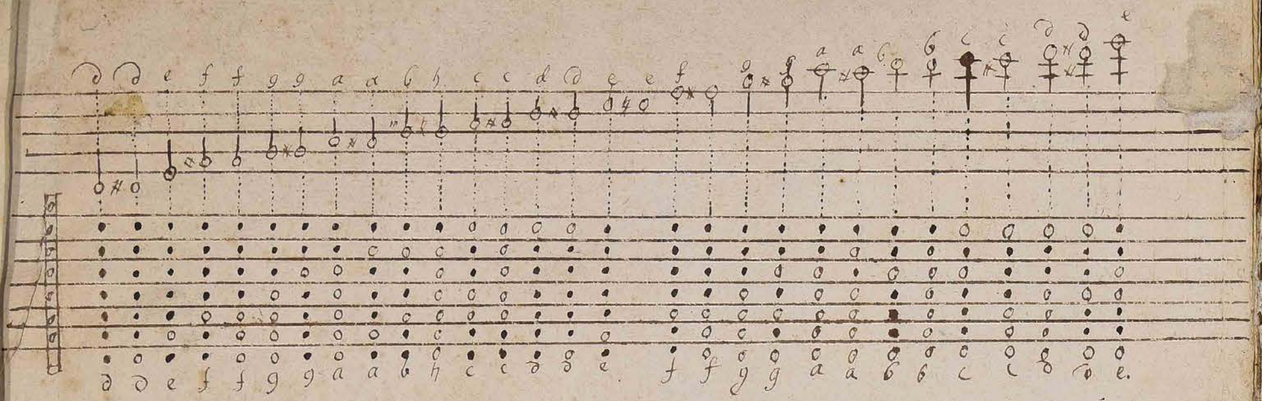
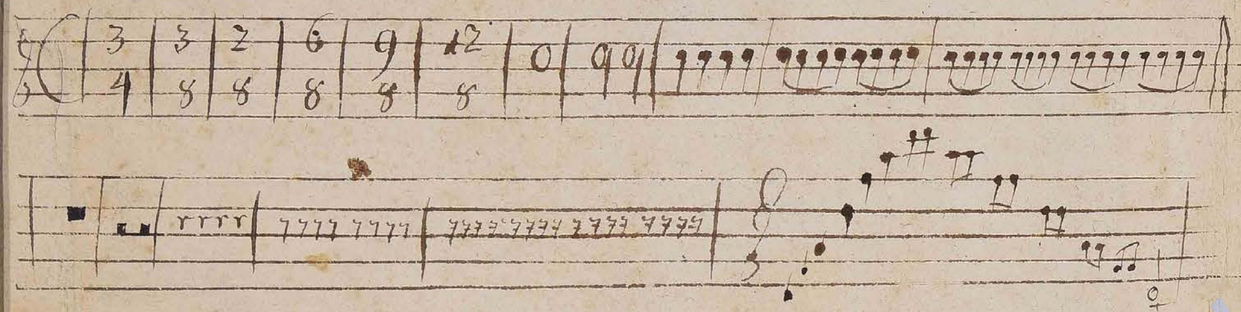
НБ ОНУ імені І.І.Мечникова
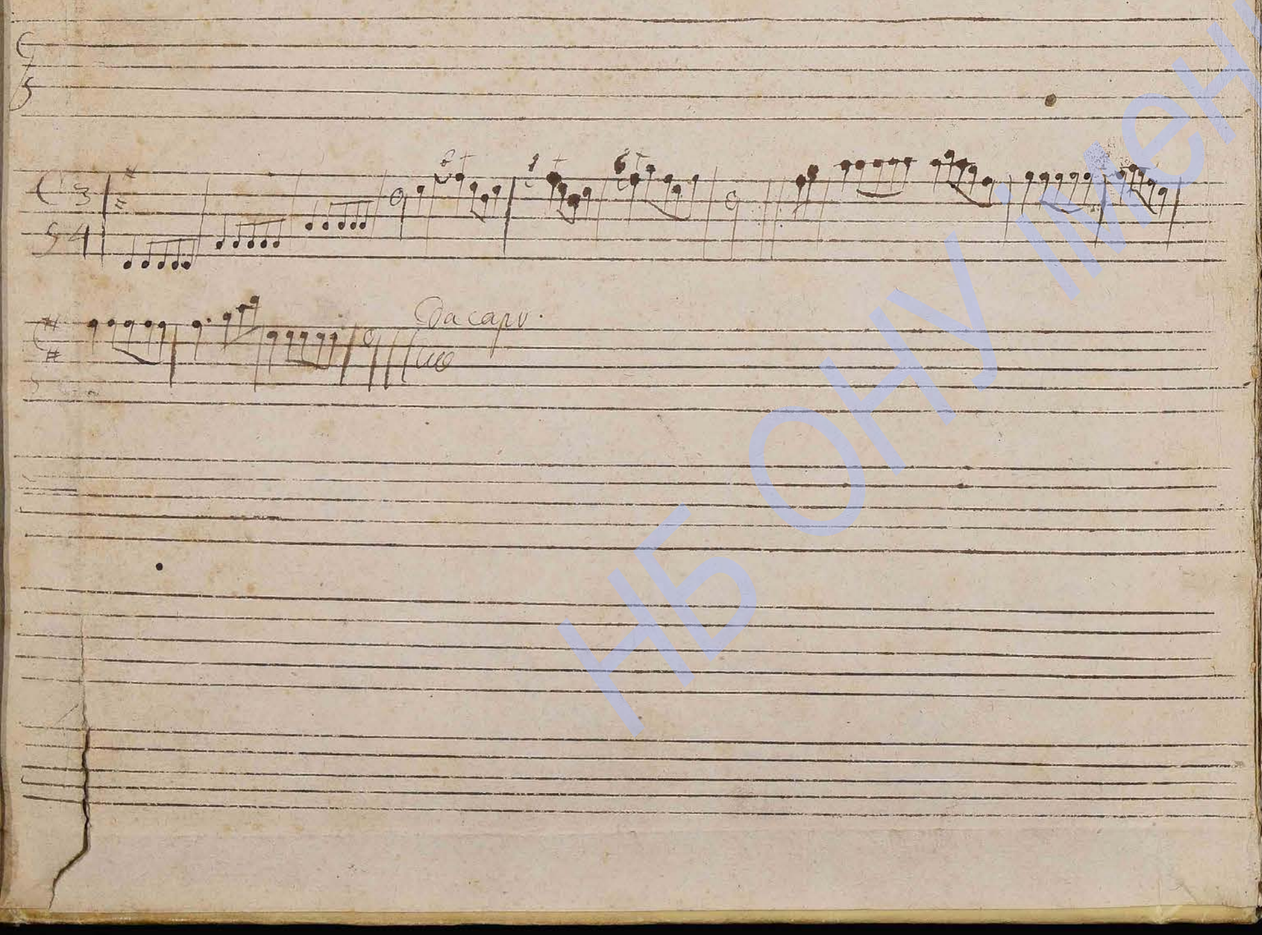
15 23478

Algebra Speciosa. i fl.

Berlin N.W.
11. Carlstrasse 11.








НБ ОНУ імені І.І.Мечникова

Ex libris Wolfardi Sengstackii.
Mb.c. 1.° .a3

777°
103

# MARINI GHETALDI

## PATRITII RAGVSINI

## MATHEMATICI PRAESTANTISSIMI.

## DE

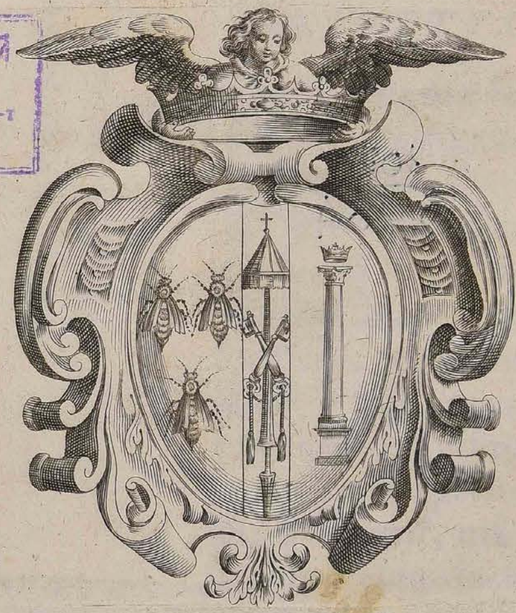
# RESOLVTIONE,

## & Compositione Mathematica

## LIBRI QVINQVE.

Opus Posthumum.

19/3
UA6N 2405
1957h



МАТЕМАТИЧНИЙ
КАБІНЕТ
Ор. Фіз. Хем. Мат. Ін-т
Інв. № 777

ROMAE,
Ex Typographia Reuerendæ Cameræ Apostolicæ.
M. DC. XXX.

1630

*Superiorum Permissu, & Priuilegio.*

НБ ОНУ імені І.І. Мечникова

MARINI
GHETALDI
PATRITII RAGVSINI
MATHEMATICI PRAESTANTISSIMI
DE
RESOLVTIONE
& Compositione Mathematica
LIBRI QVINQVE.
Opus Posthumum.
ROMAE.
Ex Typographia Reuerendæ Cameræ Apostolicæ.
M. DC. XX.
Superiorum permissu, & Priuilegio.

НЛ-27215
Наукова бібліотека
Одеського університету
ім. І. І. Мечникова

# ILLVSTRISSIMO
atque Excellentiſs. Principi
# THADAEO
# BARBERINO,
GENERALI REI MILITARIS
in Pontificia ditione Moderatori.

*ANDREAS BROGIOTTVS F.*

INTER admirabilia tuæ felicitatis ornamenta & decora dignitatis, Excellentiſsime Princeps, id etiam habes, vt Mathematicas diſciplinas, quæ copiarum idoneum imperatorem, egregiumq; militiæ ducem cumulatè perficiunt, impenſe, ac ſummopere calleas. Ea gratia ſcilicet aliquid in hoc genere mihi dari peroptabam operis, cuius euulgatione aditum mihi ad meum in te patefaciendum animum aperirem. Numquam adeo meæ ſatisfeciſſem voluntati, niſi qui ceteris veſtri nominis gentiſq; luminibus eum quem potui cultum atque obſeruantiam præſtiti, quiddam etiam inueniſsem quod tuæ gloriæ dedicarem. Votis aliquando meis adfuit Marinus Ghetaldus inſignis huius memoriæ

Mathe-

Mathematicus; cuius opera præclara ne cum ipso cecidisse videantur Authore, iussis cauet suis & typis meis Eminentissimus Cardinalis Barberinus frater tuus: qui magnorum monumenta virorum iacere in tenebris, occulique sepulcro non patitur. Facit ipse pro sua in doctos homines pietate, vt eos ab interitu vindicet qui laboribus ac vigilijs plurimis aduersus mortalitatem vincentem, & conterentem omnia se communire non dubitarunt: facit pro sua in me beneuolentia, vt opera potissimum mea eorumdem doctorum hominum immortalitati consultum velit. Erit nunc tuæ benignitatis, humanissime Princeps, excipere à me perlibenter hoc munus, quod ex animi mei sententia, ac simpliciter offero, ratus, tibi displicere non posse officium meum quod ceteris iam Barberinæ familiæ Principibus est probatum. Vale.



# INDEX PROPOSITIONVM, ET PROBLEMATVM LIBRI I.


PRoposítio Prima. Si recta linea secetur vtcumque; rectangulum sub tota, & differẽtia partium cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare. pag. 2

Theorema I. Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium, æquale est differentiæ quadratorum partium. ibid.

Idem Theor. posset quoq; ita enũciari.

Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium vnà cum quadrato partis minoris, æquale est quadrato partis maioris. 3

Propos. II. Si recta linea secetur vtcumq; quadratum differentiæ partium, quibus planis ad ipsas partes relatis æquale sit inuestigare. ibid.

Theor. II. Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium, æquale est quadratis partium minus duplo sub partibus rectangulo. 4

Idem Theor. potest quoq; ita proponi.

Si recta linea secetur vtcumque, quadrata partium simul æqualia sunt quadrato differentiæ partium, vnà cum duplo sub partibus rectangulo. ibid.

Propos. III. Si recta linea secetur vtcũque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium, cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare. ibid.

Theor. III. Si recta linea secetur vtcũque, quadratũ totius minus quadrato differentiæ partiũ æquale est quadruplo sub partibus rectangulo. 5

Idem Theor. potuit quoq; ita enũciari.

Si recta linea secetur vtcũque, quadruplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale est totius lineæ quadrato. ibid.

Propos. IV. Si recta linea secetur vtcũque, quadratũ totius vnà cũ quadrato differentiæ partium, quibus planis ad ipsas partes relatis, æquale sit inuenire. ibid.

Theor. IV. Si recta linea secetur vtcũque, quadratũ totius vnà cum quadrato differentię partium, dupla sunt quadratorum partium. 6

Propos. V. In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulũ obtusum subtendentis, quanto maius sit quadratis reliquorum laterum inuenire. ibid.

Theor. V. In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulũ obtusum subtendentis, maius est, quàm quadrata reliquorum laterũ, rectangulo comprehẽso bis ab vno reliquorum laterum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & à linea, quæ inter perpendicularẽ, & angulum obtusum interijcitur. 7

Propos. VI. In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum acutum subtendẽtis, quanto minus sit quadratis reliquorum laterum inuenire. ibid.

Theor. VI. In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum rectum subtendẽtis, minus est, quàm quadrata reliquorũ laterum, rectangulo cõprehenso bis, ab vno reliquorũ laterum, in quod perpẽdicularis cadit, & à portione ipsius lateris, quæ inter perpendicularem, & angulum acutum interijcitur. 8

Propos. VII. Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, quadratum maioris portionis assumentis dimidium totius, quanto maius sit quadrato dimidiæ totius inuestigare. ibid.

Theor. VII. Si recta linea extrema, ac media rõne secetur, quadratũ maioris portionis assumentis dimidiã totius, quintuplum est quadrati dimidiæ totius. 9

Propos. VIII. Si recta linea partis ipsius quintuplũ possit, dupla dictæ partis, extrema, ac media ratione secta, quæritur an maior portio sectæ sit reliqua pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. ibid.

Theor. VIII. Si recta linea partis ipsius quintuplum possit. Dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio, reliqua pars est eius quæ à principio rectæ lineæ. 10

Propos. IX. Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, quadratũ minoris portionis assumentis dimidiam maioris portionis. quanto maius sit quadrato dimidiæ maioris portionis, inuestigare. 11

Theor. IX. Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, portio minor assumens dimidiam maioris portionis, quintuplũ

poteſt eius,quod à dimidia maioris portionis deſcribitur quadrati. ibid.
Propoſ. X. Si recta linea ſecetur extrema, ac media rõne:quadrata totius,& portionis minoris ſimul,quãto ſint maiora quadrato portionis maioris,inueſtigare.ibid.
Theor. X. Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione;quadrata totius,& portionis minoris ſimul,tripla ſunt quadrati portionis maioris. 12
Propoſ.XI. Si recta linea extrema,ac mediç ratione ſecetur, adijciaturq. ipſi æqualis maiori portioni. Quæritur an tota linea ſit extrema, ac media rõne ſecta, ita vt maior portio ſit in ea, quæ à principio poſita eſt recta linea. ibid.
Theor.XI. Si recta linea extrema,ac media ratione ſecetur, adijciaturq. ipſi æqualis maiori portioni,erit tota linea extrema, ac media,rõne,ſecta,& maior portio erit ea,quæ à princip.poſita eſt recta linea.13
Problema primum. Datam rectam lineam ſecare, ita vt maior pars minorem dato exceſſu ſuperet. Oportet autẽ datum exceſſum minorem eſſe data ſecanda. ibid.
Poriſma. Recta data minus exceſſu dato, æqualis eſt duplo partis minoris. ibid.
Poriſma. Recta data plus exceſſu dato æqualis eſt,duplo partis maioris. 14
Probl.II. Datæ rectæ lineæ,alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, datam teneat rationem. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus. ibid.
Poriſma. Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita eſt data ad adiunctam. 15
Probl. III. Datæ rectæ lineæ,alterã rectam adiungere, vt differentiæ datæ,& adiunctæ ad aggregatum earundẽ rationem, habeat datam. Oportet autem datam rationem eſſe minoris ad maius. 16
Hoc Problema duos caſus habet; aut enim data ſuperabit adiunctã,aut adiuncta data. primũ data ſuperat adiũctam. ibid.
Poriſma. Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita eſt data ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur. 17
Poriſma. Vt aggregatum terminornm rationis datæ,ad terminum ſecundũ,ita eſt data dupla ad compoſitam ex data, & adiuncta. 19
Poriſma. Vt differentia terminorũ rationis datæ,ad aggregatum eorundẽ, ita eſt data, ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur. 20
Poriſma. Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum priorem,ita eſt data dupla ad exceſſum, quo adiuncta ſuperat datam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur. 21
Probl.IV. Datam rectã lineam in duas partes diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant.Oportet autem latus quadrati dati minus eſſe data ſecãda. 22
Poriſma. Latus quadrati dati medium proportionale eſt inter datam rectã,quæ ſecanda proponitur,& differentiam partium eiuſdem. Datur ergo differentia partium quæſita. 23
Probl.V. Datã rectam lineam ſecare,vt rectangulũ ſub partib. ad quadratũ vnius partium rationem habeat datam. ibid.
Poriſma. Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundũ, ita eſt dato recta ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus. Datur ergo pars quæſita. 24
Poriſma. Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundum,ita eſt recta data, ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus. Illud ipſum eſt,quod per antecedentẽ reſolutionẽ inueniebatur. Datur ergo pars quæſita. 25
Probl. VI. Datam rectam lineam ſecare,vt rectangulum ſub tota, & parte minore æquale ſit rectangulo ſub differentia partium,& parte maiore. ibid.
Poriſma. Quadratũ totius rectæ ſecãdæ duplum eſt quadrati à maiore parte deſcripti. Datur ergo maior pars quæſita. 26
Probl. VII. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus cõprehenſum æquale ſit ei,quod à differentia partium fit quadrato. ibid.
Poriſma. Quadratũ totius ſecandæ quintuplũ eſt quadrati differentiæ partiũ. Datur ergo differentia partiũ quæſita. ibid.
Theor. Si recta linea ſecetur,ita vt rectangulum ſub partibus cõprehenſum æquale ſit ei,quod à differentia partiũ fit quadrato, quadratũ totius rectæ quintuplũ erit quadrati differentiæ partium. 27





## LIBRI SECVNDI.

Theor. I. Si ſecentur duæ rectæ lineæ æquales, ita vt rectangulum ſub partibus vnius æquale ſit rectangulo ſub partibus alterius; partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior videlicet maiori, minor minori. 30
Theor. II. Si duæ rectæ lineæ æquales ſectæ fuerint, atq; quadrata partiũ vnius ſimul ſumpta,æqualia fuerint quadratis partium alterius ſimul ſumptis, partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior maiori, minor minori. 31
Theor. III. Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes æquales,& rectangulũ ſub tota, & parte reliqua vnius æquale ſit rectangulo ſub tota, & reliqua parte alterius; tota toti, & reliqua pars, reliquæ æqualis erit. 31
Theor.IV. Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes æquales, & reliqua pars primæ ad reliquam ſecundæ, vt tota ſecunda ad totam primam; reliquæ quoque partes æquales erunt. 32
Theor.V. Si duo rectangula fuerint æqualia;fuerint autẽ & quadrata laterum primi æqualia quadratis lateris ſecũdi. Latera primi laterib. ſecundi æqualia erũt, maius videlicet maiori, minor minori. Theorema hoc demonſtraui in libro variorum hìc quoque eandem demonſtrationem transferam. ibid.
Theor. VI. Rectangulum ſub differentia crurum trianguli,& aggregato eorundẽ, æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis,& ipſa baſe. 33
Theor. VII. Differentia crurum trianguli ſe habet ad differentiã ſegmentorũ baſis,vt baſis ad aggregatum crurum. 33
Probl. I. Dato quadrato æquale rectangulum inuenire,cuius latera datam teneant rationem. ibid.
Poriſma. Vt terminus ſecundus rationis datæ ad terminum primũ,ita eſt quadratũ datum ad quadratum lateris primi rectanguli,de quo quæritur. Datur ergo latus primum rectanguli quæſiti. 34
Probl. II. Datam rectam lineam ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta,ad quadratum differentiæ partium, rationẽ habeant datam. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus. ibid.
Poriſma. Vt exceſſus quo primus rationis datæ terminus duplus ſuperat ſecundũ, ad ipſum ſecundum,ita eſt quadratũ dimidiæ datæ,ad quadratum dimidiæ differentiæ partium. Datur ergo dimidia differentia partium,de qua quæritur. 35
Probl.III. Data perpẽdiculari, differentia crurũ triãguli, & differentia ſegmentorum baſis. inuenire triangulum. 36
Poriſma. Vt recta,cuius quadratum æquale eſt exceſſui,quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſis trianguli ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectã cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum exceſſu, ita eſt differentia crurum, ad baſim. Datur ergo quæſita trianguli baſis. 37
Lemma I. Differentia ſegmenrorum baſis trianguli maior eſt quam differẽtia crurum. ibid.
Lemma II. In omni triangulo recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui,quo quadratum differẽtiæ ſegmentorum baſis ſuperat quadratum differentiæ crurum,ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum exceſſu, minorem rationem habet,quàm differentia crurũ ad differentiam ſegmentorum baſis.ibid.
Problema Vietæ. Data baſe altitudine, & ratione crurum trianguli. inuenire triangulum. 49
Lemma. Si baſis trianguli ſecetur pro ratione crurum,& rectangulũ ſub ſegmentis applicetur ad altitudinem trianguli, latitudo inde orta non erit minor differentia ſegmentorum. 50
Problema conſtructum à Vieta. Data baſe trianguli, altitudine & rectangulo ſub cruribus; inuenire triangulum. 52
Problema. Data baſe trianguli,altitudine, & rectangulo ſub cruribus,inuenire triãgulum. 54
Lẽma. Si rectangulum ſub cruribus trianguli applicetur ad latitudinem eiuſdem trianguli, latitudo inde orta,non erit minor baſe,nec compoſita ex dimidia latitudine,& recta,cuius quadratum æquale eſt exceſſui,quo quadratum dimidię latitudinis ſuperat quadratum dimidiæ baſis,minor erit altitudine. 55
Probl.IV. Data perpendiculari,aggregato

crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum. 56
Poriſma. Vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum trianguli, ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectã cuius quadratũ æquale eſt exceſſui, quo quadratũ aggregati crurũ ſuperat quadrata, quæ fiunt ex differẽtia ſegmentorum baſis, & perpẽdiculari dupla; ita eſt aggregatum crurum ad baſim. Datur ergo baſis triãguli de qua quærebatur. 57
Lemma I. Quadratum aggregati crurum trianguli maius eſt quadratis quæ fiunt ex differentia ſegmentorum baſis, & à perpendiculari dupla. ibid.
Lemma II. Recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum trianguli ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectã cuius quadratũ æquale eſt exceſſui, quo idem quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata differentię ſegmẽtorum baſis, & perpendicularis duplę, minorem rõnem habet, quàm aggregatũ crurum ad differentiã ſegmentorum baſis. 58
Probl. V. Data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum triãguli, & differentia crurum. Inuenire triãgulum. 61
Poriſma. Vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo duplum quadratum differentię crurum ſuperat quadratum differentię ſegmentorum baſis ſubtẽdentis angulum rectum trianguli ad differẽtiã ſegmentorum baſis; ita eſt differentia crurum ad aggregatum eorundem. 62
Lemma. Differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, minor eſt, quàm recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrati differentię crurum. ibid.
Probl. VI. Data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectũ trianguli, & aggregato crurum, inuenire triãgulum. 64
Poriſma. Vt recta cuius quadratum æquale eſt ei, quo differt duplum quadratum aggregati crurum à quadrato differentię ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum triãguli, ad differentiam ſegmentorum baſis; ita eſt aggregatum crurũ ad differentiã eorundẽ. Datur ergo differẽtia crurũ, de qua quęrebatur. 65
Probl. VII. Data differentia crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, datoque exceſſu inter crus maius & baſim, inuenire triangulum. 66
Poriſma. Vt exceſſus quo dupla differẽtia crurum trianguli præſtat differentię ſegmentorum baſis, ad cõpoſitam ex differentia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius, ita eſt differentia crurum ad baſim. 67
Lemma. Si baſis trianguli fuerit crure maior, dupla crurum differentia differentiã ſegmentorum baſis excedet, ibid.
Lemma. Si baſis trianguli fuerit dimidio aggregati crurum maior, dupla crurum differentia, differentiam ſegmentorum baſis excedet. 68
Poriſma. Vt exceſſus, quo dupla differentia crurum trianguli præſtat differentiæ ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differẽtia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius, ita eſt differentia crurum ad baſim. 72
Poriſma. Vt exceſſus quo differentia ſegmentorum baſis triangvli ſuperat duplã differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, ita eſt differentia crurum, ad baſim. 78
Lemma I. Si baſis triãguli fuerit crure maiore minor; differentia autem ſegmentorum baſis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum; Duplus exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim, maior erit, quàm differentia crurum. 78
Lemma II. Iiſdẽ poſitis. Exceſſus, quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat dupla, in differentiã crurum, ad exceſſum quo dupla differentia cruris maioris, & baſis ſuperat differentiam crurum, minorem habebit rationem, quàm differentia crurũ ad differentiã ſegmẽtorũ baſis. 79
Poriſma. Vt exceſſus, quo differentia ſegmentorum baſis trianguli ſuperat duplã differentiam crurum ad exceſſum, quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, ita eſt differentia crurum ad baſim. 82
Lemma. Si baſis ttianguli fuerit crure maiore minor, differentia autẽ ſegmentorũ baſis fuerit maior, quàm dupla differentia crurũ. Exceſſus quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplã differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, minorem rõnem habebit, quàm differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. 82
Poriſma. Vt exceſſus, quo dupla differẽtia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differẽtiam crurum, minorem rõnem habebit, quàm differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. 84
Lemma I. Si baſis triãguli fuerit crure maiori minor, ac etiam differentia ſegmẽtorum baſis minor, quàm dupla differentia crurũ. Duplus exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim, minor erit, quàm differentia crurum. 85
Lemma II. Iiſdem poſitis. Dico inſuper exceſſum, quo dupla differentia crurum ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. ibid.
Poriſma. Vt exceſſus, quo dupla differẽtia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum, quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis; ita eſt differentia crurum ad baſim. 88
Lemma. Si baſis triãguli fuerit crure maiori minor, & differentia ſegmentorũ baſis minor quoque, quàm dupla differentia crurum. Exceſſus quo dupla differentia crurum ſuperat differentiã ſegmẽtorum baſis, ad exceſſum quo differentia crurũ ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem rationem habebit, quàm differentia crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis. ibid.
Lemma. Si differentia ſegmentorum baſis fuerit dupla differentiæ crurum. Crus maius excedet baſim, exceſſu dimidiæ differentię crurum æquali. 90
Problema VIII. Data baſe trianguli, angulum rectum ſubtendente, & differentia crurum, inuenire triangulum. 92
Poriſma. Duplum quadratum baſis ſubtẽdentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale eſt quadrato aggregati crurum. 92
Probl. IX. Data baſe trianguli angulum rectum ſubtendente, & aggregato crurum, inuenire triangulum. 93
Poriſma. Duplum quadratum baſis ſubtẽdentis angulum rectum trianguli, minus quadrato aggregati crurum, æquale eſt quadrato differentiæ crurum. 93
Lemma. Recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, non eſt minor aggregato crurum. 94

