, vt B D ad

D A. Est autem B A D K quadratum, cuius diameter est B D, latus D A.

Fig. 6. lib. 4. tab. 3. 2. Pars. Semissis quadrati circulo (cuius centrum A) circumscripti, esto E B C, quâ circa axem A B circumactâ gignatur conus hemisphærio conscriptus. Quoniam quadratū E C duplum *a* est quadrati E B, seu G I, etiam circulus diametri E C duplus *b* est circuli cuius diameter G I, hoc est circuli K G D I. Atqui *c* superficies hemisphærij cono E B C inclusi eiusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri E C superficiei hemisphæricæ æqualis est. Quare cum superficies conica E B C sit ad *d* circulum diametri E C, basim nempè suam, vt latus B E ad basis radium E A, erit quoque ad superficiem hemisphæricam sibi inscriptam vt B E ad E A, hoc est vt diameter in quadrato E B C F, ad suum latus. Quod erat demonst.

a Patet ex 47. l. 1.
b Per 2. l. 12.
c Per 24. huius.
d Per 14. huius.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. eadem cum Fig. 13. l. 5. tab. 3.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum sibi circumscriptum, & soliditate & superficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum.

Maximo sphæræ circulo H G D I circumscriptum esto quadratum E B C F, à quo circa axem B F in orbem acto, rhombus conicus gignatur sphæram ambiens.

Vt E B quadrati latus (inspice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum E C, ita fiat S ad R (inspice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4 terminos S, R, Q, O, continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc est, E B ad E C; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q siue R ad S, hoc est E C ad E B, ac proinde *b* O est ad R, vt quadratum E C ad quadratum E B; vnde O est dupla ipsius R. His ita constitutis, intelligatur rhombo conico sphæra circūscribi E B C F. Erit igitur sphæra H G D I ad sphæram E B C F in *o* ratione triplicata diametri G I, (siue E B) ad diametrum E C, hoc est (quod iam ostendi) erit vt S ad O. Sphæra autem E B C F est ad rhombum conicum sibi inscriptum *c* vt 2 ad 1; hoc est (quod ostendi supra) vt O ad R. Igitur ex æquo sphæra H G D I est ad eundem rhombum, qui ei est circumscriptus vt S est ad R, hoc est vt in quadrato latus E B ad diametrum E C. Quod erat primum. Deinde ex secundâ parte præcedentis patet hemisphæræ superficiem esse ad superficiem coni E B C, ac proinde & totius sphæræ superficiem esse ad superficiem totius rhombi E B C F, vt latus in quadrato ad diametrum. Ergo sphæra tam soliditate quam superficie est ad rhombum quadratum E B C F, vt in quadrato

a Per defin. 10. l. 5.
b Per 20. l. 6.
o Per 18. l. 12.
c Per 30. huius.

 drato

drato latus ad diametrum. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27. *SVperficies portionis (B G K D) conum æquilaterum (B K D) capientis, dupla est superficiei eiusdem coni.*

Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis B G K D est ad inscriptam conicam, vt *a* B K ad B A, Sed quia conus B K D æquilaterus ponitur, K B est æqualis B D, adeoque dupla B A. Ergo etiam superficies B G K D dupla est inscriptæ conicæ B K D. Quod erat dem.

a Per 35. huius.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27. *SPhæræ superficies ad totam coni æquilateri sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 16 ad 9.*

Esto, Z, sphæræ centrum & conus æquilaterus sphæræ inscriptus B K D, axis sphæræ ac cono communis K Z A O. Per hunc si secetur sphæra ac conus, producetur in sphæra circulus maximus O B K D, in cono autem triangulum æquilaterum B K D, cuius vnum latus B A D, erit diameter baseos conicæ Q T. Et quia axis coni K A rectus est