## LIBRI TERTII.

De æquationibus quadratorum affectorum explicandis. 97
De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente longitudine. ibid.
De explicanda æquatione, in qua quadratũ afficitur multa plani ſub latere, & data coefficiente longitudine. 97
De explicanda æquatione, in qua planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati. 98
Canon explicandi æquationem, in qua quadratum afficitur affirmatè. 99
Canon explicãdi æquationem, in qua quadratum efficitur negatè. 100
Canon explicãdi æquationem, in qua quadratum negatur de afficiente homogeneo. ibid.
Probl. I. Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum. 101
Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale, eſt duplo quadrato cruris maioris trianguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidię differentiæ ſegmentorum baſis, contracta eadem dimidia differentia æqualis eſt baſe trianguli. ibid.
Poriſma. Recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato cruris minoris triãguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidię differentię ſegmentorum baſis, protracta longitudine eiuſdem dimidię differentię, æqualis eſt baſi triãguli. 103
Probl. II. Dato vno ex crurib. triãguli, angulũ rectũ ambientibus, datoq. alterno baſis ſegmento, inuenire triangulũ. 106
Poriſma. Recta, cuius quadratũ æquale eſt quadrato vnius crurũ trianguli angulũ re-

rectum ambientium, vna cum quadrato dimidij alterni ſegmenti baſis, contracta dimidio eiuſdem ſegmenti, æqualis eſt alteri ſegmento. 106
Probl. III. Data differentia crurum triāguli angulum rectum ambiētium, dataq. perpendiculari, inuenire triāgulum. 109
Poriſma. Recta, cuius quadratū ęquale eſt quadratis differentię, videlicet crurum trianguli circa angulum rectum, & perpendicularis, aucta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli. 109
Probl. IV. Dato aggregato crurū triāguli angulum rectum ambientium, dataq. perpendiculari, inuenire triangulum. 110
Poriſma. Recta cuius quadratū ęquale eſt quadratis aggregati videlicet crurum, angulum rectum ambiētium, perpendicularis, contracta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli. 111
Lemma. Tripla perpendicularis trianguli rectanguli ab angulo recto in baſim cadens, non eſt maior, quàm recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis. ibid.
Probl. V. Datā rectam lineā ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte æquale ſit quadrato partis reliquæ. 113
Poriſma. Recta cuius quadratum æquale eſt quadratis totius datæ, & dimidiæ eiuſdem contracta eadem dimidia, æqualis eſt parti maiori. 114
Probl. VI. In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat. ibid.
Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato tangentis circulū, & quadrato dimidię aptatę in circulo, contracta eadem dimidia ęqualis eſt continuationi aptatę, quę dato puncto, & aptata terminatur. 115
Poriſma. Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectę, cuius quadratū æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidię aptatę ſuperat quadratum perpēdicularis, æqualis eſt parti maiori aptatæ, quę dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis eſt parti minori. 117
Probl. VII. Dato ſemicirculo, & recta linea ſit ipſius baſi perpendicularis. Inter ipsā perpendicularem, & circumferētiam ſemicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad ſemicirculi angulum pertingat. 118
Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ F I, & rectangulo C E H, contracta dimidia F I æqualis eſt rectę E F. 119
Poriſma. Dimidia f i, protracta longitudine rectę, cuius quadratū eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectāgulum c e h ęqualis eſt rectę e i; contracta verò ęqualis rectę e f. 121
Poriſma. Dimidia f i protracta longitudine rectę, cuius quadratum ęqnale eſt exceſſui, quo quadratum dimidię f i ſuperat rectangulum h e c, ęqualis eſt maiori partium e f, e i, contracta verò, minori. 123
Poriſma. Recta, cuius quadratum ęquale eſt quadrato dimidię I F, & rectangulo H E C contracta eadem dimidia I F ęqualis eſt rectę E I. 126
Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidię F I, & rectangulo H E C, contracta eadē dimidia F I ęqualis eſt rectę E F. 128
Poriſma. Recta, cuius quadratū ęquale eſt quadratis E C, & dimidię F I, contracta eadē dimidia F I, ęqualis eſt rectę, e f. 129

## LIBRI QVARTI.

Theor. I. Si quatuor magnitudinū proportionalium vna extremarū, aut mediarū fuerit maxima, altera minima erit. 130
Theor. II. Si cōpoſita ex extremis quatuor magnitudinū proportionaliū fuerit maior, quā cōpoſita ex medijs, vel differētia extremarū maior, quā differētia mediarum, altera extremarū maxima erit, altera minima, ſin minor altera mediarū maxima, altera minima erit. 131
Theor. III. Si compoſita ex extremis quatuor magnitudinum proportionaliū fuerit ęqualis cōpoſitę ex medijs, vel differentia extremarum ęqualis differentię mediarum, maior extrema maiori medię minor minori ęqualis erit. 132
Probl. I. Dato quadrato aliud quadratum in data ratione inuenire. 133
Lemma I. Si à medio & extremitatibus vnius rectę lineę ducantur tres rectę parallelę, alteram rectam lineam ſecantes. Segmenta ſectę inter paralleles interiecta ęqualia erunt. 134

Lem-



Lemma II. Si in diametro circuli, etiā producta ſumantur duo puncta à centro ęquè diſtantia, & ab ijs ducantur ad rectā lineam cadentem in circulum duæ rectę perpendiculares ſegmenta cadētis inter circumferentiam, & perpendiculares interiecta æqualia erunt. 134
Reliquorum Lemmatum ſeries vſq; ad 32. cōſultò hic in indice omittitur cum ſint iuxtà figuras in eis poſitas, & non habeant textum ab eis ſeparatum.

## LIBRI QVINTI.

De Problematibus quæ conſtructione operaria non egent, ſed ſolum poſtulant vt quæſitum numero explicetur. 298
Probl. primū. Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ coronæ permixtam inuenerit. 299
Reſolutio. Coronæ, quæ conſtat ex auro, & argento ſit pondus P, pondus autē argenti quod eſt in ea eſto A. ergo P - A erit pondus auri. 299
Theor. Si triū corporū æque pōderātium primum, & tertium fuerint generis diuerſi, ſecundi autē portio ſit eiuſdē generis cum corpore primo, reliqua vero eiuſdē generis cum corpore tertio. erit vt differentia inter moles primi, & tertij ad differentiā inter moles primi, & ſecundi, ita pondus vnius corporum, ad pondus portionis corporis ſecundi, quæ eſt eiuſdem generis cum corpore tertio. 302
Poriſma. Vt differentia molis maſſæ argēteæ, & molis maſſæ aureæ ad differentiā molis coronæ, & molis maſſæ aureæ, ita eſt pondus coronæ ad pondus argenti; quod eſt in corona. 305
Poriſma. Vt differentia molium maſſę argenteæ, & maſſę aureę, ad differentiam molium maſſę argenteę, & coronę; ita eſt pondus coronę ad pondus auri, quod eſt in corona. 306
Theor. Si trium corporum æque pōderantium primum, & tertium fuerit diuerſi generis, ſecundi autē portio ſit eiuſdē generis cum corpore primo; reliqua vero eiuſdē generis cum corpore tertio; erit vt differentia molium primi, & tertij ad differentiam molium primi, & ſecundi, ita pondus vnius corporum ad pondus portionis corporis ſecundi, quæ eſt eiuſdem generis cum corpore tertio. ibid.
Lemma I. Si fuerint lineæ quotcumq; ęqualiter ſeſe excedentes. Cōpoſita ex extremis ęqualis erit vnicuiq; compoſitarum è duabus ęque diſtantibus ab extremis, & ſi fuerit numerus linearum impar; medię duplę ęqualis erit. 307
Lemma II. Si fuerint lineę quotcumq; ęqualiter ſeſe excedentes. dupla cōpoſita ex omnibus, multiplex eſt compoſitę ex extremis per numerum linearum. 308
Lemma III. Si fuerit lineę quotcumq; ęqualiter ſeſe excedētes Differentia extremarum cōtinuata exceſſu, multiplex eſt ipſius exceſſus per numerū linearū. 308
Lemma IV. Si fuerint lineę quotcunq; ęqualiter ſeſe excedentes. Eſt vt dupla cōpoſita ex omnibus, ad compoſitā ex extremis, ita differentia extremarum continuata exceſſu ad exceſſum. 309
Probl. II. Data minima, & maxima linearū ęqualiter ſeſe excedentium, & cōpoſita ex omnibus, inuenire ſingulas. Oportet autem duplam cōpoſitam ex omnibus multiplicem eſſe compoſitę ex extremis per numerum binario maiorem. ibid.
Theor. Si fuerint lineę quotcumq; ęqualiter ſeſe excedentes, eſt, vt differentia duplę compoſitę ex oībus, & cōpoſitę ex extremis, ad cōpoſitā ex extremis, ita differentia extremarum ad exceſſum. 310
Probl. III. Data ſecunda linearum ęqualiter ſeſe excedētium, & compoſita ex extremis, itemq. compoſita ex omnibus inuenire ſingulas. Oportet autem duplam cōpoſitam ex omnibus multiplicem eſſe cōpoſitę ex extremis, per numerum binario maiorem. 312
Theor. Si numerus linearum ęqualiter ſeſe excedētium fuerit ternario maior, erit vt differentię duplę compoſitę ex omnibus, & triplę compoſitę ex extremis ad compoſitam ex extremis; ita differentia compoſitę ex extremis, & duplę ſecundę ad exceſſum. ibid.
Quomodo Problemata impoſsibilia cognoſcantur. 314
Probl. I. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus vna cum quadrato differētię partium ęquale ſit quadratis partium. 315
Probl. II. Datum rectam lineam ſecare, vt triplum rectangulum ſub partibus, vna cum

cum quadrato differētiæ partium æquale ſit quadrato totius rectæ. 316
Probl.III. Datā rectam lineā ſecare, vt rectāgulū ſub tota,& differētia partiū vna cū quadrato partis minoris ęquale ſit rectāgulo ſub tota,& parte maiore. 317
Probl.IV. Datā rectam lineā ſecare; vt rectangulū ſub tota,& differentia partium ęquale ſit quadrato partis maioris. 318
Probl.V. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota & dupla parte maiore æquale ſit quadratis,quæ fiunt à tota, & à parte maiore. 319
Probl.VI. Super data baſe triangulum conſtituere,in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentiæ crurum,atque differētia crurum ſit dupla exceſſus, quo crus maius ſuperatur à baſe. ibid.
Probl.VII. Datā rectam lineā ſecare,vt rectangulū ſub tota & dimidia differentia partium,vna cum rectangulo ſub partib. æquale ſit partium quadratis. 320
Probl.VIII. Datam rectā lineam ſecare, vt duplum rectangulū ſub tota,& parte maiore; æquale ſit quadrato totius, & duplo quadrato partis maioris. 322
Probl.IX. Datam rectā lineā ſecare, vt rectangulum triplum ſub partibus æquale ſit totius lineæ quadrato. ibid.
Quomodo Problemata vana,ſeu nugatoria cognoſcantur. 323
Probl.I. Datam rectam lineā ſecare, vt rectangulū ſub tota,& differentia partiū, vnà cum quadrato partis minoris,ęquale ſit quadrato partis maioris. 324
Probl.II. Datam rectam lineam ſecare, vt quadrata partium æqualia ſint quadrato differentiæ partium vna cum duplo ſub partibus rectangulo. ibid.
Probl.III. Datam rectam lineam ſecare,vt rectangulum ſub partibus vna cum quadrato dimidiæ differentiæ partiū, æquale ſit quadrato ſemiſſis datæ. 326
Probl.IV. Super data baſe triangulum conſtituere, quod habeat differentiam crurum dimidiæ baſi æqualem. ibid.
Probl.V. Super data baſe triangulum conſtituere,in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentia crurū, ipſaque differentia crurū ſit dupla exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim. ibid.
De Reſolut. & Compoſitione Problematū, quæ ſub Algebram non cadunt. 330
Probl.I. Rombo dato,& vno latere producto aptare ſub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam,quę ad oppoſitum angulum pertingat. 330
Probl.II. Rombo dato,& productis duobus lateribus angulū rombi continentib. inter ipſa latera aptare magnitudine datā rectam lineam, & quæ per oppoſitū angulū tranſeat. Oportet autem ipſam magnitudine datam non eſſe minorē ea recta linea, quæ per extremitatē diametri rombi ad rectos angulos ducta, inter producta latera interijcitur. 333
Probl.III. Data baſe triāg.differētia laterū & angulo verticis inuenire triāgulū. 336
Lēma. Si angulus triāguli fuerit centrū circuli,baſis vero ſemidiameter,& ducatur linea recta;nō ex cētro circuli,ſed ab altera extremitate aggregati laterū, conſtituens cum eo angulū æqualem dimidio, qui eſt ad verticem trianguli, angulo,illa recta linea in circulum incidet. 337
Probl.IV. Data baſe trianguli, aggregato laterū,& angulo verticis,inuenire triāg. 338
Lemma. Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli inſiſterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit. 338
Probl.V Data differentia ſegmentorum baſis trianguli aggregato laterū, & angulo verticis inuenire triangulum. 339
Lemma I. Si angulus trianguli fuerit centrum circuli,differentia vero laterū ſemi diameter, & ducatur recta linea non ex centro circuli,ſed ab altera extremitate differentię ſegmentorum baſis conſtituēs cum ea angulum æqualem dimidio; qui eſt ad verticem trianguli angulo,ilia recta linea circulum ſecabit. 340
Lemma II. Secet circulus ſub A centro recta linea B H L in punctis H L, & per punctus H quod ſit propius ad B ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem eſſe recto. ibid.
Probl.VI. Data differentia ſegmētorum baſis trianguli differentiā laterum, & angulo verticis inuenire triangulum. 341
Pr.VII. Dato vno ex laterib.triāg.datū verticis ang.ambiētib.& differētia inter reliquū latus,& baſim,inuenire triāg. 341
Pr.VIII.Dato vno ex laterib.triāg.datū verticis angulū ambiētib. datoq. aggregato reliqui lateris,& baſis,inuenire triāg.343

FINIS.



# MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compoſitione Mathematica.

## LIBER PRIMVS.

A OMNES Mathematicæ probationes vel à conceſſis ad quæſita, vel à quæſitis ad conceſſa progrediuntur. Quæ à conceſſis progrediuntur ad quæſita, compoſitiones appellantur. Compoſitio enim eſt aſſumptio conceſſi per conſequentia ad quæſiti finem, & comprehenſionem. quæ vero à quæſitis progrediuntur ad conceſſa duplices ſunt; vel enim conceſſa ponunt, vel deſtruunt: quæ ponunt conceſſa, reſolutiones vocantur: Eſt enim Reſolutio aſſumptio quæſiti tanquam conceſſi per conſequentia ad verum conceſſum. Nam in reſolutione id quod quæritur, vt iam exiB ſtens, & vt verum ponentes, per ea, quæ deinceps conſequuntur, procedimus ad aliquod conceſſum: quo opere quæſitam concluſionem, in proprias cauſas, per quas demonſtratur reducimus: atque his reſolutionibus compoſitiones opponuntur. fieri enim poteſt, vt à conceſſo illo, per eadem reſolutionis veſtigia ad quæſitum reuertamur. Quæ vero deſtruunt conceſſa, deductiones ad impoſſibile nuncupamus. Deductio enim ad impoſſibile eſt aſſumptio eius quod quæſito contradicit tanquam conceſſi per conſequētia, ad id, quod vero conceſſo opponitur. nam in deductione ad impoſſibile ſumimus id quod quæſito contradicit, idq; ſupponentes progredimur, donec in aliquod abſurdum incidamus, per quod ſuppoſitione deſtructa confirmetur id, quod à prinC cipio quærebatur. Ex quibus patet Reſolutionem à Deductione ad impoſſibile ratiocinatione tantum differre; nam vtraque ab incognito ad cognitum eodem progreſſionis ordine procedit: ſed Reſolutio deſinens in verum, concludit verum eſſe & quod ſupponitur: Deductio vero ad impoſſibile, deſinens in falſum, falſum eſſe & quod ſupponitur arguit, & conſequenter quæſitum verum eſſe.

Duplex autem eſt reſolutionis genus alterum quidem ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in ſola veritatis inueſtigatione conſiſtit. alterum vero ad Pro-

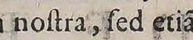
 blemata,

blemata, cuius scopus est rationem constructionis, atque demonstrationis in- A
uestigare: proposita enim Problemata construere docet, viamq; ad constructionis demonstrationem ostendit. sed omnia ferè Theoremata, & Problemata, quæ sub Algebram cadunt facillimè resoluuntur, ac per resolutionis vestigia componuntur: non quidem vulgaris Algebræ beneficio; quæ resolutionis vestigia omnino confundit; sed illius, cuius auctor est Franciscus Vieta, vir certè de rebus Mathematicis optimè meritus: cui non solum nostra, sed etiã superior ætas haud scio an vllum huius scientiæ laude parem, nedum superiorem inuenerit. etenim Resolutio procedens per species immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios; sua vestigia clara relinquit, per quæ non est difficilis ad compositionem reditus: compositio enim in Problematibus, siue per Algebram, siue Antiquorũ B
methodo resolutis, à fine resolutionis, ad principium per resolutionis vestigia regreditur: in Theorematibus vero quorum veritas per Algebram exploratur, eodem ordine quo inuenta est Theorematis veritas, demonstratio procedit. At Theoremata vel Problemata, quæ sub Algebram non cadunt qualia sunt ea, quæ per comparationem angulorum demonstrantur, resoluuntur, & componuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archimedis, Apollonij, & Pappi, aliorumq; veterum ac recentium. Et quamuis ea methodo omnia Theoremata, & Problemata resolui, & componi possint; tamen ea, quæ sub Algebram cadunt, plerumque facilius ac expeditius per Algebram resoluuntur, ac deinde per resolutionis vestigia componuntur. Hæc omnia exemplis, atque etiam præceptis vbi locus exiget perspicua fient. Pri- C
mum igitur proponam. Exempla ad inuentionem Theorematum, eorumq; demonstrationem pertinentia; deinde ad resolutionem, & compositionem Problematum: primis enim quatuor Theorematibus in Problematum resolutionibus & compositionibus sæpe vtemur.

## Propositio Prima.

*Si recta linea secetur vtcumque; rectangulum sub tota, & differentia partium cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare.*

Secetur recta linea in duas partes, quarum A sit maior, B, minor. Oportet inuestigare cui plano ad ipsas partes relato æquale sit rectangulum sub A + B, & A—B. Ducatur A + B in A—B, fit A Q— B Q. huic igitur plano æquale est rectangulum sub tota & differentia partium; quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur D




C

a+b
a-b
aa+ab-ab-bb
aa-bb.

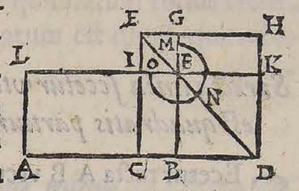
## Theorema I.

*Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium, æquale est differentiæ quadratorum partium.*

Sece-



A Secetur recta linea A B vtcunque in C, & producatur in D, vt sit C D æqualis A C, ergo differentia partium A C, C B erit B D. Dico rectangulum A B D æquale esse differentiæ quadratorum A C, C B. Describatur enim super C D quadratum C H, & ducatur diameter D E, quam B G parallela rectæ C E secet in F: deinde per F ducatur ipsi A B parallela K F L. Similiter ducatur & ipsi B K parallela A L. Quoniam igitur rectangulum A I, æquale est rectangulo B H, sunt enim A C, D H æquales, & æquales C I, B D. Addito igitur communi rectangulo B I, rectangulũ A F æquale erit rectangulis B H, B I, hoc est gnomoni M N O per quem diB ferunt quadrata C H, I G. Rectangulum igitur A F æquale est differentiæ quadratorum C H, I G quod erat ostendendum.




Idem Theorema posset quoque ita enunciari.

*Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium vnà cum quadrato partis minoris, æquale est quadrato partis maioris.*

Ostensum est enim rectangulum A F æquari gnomoni M N O, addito communi quadrato I G, rectangulum A F, vnà cum quadrato I G æquabitur toti quadrato C H.

C Itaque Theorema hoc idem est, quod Theorema quintum, vel sextum libri secundi elementorum. Nam in quinto Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars maior, intermedia vero sectionum, pars minor, reliqua autem differentia partium. In sexto autem Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars minor, altera vero dimidia cum adiecta, pars maior, ipsa autem adiecta, differentia partium. His ita acceptis manifestum est vnum, eundemq; sensum contineri in hac nostra propositione, atque in illis duabus Euclidis.

## Propositio II.

*Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium quibus*
D *planis ad ipsas partes relatis æquale sit inuestigare.*

Sit recta linea secta in duas partes A, B quarum A sit maior; ergo earum differentia erit A—B. oportet inuestigare quibus planis ad ipsas partes relatis æquale sit quadratum ex A—B. Ducatur A—B in se: productum erit A Q + B Q—B in A 2. Atque hæc sunt ea plana quibus æquale est quadratum differentiæ partium. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur.

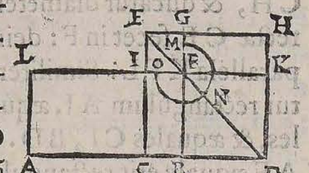


A

## Theorema II.

*Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium, æquale est quadratis partium minus duplo sub partibus rectangulo.*

SEcetur recta A B vtcumque in C, eaq; producatur in D, vt sit C D æqualis A C: differentia igitur partium A C, C B, erit B D. Dico quadratum B D æquale esse quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis. Describatur enim super C D quadratum C H, in quo agatur diameter D E, quã recta B G, parallela ipsi C E, vel D H, secet in puncto F, per quod agatur ipsi C D parallela I F K. sunt igitur B K, I G quadrata rectarum B D, C B, & quadratum B K vuà cum rectangulis C H, I H, æquale est quadratis C H, I G, demptis vtrimque rectangulis C G, I H, reliquum quadratum B K æquale erit quadratis C H, I G, minus rectangulis C G, I H. hoc est æquale erit quadratis rectarum A C, C B, minus rectangulo A C B bis: quod erat ostendendum.




B

Theorema hoc, quemadmodum & præcedens, demonstrantur ex ipsa constructione, quoniam vnico tantum actu resoluuntur, nullo resolutionis progressu; in primo enim Theoremate ex ductu A ✣ B in A—B, in secundo autem ex ductu A—B in se, veritas innotuit.

Idem Theorema potest quoque ita proponi.

C

*Si recta linea secetur vtcumque, quadrata partium simul æqualia sunt quadrato differentiæ partium, vnà cum duplo sub partibus rectangulo.*

Itaque Theorema hoc est vnum, idemq; cum Theoremate septimo libri secundi Elementorum; nam in eo Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem segmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium: quibus sic acceptis, manifestum est vnum, idemq; propositum esse vtriusque Theorematis.

## Propositio III.

D

*Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium, cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare,*

SIt recta linea secta in duas partes A, B, quarum A sit maior, ergo differentia earum erit A—B. Oportet inuestigare, cui plano æquale sit quadratum ex A ✣ B minus quadrato ex A—B. Fiat quadratum ex A ✣ B id, erit




A Q ✣ B Q ✣ B in A 2.

ab eoq; auferatur quadratum ex A—B quod est

A Q ✣ B Q—B in A 2.

Rema-



A Remanebit B in A 4. Huic igitur plano æquale est quadratum totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium: Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

## Theorema III.

*Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium æquale est quadruplo sub partibus rectangulo.*

SIt recta A D secta vtcumque in B, & rectæ D B, quæ sit minor pars, fiat æqualis B C; ergo differentia partium A B, B D, erit A C. Dico quadratum A D, minus quadrato A C, æquale esse quadruplo rectanguli A B D.




B

Quoniam enim quadratum A D æquale est quadratis A B, B D vnà cum rectangulo A B D bis; quadratum autem A C æquale est eisdem quadratis A B, B D, minus rectangulo A B D bis, si igitur à quadratis A B, B D, & rectangulo A B D bis auferantur quadrata A B, B D, minus rectangulo A B D bis, remanebit rectangulum A B D quater. Quadratum igitur totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium, æquale est quadruplo rectangulo sub partibus, quod erat ostendendum.

Idem Theorema potuit quoque ita enunciari.

C

*Si recta linea secetur vtcumque, quadruplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale est totius lineæ quadrato.*

CVm enim ostensum sit quadratum totius, minus quadrato differentiæ partium, æquari quadruplo rectangulo sub partibus, si vtrobique addatur quadratum differentiæ partium, quadratum totius æquale erit quadruplo rectangulo sub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium.

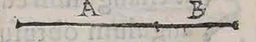
Itaque Theorema hoc idem est quod Theorema octauum libri 2. Euclidis in eo enim Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem segmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium. quibus sic acceptis, manifestum est vnum, idemq; propositum esse 2triusque Theorematis

D

## Propositio IIII.

*Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, quibus planis ad ipsas partes relatis, æquale sit inuenire.*

SEcetur recta linea in duas partes A, B, quarum A sit maior, ergo differentia partiũ erit A—B: Oportet inuestigare, quibus planis æquale sit quadratum ex A ✣ B, vnà cum quadrato ex A—B. Fiat quadratum ex A ✣ B id erit




A Q ✣ B Q ✣ B in A 2

Similiter fiat quadratum ex A—B id erit A
A Q ✣ B Q—B in A 2

Horum quadratorum aggregatum est A Q 2 ✣ B Q 2. Atque his planis æqualia sunt quadrata, totius videlicet, & differentiæ partium. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

## Theorema IV.

*Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, dupla sunt quadratorùm partium.*

SEcetur recta A B vtcumque in C, & à maiori parte, quæ sit A C, auferatur C D æqualis C B: ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico quadrata A B, A D dupla esse quadratorum A C, C B. Quoniam enim quadratum A B æquale A D C B B
4 secũdi Theor. 2 est* quadratis A C, C B, vnà cum rectangulo A C B bis; quadratum autem A D æquale* quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis, ideo quadrata A B, A D æqualia sunt quadratis A C, C B bis. hoc est dupla sunt quadratorum A C, C B. quod erat ostendendum. In hoc Theoremate idem ostenditur, quod in Theorematibus nono, & decimo libri secundi Elementorum licet in alia forma sit propositum. Nam in nono Theoremate, dimidia illa recta, intelligatur pars maior, intermedia verò sectionum, pars minor, reliqua autem, differentia partium.

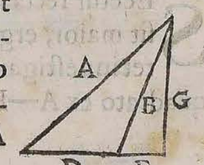
In decimo autem Theoremate dimidia illa recta, intelligatur pars minor, C
altera vero dimidia cum adiuncta, pars maior, ipsa autem adiuncta, differentia partium. quibus sic acceptis, manifestum est huius nostri Theorematis idẽ esse propositum, atque dictorum Theorematum noni & decimi.

Quatuor præcedentia Theoremata ea ratione, qua proposite sunt, nõ paruo vsui erunt in resolutionibus, & compositionibus; nam vt in resolutionibus plana (quibus æquatur quadratum differentiæ partium vel rectangulum sub differentia partium, & aggregato) cum alijs planis sæpe comparantur; sic rursus in compositionibus, quæ per filium resolutionis progrediuntur, aut regrediuntur; eadem plana pro quadrato differentiæ partium, seu rectangulo sub differentia partiũ, & aggregato, cum ijsdem alijs planis, cõparentur necesse est. D

## Propositio V.

*In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtusum subtendentis, quanto maius sit quadratis reliquorum laterum inuenire.*

SIt triangulum cuius latera A B D & latus A subtendat angulum obtusum. Oportet inuenire quanto sit maius quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Ab angulo verticis cadat in D. basim continuatam perpendicularis G, sitq; continuatio E: quadratum igitur lateris A




æquale



A æquale* erit quadratis à perpendiculari, & à base producta vsque ad perpendicularem, hoc est 47 primi

A Q æquale erit G Q ✣ D Q ✣ E Q ✣ D in E 2. sed
G Q ✣ E Q æquale* est B Q. ergo 47 primi
A Q æquabitur B Q ✣ D Q ✣ D in E 2

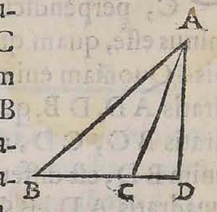
Quadratum igitur lateris A maius est, quàm quadrata laterum B, & D rectãgulo D in E 2. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur.

## Theorema V.

*In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtusum subtendentis, maius est, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprehenso bis ab vno reliquorum laterum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & à linea, quæ inter perpendicularem, & angulum obtusum interijcitur.*

B

SIt obtusiangulum triangulum A B C, obtusum angulum habens A C B, & ducatur à puncto A ad B C productam, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, maius esse, quàm quadrata A C, C B rectangulo B C D bis; quoniam enim quadratum A B æquale* est quadratis A D, D B; quadratum autem D B æquale* quadratis D C, C B, vnà cum rectangulo B C D bis; erit quadratum A B æquale quadratis A D, D C, C B vnà cum rectangulo B C D bis. sed quadrata A D, D C æqualia* sunt quadrato A C, ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A C, C B vnà cum rectangulo B C D bis; itaque quadratum A B maius est, quàm quadratum A C, C B, rectangulo B C D bis. quod erat ostendendum.



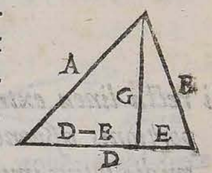

47 primi
4 secũdi
C
47 primi

## Propositio VI.

*In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum acutum subtendentis, quanto minus sit quadratis reliquorum laterum, inuenire.*

D

SIt triangulum cuius latera A B D & latus A subtendat angulum acutum. Oportet inuenire quanto minus sit quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Cadat ab angulo verticis in basim D, perpendicularis G, secans ipsam basim in duas partes, quarum illa, quæ est inter perpendicularem, & angulum acutũ sit E; ergo altera pars erit D—E.




Et quoniam A Q æquale* est quadratis ex G & D—E, ideo 47 primi
A Q æquabitur G Q ✣ D Q ✣ E Q—D in E 2.
Et addito vtrique parti D in E 2

A Q

Наукова бібліотека Одеського університету ім. І. І. Мечникова

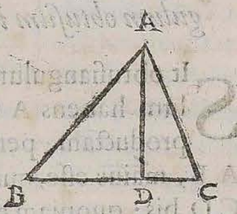
A Q ✣ D in E 2, æquabitur G Q ✣ D Q ✣ E Q, sed
G Q ✣ E Q æquale* est B Q, ergo
A Q ✣ D in E 2 æquabitur D Q ✣ B Q.

47 primi

Quadratum igitur lateris A, minus est, quàm quadrata laterum D, & B rectangulo D in E 2. Hinc

## Theorema VI.

*In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis, minus est, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprehenso bis, ab vno reliquorum laterum, in quod perpendicularis cadit, & à portione ipsius lateris, quæ inter perpendicularem, & angulum acutum interijcitur.*




SIt acuti angulum triangulum A B C, acutum habens angulum A C B, & ducatur à puncto A ad B C, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, minus esse, quam quadrata A C, C B rectangulo B C D bis. Quoniam enim quadratum A B æquale* est quadratis A D, D B, quadratum autem D B æquale* est quadratis B C, C D, minus rectangulo B C D bis; recta enim B D, est differentia inter B C, C D: ergo quadratum A B æquale erit quadratis A D, B C, D C, minus rectangulo B C D bis. addatur vtrobique rectangulum B C D bis, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis A D, B C, D C. sed quadrata A D, D C æqualia* sunt quadrato A C, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis B C, C A. Itaque quadratum A B minus, est quam quadrata B C, C A rectangulo B C D bis. quod erat ostendendum.

47 primi Theor. 2

47 prim

In principio libri tertij decimi Elementorum extant in scholijs nonnulla exempla ad Resolutionem, & Compositionem Theorematum pertinentia; ibi enim quinque Theoremata resoluuntur, & componuntur. Ego quoque eorundem Theorematum veritatem alia methodo inquiram; peritus autem Geometra in inquirendo huiusmodi Theorematum veritate, poterit ea methodo vti quæ facilior videatur.

## Propositio VII.

*Si recta linea extrema, ac media ratione secetur; quadratum maioris portionis assumentis dimidium totius, quanto maius sit quadrato dimidiæ totius inuestigare.*




SIt recta linea B 2 extrema, ac media, ratione secta, cuius portio maior sit D ergo portio minor



minor erit B 2—D; dimidia autem totius est B, itaque composita ex maiore portione, & dimidia totius, erit D ✣ B, Oportet inuestigare, quanto maius sit quadratum ex D ✣ B, quadrato ex B; posuimus eam sectam extrema, ac media ratione, esse B 2 non autẽ B simplicem; sic enim fractiones vitabũtur.

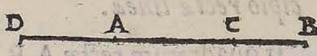
Quoniam igitur secta est B 2 extrema, ac media ratione, rectangulum sub tota, & portione minori, æquale erit quadrato portionis maioris. hoc est

B Q 4—B in D 2 æquabitur D Q.

Quadratum autem ex D ✣ B, est D Q ✣ B Q ✣ D in B 2. si igitur dematur D Q, & in locum eius subrogetur B Q 4—B in D 2, cui ostensum est æquari D Q, prodibit B Q. S, idq; æquabitur quadrato ex D ✣ B; atque adeo quadratum ex D ✣ B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc ordinatur

## Theorema VII.

*Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, quadratum maioris portionis assumentis dimidiam totius, quintuplum est quadrati dimidiæ totius.*




SEcetur A B extrema, ac media ratione in C, sitq; maior portio A C, eaq; producatur in D, vt sit A D æqualis dimidiæ A B. Dico quadratum ex D C quintuplum esse quadrati ex D A. Quoniam enim secta est A B extrema, ac media ratione in C, quadratum A C æquale erit rectangulo A B C, hoc est quadrato A B, minus rectangulo B A C; seu quod idem est, quadrato D A, quater minus rectangulo D A C bis, est enim A B dupla ipsius A D. Et quoniam quadratum D C æquale* est quadratis D A, A C vnà cum rectangulo D A C bis: si dematur quadratum A C, & in locum eius subrogetur, ipsi æquale quadratũ D A, quater minus rectangulo D A C bis, itidem manebit æqualitas, hoc est quadratum D C æquale erit quadrato D A quinquies. Itaque quadratum D C quintuplum est quadrati D A, quod erat ostendendum.

4 secũdi

## Propositio VIII.

*Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis, extrema ac media ratione secta. quæritur an maior portio sectæ sit reliqua pars eius quæ à principio rectæ lineæ.*




REcta linea constans ex partibus B D quintuplum possit partis B, cuius dupla est B 2; ipsa igitur B 2 secetur extrema, ac media ratione. Oportet inuestigare an maior portio sectæ sit D, reliqua videlicet pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam igitur vna pars ipsius B 2, est D reliqua pars erit B 2—D, demonstrabimus aũt infra ipsam B 2, maiorem esse, quam D. Et cum quadratũ ex B ✣ D ponatur quintuplũ quadrati ex B.

B Q

A B Q ✣ D Q ✣ B in D 2, æquabitur B Q S.
Auferatur vtrinque B Q, ergo
D Q ✣ in D 2 æquabitur B Q 4.
Auferatur quoque B in D 2, vt D Q solum remaneat, cum recta D comparanda sit cũ portione maiori ipsius B 2 sectæ, extrema ac media ratione, ergo
D Q æquabitur B Q 4—B in D 2
Seu quod idem est
D Q æquabitur B 2—D in B 2.
Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt
B 2—D D B 2.
Itaque B 2 secta est extrema, ac media ratione, & maior portio est D; cum sit ipsa D media proportionalis inter portionem B 2—D, & totam B 2. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

## Theorema VIII.

*Si recta linea partis ipsius quintuplum possit. Dupla dicta partis extrema ac media ratione secta, maior portio, reliqua pars est eius quæ à principio rectæ lineæ.*




Sit quadratum rectæ A B quintuplum quadrati partis B C, & ipsius B C dupla sit C D; post autem ostendemus B C duplam maiorem esse reliqua parte C A. Dico si C D extrema ac media ratione secetur, C A esse portionem maiorem. Quoniam enim quadratum A B, quod* constat quadratis A C, C B, & rectangulo A C B bis, ponitur quintuplum quadrati B C, quadrata A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis, æqualia erunt quadrato B C quinquies; dempto vtrinque quadrato B C, relinquetur quadratum A C, vnà cum rectangulo A C B bis æquale quadrato B C quater, hoc est relinquetur quadratum A C vnà cum rectangulo D C A æquale quadrato C D; ponitur enim C D dupla ipsius B C: auferatur quoque vtrinque rectangulum D C A, ergo quadratum A C, æquale erit quadrato C D, minus rectangulo D C A; hoc est æquale erit rectangulo C D A; quare* vt D A ad A C ita erit A C ad C D. Secta est igitur recta C D extrema, ac media ratione, & maior portio est C A, quod erat ostendendum.

At vero B C duplam maiorem esse, quam C A sic demonstrabitur.

Sit enim si fieri potest B C dupla non maior quàm C A, ergo quadratum A C non erit minus quadruplo quadrati C B, & consequenter quadrata A C, C B non erunt minora quintuplo quadrati C B, sed ponitur quadratum A B quintuplum quadrati C B, ergo quadrata A C, C B, non erunt minora quadrato A B: quod est absurdum; quadratum enim A B æquale* est quadratis A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis. Dupla igitur B C maior est, quàm C A quod erat ostendendum.

Propo-



## Propositio IX.

*Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, quadratum minoris portionis assumentis dimidiam maioris portionis. quanto maius sit quadrato dimidiæ maioris portionis, inuestigare.*




Secetur recta extrema, ac media ratione cuius portio maior sit B 2, portio minor D. Quæritur quanto maius sit quadratum ex D ✣ B quadrato ex B. Quoniam igitur ex natura huiusmodi sectionis rectangulum sub tota, & portione minore æquale est quadrato portionis maioris. ideo
D in B 2 ✣ D Q æquabitur B Q 4
Quadratum autem ex D ✣ B constat ex
D Q ✣ B Q ✣ D in B 2
cui quadrato si dematur D in B 2, & D Q. & in locum eorum subrogetur æquus valor, nempe B Q 4; fit B Q S pro valore eiusdem quadrati ex D ✣ B. Itaque quadratum ex D ✣ B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

## Theorema IX.

*Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, portio minor assumens dimidiam maioris portionis, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris portionis describitur quadrati.*




Secetur A B extrema, ac media, ratione: in C cuius portio maior A C, secetur bifariam in D. Dico quadratum B D quintuplum esse quadrati D C. Quoniam enim ex huiusmodi sectione rectangulum A B C, æquale est quadrato A C ipsi autem rectangulo A B C, æquale est quadratum C B vna cum rectangulo A C B, hoc est vna cum rectangulo D C B bis, & quadratum A C quadruplum est quadrati D C, ergo quadratum C B vnà cum rectangulo D C B bis, æqualia erunt quadrato D C quater. Et quoniã quadratum D B æquale* est quadratis D C, C B vnà cum rectangulo D C B bis. demptis quadrato C B, & rectangulo D C B bis, & in locum eorum subrogato quadrato D C quater, cui ea æqualia sunt, rursus manebit æqualitas, nẽpe quadratum D B, æquale erit quadrato D C quinquies. Itaque quadratum A B quintuplum erit quadrati D C. Quare constat propositum.

## Propositio X.

*Si recta linea secetur extrema, ac media ratione: quadrata totius & portionis minoris simul, quanto sint maiora quadrato portionis maioris, inuestigare.*

Secetur

SEcetur recta B extrema, ac media, ratione, sitq; minor portio D ergo maior erit B—D. Quæritur quanto maiora sint quadrata ex B & D quadrato ex B—D. Quoniam igitur ratione sectionis, quadratum portionis maioris æquale est rectangulo sub tota & portione minori




A

B Q ✣ D Q—B in D 2 æquabitur B in D.

Addatur vtrobique B in D 2 vt B Q & D Q vna ex parte existant, cum sint comparanda cum quadrato portionis maioris, ergo

B Q ✣ D Q æquabitur B in D 3.

Quadrata igitur ex B & D simul, tripla sunt quadrati portionis maioris. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

B

## Theorema X.

*Si recta linea secetur extrema, ac media ratione; quadrata totius, & portionis minoris simul, tripla sunt quadrati portionis maioris.*

SEcetur recta A B in C extrema, ac media ratione, sitq portio maior A C, & portio minor C B. Dico quadrata A B, B C simul, tripla esse




quadrati A C. Quoniam enim ex vi sectionis quadratum A C æquale est rectangulo A B C, & æquale quoque quadratis A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, recta enim A C differentia est rectarum A B, B C, ergo quadrata

Theor. 9

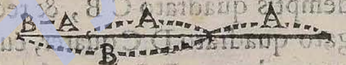
A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, æqualia erunt rectangulo A B C; C addatur vtrique parti duplum rectangulum A B C, ergo quadrata A B, B C æqualia erunt triplo rectangulo A B C hoc est triplo quadrati A C quod erat ostendendum.

## Propositio XI.

*Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi æqualis maiori portioni. Quæritur an tota linea sit extrema, ac media ratione secta, ita vt maior portio sit ea quæ à principio posita est recta linea.*

Theor. 9

SIt recta linea B secta extrema, ac media ratione, sitq; maior portio A, ergo portio minor erit B—A: ipsi autem B adijciatur




D

recta æqualis maiori portioni, ea erit A. Oportet inuestigare an tota B ✣ A sit secta extrema, ac media, ratione, ita vt maior portio sit B. Quoniam igitur ex natura sectionis est

vt B ad A ita A ad B—A

Erit conuertendo vt A ad B ita B—A ad A

Et componendo vt A ✣ B ad B ita B ad A.

Secta est igitur B A extrema, ac media ratione, & portio maior est B, quæ à principio posita est. Itaque inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theo-

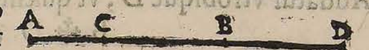


A

## Theorema XI.

*Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi æqualis maiori portioni, erit tota linea extrema, ac media, ratione, secta, et maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.*

SIt recta linea A B, quæ secetur extrema, ac media, ratione, in C & sit portio maior C B, cui æqualis ponatur B D. Dico re-




ctam lineam A D extrema, ac media, ratione, secari in puncto B, & maiorem portionem esse A B, quæ à principio posita est. Quoniam enim ratione sectionis est, vt A B ad B C, ita B C ad C A, erit conuertendo, vt B C, hoc est B D, ad B A, ita A C ad C B; & componendo, vt D A ad A B, ita A B ad B C; hoc est ad B D. Secta est igitur A D extrema, ac media, ratione, in B, & maior portio est A B. quod erat ostendendum.

B

## Problema Primum.

*Datam rectam lineam secare, ita vt maior pars minorem dato excessu superet. Oportet autem datum excessum minorem esse data secanda.*

## Resolutio.

C

SIt data recta linea B secanda in duas partes, quarum maior superet minorẽ excessu æquali datæ rectæ lineæ D.




Factum iam sit & pars minor esto A, maior igitur erit A ✣ D, vnde tota erit A 2 ✣ D sed eadem data est B, ergo

B æquabitur A 2 ✣ D

auferatur vtrinque D, vt magnitudines datæ ex vna parte existant; ea vero de qua quæritur ex altera, ergo

B — D æquabitur A 2

Vnde

## Porisma.

D

Recta data minus excessu dato, æqualis est duplo partis minoris. Datur ergo minor pars quæsita.

## Compositio.

SIt data recta linea A B, quam oportet secare vt pars maior superet minorem excessu æquali datæ rectæ lineæ D. à recta A B auferatur B C æ-



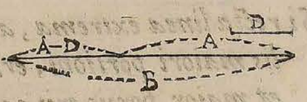

qualis ipsi D, reliqua vero C A secetur bifariam in E, erit igitur A E minor pars, E B maior; hæc enim superat illam excessu C B, æquali ipsi D, quare factum est quod oportebat.

B Alia

## Alia Resolutio.

A

PArs maior estò A, minor igitur erit A — D, tota ideo erit A 2 — D, sed eadem data est B ergo




B æquabitur A 2 — D

Addatur vtrobique D, vt quæsita magnitudo à datis separetur. ergo

B + D æquabitur A 2.

Hinc

## Porisma.

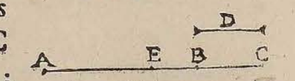
B

Recta data plus excessu dato æqualis est, duplo partis maioris.

Datur ergo maior pars quæsita.

## Compositio.

SIt data recta linea secunda vt petitur A B, datus autem excessus D. Producatur A B in C, vt B C sit æqualis D, & tota A C secetur bifariam in E;




erit A E pars maior, E B pars minor, recta enim E C, hoc est A E, superat E B, excessu B C æquali ipsi D. Factum est igitur quod oportebat.

## Corollarium I.

C

EX demonstratis manifestum est, rectam lineam, quæ in duas partes diuiditur, auctam excessu partium, æqualem esse parti maiori duplæ, diminutam vero, duplæ minori.

In posteriori enim demonstratione rectæ A B sectæ in E adiecta est B C differentia partium A E, E B, & fit A C dupla partis maioris A E.

In priori vero demonstratione rectæ A B, quæ secta est in E, ablata est C B differentia partium A E, E B, & relinquitur A C dupla partis minoris A E.

## Corollarium II.

D

PEr consequens hoc etiam verum est, dimidia lineæ rectæ in duas partes diuisæ, aucta dimidio excessu partium, æqualis est parti maiori, diminuta minori.

Posui corollaria hæc, quoniam frequens est eorum vsus in resolutionibus, præsertim in constituendis partibus ex aggregato partium, & differentia.

## Problema II.

*Datæ rectæ lineæ, alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, datam teneat rationem. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.*

Reso-

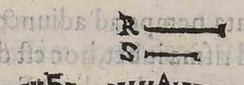




A

## Resolutio.

SIt data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, sit vt R ad S, quarum R sit maior.




Factum iam sit & adiuncta de qua quæritur esto A, ergo data cum adiuncta erit B + A, & erit

vt R ad S ita B + A ad A.

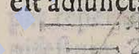
In hac propositione duo tantum dantur termini, primus nempe, & secundus, vt necesse est dari quoque tertium, nam nisi sint cogniti tres propositionis termini, quartus, hoc est quæsita magnitudo, non innotescet. igitur vt

B tertius quoque detur terminus, qui constat ex B & A magnitudinibus, data scilicet, & quæsita, liberandus est à quæsita, ita tamen vt quatuor illi termini proportionales existant. liberabitur autem in hoc casu, auferendo consequêtes ab antecedentibus, hoc est per diuisionem rationis argumentando, nam cum sit

vt R ad S ita B + A ad A

erit diuidendo vt R — S ad S, ita B ad A.

Dantur ergo tres proportionalium termini, itaque dabitur, & quartus, hoc est adiuncta, de qua quæritur.



## Porisma.

C




Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita est data ad adiunctam.

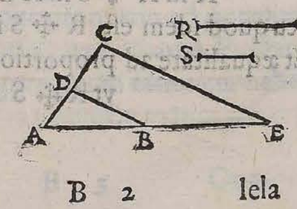
## Scholium.

Sæpe autem contingit, non vnum tantùm, sed plures proportionis terminos constare ex datis magnitudinibus & ea de qua quæritur, vel eius gradu, nec rationem apparere, qua datæ magnitudines à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque, ideo eo casu resoluenda est ad æqualitatem proportio & procedendum æqualibus æqualia addendo, vel subducendo vel æqualia per æqualia multiplicando, aut diuidendo, donec facta omni-

D no sub magnitudinibus datis ex vna æquationis parte existant, cætera vero ex altera. Hæc autem exemplis suo loco fient illustriora.

## Compositio.

SIt data recta linea A B cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta ad adiunctam sit, vt R ad S maior ad minorem. Ponatur A C æqualis R, ita vt cum A B constituat angulum quemcunque, & ab A C abscindatur C D æqualis S, & iungatur D B, eiq; paral-



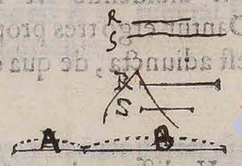
2 sexti lela agatur C E secans A B productam in E. Erit* igitur vt A D ad D C differentia videlicet terminorum R & S ad terminum minorem, ita A B ad B E, data nempe ad adiunctam. Itaque continuata est A B in E, quemadmodum ad risma iubet, hoc est datis tribus rectis lineis A D D C A B, inuenta est quarta proportionalis B E. Nunc autem ostendendum est, vt R ad S ita esse A E ad B E. Quoniam igitur est vt A D ad D C, ita A B ad B E, erit componendo vt A C ad D C, hoc est vt R ad S, ita A E ad B E cum enim in Resolutione per diuisionem rationis argumentatus fueris, in compositione per compositionem rationis argumentaberis & è contra. Continuata est igitur A B in E, vt A E ad B E rationem habeat vt R ad S quod erat faciendum. A

## Problema III. B

*Datæ rectæ lineæ, alteram rectam adiungere, vt differentia datæ & adiunctæ ad aggregatum earundem rationem habeat datam. Oportet autem datam rtationem esse minoris ad maius.*

Hoc Problema duos casus habet; aut enim data superabit adiunctam, aut adiuncta datam. primum data superet adiunctam.

### Resolutio primi casus.



SIt data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere vt excessus quo data superat adiunctam ad aggregatum earundem, rationem habeat, vt R ad S, quæ ratio sit minoris ad maius. C

Sit iam factum & adiuncta de qua quæritur esto A, ergo excessus quo data superat adiunctam, erit B — A, aggregatum verò earundem B ✣ A & erit

vt R ad S, ita B — A ad B ✣ A.

Quoniam igitur in hac proportione plures termini, non vnus tantum constant, ex datis magnitudinibus, & ea de qua quæritur neque in promptu est quomodo datæ magnitudines à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque; idcirco resoluenda est proportio ad æqualitatem, vt factum sub extremis proportionalium terminis, æquale sit facto sub medijs ea igitur resoluta

R in B ✣ R in A æquabitur S in B — S in A D

Addito vtrique parti S in A

R in B ✣ R in A ✣ S in A æquabitur S in B

Et ablato vtrinque R in B.

R in A ✣ S in A æquabitur S in B — R in B,

Seu quod idem est R ✣ S in A æquabitur S — R in B

Et æqualitate ad proportionem reuocata. erit

vt R ✣ S ad S — R ita B ad A

Hinc



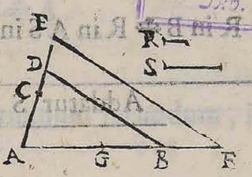
A Hinc

## Porisma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita est data ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

BIBLIOTECA ... Mat. ... Inv. ... Nº ...

## Compositio primi casus.



SIt data recta linea A B, data autem ratio R ad S minoris ad maius. Oportet ipsi A B alteram rectam adiungere, vt excessus quo data superat adB iunctam, ad aggregatum earundem sit, vt R ad S. Ponatur A C æqualis S constituens cum A B angulum quemcunque eaq; duplicetur in E, & sumatur C D æqualis R. itaq; differentia ipsarum A C, C D, erit D E, aggregatum vero A D. iungatur autem D B, eiq; parallela agatur E F occurrens continuatæ A B in F, erit* igitur vt A D ad D E ita A B ad B F, hoc est, vt aggregatum 4 sexti terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita data ad adiunctam, atque adeo factum erit quemadmodum Porisma docet. Nunc autem demõstrandum est vt R ad S, ita esse differentiam rectarum A B, B F ad A F, idq; per repetitionem vestigiorum resolutionis ducendo initium à fine, ita fit manifestum. Sumatur B G æqualis B F, ergo differentia rectarum A B, B F erit C A G. Et quoniam est vt A D ad D E ita A B ad B F, resoluta ad æqualitatẽ proportione, rectangulum sub extremis A D, B F æquale erit rectangulo sub medijs D E, A B. nam cum in fine resolutionis æqualitas ad proportionem sit reuocata; in principio demonstrationis proportio ad æqualitatem, resoluenda est, quod enim postremum est in resolutione, id in compositione primum esse debet. Cum igitur rectangulum A D, B F quod constat rectangulis A C, B F C D, B F, æquale sit rectangulo D E, A B, cui æquatur rectangulum C E, A B minus rectangulo C D, A B, erit rectangulum A C, B F vnà cum rectangulo C D, B F æquale rectangulo C E, A B, minus rectangulo C D, A B. addatur vtrique parti rectangulum C D, A B, quia in resolutione detractum fuit, ergo rectangulum A C, B F vnà cum rectangulis C D D B F, C D, A B, æquale erit rectangulo C E, A B; hoc est rectangulo C A B, sunt enim æquales A C, C E. auferatur vtrinque rectangulum A C, B F, additum enim fuit in resolutione; ergo rectangulum C D, B F vnà cum rectangulo C D, A B, hoc est rectangulum C D, A F, æquabitur rectangulo C A B, minus rectangulo A C, B F, hoc est æquabitur rectangulo C A G, & reuocata ad proportionem æqualitate, cum in resolutione proportio ad æqualitatem sit resoluta, erit vt D C ad C A, hoc est vt R ad S, ita A G ad A F. Datæ igitur A B adiecta est B F, quarum differentia ad aggregatum rationem habet vt R ad S. quod erat faciendum.

## Conſpectus Reſolutionis & Compoſitionis.

A

| *Principium Reſolutionis* | | *Finis Compoſitionis* | |
|---|---|---|---|
| | | hoc eſt R S AG AF | |
| R S B—A | B ✣ A | DC | CA |
| ad æqualitatem | | ad proportionem | |
| R in B ✣ R in A | S in B—S in A | hoc eſt VCDAF ✣VCDAB VCDBF | hoc eſt VCAG —VACBF VCAB |
| Addatur S in A | | auferatur VACBF | |
| R in B ✣ R in A ✣ S in A | S in B | ✣VCDAB ✣VCDBF VACBF | hoc eſt VCAB VCEAB |
| auferatur R in B | | addatur VCDAB | |
| R in A ✣ S in A seu R ✣ S in A | S in B—R in B S—R in B. | ✣VCDBF hoc eſt VACBF VADBF | —VCDAB hoc eſt VCEAB VDEAB |
| ad proportionem | | ad æqualitatem | |
| R ✣ S | S—R B A | AD | DE AB BF |

B

C

| *Finis Reſolutionis* | *Principium Compoſitionis* |
|---|---|

### Scholium.

Satis eſt per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis inueniſſe demonſtrationem, neque ad eam explicandam neceſſe eſt omnino Reſolutionis veſtigia ſequi; poteſt enim ipſa demonſtratio, cognitis iam medijs alia quoque via aliquando clariore, atque adeo elegantiore perfici; ſed cum de Reſolutione, & Compoſitione mihi agendum ſit, vt propoſui à greſſibus Reſolutionis in Compoſitionibus ſeu demonſtrationibus non recedam; licet ipſas demonſtrationes rudes, & incultas prout ex Reſolutionibus naſcentur expoſuero, ſic enim apertius patebit quomodo demonſtratio per filium Reſolutionis procedat.

D

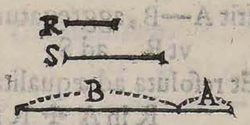
Idem autem caſus alia quoque via breuiori, ac faciliori poterit, & reſolui, & componi ſine vllo à proportione ad æqualitatem tranſitu; quamuis non appareat quomodo magnitudines datæ à quæſita ſeparari poſſint, ſeruata proportione quacunque; nam ſatis eſt, vt tres proportionis termini conſtent ex datis magnitudinibus, quod in Caſibus ſimilibus commodè fieri poteſt; quartus autem terminus etiam ſi conſtet ex dato & quæſito, nihil refert.

Altera



A

## Altera Reſolutio eiuſdem caſus.




Sit data recta linea B, & oportet facere quod imperatum eſt. Factũ iam ſit, & adiuncta de qua quæritur eſtò A. Exceſſus igitur quo data ſuperat adiunctam erit B—A aggregatum vero earundem B ✣ A & erit

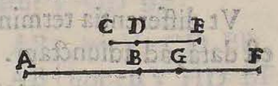
vt R ad S ita B—A ad B ✣ A

Et componendo erit vt R ✣ S ad S ita B2 ad B ✣ A.

### Poriſma.

B Vt aggregatum terminorum rationis datæ, ad terminum ſecundum, ita eſt data dupla ad compoſitam ex data, & adiuncta.

## Altera Compoſitio eiuſdem caſus.




Sit data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam adiungere, vt exceſſus quo data ſuperat adiunctam, ad compoſitam ex data, & adiuncta ſit, vt C D ad D E, quarum C D ſit minor. Duplicetur A B in F, & ponantur in directum C D, D E, & fiat vt C E ad E D, ita A F ad aliam, quæ ſit A G, ea maior erit, quam A B dimidia videlicet ipſius A F, quoniam & E D maior eſt, quàm dimidia C E, ponitur enim C D minor, quàm D E. Itaque factum

C eſt vt docet Poriſma. Rectam autem B G problema efficere, ſic demonſtrabimus. Quoniam enim vt C E ad E D, ita eſt A F ad A G, erit diuidendo, vt C D ad D E, ita F G ad G A, cum enim in reſolutione factus ſit tranſitus per compoſitionem rationis, in demonſtratione fieri debet per diuiſionem rationis, vt dictum eſt in antecedenti problemate, ſed F G eſt exceſſus, quo B F, vel A B ſuperat ipſam B G, ergo vt C D ad D E, ita erit exceſſus, quo A B ſuperat B G, ad compoſitam ex A B, B G, data videlicet, & adiuncta. Quare factum eſt quod oportebat.

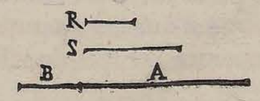
## Conſpectus Reſolutionis, & Compoſitionis.