est basi Q T, erit angulus B A K *d* rectus. Igitur quadratum B A æquale est *e* rectangulo K A O. Iam quia latus æquilateri trianguli abscindit *f* quartam axis partem A O, erit rectangulum K A O, hoc est quadratum B A, triplum quadrati *i* A O. Quare cum quadratum radij Z O *k* quadruplum sit quadrati A O, erit quadratum radij Z O ad quadratum radij B A, vt 4 ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B K D est ad circulum Q T vt 4 ad 3. Ergo sunt quatuor circuli O B K D, hoc est *n* tota sphæræ D G superficies, ad circulum Q T, vt 16 ad 3. Atqui *o* superficies coni æquilateri B K D est ad circulum Q T, basim nempè suam, vt 2 ad 1, ac proinde coni B K D tota superficies, vnâ cum basi scilicet, est ad basim, nempè circulum Q T, vt 3 ad 1, siue vt 9 ad 3. Ergo cum ostenderim sphæræ superficiem esse ad eundem circulum vt 16 ad 3; erit sphæræ D G superficies ad totam æquilateri coni superficiem, vt 16 ad 9. Quod erat dem.

d Per defin. 3. l. 11.
e Per corol. p. 17. l. 6.
f Per corol. 5. p. 15. l. 4.
i Per 1. l. 6.
k Per 4. l. 2. vel 20. l. 6.
m Per 2. l. 12.
n Per 24. huius.
o Per corol. 1. p. 14 huius.

Aliter.

QVoniam æquilateri trianguli latus B D, abscindit *p* quartam axis partem A O, erit quoque sphærica superficies B O D *q* quarta pars, ac proinde superficies B G K D, tres quartæ superficiei totius sphæræ

p Per corol. 5. p. 15. l. 4.
q Per 27. huius.

sphæræ. Quare si superficies tota statuatur esse 16, B G K D superficies erit 12. Atqui superficies B G K D r est dupla superficiei conicæ B K D, ac proinde ad eam est vt 12 ad 6. Ergo tota sphæræ superficies est ad conicam B K D vt 16 ad 6. Deinde quia superficies coni B K D, (vtpote æquilateri) dupla s est baseos Q T, liquet superficiem conicam B K D (nimirum absque basi) esse ad totam coni superficiem, vt 2 ad 3, hoc est vt 6 ad 9. Igitur ex æquo tota sphæræ superficies est ad totam æquilateri coni inscripti superficiem, vt 16 ad 9. Quod erat demonstr.

[r Per præc.] [s Per corol. 1 p. 14. huius.]

PROPOSITIO XL.

[Fig. 28.]

Sphæræ superficies ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.

Circulo sphæræ maximo B P M circumscriptum sit triangulum æquilaterũ D O F, à quo circa axem O A B in orbem ducto productus sit conus æquilaterus sphæræ circumscriptus. Æquilatero autem triangulo D O F circumscriptus etiam sit circulus, N D L O F, quem patet esse concentricum priori; & axis O A B producatur in N. Quoniam B N est a quarta pars axis O N, patet O N esse duplam K B. Quare cum circu-

[a Per corol. 5. p. 15. l. 4.]

circulorum ratio sit b duplicata rationis diametrorum, erit circulus B P M, ad circulum N D L O F vt 1 ad 4. Atqui ostensum iam est in demonstratione prima præcedenti, circulum N D L O F esse ad circulum Q T, basim coni æquilateri sphæræ F L inscripti, vt 4 ad 3. Ex c æquo igitur circulus B P M est ad circulum Q T vt 1 ad 3. Atqui tota coni D O F superficies circuli Q T d tripla est. Ergo tota coni superficies circuli B P M noncupla est. Quare cum sphæræ T P superficies eiusdem circuli B P M e quadrupla sit, erit tota coni æquilateri D O F superficies ad superficiem sphæræ, cui circumscripta est, vt 9 ad 4. Quod erat demonstr.

[b Per 2. l. 12.] [c Per 22. l. 5.] [d Per corol. 1 p. 14. huius.] [e Per 24. huius.]

PROPOSITIO XLI.

[Fig. 28.]

Æquilateri coni sphæræ circumscripti tota superficies quadrupla est superficiei totius coni inscripti eidem sphæræ.