D

| *Initium Reſolutionis* | | *Finis Compoſitionis* | |
|---|---|---|---|
| R S | B—A B ✣ A | diuidendo | CD DE FG GA |
| componendo R ✣ S | S B2 | B ✣ A | CE ED AF AG |

| *Finis Reſolutionis* | *Initium Compoſitionis* |
|---|---|

## Reſolutio ſecundi caſus.




Sit data recta linea B, ratio autem, vt R ad S minoris ad maius. Oportet ipſi B alteram rectam adiungere, vt exceſſus quo adiuncta ſuperat

perat datam, ad aggregatum earundem sit, vt R ad S. A

Sit factum, & adiuncta esto A, excessus igitur, quo adiuncta superat datam, erit A—B, aggregatum vero earundem A ✣ B, & erit

vt R ad S ita A—B ad A ✣ B.

Et resoluta ad æqualitatem proportione

R in A ✣ R in B æquabitur S in A—S in B

addito vtrique parti S in B

R in A ✣ R in B ✣ S in B æquabitur S in A.

Et detracto R in A

R in B ✣ S in B æquabitur S in A—R in A.

Seu quod idem est R ✣ S in B æquabitur S—R in A.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, erit B

vt S—R ad R ✣ S ita B ad A.

## Porisma.

Vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita est data, ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

## Compositio secundi casus.

SIt data recta linea A B, cui oporteat alteram re- H C D E
ctam apiungere, vt excessus quo adiuncta supe- A B G F
rat datam ad aggregatum earundem sit, vt C D C
ad D E, minor nempe ad maiorem. Duplicetur E D
in H, & fiat vt H C ad C E, ita A B ad aliam, quæ sit B F, hoc est, vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita data ad adiunctã, sic enim Porisma fieri docet. Nunc autem ostendendum est, rectum B F problema efficere. Sumatur B G æqualis B A, igitur B F superat ipsam A B excessu G F. Et quoniam est vt H C ad C E, ita A B ad B F, rectangulum sub medijs C E, A B, hoc est duo rectangula C D A B, D E A B æqualia erunt rectangulo sub extremis H C, B F, hoc est rectangulo H D, B F, minus rectangulo C D, B F, addito vtrique parti rectangulo C D, B F: demptum enim fuit in Resolutione, ergo rectangula C D B F, C D A B, D E A B, æqualia erunt rectangulo H D B F, hoc est D E B F, & ablato vtrinque rectangulo D E A B, seu D E B G, fuit enim additum in resolutione, rectangula C D B F, C D A B, hoc est rectangulum C D A F, æquabitur rectangulo D E B F, minus rectangulo D E B G. hoc est æquabitur rectangulo D E G F, & æqualitate ad proportionem reuocata, fuit enim in resolutione proportio ad æqualitatem resoluta, erit vt C D ad D E, ita G F ad F A, hoc est ita excessus quo B F adiuncta superat A B datam, ad aggregatum earundem. Datæ igitur A B adiuncta est B F vt faciendum erat. D

R
S
A B

Conspe-



A

## Conspectus Resolutionis & Compositionis.

*Initium Resolutionis* — *Finis Compositionis*

R S | A—B | A ✣ B — C D | D E | G F | F A

ad æqualitatem — ad proportionem

| | | |
|---|---|---|
| R in A ✣ R in B | S in A—S in B | hoc est V C D A F — hoc est V D E G F |
| | | ✣ V C D A B — —V D E B G |
| | | V C D B F — V B E B F |

Addatur S in B — auferatur V D E A B seu V D E B G

B

| | | | |
|---|---|---|---|
| R in A ✣ R in B ✣ S in B | S in A | ✣ V D E A B<br>✣ V C D A B<br>V C D B F | hoc est V D E B F<br>V H D B F |

auferatur R in A — addatur V C D B F

| | | | |
|---|---|---|---|
| R in B ✣ S in B | S in A—R in A | ✣ V D E A B<br>hoc est V C D A B<br>V C E A B | —V C D B F<br>hoc est V H D B F<br>V H C B F |
| seu quod idem est | | | |
| R ✣ S in B | S—R in A | | |

ad proportionem — ad æqualitatem

C S—R | R ✣ S | B | A — H C | C E | A B | B F

*Finis Resolutionis* — *Initium Compositionis*

V. significat hîc

Et hic Casus poterit resolui, & componi, etiam si nullus à proportione ad æqualitatem fieret transitus, hac ratione.

## Altera Resolutio secundi casus.

ISdem datis quæratur adiuncta, vt in antecedenti resolutione. erit R / S / B A

vt R ad S ita A—B ad A ✣ B

D Et conuertendo vt S ad R ita A ✣ B ad A—B

Et diuidendo vt S—R ad R ita B 2 ad A—B

## Porisma.

Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum priorem, ita est data dupla ad excessum, quo adiuncta superat datam.

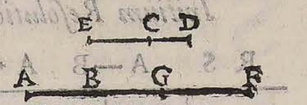
Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Altera

A

## Altera Compositio secundi casus.

SIt datæ rectæ A B addenda altera recta, vt excessus adiectæ supra datam, ad aggregatum earundem sit, vt C D ad D E. Duplicetur A B in G, & fiat, vt E C ad C D, differentia videlicet terminorum rationis datæ, ad terminum priorem, ita A G ad aliam, quæ sit G F, sic enim Porisma docet. Dico B F Problema effecisse. Quoniam enim, vt F C ad C D, ita est A G ad G F, erit componendo, vt E D ad D C, ita A F ad F G, & conuertendo, vt C D ad D E, ita G F ad F A. Datæ igitur A B adiecta est B F, cuius excessus G F supra datam A B se habet ad A F, compositam ex data, & adiecta, vt C D ad D E; quod facere oportebat.




B

## Conspectus Resolutionis, & Compositionis.

| *Initium Resolutionis* | | *Finis Compositionis* |
|---|---|---|
| R S | A — B A + B | C D — D E G E — F A |
| | conuertendo | conuertendo |
| S R | A + B A — B | E D D C A F F G |
| | diuidendo | componendo |
| S — R R | B 2 A — B | E C C D A G G F |
| *Finis Resolutionis* | | *Initium Compositionis* |

C

## Problema IV.

*Datam rectam lineam in duas partes diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant. Oportet autem latus quadrati dati minus esse data secunda.*

### Resolutio.

SIt data recta linea B secanda in duas partes, vt quadratum partis maioris superet quadratum minoris partis quadrato datæ Z. Ponatur factum esse, & differentia partium esto A




D ergo B + A erit* maior pars dupla, & B — A dupla minor, vnde simpla pars maior erit B + A ½, simpla minor B ½ — A ½. Quadratum autem partis maioris est B Q ¼ + A Q ¼ + B in A ½, quadratum vero partis minoris est B Q ¼ + A Q ¼ — B in A ½. ablato igitur quadrato partis minoris à quadrato partis maioris, residuum erit B in A, idq; æquale est Z Q, differunt enim partium quadrata per quadratum Z datæ. ergo æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt B Z A.

Coroll. I. Probl. I.

Porif-



A

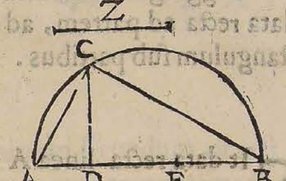
## Porisma.

Latus quadrati dati medium proportionale est inter datam rectam, quæ secanda proponitur, & differentiam partium eiusdem.

Datur ergo differentia partium quæsita.

### Compositio.

SIt data recta linea A B secanda in duæs partes, vt quadratum partis maioris superet quadratũ partis, minoris quadrato datæ Z, quæ minor sit ipsa A B. Describatur in A B semicirculus, in quo




B accomodetur A C æqualis Z, & à puncto C demittatur in A B perpendicularis G D & secetur D B bifariam in E; differentia igitur partium A E E B erit A D, & ducta C B, angulus A C B in semicirculo rectus erit; quare A C cui æqualis est Z erit* media linea proportionalis inter B A A D, itaque secta est A B in E, prout Porisma docet. Nunc ostendendum est differentiam quadratorum A E E B, æquari quadrato Z. Quoniam igitur proportionales sunt B A A C A D, quadratum mediæ A C æquale erit rectangulo B A D, sed rectangulum B A D comprehensum sub tota B A, & A D differentia partium A E E B, æquale* est differentiæ quadratorum A E E B, ergo & quadratum A C æquale erit eidem differentiæ quadratorum A E E B. Secta est igitur

C A B in E vt Problema postulat quod faciendum erat.

Coroll. prop. 8. sexti

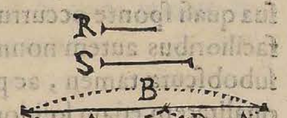
Theor. I

## Problema V.

*Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium rationem habeat datam.*

### Resolutio.

SIt data recta linea B secanda in duas partes, vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium sit vt R ad S.




D Sit iam secta, & pars ad cuius quadratum datam rationem habet rectangulum sub partibus esto A, ergo pars altera erit B — A, atque erit

vt R ad S, ita B in A — A Q. ad A Q. hoc est ita rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium.

Quare resoluta ad æqualitatem analogia

R in A Q æquabitur S in B in A — S in A Q

Applicentur omnia ad A vt aliqua magnitudo sit omnino data, cui magnitudines incertæ comparabuntur, ergo

R in A æquabitur S in B — S in A

Addito

Addito vtrique parti S in A, vt cognita ab incognitis seperentur. A

R in A ✣ S in A æquabitur S in B.

Seu quod idem est R ✣ S in A æquabitur S in B,

Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

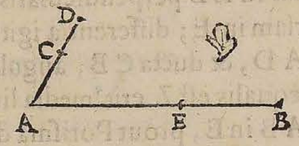
R ✣ S  S  B  A

## Porisma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum secundum, ita est data recta ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum sub partibus. Datur ergo pars quæsita.

## Compositio. B

SIt data recta linea A B, quam oportet secare vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium ratione habeat vt D C ad C A. Ponantur in directum D C C A, & fiat vt A D ad A C, ita A B ad aliam quæ sit A E. sic fieri Porisma iubet, ergo rectangulum D A E sub extremis, hoc est duo rectangula D C A E, & C A E, æqualia erunt rectangulo C A B sub medijs. auferatur vtrinque rectangulum C A E, ergo rectangulum D C A E æquale erit rectangulo C A B, minus rectangulo C A E, hoc est æquale erit rectangulo C A E B. Ducantur omnia plana in A E vt fiant solida, in resolutione enim omnia solida depressa sunt ad plana applicatione eidem A E, ergo solidum sub D C & quadratum A E æquale erit solido sub C A A E E B, & reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt D C ad C A, ita rectangulum A E B ad quadratum A E. Secta est igitur A B in E, vt rectangulum A E B ad quadratum A E rationem habeat, vt D C ad C A. quod erat faciendum.




## Scholium.

Plures viæ sunt quibus Problemata resoluuntur; aliæ quidem faciles, quæ sua quasi sponte occurrunt; aliæ vero cum aliqua difficultate inueniuntur. Ex facilioribus autem nonnunquam oriuntur demonstrationes, etsi verissimæ, subobscuræ tamen, ac parùm vsitatæ, qualis est superior demonstratio per æqualitatem etiam solidorum procedens, quibus in planorum Problematũ demonstrationibus non est vtendum; initium enim quodammodo videtur ad planorum Problematum demonstrationes perficiendas solida cõtrahere, hoc est ea per improprium genus demonstrare. Re igitur in demonstratione plani problematis, solidis vtar, idem Problema aliter resoluam & componam. D

## Altera Resolutio eiusdem Problematis.

SIt data recta linea B, quam oportet secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat vt R ad S.
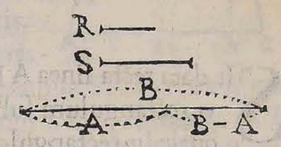
Secta iam sit & pars ad cuius quadratum datam rationẽ habet rectangulum



A gulum sub partibus esto A, quemadmodum positum est in antecedenti resolutione, ergo altera pars erit B—A. Quoniam igitur est vt R ad S, ita rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis, erit

vt R ad S ita B in A — A Q ad A Q

& componendo erit, vt R ✣ S ad S, ita B in A ad A Q: Sed B in A ad A Q est vt B ad A, sunt enim eiusdem altitudinis rectangulum B in A & A quadratum, cùm sit vtriusque altitudo A; ergo erit




vt R ✣ S ad S, ita B ad A

### Porisma.

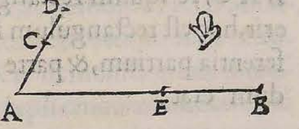
B Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum secundum, ita est recta data, ad partem ad, cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum sub partibus.

Illud ipsum est, quod per antecedentem resolutionem inueniebatur. Datur ergo pars quæsita.

### Altera Compositio eiusdem Problematis.

SIt data recta linea A B, quam oportet secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat, vt D C ad C A. Ponantur in directum A C C D, & fiat, vt A D ad A C, ita A B ad aliam, quæ sit A E, sic fieri Porisma docet, ergo diuidendo erit, vt D C ad C A, ita B E ad E A, ita est rectangulum B E A ad quadratum E A, cùm sint eiusdem altitudinis E A, ergo vt D C ad C A, ita erit rectangulum B E A ad quadratum E A. Secta est igitur A B in E, vt Problema postulat. quod erat faciendũ.

C




### Problema VI.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & parte minore æquale sit rectangulo sub differentia partium, & parte maiore.

D Resolutio.

SIt B data recta secanda, vt petitur. Ponatur iam factum. & pars maior, de qua quæratur esto A, ergo B— A erit pars minor, harum partium differentia erit A 2 — B; si enim ab A auferatur B —A, remanebit A 2 —B. Quoniam igitur rectangulum sub tota, & parte minori æquale est rectangulo sub differentia partium, & parte maiori.




B Q — B in A æquabitur A Q 2 — B in A

Addatur vtrobique B in A, ergo

B Q æquabitur A Q 2

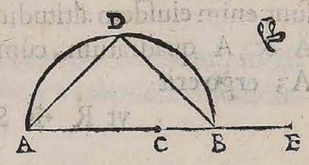
C Po-

A

Porisma.

Quadratum totius rectæ secandæ duplum est quadrati à maiore parte descripti. Datur ergo maior pars quæsita.

Compositio




SIt data recta linea A B, quam oporteat secare, vt rectangulum sub tota, & parte minori æquale sit rectangulo sub differentia partiũ, & parte maiori. Describatur in A B semicirculus, cuius circumferentia secetur bifariam in D, & connectantur A D, D B. quadrata igitur æqualium A D, D B * æqualia erunt quadrato A B, angulus enim A D B in semicirculo rectus est, vnde quadratum A B duplum erit quadrati A D. Fiat ergo A C æqualis A D, & factũ erit quemadmodum Porisma docet: secta est enim A B in C, vt quadratum ipsius A B duplum sit quadrati A C. Nunc ostendendum est eam sectionem Problema efficere. Producatur enim C B in E, vt sit C E æqualis C A, itaque differentia partium A C, C B erit B E. Et quoniam quadratum A B duplum est quadrati A C; hoc est æquale rectangulo E A C, si auferatur commune rectangulum B A C; reliquum rectangulum A B C, reliquo rectangulo E B, A C, æquale erit, hoc est rectangulum sub tota, & parte minori æquale rectangulo sub differentia partium, & parte maiori. Secta est igitur A B in C, & quod faciendum erat.

47. primi

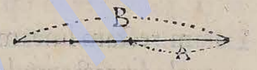
B

C

Problema VII.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium, fit quadrato.

Resolutio.




SIt data recta linea B secanda vt petitur. Ponatur iam secta, & differentia partium esto A ergo B ✻ A * erit pars maior dupla, & B — A pars minor dupla. Et quoniam rectangulum sub partibus æquale est quadrato differentiæ partium, rectangulum sub partibus duplis æquale erit quadrato differentiæ partium duplæ. hoc est

Corol. 1. Probl. 1.

D

B Q — A Q æquabitur A Q 4

Addito vtrique parti A Q, vt quæsitum à dato separetur

B Q æquabitur A Q. 5

Porisma.

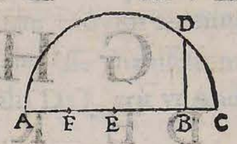
Quadratum totius secandæ quintuplum est quadrati differentiæ partium. Datur ergo differentia partium quæsita.

Com-



A

Compositio.




SIt data recta linea A B, quã oportet secare, vt rectangulum sub pedibus æquale sit quadrato differẽtiæ partium. Producatur A B in C, vt B C sit æqualis quintæ parti ipsius A B, & in A C describatur semicirculus A D C, & ex B erigatur ad A C perpendicularis B D, cui æqualis fiat B E, & reliqua E A secetur bifariam in F: differẽtia igitur partium A F, F B erit E B, & cũ sit A B quintupla ipsius B C, quadratum A B quintuplum erit rectanguli A B C, hoc est quadrati B D, vel B E. Secta est igitur A B in F, prout Porisma docet. Rectangulũ autẽ A F B sub partibus æquale esse quadrato E B differentiæ partium vt Problema requirit, sic demonstrabo.

B

Quoniam enim quadratum A B quintuplum est quadrati B E, seu æquale est quintuplo quadrati B E, ablato vtrinq; quadrato B E, quadratũ A B minus quadrato B E, * æquale est quadruplo rectangulo A F B, cùm sit B E differẽtia ipsarum A F, F B, ergo quadruplum rectangulum A F B æquabitur quadruplo quadrato B E, & consequenter simplum simplo. Secta est igitur A B in F, vt rectangulum A F B sub partibus æquale sit quadrato E B differentiæ partium; quod faciendum erat.

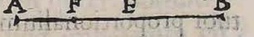
Theor. 3.

Si quis voluerit peracta Problematis resolutione Porisma, quod ex ipsa resolutione deducitur, in formam Theorematis proponere, ac demonstrare; demonstratio fiet per repetitionem vestigiorũ resolutionis, directo ordine non retrogrado. Plurimis autem Problematibus potest satisfieri demonstratione Porismatis tantum, præcipuè quando Problema numero explicandum est; exemplũ subijciam quo sit res dilucidior. Itaque Porisma proximè præcedens proponetur in formam Theorematis, & demonstrabitur hac ratione.

C

Theorema.

Si recta linea secetur, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium fit quadrato, quadratum totius rectæ quintuplum erit quadrati differentiæ partium.




D

SEcta sit recta A B in F, ita vt rectangulum A F B æquale sit quadrato differẽtiæ partium A F, F B.

Dico quadratum A B quintuplum esse quadrati differẽtiæ ipsarum partium A F, F B: à maiori enim parte, quæ sit F B auferatur F E æqualis F A, reliqua E B erit differentia partium A F, F B. Et quoniam rectangulum A F B ponitur æquale quadrato E B, quadruplum rectãgulum A F B quadruplo quadrato E B æquale erit, sed quadruplum rectangulum A F B * æquale est quadrato A B, minus quadrato E B, ergo quadratũ A B, minus quadrato E B, æquale erit quadruplo quadrato E B, addito vtriq; parti quadrato E B, quadratum A B æquale erit quintuplo quadrato E B, hoc est quadratũ A B, quintuplum erit quadrati E B. quod erat ostendendum.

Theor. 3.

# MARINI GHETALDI

## DE RESOLVTIONE, & Compositione Mathematica.

### LIBER SECVNDVS.

INTERDVM accidit fractionem magnitudini integræ æquari, eamq. oportere in sua membra resolui; ita vt æqualitas in proportionem transmutetur: id enim plerumq; fieri expedit, ne plena in progressu resolutionis ad solida, vel etiam ad plano-plana ascendant. Nam si fractio plana reducenda esset ad denominationem integram; manente inter partes æqualitate, oporteret omnia plana tùm fractionem, tùm quibus æquatur ipsa fractio ducere in denominatorem fractionis; quo onere, æqualitas quidem non immutaretur, sed plana ad solida, vel ad plano-plana ascenderent, quibus in planorum Problematum resolutionibus, & compositionibus non est vtendum ob rationes in scholio quinti Problematis libri primi allatas. Scire autem oportet, non omnem fractionem posse in sua membra resolui, nisi eam cuius numerator resolubilis est in duas magnitudines, quæ ductu suo efficiunt ipsum numeratorem. Dicendum igitur est quomodo fractio magnitudini integræ æqualis numeratorem habens resolubilem in duas magnitudines, ductu suo ipsum numeratorem efficientes, resoluatur in sua membra, vt æqualitas in proportionem transmutetur.

Resoluitur dicta fractio in sua membra hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui æquatur ipsa fractio, ponantur pro extremis quatuor proportionalium terminis; magnitudines verò, quæ ductu suo efficiũt numeratorem, ponantur pro medijs, vel contra magnitudines numeratorem efficientes, ponantur pro extremis; denominator verò & magnitudo integra pro medijs, seruata hac conditione, vt primus terminus & secundus sint eiusdem generis, quia magnitudines diuersi generis non possunt inter se comparari. Constitui quatuor proportionales terminos quoniam & si tres etiam possunt constitui, medium pro duobus intelligo, is enim bis sumitur. quæ igitur, vt fiat euidentiora. Proponatur $\frac{B\,D}{Q}$ æquari A, & oporteat fractionem $\frac{B\,D}{Q}$ in sua membra resoluere, vt æqualitas in proportionem transmutetur. Fiant extremi termini D & A, medius vero B, eos autem proportionales esse ma-



manifestum est. nam cum sit vt D ad B, ita B ad $\frac{B\,Q}{D}$, fractio autem $\frac{B\,Q}{D}$ æqualis A, erit, vt D ad B, ita B ad A. factum est igitur, quod imperabatur. Rursus $\frac{B\,C}{A}$ æquetur D Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A & D Q, medij vero B, & B Q, eos autem proportionales esse manifestum est, nam cum sit vt A ad B, ita B Q ad $\frac{B\,C}{A}$, & $\frac{B\,Q}{A}$ æqualis D Q, erit vt A ad B, ita B Q ad D Q. factum est igitur, quod oportebat.

Deinde $\frac{B\text{ in }D}{A}$ æquetur G, & sit resoluenda fractio, vt dictum est. Fiant extremi termini A & G, medij vero B & D. Quoniam igitur est, vt A ad B, ita D ad $\frac{B\text{ in }D}{A}$, & fractio $\frac{B\text{ in }D}{A}$ æqualis G, erit vt A ad B, ita D ad G.

Vel contra fiant extremi termini B & D, medij vero A & G. Quoniam igitur $\frac{B\text{ in }D}{A}$ ponitur æquari G, ductis omnibus in A, B in D æquabitur G in A, & æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt B ad G, ita A ad D. fractio igitur $\frac{B\text{ in }D}{A}$, cui æquabatur G, resoluta est in sua membra, & æqualitas transmutata in proportionem, quod faciendum erat. Item $\frac{B\text{ in }D}{A+G}$ æquetur F, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A + G & F, medij verò B & D, vel contra fiant extremi B & D, medij vero A + G & F, eos proportionales esse demonstrabimus eadem ratione qua supra.

Amplius $\frac{B\text{ in }D\text{ in }G}{A}$ æquetur F Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A, & F Q, medij vero B, & D in G, vel G, & B in D, vel etiam D & B in G. Quoniam igitur est, vt A ad B, ita D in G ad $\frac{in\ D\ in\ G}{A}$ ipsaque fractio æqualis F Q, erit vt A ad B, ita D in G ad F Q, & reliqua demonstrabuntur, vt supra. Similiter si medij termini ponantur pro extremis, extremi vero pro medijs, itidem proportionales erunt.

Item $\frac{B\text{ in }D+G\text{ in }D}{A}$ æquetur F, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A, & F, medij vero B + G & D, vel contra. Quoniam igitur est, vt A ad B + G, ita D ad $\frac{B\text{ in }D+G\text{ in }D}{A}$ eaque fractio æqualis est F erit vt A ad B + G ita D ad F. Quare factum est quod imperabatur.

Sed $\frac{BQ-DQ}{G}$ æquetur A, & oporteat iussum facere. Ponantur pro extremis terminis G & A; pro medijs vero B + D & B — D, vel contra. Quoniam igitur est, vt G ad B + D, ita B — D ad $\frac{BQ-DQ}{G}$, ipsaque fractio æqualis est A; erit vt G ad B + D, ita B — D ad A. Quare factum est quod oportuit.

Vel $\frac{BQ+DQ+B\text{ in }D^2}{A}$ æquetur F, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiant extremi termini A & F, medius verò B + D, eos autem proportionales esse manifestum est, nam cum sit, vt A ad B + D, ita B + D ad $\frac{BQ+DQ+B\text{ in }D^2}{A}$, ipsaque fractio æqualis sit F, erit vt A ad B + D, ita B + D ad F. Factum est igitur quod oportebat.

Denique $\frac{BQ\text{ in }DQ}{GQ}$ æquetur A Q, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiant extremi termini G Q, & A Q medius vero B in D. Quoniam igitur est, vt G Q ad B in D, ita B in D ad $\frac{BQ\text{ in }DQ}{GQ}$, ipsaque fractio æqualis est A Q, erit vt G Q ad B in D, ita B in D, ad A Q, factum est igitur quod imperabatur.

Vel fiant extremi termini, vt prius G Q, & A Q, medij verò B Q, & D Q. A. Eadem ratione ostendetur, vt G Q ad B Q, ita esse D Q ad A Q. factum est igitur quod oportebat.

Item $\frac{D \text{ in } G Q}{D - G}$ æquetur B Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini D — G, & B Q, medij verò D, & G Q. eadem ratione qua supra ostendetur, vt D — G ad D; ita esse G Q ad B Q.

Vel fiant medij termini G, & D in G. Quoniam igitur est, vt D — G ad G, ita D in G ad $\frac{D \text{ in } G Q}{D - G}$ ipsaque fractio æqualis est B Q; erit vt D — G ad G, ita D in G ad B Q. factum est igitur quod oportebat.

Eadem ratione omnes aliæ fractiones, quæ magnitudini integræ æquantur, numeratoremq. habent resolubilem in duas magnitudines, quæ ductu suo efficiunt ipsum numeratorem; poterunt in sua membra resolui, vt æqualitas in B proportionem transmutetur. Atque hæc quidem de transmutatione æqualitatis in proportionem per resolutionem fractionis sufficiant.

Fractiones autem quarum numerator non est resolubilis, vt dictum est, non possunt in sua membra resolui; poterit tamen æqualitas in proportionē transmutari hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui ipsa fractio æquatur, ponantur pro extremis trium proportionalium terminis; latus vero vniuersale numeratoris, ponatur pro medio. Exempli gratia proponatur $\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ æquari A, & oporteat æqualitatem in proportionem transmutare. Ponantur pro extremis terminis H & A; pro medio vero ponatur L. V. B in D ✣ F in G. Eos autem proportionales esse manifestum est; nam cum sit vt H ad L. V. B in D ✣ F in G, ita idem L. V. B in D ✣ F in G ad C $\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ ipsaque fractio æqualis sit A, erit vt H ad L. V. B in D ✣ F in G, ita idem L. V. B in D ✣ F in G. ad A. factum est igitur quod oportebat.

## Theorema I.

Si secentur duæ rectæ lineæ æquales, ita vt rectangulum sub partibus vnius æquale sit rectangulo sub partibus alterius; partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior videlicet maiori, minor minori.

SEcentur duæ rectæ AB, CD æquales in GH, sitq. rectangulum AGB æquale rectangulo CHD. Dico partes AG, GB partibus CH HD æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque AB, CD bifariam in punctis EF. Quoniam igitur sectæ sunt AB, CD in æqualia & non æqualia, rectangulum AGB vna cum quá- 1 secundi. drato EG* æquale est quadrato AE. Similiter & rectangulum CHD vna 3 secundi. cum quadrato FH* æquale quadrato CF, quæ quidem quadrata AE, CF æqualia sunt cum sint æquales rectæ AE, CF, ergo rectangulum AGB vnà cum quadrato EG æquale erit rectangulo CHD vnà cum quadrato FH; auferantur æqualia rectangula AGB, CHD, ergo reliquum quadratum EG reli-



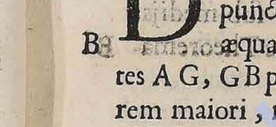



A reliquo quadrato FH æquale erit, vnde & recta EG æqualis rectæ FH, & per additionem, vel subductionem æqualium æqualibus, erit AG æqualis CH, & GB æqualis HD, quod erat ostendendum.

## Theorema II.

Si duæ rectæ lineæ æquales sectæ fuerint, atque quadrata partium vnius simul sumpta, æqualia fuerint quadratis partium alterius simul sumptis, partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior maiori, minor minori.

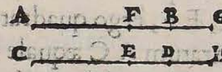
DVæ rectæ AB, CD æquales secentur in punctis GH, & sint quadrata AG, GB æqualia quadratis CH, HD. Dico partes AG, GB partibus CH, HD æquales esse maiorem maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque AB, CD bifariam in EF. Quoniam igitur quadratá AG, GB* dupla sunt quadratorum AE, 2 secundi. EG, & quadrata CH, HD* dupla quadratorum CF, FH, erunt quadrata 2 secundi. AE, EG quadratis CF, FH æqualia; sed quadratum AE æquale est quadrato CF, ergo & reliquum quadratum EG reliquo quadrato FH æquale erit; vnde & recta EG æqualis rectæ FH; quare per additionem æqualium æqualibus, erit & AG æqualis CH, & reliqua GB æqualis reliquæ HD. Quare constat propositum.




## Theorema III.

Si à duabus rectis lineis abscindantur partes æquales, & rectangulum sub tota, & parte reliqua vnius æquale sit rectangulo sub tota, & reliqua parte alterius; tota toti, & reliqua pars, reliquæ æqualis erit.

ARectis AB, CD abscindantur partes æquales BE, DF, sitq. rectangulū BAE æquale rectāgulo DCF. Dico AB, CD æquales esse, & æquales AE, CF. Secentur enim EB, FD bifariam in GH. Quoniá igitur rectangulum BAE ponitur æquale rectangulo DCF, & quadratum EG æquale est quadrato FH, rectan- D gulum BAE vnà cum quadrato EG æquale erit rectangulo DCF vnà cum quadrato FH; sed quoniam sectæ sunt EB, FD bifariam, & ipsis in rectum adiectæ sunt EA, FC, rectangulum BAE vnà cum quadrato EG,* æquale est quadrato AG. similiter, & rectangulum DCF vnà, secundi. cum quadrato FH* æquale quadrato CH; quadratum igitur AG æqua- 6 secundi. le erit quadrato CH vnde & recta AG æqualis rectæ CH, & additis æqualibus GB, HD tota AB æqualis erit toti CD, vel ablatis æqualibus EG, FH, reliqua EA, reliquæ FC æqualis erit. quod erat ostendendum.



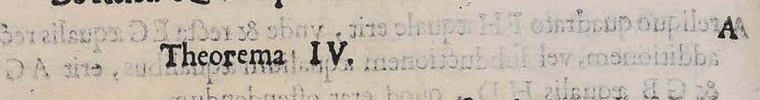

Theo-

A

## Theorema IV.

Si à duabus rectis lineis abscindantur partes æquales, & sit reliqua pars primæ ad reliquam secundæ, vt tota secunda ad totam primam; reliquæ quoque partes æquales erunt.

A Rectis A B, C D abscindantur partes æquales B E, D F; sitque A E ad C F, vt C D ad A B. Dico A E, C F æquales esse. Quoniam enim ponitur A E ad C F, vt C D ad A B; rectangulum B A E sub extremis * æquale erit rectangulo D C F sub medijs; ponuntur autem & partes E B, F D æquales, ergo ex antecedente Theoremate reliqua pars A E, reliquæ C F æqualis erit.




* 36 sexti

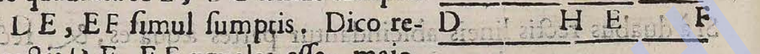
B

## Theorema V.

Si duo rectangula fuerint æqualia; fuerint autem & quadrata laterum primi æqualia quadratis laterum secundi. Latera primi lateribus secundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

Theorema hoc demonstraui in libro variorum hic quoque eamdem demonstrationem transferam.

SInt æqualia rectangula A B C, D E F, & æqualia quoque quadrata A B, B C simul sumpta quadratis D E, E F simul sumptis. Dico rectas A B, B C rectis D E, E F æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori.




Quoniam enim ponuntur æqualia rectangula A B C, D E F, ea quoque dupla æqualia erunt, sed & quadrata A B, B C ponuntur æqualia quadratis D E, E F, ergo quadrata A B, B C vna cum duplo rectangulo A B C, hoc * est quadratum A C æquale erit quadratis D E, E F vnà cum duplo rectangulo D E F, hoc est * æquale erit quadrato D F; quare, & recta A C æqualis erit, rectæ D F. Secentur autem ipsæ A C, D F bifariam in G, & H. erunt igitur A G, D H æquales, & æqualia eorum quadrata, sed quadratum A G * æquale est rectangulo A B C vnà cum quadrato G B, & quadratum D H * æquale rectangulo D E F vnà cum quadrato H E, ergo rectangulum A B C vna cum quadrato G B, æquale erit rectangulo D E F, vna cum quadrato H E, demptis æqualibus rectangulis A B C, D E F, reliquum quadratum G B, reliquo quadrato H E æquale erit, vnde & recta G B æqualis rectæ H E, & per additionem, & subductionem æqualium æqualibus erit A B æqualis D E, & B C æqualis E F, quod erat ostendendum.

4 secundi

4 secundi

5 secundi

Theo-

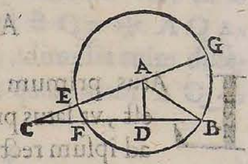


A

## Theorema VI.

Rectangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base.

SIt triangulum D B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, & cētro A interuallo A B vnius crurum describatur circulus secans alterum erit A C etiam productum hinc inde in punctis E G; basim vero B C in F. crurum igitur A B, A C differentia erit C E; aggregatum verò




B G C, differentia autem segmentorum A D, D C erit C F, * sunt enim B D, D F æquales. Dico rectangulum E C G æquale esse rectangulo F C B, hoc manifestum est ex propos. 36. & 35. tertij elementorum.




## Theorema VII.

Differentia crurum trianguli se habet ad differentiam segmentorum basis, vt basis ad aggregatum crurum.

C REsumatur antecedentis Theorematis figura. Dico E C ad C F esse vt C B ad C G. Quoniam enim rectangulum E C G * æquale est rectangulo F C B, proportionales erunt E C, C F, C B, C G. quare constat propositum.

36. & 35. tertij

## Problema I.

Dato quadrato, æquale rectangulum inuenire, cuius latera datam teneant rationem.

SIt datum B quadratum, cui æquale oporteat rectangulum inuenire habens latera in ratione, vt R ad S. Sit iam inuentum rectangulum illud, eiusque latus primum esto A, ergo latus secundum erit $\frac{S \text{ in } A}{R}$; est enim vt R ad S, ita A latus primum ad latus secundum. At rectangulum sub lateD ribus ponitur æquale B quadrato, ergo

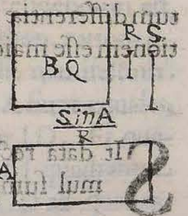
$\frac{S \text{ in } A Q}{R}$ æquabitur B Q

Resoluatur fractio $\frac{S \text{ in } A Q}{R}$ in sua membra, vt æqualitas in proportionem trāsmutetur, quemadmodum in principio huius libri docuimus, ergo proportionales erunt

R S A Q B Q

Et conuertendo proportionales erunt

S R B Q A Q




Po-

A

### Porisma.

Vt terminus secundus rationis datæ ad terminum primum, ita est quadratum datum ad quadratum lateris primi rectanguli de quo quæritur.

Datur ergo latus primum rectanguli quæsiti.

### Alia eiusdem Problematis Resolutio.

LAtus primum rectanguli esto A. Quoniam igitur in omni rectangulo est, vt latus primum ad latus secundum, ita quadratum lateris primi ad ipsum rectangulum; sunt enim eiusdem altitudinis, cum sit vtriusq; altitudo latus primum, latus autem primum rectanguli quæsiti ad latus secundum ponitur vt R ad S; ergo vt R ad S ita erit A Q ad rectangulum quæsitum, hoc est ad B Q: huic enim ponitur æquale rectangulum illud, & conuertendo erit B

vt S ad R ita B Q ad A Q.

Datur ergo latus primum rectanguli quæsiti, idq. in eadem ratione atque in antecedenti Resolutione.

### Compositio.

SIt dato quadrato A, æquale rectangulum inueniendũ, cuius latera sint, vt R ad S. Fiat vt S ad R, ita quadratum A ad aliud quadratum, cuius latus sit B C, deinde vt R ad S, ita fiat B G ad aliam, quæ sit C D, & ex B C, C D fiat rectangulum B D. Sic fieri docet vtraque resolutio. Demonstratio autem fiet per earum regressum; idem enim est vtriusque resolutionis progressus. Quoniam igitur est vt S ad R, ita quadratum A ad quadratum B C, ex constructione, erit conuertendo, vt R ad S, hoc est vt B C ad C D, ita quadratum B C ad quadratum A; sed vt B C ad C D, ita est quadratum B C ad rectangulum B D; cùm sint eiusdem altitudinis B C, ergo rectangulum B D quadrato A æquale erit, atque est B C ad C D, vt R ad S, ex constructione. Inuentum est igitur rectangulum B D, quale inueniendum proponebatur. D




### Problema II.

Datam rectam lineam secare, vt partium quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.

### Resolutio.
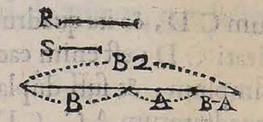
SIt data recta linea B 2 secanda in duas partes, quarum quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant

vt



A vt R ad S, maioris nempe ad minus.

Sit iam secta, vt petitur, & dimidia differentia partium esto A, ergo B + A * erit pars maior, & B — A pars minor, harum partium quadrata simul sumpta ad quadratum differentiæ partium, rationem habent, vt R ad S, sed quadratum ex B + A est B Q + A Q + B in A 2, quadratum verò ex B — A est B Q + A Q — B in A 2. eorum summa est B Q 2 + A Q 2. Quadratum autem totius differentiæ partium est A Q 4, dimidia enim differentia ponitur A; itaque tota differentia est A 2, eius quadratum A Q 4, ergo erit




Corol. 2. Prop. 1. lib. 2.

vt R ad S ita B Q 2 + A Q 2, ad A Q 4

B Et duplatis antecedentibus, erit vt R 2, ad S, ita B Q 4 + A Q 4, ad A Q 4, & ita B Q + A Q ad A Q.

Est enim eadem ratio simpli ad simplum, quæ quadrupli ad quadruplum. denique diuidendo erit

vt R 2 — S ad S ita B Q ad A Q.

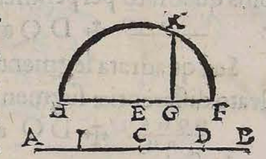
### Porisma.

Vt excessus quo primus rationis datæ terminus duplus superat secundum, ad ipsum secundum, ita est quadratum dimidiæ datæ, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium.

C Datur ergo dimidia differentia partium, de qua quæritur.

### Compositio.

SIt data recta linea A B secanda in duas partes, quarum quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium sint, vt E F ad F C, quarum E F sit maior. Duplicetur F E in H, & in F H describatur semicirculus, in quo erigatur ex G perpendicularis G K, vsque ad circumferentiam: deinde secetur A B bifariam in C, & fiat vt H G ad G K, ita A C ad aliam, quæ sit C D. Secta est igitur A B sicuti Porisma docet. Nam cum sit H G ad G K, vt A C ad C D, erit D & quadratum H G ad quadratum G K, sicut quadratum A C ad quadratum C D. Sed quadratum H G ad quadratum G K est vt H G ad G F, ergo vt H G ad G F, ita erit quadratum A C ad quadratum C D; quod Porisma requirit. Nunc ostendendum est, quadrata partium A D, D E ad quadratum differentiæ earumdem, rationem habere, vt E F ad F G. id autem ex resolutionis regressu, ita fit manifestum.




Ponatur ipsi C D æqualis C I, & cùm sint æquales C B, C A fiunt æquales, & reliquæ B D, A I, vnde differentia partium A D, D B erit I D. Et quoniam ostensum est, vt H G ad G F, ita esse quadratum A C ad quadratum A D, erit componendo, vt H F ad F G, ita quadrata A C, C D ad quadratum

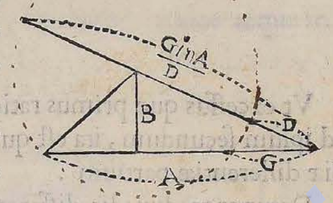
tum C D, & ita quadruplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D; est enim eadem ratio quadrupli ad quadruplum, quæ simpli ad simplum, & sub duplatis antecedentibus erit, vt E F ad F G, ita duplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D, hoc est ad quadratum I D; sed cum A B secta sit in æqualia in C, & non æqualia in D, quadrata A D, D B, * dupla sunt quadratorum A C, C D, ergo vt E F ad F G, ita erunt quadrata A D, D B ad quadratum I D. Secta est igitur A B data in D, vt problema postulat, quod erat faciendum. A

9. secundi

## Problema III.

Data perpendiculari, differentia crurum trianguli, & differentia segmentorum basis. inuenire triangulum. B

### Resolutio.




SIt data perpendicularis trianguli B, differentia crurum D, & differentia segmentorum basis G. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur inuentum esse & basis ipsius trianguli esto A. Quoniam igitur est, vt D ad G, ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum cru- C

Theor. 7. cuius

rum, est * enim, vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum.

Et quoniam quadratum aggregati crurum vnà cum quadrato differentiæ

Theor. 4. primi

eorumdem * dupla sunt quadratorum è cruribus, ergo

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ ✣ DQ æquabuntur quadratis crurum bis.

47. primi

Quadrata autem crurum bis * æqualia sunt quadratis segmentorum bis, plus quadrato perpendicularis quater, ergo

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ ✣ DQ æquabuntur quadratis segmentorum bis plus BQ4

Theor. 4. primi

Sed quadrata segmentorum bis * æqualia sunt quadrato basis vnà cum quadrato differentiæ segmentorum basis, ergo

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ ✣ DQ æquabuntur AQ † GQ ✣ BQ4. D

Auferantur vtrinque AQ, & DQ, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — AQ æquabitur BQ4 ✣ GQ — DQ

Hoc est $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur BQ4 † GQ — DQ, est enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod AQ; nam AQ ductum in DQ, eidemque DQ applicatum nullam excipit alterationem, quoniam quod superefficit ductio, idem resoluit applicatio.

Seu quod idem est $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur BQ4 † GQ — DQ

Resoluatur fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in sua membra, ita vt æqualitas in pro-

por-



portionem transmutetur, vt in principio huius libri docuimus, quo facto proportionalia erunt plana. A

GQ — DQ BQ4 ✣ GQ — DQ DQ AQ

Atque eorum radices proportionales erunt.

L. V. GQ — DQ, L. V. BQ4. ✣ GQ — DQ, D, A

### Porisma.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis trianguli superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum excessu, ita est differentia crurum, ad basim.

Datur ergo quæsita trianguli basis. B

Ex Porismate apparet, differentiam segmentorum basis maiorem esse differentia crurum, eo quod quadratum differentiæ segmentorum maius est quadrato differentiæ crurum.

Similiter apparet, priorem rectam in Porismate nominatam ad posteriorem, minorem rationem habere quàm differentiam crurũ ad differentiã segmentorũ basis; Porisma enim indicat, priorem rectam ad posterioré, se habere vt differentia crurum, ad basim. Hæc omnia de monstranda sunt, atq; Problemati præfigendæ determinationes; ne data fortuitò, vel etiam de industria exponantur, ex quibus Problema construi non posset.

## Lemma I.

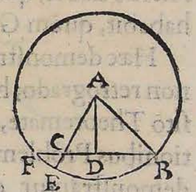
C

Differentia segmentorum basis trianguli maior est quàm differentia crurum.

IN triangulo A B C perpendicularis A D, secet basim in duo segmenta B D, D C, & centro A interuallo A B vnius crurũ describatur circulus secans crus A C, etiam si opus fuerit productũ in E, basim verò B C etiã productam in F; crurum igitur A B, A C differentia erit E C, differentia vero segmentorum B D, D C erit F C, sunt enim B D, D F * æquales. Dico F C maiorem esse quàm E C; nã cùm recta A C tranſeat per centrũ, basis verò B C secus, recta F C * maior est quàm C E, quod erat ostendendum. D




3 tertij




8 tertij & 7 tertij

## Lemma II.

IN omni triangulo recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorũ basis superat quadratum differentiæ crurũ, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodẽ quadratorum excessu, minorem rationẽ habet, quàm differentia crurum ad differentiã segmentorum basis. Esto triangulum A B C, in quo perpendicularis A D: & centro A, interuallo A B cruris minoris, describatur circulus secans basim trianguli in E, crus ma-

D

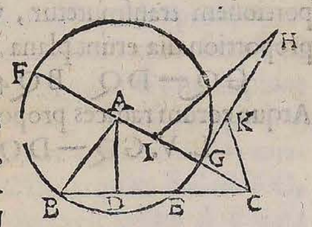
ius

ius in G, differentia igitur segmentorum B D, DC erit E C; differentia vero crurum BA, AC erit GC. Deinde ex G erigatur perpendicularis G H, in qua ponatur C K æqualis C E, & sumatur G I æqualis G K, & fiat G H dupla ipsius A D, & iungatur I H. Quadratum igitur C K hoc est C E superat quadratum G C quadrato G K, vel G I, & quadratum I H æquale est quadratis G H, G I: hoc est quadrato perpendicularis duplæ, & excessui quadratorum E C, G C. Dico igitur G I ad I H minorem rationē habere quam G C ad C E. Producatur enim C A vsq; ad circumferentiā circuli in F. Quoniam igitur quadrata F C, C G* æqualia sunt duplo quadratorum F A, A C, duplum autem quadratorum F A, A C duplum autem quadratorum F A, A C hoc est B A, A C* æquale est duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D; ideo quadrata F C, C G, æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D, hoc est vna cum quadrato H G, sed duplum quadratorum BD, D C * æquale est quadratis B C, C E, ergo quadrata F C, C G æqualia erunt quadratis B C, C E, H G, auferantur vtrinque quadrata B C, C G, ergo quadratū F C minus quadrato B C æquale erit quadratis H G, C E, minus quadrato C G, sed quadratum C E minus quadrato C G, hoc est quadratum C K, minus quadrato C G. idem valet, quod quadratum G K, vel G I; ergo quadratum F C, minus quadrato C B, æquabitur quadratis H G, G I hoc est quadrato H I.

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi




Et quoniā est E C, vel C K ad C G, vt C F ad C B, erit & quadratum C K ad quadratum C G, vt quadr. C F ad quadratū C B; & diuidendo, vt quadratū C K, minus quadrato C G, hoc est, vt quadratū G K, vel G I ad quadratum C G, ita erit quadratum F C, minus quadrato C B, ad quadratū C B; sed quadratū F C, minus quadrato C B, ostensum est æquale quadrato H I, ergo vt quadratū G I ad quadratū G C, ita erit quadratū H I ad quadratū C B, & permutando, vt quadratū G I ad quadratū I H, ita erit quadratū G C ad quadratū C B, & consequenter, vt G I ad I H, ita G C ad C B; sed G C ad C B minorē rationē habet, quàm eadē G C ad C E, ergo & G I ad I H minorē rationem habebit, quàm G C ad C E, quod erat ostendendum.

Hæc demonstratio procedit per resolutionis filum, directo tamen ordine, non retrogrado; hic enim non ostenditur constructio Problematis, sed propositio Theorematis, conclusio eius demonstratur; Porismata enim, quæ ex resolutionibus Problematum deducuntur in formam Theorematis proposita, eodem demonstrantur ordine, quo ipsa Problemata resoluuntur; vt memoraui-mus in Scholio Theorematis, quod Problema septimum primi libri subsequitur.

Demonstratis igitur quæ ad determinationem Problematis pertinent, Problema ita determinandum erit.

De-



A

## Determinatio I.

OPortebit, differentiam segmentorum basis maiorem esse differentia crurum.

## Determinatio I I.

OPortebit quoque, rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vna cum eodem quadratorum excessu, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. Sed in simpliciorem formam potest hæc secunda determinatio ita reduci.

B

Oportebit quoque, duplam perpendicularem maiorem rationem habere ad rectam, cuius quadratum æquale est prædicto quadratorum excessui, quàm eamdem rectam, ad differentiam crurum. Huius autem reductionis demonstratio ita se habet.

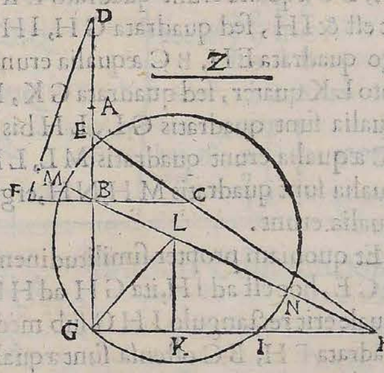
Quoniam enim ostensum est, G I ad I H minorem rationem habere, quàm G C ad C E; conuertendo H I ad I G* maiorem rationem habebit, quàm E C ad C G, & consequenter quadratum H I ad quadratum I G, maiorem rationem habebit, quàm quadratum E C ad quadratum C G & diuidendo quadratum H I, minus quadrato I G hoc est quadratum H G ad quadratum G I maiorē rationem habebit, quàm quadratum E C, minus quadrato C G, hoc est, quàm quadratum C K, minus quadrato C G; seu quod idem est, quàm quadratum I G ad quadratum G C. vnde & recta H G ad rectam G I maiorem habebit rationem, quàm eadem G I ad G C. quare constat determinatio.

C

### Compositio Problematis.

SIt data perpendicularis trianguli A B; differentia crurum B C, & differentia segmentorū basis Z. Oportet inuenire triangulū. Inclinentur ad rectos angulos A B BC, ipsaque BA duplicetur in D, & in eam etiam si opus fuerit producta ponatur C E æqualis Z est autē Z maior, quàm B C ex determinatione prima; quadratū igitur E C superat quadratum B C quadrato E B; itaq; recta E B ponenda est pro prima quatuor proportionalium. Sic Porisma iubet. Deinde, producta C B in F, vt sit B F æqualis B E iungatur F D. quadratum igitur F E æqua-

D




D 2 le

le est quadratis B D, B F, hoc est, quadrato perpendicularis duplæ, & quadrato B E, quod est excessus quadratorum E C, B C; itaque recta F D debet fieri secunda quattuor proportionalium tertia B C, & quærenda est quarta, sic habetur ex Porismate. Producatur igitur E B in G, vt sit E G æqualis D F ipsi autem B C parallela agatur G H occurrens E C continuatæ in H. vt igitur E B ad E G, ita erit B C ad G H; atque adeo inuenta est quarta proportionalis G H; ea debet fieri basis trianguli constituendi, ex præcepto Porismatis. ab ipsa igitur G H abscindatur H I æqualis Z. est autem Z minor, quàm G H; nam cum sit E B ad E G sicut B C ad G H, E B autem ad E G, ex determinatione minorem rationem habet, quàm B C ad Z, ergo & B C ad G H minorem rationem habet quàm eadem B C ad Z, vnde Z* minor est, quàm G H. Denique secetur I G bifariam, & ad rectos angulos in K à recta K L æquali ipsi B A, & junctis G L, L H constitutum erit triangulum L G H, quemadmodum Porisma docet. est enim vt E B ad E G, ita B C ad G H, hoc est vt recta, cuius quadratum æquale est excessui quadratorum E C, B C ad rectam, cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem excessu quadratorum, ita est differentia crurum ad basim. Nunc ostendendum est, in eo triangulo esse ea quæ requiruntur.

Primum perpendicularis L K æqualis est A B ex constructione. deinde I H differentia segmentorum basis G K, K H æqualis Z, pariter ex constructione; supereſt igitur, vt differentia crurum L G, L H æquetur ipsi B C; id autem repetendo resolutionis vestigia, ita fiet manifestum.

Centro L, interuallo L G describatur circulus secans H L continuatam in punctis M N, differentia igitur crurum L G, L H erit H N, & circulus M G N transibit per I, sunt enim G K, K I* æquales, & L K perpendicularis est ipsi G I. Quoniam igitur quadratum E H, minus quadrato H G* æquale est quadrato E G, vel D F, hoc est* quadratis D B, B F, seu quod idem est quadrato L K quater, & quadrato B E, hoc* est & quadrato E C minus quadrato B C. additis vtrobique quadratis G H, B C cùm sint empta in resolutione; quadrata E H, B C æqualia erunt quadrato L K quater vnà cum quadratis G H, & E C, hoc est & I H, sed quadrata G H, I H* æqualia sunt quadratis G K, K H bis; ergo quadrata E H, B C æqualia erunt quadratis G K, K H bis vnà cum quadrato L K quater, sed quadrata G K, K H bis vnà cum quadrato L K quater* æqualia sunt quadratis G L, L H bis, seu M L, L H bis; ergo quadrata E H, B C æqualia erunt quadratis M L, L H bis, quadrata autem M L, L H bis,* æqualia sunt quadratis M H, N H, ergo quadrata E H, B C quadratis M H, N H æqualia erunt.

Et quoniam propter similitudinem triangulorum E C B, E H G est vt B C ad C E, hoc est ad I H, ita G H ad H E, rectangulum sub extremis B C, H E æquale erit rectangulo I H G sub medijs, hoc est* rectangulo M H N, sed & quadrata E H, B C ostensa sunt æqualia. quadratis M H, H N ergo M H ipsi E H* æqualis erit, & N H ipsi B C. quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L G H, &c. quod faciendum erat.

CON-

A

B

C

D

3 quinti

47 primi

47 primi

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi

36 tertij

Theor. 5 huius



# CONSPECTVS RESOLVTIONIS ET COMPOSITIONIS.

**Initium Resolutionis.** **Finis Compositionis.**

D G A — G in A / D B C — hoc est I H — C E G H — H E — VBC, HE — hoc est V M H N — V I H G

B Et quoniam quad. ex G in A / D plus quad. ex D — ergo † 9 B C, 9 E H — † 9 N H, 9 M H

Theo. 4. pr. * dupla sunt quadratorum à cruribus — † 9 L H 2, sed 9 L G 2 — † 9 N H, 9 M H Theo. 4. pr.

Ergo G Q in A Q + D Q / D Q — æqualia erunt quadratis crurum bis — † 9 B C, 9 E H — † 9 L H 2, 9 G L 2

47 pr. Sed quadrata crurū bis* æqualia sūt quadratis segmētorū bis vnà cū quadrato ꝑpēdicularis quater — † 9 L K 4, † 9 K H 2, sed 9 G K 2 — † 9 L H 2, 9 G L 2 47 primi

Ergo G Q in A Q + D Q / D Q — æqu. quadratis segmētorū bis plus B Q 4 — † 9 B C, ergo 9 E H — † 9 L K 4, † 9 K H 2, 9 G K 2

C Sed quadrata segmētorū bis æqualia sūt quad. basis plus quad. differentiæ segmentorum — † 9 I H, sed 9 G H — † 9 K H 2, 9 G K 2 Th. 4. pr.

Theo. 4. pr.

Ergo G Q in A Q / D Q + D Q æqu. A. Q + G Q + B Q 4 — † 9 B C, 9 E H — hoc est † 9 I H, † 9 E C, † 9 G H, 9 L K 4

auferatur vtrinque A Q, & D Q — addantur quadrata G H, & B C

Ergo G Q in A Q / D Q — A Q æqu. B Q 4 + G Q — D Q — — 9 B C, hoc est † 9 E C, † 9 E B

D hoc ē G Q in A Q — D Q in A Q / D Q — æq. B Q 4 + G Q — D Q — seu 9 L K 4

seu G Q — D Q in A Q / D Q — æqu. B Q 4 + G Q — D Q — 9 G H, 9 E H — † 9 B F, hoc est 9 D B 47 primi, vel 9 D F, 9 E G 47 primi

9 denotat quadratum.

Resol. fract. G Q — D Q, B Q 4 + G Q — D Q, D Q A Q

L. V. G Q — D Q, L. V. B Q 4 + G Q — D Q, D A

Initium Compositionis

Hoc est vt latus vniuersale vel √ gg − pp ad latus vniuersale 4 BB + gg − pp. sic recta D ad rectā A

Finis Resolutionis.