Æquilateri coni D O F circumscripti tota superficies est ad sphæræ superficiem vt a 9 ad 4: & sphærę superficies est ad coni inscripti æquilateri S K T superficiem vt b 16 ad 9. Ergo ex c æqualitate perturbatâ circumscripti æquilateri coni tota superfi-
cies

[a Per præc.] [b per 39. huius.] [c Per 23. l. 5.]

cies est ad totam superficiem æquilateri inscripti, vt 16 ad 4, siue vt 4 ad 1. Quod erat demonst.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 29. *SPhæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum (B K C) eam rationem habet quam 32 ad 9.*

Sphæra & conus B K C secentur plano per axem communẽ K O, faciente in sphærâ circulum maximum O F K I, in cono autem triangulum æquilaterum B K C. Ducto deinde plano per centrum A ad O K recto, abscindatur hemisphærium F G K I, cui inscriptus intelligatur conus maximus F K I. Quoniam trianguli æquilateri latus B C abscindit O P [d] quartam partem axis O K, erit P K ad A K vt 3 ad 2, hoc est vt 9 ad 6. Basis verò Q T est ad circulum O F K I, hoc est ad basim N D, vt 3 ad 4, hoc est vt 6 ad 8, vti patet ex demonstratis prop. 39. Quare cum ratio coni B K C ad conum F K I componatur [e] ex ratione altitudinis P K ad altitudinem A K (hoc est ex ratione 9 ad 6,) & ex ratione basis Q T. ad basim N D (hoc est ex ratione 6 ad 8;) erit conus B K C ad conum F K I vt 9 ad 8. Quare cum sphæra C G quadrupla [f] sit coni F K I, erit conus æquilaterus B K C ad sphæram

d Per corol. 5. p. 15. l. 4.

e Per schol. p. 15. l. 12.

f Per 30. huius.

sphæram C G, vt 9 ad 32. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

COnus æquilaterus sphæræ circumscriptus coni æquilateri eidem sphæræ inscripti octuplus est.

Coni æquilateri sphæræ inscripti, & circumscripti sint S K T & D O F & axis cõmunis esto O K B. Secẽtur deinde plano per axem tã conus vterque, quã sphęra; eruntq; sectiones triangula duo æquilatera, & circulus B P M maximus. Circa triangulum quoque D O F intelligatur descriptus esse circulus N D O F, & axis O K B producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus D F abscindit axis O N quartam [a] partem N B, patet N O, esse duplam B K. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus S T abscindit axeos B K [b] quartam partem B C, erit N O ad B O, vt B K ad C K: & permutando vt N O ad B K sic B O ad C K. sed N O dupla est B K. Ergo etiam B O dupla est C K. Igitur ob similitudinem triangulorũ D O F, S K T etiam [c] D F & S T diametri videlicet basium conicarum, sunt inter se in proportione dupla. Quare cum coni D O F, S K T, sint similes,

Fig. 28.

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.

b Per idem corol.

c Per 4. l. 6.

d Per 12. l. 12. miles, ac proinde eorum proportio d triplicata sit proportionis diametrorum D F & S T, quæ est 2 ad 1; erit conus D O F ad conum S K T, vt 8 ad 1. Quod erat dem.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 28. *Sphæra ad circumscriptum sibi conum æquilaterum (D O F) & soliditate & superficie, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

d Per 42. huius. Sphæra T P est ad inscriptum d sibi conum æquilaterum S K T, vt 32 ad 9. Inscriptus autem S K T conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum f Per præc. D O F vt f 1 ad 8, hoc est vt 9 ad 72. Igitur ex æquo sphæra T P est ad conum æquilaterum circumscriptum D O F; vt 32 ad 72; hoc est vt 4 ad 9. Propositione autem 40. demonstrauimus etiam sphæræ superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem vt 4 ad 9. Ergo sphæra & soliditate & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum vt 4 ad 9. Quod erat dem.