A

### Scholium.

VLtima fractio $\frac{GQ-DQ\text{ in }AQ}{DQ}$ respondet in compositione quadrato EG, nam cùm sit, vt DQ ad GQ — DQ, ita AQ ad $\frac{GQ-DQ\text{ in }AQ}{DQ}$, quod quidem in compositione est, vt quadratum BC ad quadratum EC minus quadrato BC; ita quadratum GH ad quadratum EG; quadratum igitur EG idem est, quod fractio $\frac{GQ-DQ\text{ in }AQ}{DQ}$

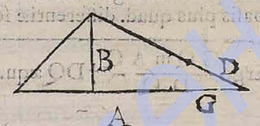
Similiter fractio $\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$ — AQ respondet in compositione quadrato EG; nam cùm sit, vt DQ ad GQ, ita AQ ad $\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$, quod est in compositione, vt quadratum BC ad quadratum EC, ita quadratum GH ad quadratum EH, erit quadratum EH idem quod fractio $\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$, & consequenter $\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$ — AQ respondebit in compositione quadrato EH, minus quadrato GH; hoc est respondebit quadrato EG, quemadmodum & vltima fractio $\frac{GQ-DQ\text{ in }AQ}{DQ}$

B

Demonstratio autem sumit initium ab æqualitate quæ est inter fractionem $\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$ — AQ, & BQ 4 ✠ GQ — DQ, non autem à proportione, inquam per resolutionem fractionis transmutata fuit ipsa æqualitas, desijtque resolutio Problematis; nam cùm in ipsa æqualitate insit, ex vi fractionis proportio, per quam ordinata est Problematis constructio, satis est ab ipsa æqualitate demonstrationem inchoauisse. Alia eiusdem Problematis Resolutio, in qua progressus quidem simplicior est, breuiorq. operatio autem paulo operosior ob multiplicationem fractionis, per magnitudinem integram.

C

Sit igitur data perpendicularis trianguli B differentia crurum D, & differentia segmentorum basis G. Oportet inuenire triangulum.




Factum iam sit, & basis ipsius trianguli esto A, ergo A † G * erit duplum segmenti maioris. Et quoniam est, vt D ad G ita A ad $\frac{G\text{ in }A}{D}$, erit $\frac{G\text{ in }A}{D}$ aggregatum cruru̅, & $\frac{G\text{ in }A}{D}$ ✠ D erit * duplum cruris maioris; sed quadratum cruris maioris dupli æquale est quadrato dupli segmenti maioris vnà cum quadrato perpendicularis duplæ; ergo

Corol. 1. Prob. 1. lib. 1.

Corol. 1. Prob. 1. lib. 1.

$\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$ † DQ † G in A 2 æquabitur AQ ✠ GQ † G in A † BQ 4.

Auferantur vtrinq; G in A 2, & AQ, & DQ, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

D

$\frac{GQ\text{ in }AQ}{DQ}$ — AQ æquabitur BQ 4 ✠ GQ — DQ

Hoc est $\frac{GQ\text{ in }AQ-DQ\text{ in }AQ}{DQ}$ æquabitur BQ 4 † CQ — DQ

Seu $\frac{GQ-DQ\text{ in }AQ}{DQ}$ æquabitur BQ 4 ✠ G — DQ.

Et æqualitate in proportionem transmutata per resolutionem fractionis, proportionalia erunt plana

GQ — DQ, BQ 4 ✠ GQ — DQ, DQ, AQ.

Atque eorum radices proportionales erunt

L. V. GQ — DQ, L. V. BQ 4 ✠ GQ, DQ, DA,

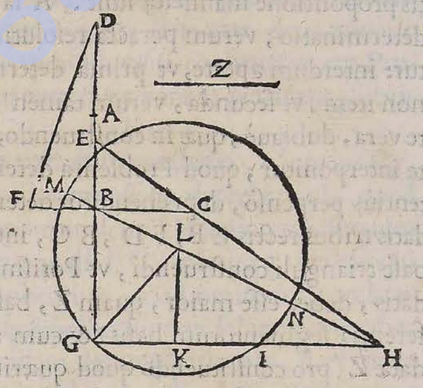
Ea



A Ea ipsa proportio, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur, vnde idem erit & Porisma, eædemque ex eo determinationes deducentur.

### Compositio.

SIt data perpendicularis trianguli AB, differentia crurum BC, & differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Fiat eadem constructio, quæ in antecedenti compositione: trianguli igitur LGH perpẽdicularis LK æqualis est




B AB, ex constructione, & IH differentia segmentorum basis GK, KH æqualis Z, pariter ex constructione. Superest vt ostendatur NH differentia crurum LG, LH æqualis ipsi BC; id autem per regressum resolutionis fit hoc modo. Quadratum EH, minus quadrato HG, * æquale est quadrato EG vel DF, hoc est * quadratis DB, BF, seù quod idem est, quadrato duplæ LK, & quadrato BE, hoc est & * quadrato EC, minus quadrato BC, additis vtrobiq; quadratis GH, BC, & rectangulo GHI bis: quadrata EH, BC, vnà cum rectangulo GHI bis, æqualia erunt quadrato duplæ LK, vnà,

47. primi

47. primi

47. primi

C cum quadratis GH, & EC, vel & IH, & insuper rectangulo GHI bis; sed quadrata GH, IH vnà cum rectangulo GHI bis, * æqualia sunt quadrato compositæ ex GH, HI, hoc est * quadrato duplæ KH, ergo quadrata EH, BC vnà cum rectangulo GHI bis, æqualia erunt quadratis duplarum LK, KH, hoc est quadrato duplæ LH, hoc est compositæ ex MH, HN; sed rectangulum GHI æquale est rectangulo EH, BC; nam cùm sint similia triãgula EHG, ECB, est GH ad AE, vt BC ad CE; hoc est ad HI, ac proinde rectangulum GHI sub extremis æquale rectangulo EH, BC sub medijs; ergo si loco rectanguli GHI ponatur rectangulum EH, BC, quadrata EH, BC vnà cum rectangulo EH, BC, hoc est * quadratum compositæ ex EH,

4. secundi

Corol. 2. Prob. 1. lib. 2.

4. secundi

BC, æquale erit quadrato compositæ, ex MH, HN, quare & illa compositæ huic compositæ æqualis erit; sed & rectangulum EH, BC, ostensum est

D æquale rectangulo GHI, hoc est * rectangulo MHN ergo EH * æqualis erit MH & BC æqualis NH, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum LGH. & c. vt faciendum erat.

36. tertij Theor. 2. huius

### Scholium

CVm determinationis facta mentio sit; res ipsa postulare videtur, vt subijciam quomodo determinatio Problematis determinati, cum ea ex se non patet; in Porismate, vel in constructione Problematis deprehendatur.

Pro-

Problematum igitur determinatorum alia sunt, in quibus statim vt proponuntur determinationes occurrunt, vt propositio 22. libri primi Euclidis, & propositio prima libri 4. eiusdem, nec non prima quattuor problemata præcedentis libri, multaq. alia; eorum enim determinationes in ipsa Problematis propositione manifestæ sunt. A ia vero Problemata sunt, in quibus latet determinatio; verum peracta resolutione Problematis, in Porismate detegitur: interdum aperte, vt prima determinatio huius Problematis; interdum non item, vt secunda, verum tamen sumpto inditio ex aliqua impossibilitate vera, dubiaue, quæ in construendo, iuxta rationem Porismatis, Problemate interponitur; quod Problema determinatione egeat, deinde Porismate attentiùs perpenso, deprehenditur determinatio: vt in hac constructione; vbi datis tribus rectis E B, F D, B C, inuenta est quarta proportionalis G H pro base trianguli construendi, vt Porisma docet, ipsa G H, nisi vitium est in datis, debet esse maior, quam Z, basis enim trianguli maior est, quàm differentia segmentorum basis. & cum ab ipsa G H auferenda sit recta æqualis datæ Z, pro constituendo quod quæritur triangulo, si ipsa G H non esset maior, ex recta auferri non posset; sumpto igitur inditio ex hoc dubio impossibilitatis, quod problema determinatione egeat; deinde reuersus ad Porisma, inuenio rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis trianguli superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam, cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, eandem rationem habere, quàm differentiam crurum ad basim, ex quo infertur priorem rectam ad posteriorem, minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam segmentorum basis: quippe quæ minor est base. Itaque imposita determinatione, vt ratio prioris rectæ ad posteriorem minor sit ratione differentiæ crurum, ad differentiam segmentorum basis, necessario G H maior erit, quàm Z; atq; adeo instantia, quæ aduersus constructionem Problematis ferebatur destructa erit, quod quidem absque determinatione non eueniret. Exempli gratia, si quis imprudens, neglecta determinatione, exposuerit data, ita vt ratio prioris rectæ ad posteriorem fuerit non minor ratione differentiæ crurum ad differentiam segmentorum basis, vt potè exposuerit perpendicularem trianguli 1, differentiam crurum 2, & differentiam segmentorum basis 3, iusseritq. triangulum construere, frustrà se excruciabit, qui triangulum illud tentauerit inuenire; quæreret enim id quod non est, si quidem nullum potest dari triangulum in quo perpendicularis sit 1, differentia crurum 2, & differentia segmentorum basis 3, quoniam ratio huiusmodi datorum non continetur intra limites a determinatione præstitutos. Sic igitur determinatio, quæ prius in Porismate latebat, per ea quæ constructioni aduersabantur, in ipso Porismate patefit. Alia autem Problemata sunt, in quibus neque sponte se se offert determinatio, neque in Porismate vllo modo deprehenditur; sed instantiæ quæ aduersus constructionem Problematis feruntur, ipsam suggerunt determinationem; nam cum in constructione, quæ fit per rationem Porismatis occur-



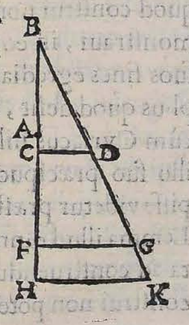
A occurrit aliquod, quod fieri non potest, vel in dubium venit, an fieri possit, argumentum est, vitium esse in datis, vel certe posse esse, ex eoque oriri illud impossibilitatis, vel dubij impedimentum. Neque enim Porisma iubet ea, quæ fieri non possunt, immo indicat quando Problema possibile est, & quando impossibile, vt suo loco dicetur. Cognitis igitur, quæ aduersus constructionem instant; determinatio quoque cognita erit; nam determinatio nihil aliud est, quàm cautio quædam, ne quid aduersus constructionem Problematis instet, exemplum ad huiusmodi determinationem pertinens, subijciam in Scholio Problematis quinti.

In hoc Problemate, quod & in libro variorum construxi, Clemens Cyriacus se non satis accuratam demonstrationem asserit deprehendisse, quod
B non demonstrauerim, quartam illam proportionalem G H maiorem esse quàm E C, cùm ab ipsa G H auferenda sit recta æqualis E C: miraturq. vir alioqui doctissimus, id à me omissum, ac se suppleturum, quod omiserim, pollicetur, vt ea me cura leuaret. Sed cùm ea quæ pollicetur non soluerit, non alienum putauerim planum facere, primum illam demonstrationem, licèt in ea id quod Cyriacus notat omissum fuerit, non ideo potuisse dici, non accuratam, tum Cyriacum nihil omnino suppleuisse, quamuis supplendi munus sibi susceperit.

Et quidem, si demonstratio mea ex huiusmodi omissione non accuratè demonstrationis vitio laboraret; idem Archimedi, idem Apollonio, idem pluribus alijs accuratissimis Mathematicis tribuendum esset, cùm in eorum
C demonstrationibus quamquam verissimis, plura omissa fuerint, quæ Eutocius Ascalonita, Federicus Comandinus, & plures alij comentatores viri eruditissimi in suis comentarijs suppleuerunt, quas quidem demonstrationes cùm nemo non accuratas sit ausus dicere, non video quid causæ fuerit, cur Cyriacus demonstrationem meam non accuratam appellarit.

Verùm vt concesserim, potuisse me de non accurato opere accusari, si quis casus dari posset, in quo ipsa G H non sit maior quàm E C, ita plane affirmauerim, audaciorem potius Cyriaci censuram, quàm non satis accuratam demonstrationem extitisse, cùm certum sit nullum huiusmodi casum dari possibilibus (ad Problema construendum) datis existentibus, vt in constructione Problematis demonstraui.

D Sed conatur in sua animaduersione Cyriacus ostendere, posse dari casum, in quo recta G H non sit maior, quàm E C, & ad id faciendum constituit duo triangula, rectangula similia B C D, B F G, quorum maius habet basim F G minorem latere maximo B D trianguli minoris, idq. ad similitudinem constructionis duorum triangulorum E B C, E G H in constructione Problematis constitutorum; atque ex hoc arguit casum supramemoratum dari posse. Verùm parum animaduertit, quod in triangulis B C D, B F G in sua animaduersione constitutis, supposuerit data ex quibus Proble-




ma

ma construi non potest. quid igitur mirum si ex male suppositis male concluserit? hoc autem ita se habere sic demonstrabo. A

Resumatur Cyriacæ animaduersionis figura, in qua ostenduntur æquales B D, H K, & propterea F G minor quam D B, itaque ex F G non posse auferri rectam æqualem B D manifestum est.

Sed intelligatur A B data perpendicularis trianguli quæsiti, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, atque rectæ B F quadratum sit æquale quadrato A B duplæ, & quadrato B C, quo nimirum differunt quadrata B D, D C, sic enim disponuntur data in constructione Problematis. Dico ex datis A B perpendiculari, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, nullum triangulum inueniri posse. Quoniam enim ob similitudinem triangulorum B C D, B F G B est, vt B C ad B F, ita C D ad F G, C D autem ad F G maiorem rationem habet, quàm eadem C D ad B D, cùm sit B F G minor, quàm B D, ergo & B C ad B F, maiorem rationem habet, quàm C D ad B D; hoc est recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est, quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, maiorem rationem habet, quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, quod quidem in nullo triangulo potest esse. ostensum est enim lemmate secundo, in omni triangulo priorem rectam ad posteriorem minorem rationem habere quam differentiam crurum, ad differentiam segmentorum basis. Quare ex datis A B perpendiculari, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, triangulum inueniri non potest. C quod erat ostendendum.

Cùm igitur in triangulis B C D, B F G in animaduersione Cyriaci constitutis, suppositæ sint data, ex quibus Problema construi non potest, male Cyriacus deducit ex eo, quod in ipsis triangulis recta F G minor sit, quàm B D, etiam in triangulis E B C, E G H, in constructione Problematis constitutis, in quibus pronuntur data, ad construendum Problema, possibilia, rectam G H minorem aliquando futuram quàm E C.

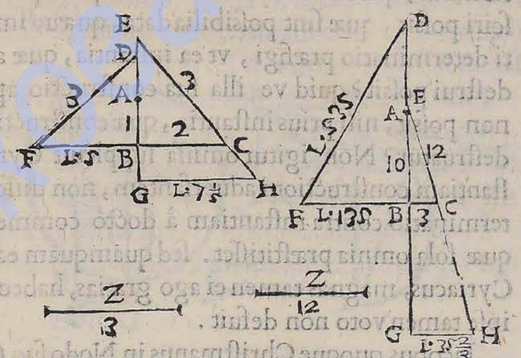
Iam vero ostendendum est, Cyriacum id quod pollicitus est non suppleuisse.

Quoniam enim Problema, de quo agitur, ex determinatis est, quippe quod construi non potest, ex datis in quacumque ratione existentibus, vt demonstraui, in eo nihil aliud deerat nisi determinatio pro cohibendis datis, ne suos fines egrediantur, nam adhibita congrua determinatione, nihil est amplius quod desit, vt videre est in constructione Problematis supra allata. Sed cùm Cyriacus nihil de determinatione tetigerit, non video, quid Lemmate illo suo præcipuo (sic enim appellat, propter eximiam, quam de eo concepisse videtur præstantiam) suppleuerit; sed vt manifestius id pateat, ostendam Lemma illud omnino inutile esse, sed exercitationis gratia exponam prius data ad construendum Problema impossibilia, hoc est ex quibus triangulum construi non potest; deinde ostendam quomodo ex ea datorum impossibilitate D



A tate oriatur instantia constructioni obsistens; quibus ostensis, perspicuè apparebit, Cyriacum nec præcipuo suo Lemmate, nec approbata constructione, id quod omissum asserit suppleuisse.

Sit igitur data A B perpendicularis trianguli 1, B C, differentia crurum 2, & Z differentia segmentorum basis 3, vel sit A B 10, B C & Z 12, vt posuit Regiomontanus, & oporteat inuenire triangulũ. Hoc manifestum est fieri non




B posse, cum nullum triangulum possit habere perpendicularem, & differentias crurum, & segmentorum quales hìc exponũtur; nam in his datis, recta cuius quadratum æquale est excessui quo quadratum Z superat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum, æquale est excessui quo quadratum Z superat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato A B duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, maiorem rationem habet, quàm B C ad Z; prior enim recta in primis datis est L. 5, posterior vero 3, & L. 5 ad 3 maiorem habet rationem, quàm 2 ad 3. In datis vero à Regiomontano expositis prior recta est L. 135, posterior L. 535, & ratio C L. 135 ad L. 535, maior est ratione 3 ad 12, quod in nullo triangulo potest esse: si quidem ostensum est, in omni triangulo priorem rectam ad posteriorem minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam segmentorum basis. Ex datis igitur quæ supra exposita sunt, Problema construi non potest; quod animaduertisse operepretium fuit.

Nunc autem ostendam, quomodo ex ea datorum impossibilitate oriatur instantia constructioni obsistens.

Expositis ijsdem datis, nempe impossibilibus, procedatur cum constructione, quemadmodum Porisma docet, donec aliquod impedimentum occurrat, occurret autem; nam ex impossibilibus impossibilia sequi necesse est.

Inclinentur igitur ad rectos angulos A B, B C, & in B A productam ponatur C E æqualis Z, & producatur C B in F, vt sit B F æqualis B E: deinde D duplicetur B A in D, & connectatur D F, cui æqualis fiat E G, & ducatur G H parallela rectæ B C, occurrens E C continuatæ in H. Hic subsistimus nec possumus alterius progredi, nam cum recta G H debeat esse basis trianguli quæsiti, vt Porisma indicat, ipsaq; G H minor sit, quàm Z, (G H enim in prima figura est L. 7 ½ Z 3. in secunda est L. 35. ⅔, Z 12) non potest ab ipsa G H auferri recta æqualis Z. Hic itaque occurrit instantia quæ reliquam constructionis partem impedit; nec mirum quia ex datis impossibilibus, sequitur quæsitum impossibile; impossibilia enim exponuntur data, & inuenitur quæsita basis trianguli minor, quàm data differentia segmentorum basis, quod est

im-

impossibile, totum videlicet minus esse sua parte. Hanc instantiam debebat dissoluere Cyriacus, deinde verò constructionem suam dicere approbatam: nam expositis datis ad Problema construendum, vel possibilibus, vel impossibilibus, quid commodi affert illud ipsius præcipuum Lemma, cùm ex eo nec sciri possit, quæ sint possibilia data, quæue impossibilia, nec ideo Problemati determinatio præfigi, vt ea instantia, quæ aduersus constructionem fertur, destrui possit? quid ve illa sua constructio approbata valet, cùm ea perfici non possit, nisi prius instantia, quæ constructionem impedit, determinatione destruatur? Non igitur omissa suppleuit Cyriacus, vt pollicebatur, cùm instantiam constructioni aduersantem, non dissoluerit, nam nihil aliud nisi determinatio contra instantiam à docto commentatore desiderabatur, quippe quæ sola omnia præstitisset. sed quamquam ea me supplendi cura non leuarit Cyriacus, magnas tamen ei ago gratias, habeoq. licet enim ei votum defuerit, ipse tamen voto non defuit. A B

Iacobus quoque Christmanus in Nodo suo Gordio ait, se meum hoc Problema examinasse, eiusque constructionem vacillantem deprehendisse, non tamen in quo vacillet exprimit. profecto assumpserit, in suo examine Abacularis calculator demonstrationum Geometricarũ planè innocens, numeros ad constructionem Problematis non idoneos, quippe ignorauit Problema determinatũ esse, nec ideo construi posse ex quibusuis datis; idcirco non miror si suo vacillanti per abaculos calculo delusus, vacillantem meã constructionem sibi visus fuerit deprehendisse.

Idem vitiũ non accuratæ demonstrationis notat Cyriacus in Problemate secundo Francisci Vietæ in Apendicula prima ad Apolloniũ Gallum, atque determinationẽ à Vieta Problemati præpositã illegitimam esse censet, & ideo delendam. quam malè de vtroque iudicet, ingeniosissimè Alexander Andersonus disseruit, vir sanè eruditus in paucis, mihique percarus; cui multum debeant Mathematicæ disciplinæ, quas præclaris monumentis illustrauit, cum quibus de me non semel perhonorificè meminerit, meique patrocinium susceperit, multum sane me sibi sua humanitate, ac prona in me voluntate deuinxit. Verùm cùm ipse quoque molestè ferrem, quòd tanti viri laudes, non sine aliqua temeritatis nota, vt leuissime dicam, Cyriacus ausus sit imminuere, non possum non ostendere, quàm longe absit à vero in suis animaduersionibus iudicium Cyriaci. Nempe hoc à me postulat singularis quidam meus in Vietam amor, atque obseruantia, atque adeo arctissima amicitiæ, coniunctionisque necessitudo, quæ mihi cum illo Parisijs intercessit, mutuis officijs confirmata. hùc accedit, quod cùm Cyriacus in vno, eodemque libello, & Vietam, & me de non accurata demonstratione accusauerit, inofficiosus essem, si omissa amici causa meam tantùm defenderem. Primum igitur resoluam Problema illud, deinde Determinationem Problemati præpositam, non solum legitimam, verùm etiam necessariam esse demonstrabo. Postremo composito Problemate, perspicuum fiet, Cyriacum de delenda illa determinatione non rectè iudicasse, C D

Pro-

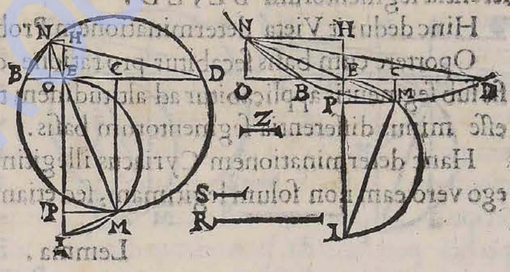


A

## Problema Vietæ.

Data basi altitudine & ratione crurum trianguli inuenire triangulum.

### Resolutio.




SIt data triãguli basis B D, altitudo Z, & ratio crurum vt S ad R. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum N B D, cuius basis B sit ipsa B D data, altitudo verò N O sit æqualis Z, crura autem B N, N D se habeant, vt S ad R.

Secetur angulus B N D bifariã, à recta N E secante basim B D in E; circulũ verò circa triangulũ B N D descriptũ, in M. erit igitur ratio B E ad E D data, cũ sit B E ad E D, vt B N ad N D, hoc est vt S ad R, ergo* data erit & segmẽta B E, E D: vnde dabitur & rectangulum B E D, ac etiam vt ei* æquale rectangulum N E M. Ducatur autem per punctum E recta E H parallela, & æqualis rectæ O N, eaque producatur donec occurrat rectæ M I perpendiculari ipsi N M in I, & iungatur N H ea parallela erit basi B D; & ideo positione erit, atque positione erit, & H I, cùm ea perpendicularis sit ipsi B D. Et quoniam similia sunt triangula E H N, E M I; anguli enim E H N, E M I recti sunt, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad E; vt igitur E H ad E N, ita erit E M ad E I, quare rectangulum H E I sub extremis, æquale erit rectangulo N E M, sub medijs; sed datum rectangulum N E M, vt demonstrauimus; ergo dabitur & rectangulum H E I; data autem est recta H E, quippe quæ æqualis est N O, vel Z datæ, ergo dabitur & recta E I, magnitudine quoque; quare & semicirculus in ea descriptus. Denique recta B D bifariam in C connectatur C M, ea perpendicularis erit ipsi B D, cùm sint æquales circumferentiæ B M, M D, ratione æqualium angulorum B N M, M N D, ipsis circumferentijs insistentium: quare ipsa C M positione data erit; ergo dabitur & punctum M, per quod nimirum transit semicirculus E M I, cùm sit rectus angulus E M I, ex constructione; sed datum est & punctum E, ergo dabitur recta M E positione, & magnitudine; vnde & recta E N positione erit; sed positione est & N H; ergo dabitur & punctum N, quare & triangulum N B D. B C D E P M I Z S R

7 daturum
35 tertij

Scholium

HAc via exultimo Vietam suum Problema resoluisse, ex qua quidem resolutione apparet E I latitudinem, quam facit rectangulum B E D, sub segmentis basis rectæ, pro ratione crurum, applicatum ad E H, alti-

Coroll.

E

altitudinem trianguli, non esse minorem differentia segmentorum B E, A
E D. nam cùm semicirculus in diametro E I descriptus necessariò transeat per punctum M, quod commune est rectis E M, C M, eiusque semidiameter non sit minor, quàm M P perpendicularis ad E I, hoc est quam E C; per consequens neque tota diameter E I minor erit quàm dupla E C, id est quam differentia segmentorum B E, E D.

Hinc deduxit Vieta determinationem Problematis, nempè.

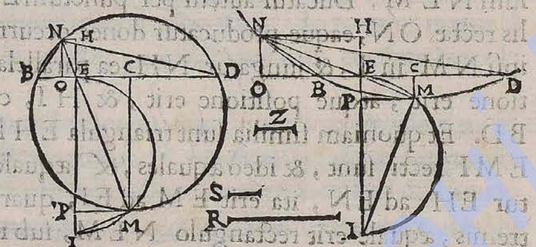
Oportere cum basis secabitur pro ratione crurum, & rectangulum quod fit sub segmentis applicabitur ad altitudinem trianguli, quod inde orietur, non esse minus differentia segmentorum basis.

Hanc determinationem Cyriacus illegitimam esse censet, & ideo delèdam, ego verò eam non solum legitimam, sed etiam necessariam esse demonstrabo. B

## Lemma.

Si basis trianguli secetur pro ratione crurum, & rectangulum sub segmentis applicetur ad altitudinem trianguli, latitudo inde orta non erit minor differentia segmentorum.

SIt triangulum N B D, cuius angulus verticis secetur bifariam à recta N E secante basim B D in E; itaque erit vt B N ad N D, ita B E ad E D. Ducatur autè per punctũ E perpèdicularis H E I, & fiat H E æqualis N O, altitudini trianguli N B D. Deinde applicetur rectangulũ B E D ad rectã H E, & faciat latitudinem E I. Dico ipsam E I non esse minorem differentia segmentorum B E, E D. Producatur enim N E donec secet circumferentiã circuli circa triangulũ B N D descripti in M, & secetur B D bifariam in C, & iungantur M C, M I, N H. Quoniam igitur æquales sunt anguli B N M, M N D, erunt æquales & circumferentiæ B M, M C, quibus ipsi anguli insistunt; vnde M C perpendicularis erit ipsi B D, & ideo parallela rectæ E I. Et quoniam rectangulum H E I æquale est D
rectangulo B E D, ex constructione, hoc est rectangulo N E M; erit vt E I ad E M ita E N ad E H; sunt autem anguli I E M, N E H ad verticem æquales,
6 sexti ergo * æquiangula erunt triangula E M I, E H N; quare angulus E M I æqualis erit angulo E H N, sed rectus est E H N, ergo & E M I rectus erit; vnde semicirculus in diametro E I descriptus transibit per M, eiusq; semidiameter non erit minor quàm M P perpendicularis ad E I, hoc est quam E C, & per consequens, nec tota diameter E I minor erit, quàm dupla E C; sed segmenta B E, E D differunt per duplam E C, ergo ipsa E I non erit minor quàm differentia segmentorum B E, E D quod erat ostendendum.




Corol-



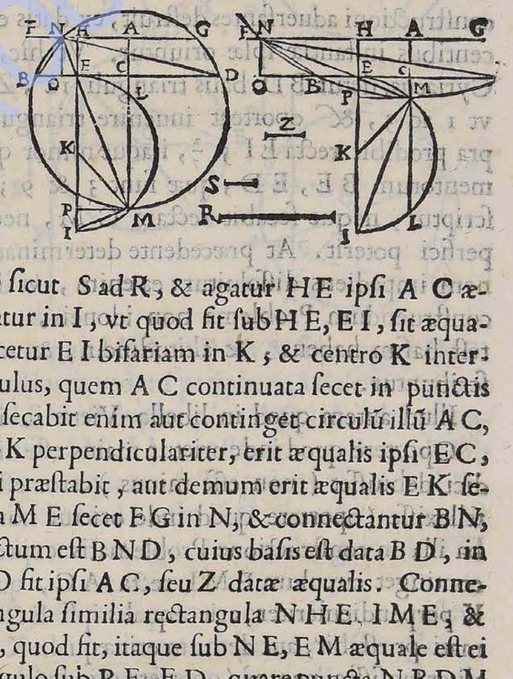
A

### Corollarium.

HOc igitur demonstrato, constat, determinationem, quam Vieta Problemati præposuit, legitimam esse, atque necessariam.