Quod igitur in sphæra & cylindro sphæram ambiente miratus est Archimedes, idipsum in sphæra & æquilatero cono ambiente sphæram, iam demonstrauimus, vt videlicet & soliditatum inter se eadem proportio rationalis, quæ superficierum, existat. Quemadmodum enim ille reperit sphæram ad cylindrum esse tam soliditate quam superficie, vt 2 ad 3; ita nos docuimus sphæram & soliditate & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, vt 4 ad 9.

Hinc vero illam ipsam proportionem, nempè sesquialteram, quam existere sphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumscripto & soliditate etiam ac superficie continuari nullo negotio iam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, & cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, & ipsa sphæra, eandem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem, quàm quoad superficiem totã. Vide Fig. quæ huic tractatui præfixa est.

Nam per 32 huius cylindrus rectus G K sphæram ambiens tam soliditate quam totâ superficie est ad sphæram vt 3 ad 2 siue vt 6 ad 4. Per præcedentem verò circumscriptus sphæræ conus æquilaterus B A D, tam soliditate, quàm superficie est ad sphæram vt 9 ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate quam superficie, vt 9 ad ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe vt hi numeri 9, 6, 4, ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

Ad maiorem Dei Gloriam.

APPENDIX

Qua demonſtratur ex falſo poſſe directè deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Louanij ſeſqui abhinc anno Illuſtriſſ. D. Theodorus D'Imerſelle, Comes de Bouchoue & S. Imperij, magnâ ingenij commendatione & auditorum plauſu publicè propugnauit, inter cæteras propoſui aſſertionem huiuſmodi: *ex falſis poſſe verum directè elici nouis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in appendice, quam operi ſuo pereruditо, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſâ adiunxit. Id verò eâ modeſtiâ & humanitate præſtitit, vt facilè appareat, hoc illi vnum fuiſſe propoſitum, vt veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri iudicium parui facere, hic illi breuiter reſpondebo, & appendici appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio quæ directè ex ſua contradictoria

tradictoria

tradictoria inferatur. Talis in prop.12.l.9. Eucl. est hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonstratione affirmatiua infertur ex suâ contradictoriâ: *E non metitur numerum A*. Quod quidem est æquè certum, ac demonstrationem illam esse legitimam? Talis in Elementis hisce nostris prop.4.l.11. est hæc: b *Recta BQ non est perpendicularis plano CAF*, quæ affirmatiuè deducitur ex sua contradictoriâ: c *recta BQ est perpendicularis plano CAF*. Talis in propositione nostra 35. l.5, est hæc: *A est ad B, vt E ad Z*, quæ directè infertur ex sua contradictoria: *A non est ad B, vt E ad Z*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum l.5. de proport. p.201, apud Theodosium (commentante Clauio) l.1. sph. p.12. & nos plures similes possumus exhibere tum Geometricas tum alias.

b Fig.12. l.11. tab.5.
c Fig.20. l.5. tab.3.

Ecce tibi cosmographicam vnam, quam in ijsdem thesibus disputandam proposui. *Maris, omnisq; adeò humidi superficies eo ipso concluditur esse sphærica, quòd id negas.* Ponatur vera esse eius contradictoria: *Maris superficies sphærica non est.* Quoniam igitur maris superficies sphærica non est; ergo omnes superficiei maritimæ partes non distant æqualiter à centro. Ergo vna est altior altera, (altiorem enim esse non aliud est, quam longiùs à centro recedere.) Ergo eæ quæ altiores sunt, defluunt versus minùs altas seu decli-

uiores

uiores, hanc enim esse humidi naturam experientiâ constat. Ex tali autem defluxu necessariò oritur omnium partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, seu distantia à centro. Æqualis verò omnium partium superficiei maritimæ à centro distantia infert sphæricitatem eius perfectam. *Ergo maris superficies sphærica est.*

Habemus igitur hanc: *Maris superficies sphærica est*, directè & affirmatiuè deductam ex suâ contradictoriâ, *maris superficies sphærica non est.*

Maneat igitur extra omnem controuersiam esse, dari assertiones, quæ directè ex suis contradictorijs inferantur. Atqui assertio, quæ ex sua contradictoria directè infertur, necessariò vera est, (cum sit axioma per se clarissimum, id necessariò verum esse quod suum contradictorium destruit; destruit autem suum contradictorium, quod ex suo contradictorio directè sequitur.) Ergo & assertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta est assertio, falsa est. Ergo ex falso directè & affirmatiuè deductum est verum. Demonstrata igitur est conclusio in thesibus proposita.