### Compositio Problematis ea ipsa, quam Vieta exhibuit.

SIt data trianguli basis B D, altitudo Z, ratio crurũ vt S. ad R. Oportet inuenire triãgulum. Basis B D secetur bifariã, & ad angulos rectos in C à recta
B A C, quæ sit ipsi Z æqualis, & per A agatur F A G ipsi B D parallela. Eadem basis B D secetur in E ratione crurum, vt sit B E ad E D sicut S ad R, & agatur H E ipsi A C æqualis, & parallela, & ita producatur in I, vt quod fit sub H E, E I, sit æquale ei, quod fit sub B E, E D, & secetur E I bifariam in K, & centro K interuallo E K, vel K I describatur circulus, quem A C continuata secet in punctis L M, aut demum contingat in M, secabit enim aut continget circulũ illũ A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipsi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præstabit, aut demum erit æqualis E K semidiameter circuli. denique acta M E secet F G in N, & connectantur B N, C
N D. Triangulum igitur constructum est B N D, cuius basis est data B D, in quam cadens perpendicularis N O fit ipsi A C, seu Z datæ æqualis. Connectatur autem I M, sunt igitur triangula similia rectangula N H E, I M E, & est, vt N E ad I E, ita H E ad E M, quod fit, itaque sub N E, E M æquale est ei quod fit sub H E, E I, idest rectangulo sub B E, E D. quare puncta N B, D M sunt in circulo, in eo autem subtensa B D secatur bifariã ad rectos angulos ab A C, quare sectio est per centrum, & sunt peripheriæ æquales B M, M D, angulus igitur B N E angulo E N D est æqualis, & ideo est B N ad N D, sicut B E ad E D. Triangulum igitur B N D descriptum est sub data base B D, cuius altitudo N O æqualis est imperatæ Z, seu A C, & B N ad N D se habet, vt B E ad E D, seu vt S ad R, quod faciendum erat.




D Animaduertit Cyriacus in Vietam, quod non demonstrauerit circulum in diametro E I descriptum secari, aut tangi à recta C M, sed cauerit ne recta E I minor sit quàm differentia segmentorum B E, E D, ex eaque cautione deduxerit, ipsum circulum secari, aut tangi ab ipsa C M; quamobrem Cyriacus cautionem illam, seu determinationem è medio tollendam esse censet; præ se enim fert, inquit, quamdam exceptionis non legitimæ speciem, vt habet latius in suo libello. Miror quomodo Cyriacus deceptus sit, vt determinationem illam, quæ adeo necessaria est, vt demonstraui, delendam esse censeat, cùm sine ipsa Problema construi non possit. ipsa sane determinationis necessitas erat ostendenda, sed licèt hoc omiserit Vieta,

non ideo demonstratio illa potest dici non accurata, cùm ipsam necessitatem quilibet etiam mediocriter in Geometricis versatus ostendere possit. Sed video Cyriacum ni fallor illi determinationes Problematum æstimare, cum determinationem illam, quæ adeo necessaria est, tamquam inutilem delendam censeat, & tamen sine determinationibus Problemata determinata sunt impossibilia. Determinatio enim sola cohibens data intra suos terminos, omnes instantias constructioni aduersantes destruit, ex datis enim determinationi non subiacentibus instantiæ ipsæ oriuntur. Vt hìc, sublata determinatione, vt vult Cyriacus, detur B D basis trianguli 12, Z altitudo 5, & ratio crurum vt 1 ad 3, & oporteat inuenire triangulum. Facta constructione vt supra prodibit recta E I $5\frac{2}{7}$, itaque minor quàm 6 differentia, videlicet segmentorum B E, E D, quæ sunt 3 & 9; quare semicirculus in E I descriptus, neque secabit rectam C M, neque tanget, nec ideo Problema perfici poterit. At præcedente determinatione, hæc instantia constructionem impediens dissoluitur: ea enim, vt dictum est, procedit ex datis ad construendum Problema non idoneis, nullum enim triangulum dari potest basim habens, & altitudinem, & rationem crurum, quales hic præscribuntur. A

Illud autem quod in libello Vietæ in ipsa determinatione dictum est: Oportere quod inde orietur maius esse differentia segmentorum basis) cú dici debuisset (non esse minus) error est Typographi, nam Vietam intellexisse (oportere quod inde orietur non esse minus) clarè testantur verba illa in constructione Problematis expressa nempè (secabit enim, aut continget circulum E M I recta A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipsi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præstabit, aut demum erit æqualis K E semidiameter circuli) quod si aliter sensisset, nempè (oportere quod inde orietur maius esse differentia segmentorum basis) non add disset (aut demum erit æqualis E K semidiameter circuli. B

His igitur ita se habentibus, melius quidem Cyriacus feciſſet, si commentatorem potius, quàm correctorem egisset, sic enim suppleuisset id quod omissum fuerat à Vieta, ostendens determinationem illam necessariam esse, non autem tamquam inutilem fuisse delendam censuisset.

De Problemate primo Appendiculæ primæ ad Apollonium Gallum, quod licèt explicatione indigeat non leui, Cyriacus intactum præterijt. D

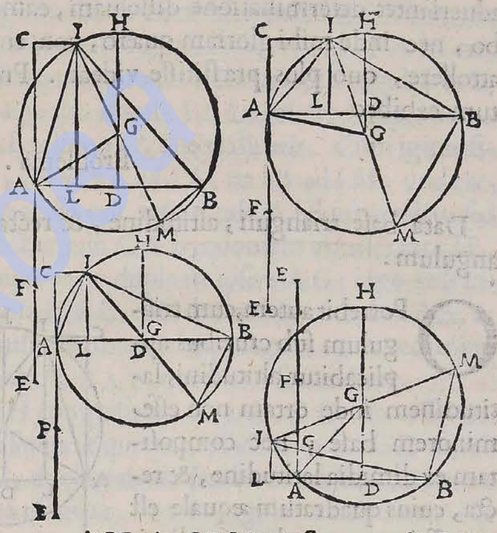
## Problema Constructum à Vieta.

Data basi trianguli, altitudine & rectangulo sub cruribus, inuenire triangulũ.

TRianguli, de quo quæritur, esto data basis A B, altitudo æqualis rectæ A C, rectangulum autem sub cruribus detur æquale ei, quod fit sub A C, A E. Oportet inuenire triangulum, cuius basis A B altitudo ipsi A C æqualis, & rectangulum sub cruribus æquale ei, quod



A quod fit sub A C, A E. Inclinẽtur AC, AB ad angulos rectos, & ipsæ AE, AB secẽtur bifariã in F D, & per D agatur D G ipsi G A E parallela, in qua ponatur A G ipsi A F æqualis, & cẽtro G interuallo G A, vel G B describatur circulus. Deniq; per punctũ C agatur C I ipsi A B parallela secãs circulũ in I, & connectãtur A I, B I. In triãgulo igitur AlB cũ ex vertice cadat in basim A B perpẽdicularis B IL, ipsa erit altitudini AC. æqualis. Agatur autẽ diameter IGM; & connectatur M B, erit triangulum I B M rectangulum, & simile triangulo I A L; recti enim sunt anguli I L A, I B M, & siue anguli IMB, siue anguli I A B, duplam amplitudinem eadem peripheria I B definit. quare est vt I L ad A I, ita I B ad I M, sed I M est dupla ipsius A G, & ideo æqualis toti A E. Itaque rectangulum sub I M, I L constituitur rectangulo sub C A, A E æquale, ergò eidem quoque æquatur rectangulum sub A I, I B. Ad datam itaque basim A B, & altitudinem I L, seu A C, ita constitutum est C triangulum A I B, vt rectangulũ sub cruribus æquale sit, rectangulo sub A C, A E, quod erat faciendum.



Miror cur Cyriacus in suo libello instantias quoque, quæ aduersus constructionem huiusce Problematis feruntur non adnotauerit, cum eæ sint plures, maioresque quam in illo meo Problemate variorum, aut in Problemate secundo supradictæ Appendiculæ, in quo studium omne adhibuit, vt corrigeret etiam quæ corrigenda non erant. Neque verisimile est Cyriacum Problema primum non legisse, cum secundum illud tàm attentè perlegerit. Sed nec dubito quin ad explanationem huiusmodi difficultatem sufficeret, cum eruditum eum, ac varia litterarum suppellectile instructum, libellus ipse ostendat. fortasse iucundiora studia, vel etiam quæstuosiora secutus, laboriosa D hæc prætermisit.

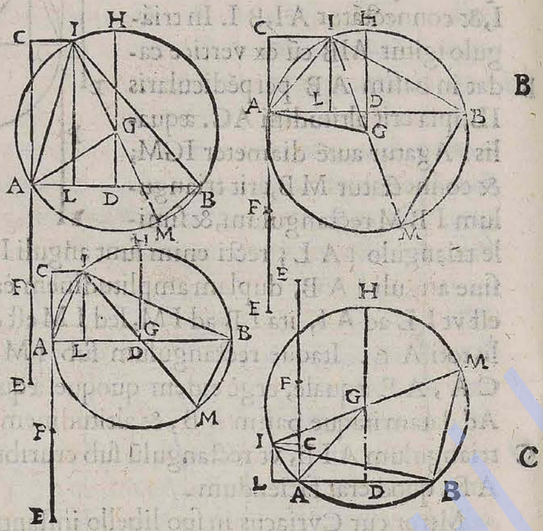
Duæ sunt instantiæ, quæ constructionem huius Problematis impediunt. altera quidem quod non patet rectam æqualem A F posse à puncto A in perpendicularem D G duci, quoniam si A F maior esset, quàm A D, ea recta duci non posset. Altera vero instantia est, quòd nõ apparet quare C I parallela basi A B, debeat necessario secare circulum A B I; nam si A C maior esset, quàm recta D G producta vsque ad circumferentiam circuli, ipsa C I non secaret circulum, sed ne tangeret quidem. Sumam igitur personam commentatoris, nec dedignabor tanti viri scripta presso, ac breui stylo tradita, & ob id fortasse subobscura fusiùs explicare. Oẽs itaq; instãtias cõstructioni

aduersantes determinatione dissoluam, eamque necessariam esse demonstra A
bo, nec inde mihi gloriam quæro, non enim mihi moris est paruam rem attollere, quo plus præstitisse videar. Problema igitur illud sic explanatum exhibeo.

## Problema.

Data basi trianguli, altitudine, & rectangulo sub cruribus. inuenire triangulum.

OPortebit autem, cum triãgulum sub cruribus applicabitur altitudini, latitudinem inde ortam non esse minorem basi; nec compositam ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ latitudinis superat quadratũ dimidiæ basis, minorem esse altitudine.




B

Triãguli de quo quæritur esto data basis AB, altitudo æqualis rectæ AC, rectangulum autem sub crurib⁹ detur æquale ei quod fit sub AC, AE, quarum AE non sit minor, quàm AB, nec composita ex dimidia AE, & recta, cuius quadrato differt quadratum dimidiæ AE à quadrato dimidiæ AB, minor sit quàm AC. Oportet inuenire triangulum cuius basis AB, altitudo ipsi AC æqualis, & rectangulum sub cruribus æquale ei, quod fit sub AC, AE. Inclinentur AC, AB ad angulos rectos, & rectæ AE, AB secentur bifariàm in FD, & per D agatur DG ipsi AC parallela, in qua ponatur AG ipsi AF æqualis, est enim AF non minor, quàm AD, cùm ex determinatione Problematis tota AE non sit minor, quàm tota AB. Deinde centro G interuallo GA, vel GB describatur circulus secans DG productam in H. erit DH ex determinatione Problematis non minor altitudine AC; componitur enim ipsa DH ex rectis HG, GD, quarũ HG æqualis est GA vel AF, & quadratũ rectæ GD excessus est, quo quadratum AG vel AF superat quadratũ AD, itaq; acta CI ipsi AB parallela, secabit circulum aut continget. secet ergo aut contingat in I, & connectantur AI, IB. In triangulo igitur AIB, cùm ex vertice cadat in basim AB perpendicularis IL, ipsa erit altitudini AC æqualis. Agatur autem diameter IGM, & connectatur MB, erit triangulum IBM rectangulum & simile triangulo IAL; recti enim sunt anguli IBM, ILA, hic ex constructione ille ex vi semicirculi, & anguli IMB, IAL sunt

C

D

æqua-



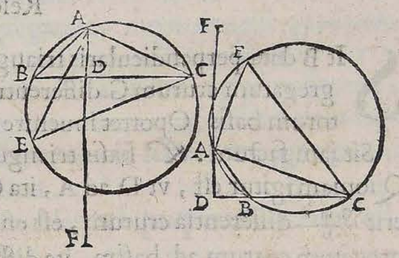
A æquales; in primis enim tribus figuris eidem circumferentiæ IB insistunt, in reliqua vero cùm anguli oppositi IMB, IAB quadrilateri IM, BA in circulo æquales sint duobus rectis, & æquales quoque duobus rectis anguli IAL, IAB, erunt anguli IMB, IAB æquales angulis IAL, IAB, dempto communi angulo IAB, reliquus IMB reliquo IAL æqualis erit. Cùm igitur similia sint triangula IBM, ILA, erit vt IL ad IA, ita IB ad IM, vnde rectangulum LIM sub extremis, æquale erit rectangulo AIB sub medijs; sed rectangulum LIM æquale est rectangulo CAE, quoniam æquales sunt IL, CA, & æquales IM, AE, vtraque enim dupla est ipsius AG; ergo rectangulum AIB æquale erit rectangulo CAE. Ad datam itaque basim AB, & altitudinem IL, seu AC, ita constitutum est triangulum AIB vt rectangu-
B lum sub cruribus æquale sit rectangulo CAE, quod erat faciendum.

Determinatum est, rectam DH compositam ex AG, GD, non esse minorem altitudine AC; sed si differentia quoque ipsarum AG, GD fuerit non minor eadem altitudine AC; duobus modis Problema absoluetur, nempe duo diuersa triangula Problema efficient, in vno angulus verticis erit obtusus, in altero acutus. Hoc apparet in duobus vltimis figuris.

At verò Determinationem, quam Problemati adiecimus, necessariam esse, sequenti Lemmate ostendetur.

## Lemma.

C SI rectangulum sub cruribus trianguli applicetur ad altitudinẽ eiusdem trianguli, latitudo inde orta, non erit minor basi, nec composita ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ latitudinis superat quadratum dimidiæ basis, minor erit altitudine.




Sit triangulum ABC, cuius altitudo AD, sitque rectangulum BAC, sub cruribus, æquale rectangulo ADF. Dico primum, DF non esse minorem basi BC. Describatur enim circa triangulum circulus ABC, & in
D eo ducatur diameter CE, & iungatur AE: angulus igitur EAC in semicirculo rectus erit, & ideo æqualis recto ADB. sunt autem & anguli AEC, ABD æquales; in prima enim figura, eidem circumferentiæ AC insistunt, in secunda verò quadrilateri EA, BC, in circulo anguli appositi AEC, ABC duobus rectis sunt æquales; sed & anguli ABD, ABC æquales sunt duobus rectis, ergo anguli AEC, ABC æquales erunt angulis ABD, ABC, dempto communi angulo ABC, reliquus angulus AEC reliquo ABD æqualis erit; sed & anguli EAC, ABD ostensi sunt æquales, ergo similia erunt triangula EAC, ADB. quare vt AD ad AB, ita erit AC ad CE, ac proinde rectangulum sub extremis AD, CE æquale erit rectangulo BAC

sub

sub medijs, hoc est rectangulo A D F. vnde D F æqualis erit diametro C E, & consequenter non minor quam B C quod est primum.

Deinde secetur B C bifariam, & ad rectos angulos in G à recta G I secante diametrum E C in H, circumferentiam verò in I; erit ergo H centrum circuli, & semidiameter H I vel H C, æqualis erit dimidiæ D F. Dico igitur rectam I G compositam ex I H, & H G hoc est ex dimidia D F, & recta cuius quadrato superatur quadratum C G à quadrato C H, seu dimidiæ D F, nó esse minorem altitudine A D. Hoc licet manifestum sit, tamen ne dicat Cyriacus demonstrationem non esse accuratam; istud quoque demonstrabo.

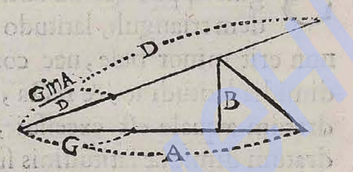
Si punctum D idem sit, quod G erit & D E eadem, quæ G I, ergo constat propositum. si vero punctum D non sit idem quod G, cónectatur G A, erit G I, cum sit in ea centrum circuli maior, quàm G A; sed ipsa G A maior est B quam D A, quadratum enim G A æquale est quadratis D A D G, ergo G I multo maior erit, quàm D A; non autem minor quod secundo loco erat demonstrandum. Quare manifesta est determinatio Problematis. Longius quàm par erat incepto abij ad propositum redeo.

## Problema IV.

Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

### Resolutio.

C




Sit B data perpendicularis trianguli, D aggregatum crurum G differentia segmentorum basis. Oportet inuenire triangulũ.

Sit iam factum. & basis trianguli esto A. Quoniam igitur est, vt D ad A, ita G ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ differentia crurum, est enim vt* aggregatum crurum ad basim, ita differentia segmentorum basis, ad differentiam crurum; sed quadratum aggregati crurum, vnà cum quadrato differentiæ eorundem, * dupla sunt. quadratorum à cruribus, ergo $DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æqualia erunt quadratis crurum bis: Quadrata autem crurum bis, * æqualia sunt quadratis segmentorũ bis, vna cum quadrato perpendicularis quater, ergo. D

Theor. 7 huius

Theor. 4 primi

7 primi

$DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabuntur quadratis segmentorum bis $+ BQ4$

Sed quadrata segmentorum bis* æqualia sunt quadrato basis, vnà cum quadrato differentiæ segmentorum basis, ergo

Theor. 4 primi

$DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur $AQ + GQ + BQ4$

Hic non possunt auferri ex vtraq; parte A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis seperentur; quia ijs ablatis.

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$, æquaretur $BQ4 + GQ - DQ$

Atque adeo ex vna æqualitatis parte existeret quadratum differentiæ crurum, minus quadrato basis, quod esset absurdum; nam non potest auferri qua-



A quadratum basis à quadrato differentiæ crurum, maius nempe à minore. auferatur ergo vtrinque $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & G Q, & B Q 4, vt cognita ab incognitis seperentur. ergo

$DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $AQ - \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

Vel $DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $\frac{DQ \text{ in } AQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

est enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod A Q.

Seu quod idem est $DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $\frac{DQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

Denique resoluatur fractio $\frac{DQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in sua membra, vt æqualitas in proportionem transmutetur, vt in principio huius Libri docuimus, ergo proportionalia erunt plana

B $DQ - GQ$, $DQ - GQ - BQ4$, $DQ$, $AQ$.

Atque eorum radices proportionales erunt

L. V. $DQ - GQ$, L. V. $DQ + GQ - BQ4$, D A

### Porisma.

VT recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli, superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & perpendiculari dupla; ita est aggregatum crurum ad basim.

Datur ergo basis trianguli de qua quærebatur.

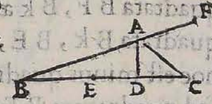
C Ex Porismate apparet, quadratum aggregati crurum maius esse quadratis, quæ fiunt à differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.

Apparet quoque, priorem rectam in Porismate nominatam ad posteriorẽ. minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis; prior enim recta ad posteriorem se habet, vt aggregatum crurum ad totam basim. Sic Porisma indicat.

Hæc omnia demonstranda sunt, & Problemati præponendæ Determinationes.

## Lemma I.

D Quadratum aggregati crurum trianguli maius est quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.




SIt triangulum A B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, quorum differentia sit B E, & continuetur B A in F, vt sit B F æqualis compositæ ex B A, A C. Dico quadratum ex B F maius esse quadratis ex B E, & A D dupla. Quoniam enim quadratum B F * æquale est quadratis B A, A F, & duplo rectanguli B A F, quadrata autem B A, & A F; hoc est & A C, * æqualia sunt quadratis B D, D C, & duplo quadrati A D, duplum verò rectangulum B A F maius est duplo

4 secundi

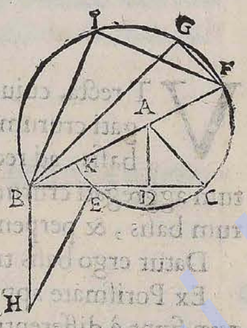
47 primi

plo quadrati A D, cùm vtraque ipsarum B A, A F maior sit ipsa A D, ergo A
quadratum A F maius erit quadratis B D, D C, & quadruplo quadrati A D,
& consequenter multo maius quadrato B E, & quadruplo quadrati A D, hoc est
& quadrato A D duplæ: quod erat ostendendum.

## Lemma II.

REcta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo idem quadratum aggregati crurum superat quadrata differentiæ segmentorum basis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habet, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis. B

SIt triangulum A B C, cuius basim B C secet perpendicularis A D in duo segmenta B D, D C, quorum differentia sit B E, & producatur B A in F, vt sit A F æqualis A C, & in B F describatur semicirculus, in quo accomodetur F G æqualis B E, & iungatur G B; deinde ex B demittatur B H perpendicularis ipsi B C, duplæ verò A D æqualis, & iungatur H E: ea minor erit, quàm B F, quia quadratum B F, ex antecedente Lemmate, maius est quadratis B E, B H; hoc est quadrato H E, ergo in semicirculo B G F aptetur F I æqualis H E, & iungatur I B. quadratum igitur B F superat C
quadratum B E hoc est F G, quadrato G B, idemque quadratum B F superat quadrata B E, B H, hoc est quadratum E H; seu F I, quadrato I B.




Dico igitur B G ad B I, minorē rationē habere, quā B F ad B E. Describatur enim ex A centro ad interuallum A C vel A F circulus, quem A B secet in k, is circulus transibit per E, cum sint æquales E D, D C, & A D perpendicularis ad B C. Quoniam igitur quadrata B F, B k* æqualia sunt duplo quadratorum B A, A F, hoc est B A, A C, duplum autem quadratorum B A, A C* æquale est duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D; ergo quadrata B F, B k æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D, hoc est & quadrato B H; est enim B H dupla ipsius A D; D
sed duplum quadratorum B D, D C,* æquale est quadratis B C, B E, ergo quadtata B F, B k æqualia erunt quadratis B C, B E, B H; auferantur vtrinq; quadrata B k, B E, B H, quadratum igitur B F, minus quadratis B E, B H, hoc est minus quadrato H E, æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k; sed quadratum B F, minus quadrato H E vel F I, idem valet, quod quadratum B I; ergo quadratum B I æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k.

Et quoniam est B F ad B E, vel F G, sicut B C ad B k, erit & quadratum B F ad quadratum F G, vt quadratum B C ad quadratum B k; & diuidendo erit vt quadratum B F, minus quadrato F G, hoc* est, vt quadratum B G ad

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi

47 primi

qua-



A quadratum F G, ita quadratum B C, minus quadrato B k, ad quadratum B k; sed quadratum B C, minus quadrato B k ostensum est æquale quadrato B I, ergo vt quadratum B G ad quadratum F G, ita erit quadratum B I ad quadratum B k, & per consequens vt B G ad F G, hoc est ad B E, ita erit B I ad B k, & permutando vt B G ad B I, ita B E ad B k, hoc* est, ita B F ad B C; sed minor est ratio B F ad B C, quàm B F ad B E, ergo & ratio B G ad B I, minor erit quàm B F ad B E, quod erat ostendendum. Theor. huius

His demonstratis, Problema ita determinandum erit.

### Determinatio

B OPortet quadratum aggregati crurum, maius esse quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.

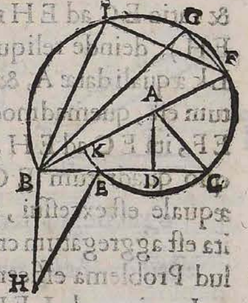
### Determinatio II.

OPortet quoque rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata differentiæ segmētorum basis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis. Sed aliter quoque in simpliciorem formam potest hæc secunda determinatio ita reduci.

C Oportet quoque duplam perpendicularem minorem habere rationem, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis, quàm eadem recta ad aggregatum crurum.

Determinationem hanc demostrabimus hoc modo.

Quadratum B F superat quadratum B G* quadrato F G hoc est B E, idem autem quadratum B F, superat quadratum B I quadrato E I, hoc est quadrato H E, seu quadratis B E, B H, quadratum igitur B G superabit quadratum B I quadrato B H. 47 primi, huius 8

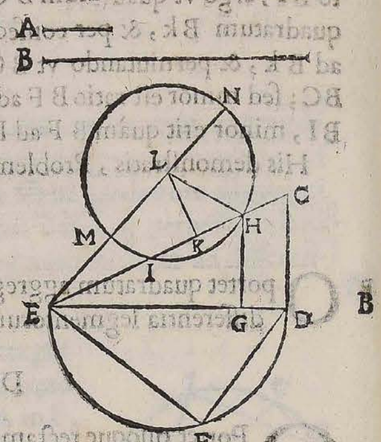



Et quoniam ostensum est B G ad B I minorem rationem habere, quàm B F ad B E, vel ad F G, habebit quoque & quadratum B G ad quadratum B I minorem rationem, quàm quadratum B F ad quadratum F G; quare per conuersionem rationis,* quadratum B G ad quadratum B G, minus quadrato B I, hoc est ad quadratū B H, maiorem habebit rationem, quàm quadratum B F ad quadratum B F, minus quadrato F G; hoc est ad quadratum B G; ergo* conuertendo minorem rationem habebit quadratum B H ad quadratum B G, quàm* idem quadratum B G ad quadratum B F, & consequenter B H ad B G minorem quoque rationem habebit quàm eadem B G ad B F. quare constat Determinatio. D 30 quinti 26 quinti

Com-

### Compositio Problematis.

SIt data perpendicularis trianguli A, aggregatum crurum B, & differentia segmentorum basis CD. Oportet inuenire triangulum. à puncto D ipsi CD ducatur perpendicularis DE, in eaq; ponatur CE æqualis B, quadratum igitur EC superat quadratum CD quadrato ED; itaq; recta ED, ex præcepto Porismatis, ponenda est pro prima quatuor proportionalium. Deinde in ED describatur semicirculus, in quo accomodetur DF æqualis duplæ A, (est autem ED maior quàm A dupla, quoniam ex prima determinatione Problematis quadratum EC, cui æqualia sunt quadrata CD, DE, maius est quadratis CD, & A duplæ, atq; adeo quadratum DE maius est quadrato duplæ A, vnde & recta DE maior quàm A dupla), & iungatur EF. Quoniam igitur quadratum EC superat quadratum CD quadrato DE; quadratum autē DE superat quadratum DF quadrato EF ipsum quadratū EC superabit quadrata CD, DF quadrato EF; ergo recta EF debet fieri secunda quatuor proportionaliū, tertia EC, & quærenda est quarta; sic Porisma docet, rectæ igitur EF ponatur æqualis EG, & agatur GH parallela ipsi DC secans EC in H, erit igitur vt ED ad DG, ita EC ad EH: quare EH est quarta proportionalis quæsita. Atq; ea debet fieri basis trianguli construendi. sic habetur ex Porismate. Ab ipsa igitur EH abscindatur EI æqualis CD (est autem CD minor, quàm EH; nam cùm sit vt ED ad EG, ita EC ad EH, ratio autem ED ad EG minor, quàm EC ad CD, ex secunda determinatione, erit ergo & ratio EC ad EH minor, quam EC ad CD, quare* CD minor est, quàm EH). deinde reliqua IH secetur bifariam, & ad angulos rectos in K à recta Lk æquali datæ A, & iungantur EL, LH. Itaq; triangulum LEH constitutum est, quemadmodum Porisma docet; est enim vt ED ad EG, hoc est ad EF, ita EC ad EH, hoc est vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum EC superat quadratum CD, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo idem quadratum EC superat quadrata CD, DF, ita est aggregatum crurum ad basim. Nunc ostendendum est, triangulum illud Problema efficere.