Quòd veeo eiusmodi demonstratio, quâ assertio ex suâ contradictoriâ falsâ directè infertur, verè scientiam pariat, sic vt absque vlteriori vllâ deductione ad impossibile, de aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex iam dictis manifeſtum eſt, cum lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictorio ſequelâ legitimâ & neceſſariâ infertur. Quod ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductę ſecuri eſſe poſſumus, cum in ea ratio iam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, vt ex eo falſa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, vt ſingulis Clariſſimi Viri obiectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex iam dictis ſoluta intelliguntur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breuiter attingere.

Primum ſupponit ex Dialectica quædam de conſequentiâ directâ; & dicto (vt vocant) de omni & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subiungit deinde: *hanc ſententiam meam ſtabilio euerſione omnium illorum, quæ in contrarium afferri poſſe videntur.*

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur conſtituit huiuſmodi ſyllogiſmus: omnis leo eſt lapis. Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo* &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ègo non vtor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, vt oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus obiectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantùm ſint & falſæ; tamen iuxta eas calculum eclipſibus, & alijs obſeruationibus cæleſtibus conuenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet* &c. contenditque rurſum hic non elici ex falſo verum. Quo quidem in vtroque, cum illi ego planè aſſentiar, neque vllum inde pro aſſertione meâ argumentum petam, non me magis illa tangunt, quam primum.

Vltimas denique obiectiones (inquit) *nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. elem. p.12. Cardano l.5. de proport. p.201, & Theodoſio l.1. ſph. p.12 adhibiti.* quò me digitum intendiſſe putat, & verè. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis, euidenter iam demonſtraui ſupra, ex falſo elici directè verum; neque affertur quidquam à Clariſſimo Viro, quod de-

demonſtrationem noſtram infirmet. Veris Clauij ad p.12. lib.9. recitatis, ſubiungit ex eodem Clauio demonſtrationem p.12.lib.1. ſph.Theodoſij : Tum (inquit) *vt verum fatear, neſcio ſanè quid Clauio in mentem venerit, vti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putauerint, qui tamen Logicis valdè familiaris eſt & duobus principiis omnium euidentiſſimis & naturâ notiſſimis nititur, hiſce nempè : quod idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe ; item, quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clauio, Cardano,& cum iſtis alijſque etiam mihi, in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in prõptu eſt; hoc nimirum quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directè ex ſuâ contradictoriâ; (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentijs legitimis ac neceſſarijs deducatur. Quod quidem quotieſcunque euenit, admiratione dignum eſt. Tantùm verò abeſt, vt hæc ratio demonſtrandi Logicis valdè familiaris ſit, vt etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Vt deinde oſtendat vir Clariſſ. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ ſed formâ planè diuerſâ à Clauianâ illâ, quam priùs recitauerat, in quâ vis argumentationis inter nos controuerſæ clariſſimè cernitur. Subiungit denique : *neque ego tam lynceus ſum vt exinde*

inde

inde videre queam, quo pacto ex falſo verum directè ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ, (vult, credo dicere, *ponatur*, cum demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) *neceſſariò ſit admittenda contradictoria eius affirmatiua, quod G ſit centrum ſphæræ.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, quâ, opinor, fiet, vt V.C. tametſi, quod eſt maximè, lynceus non eſſet, clarè perſpiciat elici directè ex falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante euinceret Clauiana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſolutâ & formali G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictoriò directè ſequitur. Habemus igitur quod ex hac : (G non eſt centrum) directè deducta ſit hæc vera; (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cum iam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breuiter hic putaui apponenda.

da. Cæterùm nihil dubito quin Clariſſimus Lipſtorpius eâdem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, quâ dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

FINIS.

Errata ſic corrige.

Pag 7. v. 23. lege. 180. P. 17. v. 20. dele: *quoniam anguli B & C æquantur angulis F & I.* P. 35. v. 6. à fine. *in A* l. *aliò,* & dele cætera. P. 38 v. 1. & 2. l. *tam, O, A, quàm N, C.* P. 72. v. 10. *B C F.* l. *B Q F.* P. 92. v. 5. à fine. l. *minor* P. 95. l. *b. per* 32. P. 106. corol. appone: *fig. 52.* P. 109. v. 5. à fine. l. *dato I L K.* P. 132 *fig. 1 l. 3.* l *fig. 1. l. 5.* P. 148. ad mar *fig. 22. l. 5.* l. *per* 22. *l. 5.* P. 160. v. 3. ante *quod,* hæc inſere: *non autem tales (quod facilè ex. 1. lem. oſtend.) vt multiplâ O excedente multiplam Q, multipla R non excedat multiplam S.* P. 175. v. vlt. l. *a per. n. 3.* P. 210. l. *d per corol 9.* P. 212. v. 5. l. *patet ex def: 1. l. 6. & ax. 1. l. 1.* P. 219. v. vlt. *I G L.* l. *I O L.* P. 262. *e. per eand.* l. *e. per 24. L. 5.* P. 269. v. pen. l. *B F, Q R.* P. 274. l. *o. per corol p. 13.* P. 286. v. 3. à fine. *baſis* l. *altitudo.* P. 294. v. 3. *milliarium* l. *millionum.* P. 297. l. *c per 18. l. 3.* bid. l. *d. collig. ex def. 4. l. 11.* P. 313. v. 15. *G A* l. *G H.* P. 331. v. 11. 12 l. *ſi ſegmenta Q B R, M B N, iam nota auferantur ab inuicem.* & dele ſequentia. P. 338. v. 3. à fine. ſectionis. l. *portionis.* P. 340. v. 10. l. *H G D I*

Auctore abſente grauiores ex his (qui in auctographum incuriâ deſcribentis irrepſerant,) errores præcaueri non potuerunt.

AD COMPACTOREM.

Sex tabulæ figurarum affigentur hoc ordine

Tabula 1. ante pag. 1. Tab. 2. ante pag. 49.
Tab. 3. ante pag. 103. Tab. 4. ante pag. 181.
Tab. 5. ante pag. 221. Tab. 6. ante pag. 269.

Affigentur autem sic, vt cum explicatæ fuerint, manente intra librum folio albo, figuræ tota extra librum in conspectum veniant, complicatæ autem intra libri margines precisè recipiantur. Expediet verò ita complicari, vt figuræ, etiam dum complicatæ fuerint, aspectui pateant.

AV RELIEVR.

Les six planches des figures y seront inserées à l'ordre qui suit

La 1. planche deuant la 1. page. 2. planche deuant 49. p.
3. planche deuant 103 p. 4. planche deuant 181. p.
5. planche deuant 221. p. 6. planche deuant 269. p.

Or il faut les attacher en sorte, que la plance estant ouuerte, toute la figure passe precisément la tranche du liure, & qu'ainsi elle paroisse entierement, bien qu'on referme le liure: il faut pourtant qu'estant pliée elle s'aiuste auec le reste des fueilles. Il sera aussi à propos, de les plier en sorte, que les figures se voyent, & que le dos en soit caché.

TOT DEN BINDER.

De ses plaeten salmen op haer plaetse binden als volcht

De 1. plaete voor pag. 1. 2. plaete voor pag. 49.
3 plaete voor pag. 103. 4 plaete voor pag. 181.
5 plaete voor pag. 221. 6. plaete voor pag. 269.

Men sal de plaeten alsoo binden, dat het blat opengheuauden sijnde, de vvitte sijde blijve binnen den boeck, ende d'andere met de figuren sy gheheel daer buyten. Is oock gheraeden het blat alsoo toe te vauvven, dat de figuren, oock toeghevaut sijnde, konnen ghesien vvorden.

15 р.

106

50

106