In triangulo LEH perpendicularis LK æqualis est A datæ, ex constructione, & EI differentia segmentorum basis Lk; KH æqualis CD, similiter ex constructione, superest vt cum posita ex cruribus EL, LH ostendatur æqualis datæ E. id fiet repetitis resolutionis vestigijs hac ratione.

Centro L interuallo LH describatur circulus secans eius EL in M, productum verò in N, is circulus transibit per punctum I cùm sint æquales Ik, KH,



KH, & Lk perpendicularis ad EH. Quoniam igitur quadratum EH minus quadrato HG æquale* est quadrato EG, hoc est EF, seu quod idem* est quadrato ED, minus quadrato DF, quadratum autem ED* æquale est quadrato EC minus quadrato CD, ergo quadratum EH; minus quadrato HG æquale erit quadrato EC minus quadratis CD, DF. addantur vtrique parti quadrata HG, CD, DF; ea enim empta sunt in resolutione, ergo quadrata EH, CD, DF, æqualia erunt quadratis EC, HG; sed quadratum CD æquale est quadrato EI, & quadratum DF quadruplum est quadrati LK; cum sit DF dupla ipsius Lk, ergo quadrata EH, EI, vnà cum quadruplo quadrati Lk æqualia erunt quadratis EC, HG; sed quadrata EH, EI* æqualia sunt duplo quadratorum EK, KH. ergo duplum quadratorum Ek, kH, vnà quadruplo quadrati Lk æquale erit quadratis EC, HG; sed duplum quadratorum EK, kH, vnà cum quadruplo quadrati LK* æquale est duplo quadratorum EL, LH, ergo duplum quadratorum EL, LH æquabitur quadratis EC, HG, duplum autem quadratorum EL, LH, hoc est EL, LN *æquale est quadratis EN, EM, ergo quadrata EN, EM quadratis EC, HG æqualia erunt. Theor. 4 primi

Et quoniam propter similitudinē triangulorū EHG, ECD est, vt EH ad HG, ita EC ad CD hoc est ad EI, rectangulum IEH sub extremis, hoc* est rectangulum MEN æquale erit rectangulo EC, HG sub medijs, sed & quadrata EN, EM ostensa sunt æqualia quadratis EG, HG, ergo recta EM* æqualis erit rectæ HG, & EN æqualis EC, hoc est datæ B, quod erat ostendendū. Theor 5 huius

Constructum est igitur triangulum LEH quale construendū proponebatur.

### Problema V.

Data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & differentia crurum. Inuenire triangulum.

### Resolutio.

SIt data differentia segmētorum basis D, differentia crurum B, & oporteat inuenire triangulum.

Sit iam factum, & aggregatum crurum triāguli estò A, ergo A ✣ B erit* crus maius duplū, A — B* duplū crus minus, & cōsequenter simplum crus maius, erit $A\frac{1}{2} \text{ ✣ } B\frac{1}{2}$ crus minus $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$, sed quadrata crurum æqualia sunt quadrato basis subtendētis angulum rectum trianguli, ergo

Quad. cruris maioris $AQ\frac{1}{2} \text{ ✣ } BQ\frac{1}{4} \text{ ✣ } B$ in $A\frac{1}{2}$ )
Quad. cruris minoris $AQ\frac{1}{2} \text{ ✣ } BQ\frac{1}{4} - B$ in $A\frac{1}{2}$ ) æquabuntur quadrato basis

Hoc est $AQ\frac{1}{2} \text{ ✣ } BQ\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato basis

Et cōsequēter L.V. $AQ\frac{1}{2} \text{ ✣ } BQ\frac{1}{2}$ æquabitur ipsi basi

Et quoniam est* vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, ideo proportionales erunt. Theor. 7 huius




Corol. 1 Probl. 1 Lib. 1

B D L.V. $AQ\frac{1}{2} \text{ ✣ } BQ\frac{1}{2}$ A

F Et

Et per consequens earum quadrata proportionalia erunt. A

BQ DQ AQ ½ + BQ ½ AQ

Et duplatis antecedētibus, vt potestas integra fiat, erunt quoq; proportionalia

B BQ 2 DQ AQ + DQ AQ

Et diuidendo proportionalia erunt

BQ 2 — DQ DQ BQ AQ

Atque proportionalia erunt, & eorum latera

L.V. BQ 2 — DQ D B A

## Porisma.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo duplum quadratum differentiæ crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli ad differentiam segmentorum basis; ita est differentia crurum ad aggregatum eorundem. B

Datur ergo aggregatum crurum, de quo quærebatur.

Ex Porismate apparet differentiam segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli minorem esse recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, eo quod duplum quadratum differentiæ crurum maius est quadrato differentiæ segmentorum.

Id ostendendum est atque Problemati præfigenda determinatio, ne differentia segmentorum basis detur non minor, quàm recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum; quamobrem ita propono. C

## Lemma.

Differentia segmentorū basis subtendentis angulū rectum trianguli, minor est, quàm recta cuius quadratū æquale est duplo quadrati differentiæ crurum.




SIt triangulum A B C rectangulum in A, cuius basim B C secet perpendicularis A D in duo segmenta B D, D C, & centro A interuallo A C cruris minoris describatur circulus secans basim B C in E, crus vero B A in F, productum autem in G. Differentia igitur segmentorum B D, D C erit B E; differentia vero crurum B F. Dico B E minorem esse recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrati B F. Quoniam enim B G secta est vtrunq; D in A, quadratum totius B G vnà cum quadrato B F differentiæ partium * æquale erit duplo quadratorum B A, A G, hoc est B A, A C, seu quod idem est æquale erit duplo quadrati B C, & consequenter quadratum B G minus erit duplo quadrati B C. Et quoniam est B C ad B G vt B F ad B E, erit & quadratum B C ad quadratum B G vt quadratum B F ad quadratum B E, & duplatis antecedentibus vt duplum quadrati B C ad quadratum B G, ita erit duplum quadrati B F ad quadratum B E; sed quadratum B G ostensum est minus duplo quadrati B C, ergo & quadratum B E minus erit duplo quadrati B F, atque adeo & recta B E minor erit, quàm recta cuius quadratum

Theor. 4 primi

æqua-



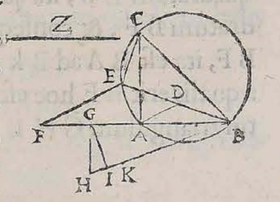
A æquale est duplo quadrati B F, quod erat ostendendum.

Hoc igitur demonstrato, Problema ita determinandum erit.

## Determinatio.

OPortebit differentiam segmentorum basis subtendentis angulum rectū trianguli, minorem esse recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, maiorem vero differentia crurum.

## Compositio Problematis.




B SIt data differentia segmētorum basis angulum rectum subtendentis Z. differentia crurum A B. Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipsi A B æqualis, & ad angulos rectos A C, & cōnectatur C B. quadratum igitur C B æquale erit quadratis C A, A B, & ideo duplum erit quadrati A B. Itaque a quadrato C B debet auferri quadratum Z, sic Porisma iubet; est autem Z minor, quàm C B ex prima determinationis parte; ergo in circulo circa diametrum C B descripto aptetur B E æqualis Z; ea maior erit, quā A B, ex secunda parte determinationis, & iuncta E C quadrata C E, E B æqualia erūt quadrato C B, rectus est enim angulus C E B in semicirculo, quare si à quadrato C B auferatur quadratum E B; hoc est Z remanebit quadratum C E, rectæ igitur C E quadratum æquale erit excessui, quo duplum quadrati A B superat quadratum Z, ergo ipsa C E ponenda est pro prima quatuor proportionalium, quarum secunda erit B E, tertia B A, & quærenda est quarta. sic habetur ex Porismate. Itaque à recta E B abscindatur B D æqualis E C, & connectatur D A, cui parallela agatur E F occurrens B A continuatæ in F. erit igitur vt B D ad B E, ita B A ad B F. inuenta est igitur quarta proportionalis B F; ea debet æquari compositæ ex cruribus trianguli construendi, vt in Porismate, sed eorundem crurum datur differentia A B, ergo secetur F A bifariam in G à perpendiculari G H æquali ipsi G A, vel G F, & connectatur H B. composita igitur ex cruribus H G, G B trianguli H G B, (manente tamen eorundem differentia A B) æqualis erit ipsi B F. Itaque constitutum est triangulum H G B, quemadmodum Porisma docet, est enim vt B D, D hoc est E C ad B E, seu Z, ita B A ad B F, hoc est vt recta cuius quadratum æquale est ei, quo differt duplum quadrati differentiæ crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis ad differentiam segmentorum, ita differentia crurum ad aggregatum eorundem. Nunc autem ostendendum est triangulum G H B esse quale Problema requirit.

Primum igitur triangulum G H B rectangulū est, quoniā angulus H G B rectus est, ex constructione. deinde crura eius H G, G B differunt per A B datam; sunt enim æquales H G, G A, ex constructione; itaque superest, vt differentia segmentorum basis æquetur Z datæ; id autem ita fit manifestum.

Ducatur enim G I basi H B perpendicularis, & centro G interuallo G H, de-

scribatur circulus secans basim H B in K, erunt æquales H I, I K, vnde differentia segmentorum H I, I B erit K B. Quoniam igitur ob parallelas D A, E F est, vt D B, hoc est E C ad B E, ita A B ad B F; erit & quadratum E C ad quadratum B E, vt quadratum A B ad quadratum B F, & componendo (nã in resolutione per diuisionem rationis argumentatus sum) erit vt quadrata E C, B E, hoc est * vt quadratum C B, seu quod idem est, vt duplum quadrati A B ad quadratum B E, ita quadrata A B, B F hoc est ita * duplum quadratorum F G, G B, seu G H, G B ad quadratum B F, & subduplatis antecedẽtibus, (in resolutione enim duplata sunt antecedentia) erit vt quadratum A B ad quadratum E B, ita quadrata G H, G B, hoc est, ita quadratum B H ad quadratum B F, & consequenter, vt A B ad B E, ita B H ad B F, sed vt B H ad B F, ita est B A ad B k; ergo vt A B ad B E, ita erit A B ad B K; quare B k æqualis erit B E hoc est Z datæ, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum G H B & Problemati. satisfit quod faciendum erat.

47 Primi

Theor. 4 primi

A

B

## Scholium.

Aduersus constructionem huius Problematis duæ feruntur instantiæ quarum altera per primam Determinationis partem dissoluitur; altera per secundam. Et prima quidem Determinationis pars in Porismate conspicitur; scilicet differentiam segmentorum basis minorem esse debere recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, eò quod quadratum differentiæ segmentorum minus est duplo quadrato differentiæ crurum, vt Porisma indicat.

C

Secunda verò pars Determinationis, nempe differentiam segmentorum basis maiorem esse debere, differentia crurum, neque in propositione Problematis, neque in Porismate cernitur; sed per instantiam quæ aduersus constructionem fertur manifesta fit. Nam cum in circulo C A B aptari debeat recta B E æqualis Z, differentiæ segmentorum basis, vt Porisma iubet; ea, nisi esset maior quam A B differentia crurũ recta E C, non esset minor, quàm E B, nec ideo ab ipsa E B, posset abscindi recta æqualis E C; itaque Problema constrtui non posset. Sed cum instantia hæc constructioni aduersans procedat ab eo; quod differentia segmentorum basis posset exponi, non maior, quàm differentia crurum, adiecta Determinatione Problemati, vt ipsa differentia segmentorum maior sit, quàm differentia crurum, ea instantia dissoluitur. differentiam autem segmentorum maiorem esse, differentia crurum, demonstrauimus Lemmate primo Problemate tertij huius libri. Atque hæc quidem de inuentione Determinationis in hoc, atque in scholio Problematis tertij huius libri dicta sufficiant.

D

## Problema VI.

Data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato crurum, inuenire triangulum.

Reso-

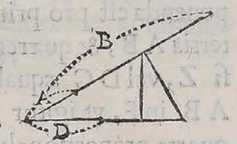


A

## Resolutio.

Sit data differentia segmentorum basis D; aggregatum crurum B; & oporteat inuenire triangulum.

SIt iam factum, & differentia crurum trianguli esto A, ergo B ✣ A erit duplum cruris maioris, & B — A duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $B\frac{1}{2} ✣ A\frac{1}{2}$, simplum crus minus $B\frac{1}{2} — A\frac{1}{2}$. At quadrata crurum * æqualia sunt quadrato basis subtendentis angulum rectum trianguli, ergo




47 primi

Quad. cruris maioris $B Q\frac{1}{4} ✣ A Q\frac{1}{4} ✣ B$ in $A\frac{1}{2}$
Quad. cruris minoris $B Q\frac{1}{4} ✣ A Q\frac{1}{4} — B$ in $A\frac{1}{2}$
) æquabuntur quadrato basis

B

Hoc est $B Q\frac{1}{2} ✣ A Q\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato basis

Et cõsequenter L.V. $B Q\frac{1}{2} ✣ A Q\frac{1}{2}$ æquabitur ipsi basi.

Et quoniam est * vt aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad differentiam crurum; proportionales erunt.

Theor. 7 huius

B, D, L.V. $B Q\frac{1}{2} ✣ A Q\frac{1}{2}$, A

Atque eorum quadrata proportionalia erunt.

B Q D Q $B Q\frac{1}{2} ✣ A Q\frac{1}{2}$ A Q

Et duplatis antecedentibus, vt potestas integra fiat, erunt proportionalia

B Q 2 D Q B Q ✣ A Q A Q

Et diuidendo proportionalia erunt.

C

B Q 2 — D Q D Q B Q A Q

Et consequenter eorum latera proportionalia erunt.

L.V. B Q 2 — D Q D B A

## Porisma.

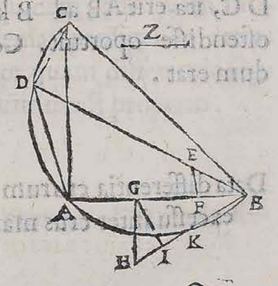
Vt recta cuius quadratũ æquale est ei, quo differt duplum quadratũ aggregati crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, ad differentiam segmentorum basis; ita est aggregatum crurum ad differentiam eorundem.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

## Compositio Problematis.

D

SIt data differentia segmentorum basis angulum rectum subtendentis Z, aggregatum crurum A B. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi A B perpendicularis, & æqualis A C, & iungatur C B; eius igitur quadratum æquale erit quadratis C A, A B, & ideo quadrati A B duplũ, itaq; à quadato C B auferendũ est quadratũ Z. sic Porisma fieri iubet ergo describatur circulus circa diametrũ C B, in eoq. aptetur C D æqualis Z, & iungatur D B.






Qua-

Quadrata igitur C D, D B æqualia erunt quadrato C B, quoniam rectus est A
in semicirculo angulus C D B, quare si à quadrato C B auferatur quadratum C D, hoc est Z, remanebit quadratum D B. Itaque rectæ D B quadratum æquale erit ei, quo differt duplum quadrati A B à quadrato Z. Igitur ipsa D B ponenda est pro prima quatuor proportionalium, quarum secunda erit Z, tertia A B, & quærenda est quarta. id Porisma præcipit. Sumatur ergo ipsi Z, vel D C æqualis B E, & iungatur D A, cui parallela agatur E F secans A B in F, vt igitur B D ad B E, ita erit B A ad B F; inuenta est igitur quarta proportionalis B F. ea debet fieri differentia crurum trianguli quæsiti, sic Porisma docet; sed eorumdem crurum aggregatum datur A B, ergo secetur F A bifariam in G à perpendiculari G H, æquali ipsi G A, vel G F, & connectatur H B. Differentia igitur crurum H G, G B trianguli H G B, manente quidem eorumdem aggregato A B, erit B F. Itaque constitutum est triangulum H G B, vt Porisma docet. est enim vt B D ad B E, hoc est ad Z, ita B A ad B F, idest, vt recta cuius quadratum æquale est ei, quo differt duplum quadratum aggregati crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis ad differentiam segmentorum, ita aggregatum crurum ad differentiam eorumdem. Nunc ostendendum est in triangulo G H B, esse ea, quæ requiruntur. B

In triangulo igitur G H B angulus H G B rectus est, ex constructione, composita verò ex cruribus H G, G B æqualis est A B datæ; reliquum autē, nempe vt differentia segmentorum basis æquetur datæ Z, id autem, repetendo resolutionis vestigia, ita fit manifestum.

Ducatur G I perpendicularis ad basim H B, & centro G interuallo G H, vel C
3 Tertij D F, seu G A describatur circulus secans basim H B in K. erunt igitur * æquales H I, I K, & ob id differentia segmentorum H I, I B, erit K B. Et quoniam ob parallelas D A, E F, est, vt B D ad B E, hoc est D C, ita B A ad B F; erit quoque & quadratum B D ad quadratum D C, sicut quadratum B A ad quadratum B F; & componendo erit, vt quadrata B D, D C, hoc est, vt quadratum C B, seu quod idem valet, vt duplum quadrati A B ad
Thor. 4 primi. quadratum D C, ita quadrata B A, B F, hoc est, ita * duplum quadratorum A G, G B, vel G H, G B ad quadratum B F, & subduplatis antecedentibus erit, vt quadratum A B ad quadratum D C, ita quadrata G H, G B; hoc est, ita quadratum B H ad quadratum B F, & consequenter vt A B ad D C, ita erit B H ad B F; sed B H ad B F est, vt B A ad B k, ergo vt A B ad D
D C, ita erit A B ad B k, quare B k æqualis erit D C, hoc est Z datæ, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum G H B, vt faciendum erat.

## Problema VII.

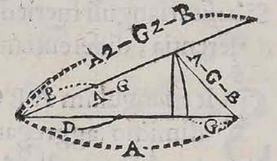
Data differentia crurum trianguli, & differentia segmentorum basis, datoque excessu inter crus maius & basim, inuenire triangulum.

Hoc



A HOc Problema quatuor casus habet: aut enim excessus est penes basim, aut penes crus maius; & si penes crus, aut differentia segmentorum basis maior est, quàm dupla differentia crurum, aut minor, aut æqualis; quartus hic casus vix inter Problemata annumerari potest, cùm in eo innumera triangula Problemati satisfaciant, vt ex eius resolutione & compositione patebit. Primum igitur sit excessus ille penes basim.

### Resolutio Primi Casus.




SIt data differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, & excessus, quo basis superat crus maius G. Oportet inuenire
B triangulum.

Sit iam factum, eiusque basis esto A, ergo crus maius erit A — G, crus minus A — G — B; differunt enim crura per B. atque aggregatum crurum erit A 2 — G 2 — B. At rectangulum sub differentia crurum & aggregato eorumdem* æquale est re- Theor. huius 6
ctangulo sub differentia segmentorum basis & ipsa base. itaque

B in ( A 2 — G 2 — B æquabitur D in A

Seu quod idem est B in A 2 — B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Additis vtrobiq; B in G 2, & B Q, ergo

B in A 2 æquabitur D in A ✣ B in G 2 ✣ B Q.

Et ablato vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis separentur,

C B in A 2 — D in A æquabitur B in G 2 ✣ B Q

Seu quod idem est B 2 — D ) in A æquabitur G 2 ✣ B ) in B.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B 2 — D G 2 ✣ B B A

### Porisma:

Vt excessus, quo' dupla differentia crurum trianguli præstat differentiæ segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia crurum ad basim.

Datur ergo basis trianguli, de qua quærebatur.

D Ex Porismate apparet in huiusmodi triangulo duplam crurum differentiam maiorem esse differentia segmentorum basis. quod quidem, antequam Problema componam, demonstrandum est, atque Problemati præfigenda determinatio, ne crurum differentia dupla detur, non maior quàm differentia segmentorum basis. Itaq; ad id ostendendum Lemma huiusmodi propono.

### Lemma.

Si basis trianguli fuerit crure maiore maior, dupla crurum differentia differentiam segmentorum basis excedet.

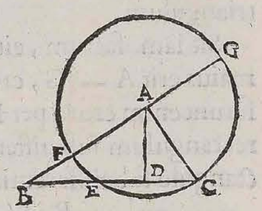
Hoc

HOc Lemma quod ad determinationem Problematis attinet sic propositum & demonstratum determinationi satisfacit, vt in libro variorum Lem. 2 ante Problema quintum factum est. Verùm quoniam dupla differentia crurum trianguli, etiam si basis fuerit minor crure maiore, potest esse maior quàm differentia segmentorum basis, ideo Lemma illud in meliorem formam sic propono, A

## Lemma.

Si basis trianguli fuerit dimidio aggregati crurum maior, dupla crurum differentia, differentiam segmentorum basis excedet.

B




SIt triangulum A B C, cuius basis B C, sit maior dimidio aggregati crurum B A, A C, & centro A interuallo A C cruris minoris describatur circulus secans crus A B productum in punctis F G, basim vero B C in E, & cadat in B C, perpendicularis A D. erit igitur B F differentia crurum A B, A C, differentia vero segmentorum B D, D C erit B E; sunt enim * æquales E D, D C. Dico duplam B F maiorem esse quam B E. Quoniam enim B C ponitur maior dimidia B G, dupla B C maior erit, quàm tota B G, sed vt B C ad B G, ita * est B F ad B E, ergo duplatis antecedentibus erit, vt B C dupla ad B G, ita dupla B F ad B E; sed B C dupla ostensa est maior, quàm B G, ergo & B F dupla, maior erit quàm B E, quod erat ostendendũ. C

3 tertij

Theor. 7 huius

Hoc igitur demonstrato præfigenda est huic casui hæc determinatio.

## Determinatio.

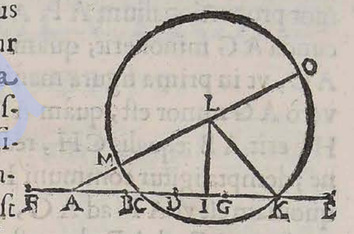
OPortebit duplam differentiam crurum maiorem esse differentia segmentorum basis, simplam vero minorem.

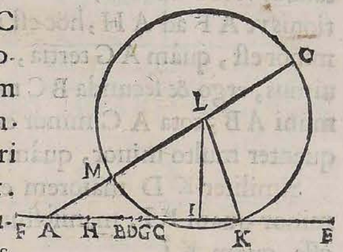
## Compositio Primi Casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit maior, quàm A B, minor autem, quàm dupla A B & excessus, quo basis superat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. D Fiat C F dupla ipsis A B, ea, ex determinatione, maior erit, quàm A C. similiter & B G fiat dupla ipsius B D, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam, quæ sit A k; ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, eamq; maiorem esse, quam A C ostendetur infra, ergo secetur C k bifariam in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D; ipsa autem K D maior est quam K I, vt demonstrabimus infra & iungatur A L. posuimus k L æqualem k D pro crure minore trianguli construendi quoniam ipsum crus debet superari à base A K, excessu A D; nam cum basis A k debeat superare crus maius, excessu B D, crus autem maius superare debeat crus minus excessu



A su A B; basis A k debebit superare crus minus vtroq; excessu A B, B D. Constructum est igitur triangulum L A K, quemadmodum Porisma construere docet, factum est enim vt A F excessus, quo A B. dupla superat A C, ad compositam ex A B, & dupla B D, ita A B ad A K basim trianguli L A k. Nunc demonstrandum est in eo triangulo esse ea quæ requiruntur. Differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data, cum sint æquales C I, I k, ex constructione; differentia vero crurum A L, L k æqualem




B esse A B datæ, per resolutionis regressum ostendetur; reliquum autem, ideſt latus A L superari à base A K excessu B D ex demonstratis patebit. Centro igitur L interuallo L k describatur circulus secans A L in M; productam verò in O, is circulus transibit per C cum sint * æquales C I, I k. deinde producatur A k in E, vt sit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & G B dupla ipsius G D tota E B erit dupla totius k D, hoc est ipsius k L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

3 tertij

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A K sub extremis æquale erit rectangulo B A G sub medijs, sed rectangulum F A K æquatur rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A K, hoc est æquatur duplo rectanguli B A K, minus rectangulo (C A k recta enim C F dupla est ipsius A B) ergo duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A K, æquale erit rectangulo B A G. addatur vtrobique rectangulum C A K; detractum enim fuit in resolutione, ergo duplum rectanguli B A K; hoc est rectangulum sub B A, & dupla A K, æquabitur rectangulis B A G, C A K. auferatur vtrinque rectangulum B A G, additum fuit in resolutione, ergo rectangulum sub A B, & dupla A k, minus rectangulo B A G, seu quod idem valet, rectangulum sub B A, & composita ex A K, k G, quod est rectangulum B A E (sunt enim æquales k G, k E, ex constructione) æquale erit rectangulo C A K, * hoc est M A O, atque sunt æquales M O, B E, vt est demonstratum, ergo & A M * æqualis erit A B. Reliquum est vt basis A k superet crus L A excessu B D; id autem ex demonstratis patet, nam cum L k superetur ab A k excessu A D, ex constructione, ab A L verò excessu A B, vt demonstrauimus, L A superabitur ab A k reliquo excessu B D. Constructum est igitur triangulum L A k, cuius crurum differentia A M, æqualis est datæ A B; differentia vero segmentorum basis est ipsa A C data, & basis A K superat crus maius L A dato excessu B D, quod erat faciendum.

C

D

36 tertij

Theor. 3 huius

At vero A K maiorem esse, quàm A C sic demonstrabitur. Quoniam enim A B minor est, quàm A C, ex determinatione, atque F C dupla est ipsius A B, ex constructione, erit A F minor, quàm A B sed A F est prima quatuor

tuor proportionalium A F, A G, A B, A K; ipsa autem A B tertia, ergo &* se- A
cunda A G minor erit, quàm A K quarta; si igitur A G non est minor, quàm
A C, vt in prima figura manifestum est A K maiorem esse, quàm A C. Si
verò A G minor est, quàm A C, vt in secunda figura, secetur F C bifariam in
H, erit A B æqualis C H, recta enim F C dupla est ipsius A B ex constructio-
ne; dempta igitur communi H B, reliqua A H reliquæ B C æqualis erit. Et
quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A K, ex constructione, erit permu-
tando, vt A F ad A B, hoc est ad F H, ita A G ad A K, & per diuisionem ra-
tionis vt A F ad A H, hoc est ad B C, ita erit A G ad G K; sed A F prima
minor est, quàm A G tertia, cum sit etiam minor, quàm A B, vt demonstra-
uimus, ergo & secunda B C minor erit, quàm G H quarta; atque addita com-
muni A B, tota A C minor erit, quàm composita ex A B, G K, & conse- B
quenter multo minor, quàm A K quod erat ostendendum.

Similiter K D maiorem esse, quàm K I sic ostendetur. Si K G non est
minor quam K I, manifestum est K D compositam ex K G, G D maiorem
esse, quàm K I.

Sed K G sit minor quam K I. Quoniã igitur A K ostensa est maior, quam
A G, dempta communi A D, reliqua D K maior erit, quàm reliqua D G,
hoc est quam D B, & ideo multo maior, quàm D C; ergo punctum D, erit
inter puncta C I, cum sint* æquales K I, I C. quare K D maior est quàm C
K I. quod erat ostendendum.

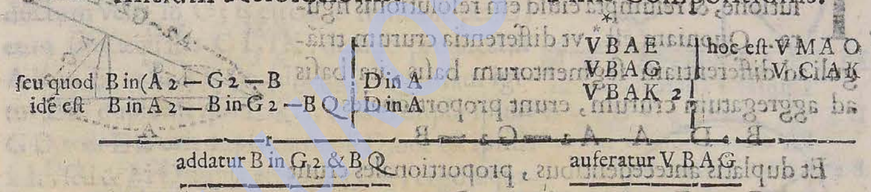
CON-



A

# CONSPECTVS RESOLVTIONIS ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis. Finis Compositionis.

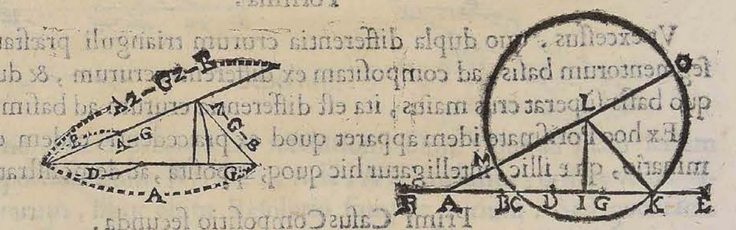



æqualitas ad proportionem proportio ad æqualitatem

B 2 — D G 2 + B B A A P A G A B A K

C

Finis Resolutionis. Initium Compositionis




D

* *Similiter rectang. B A E idem est, quod in resolutione B in (A 2 — G 2 — B. nam ipsum rectang. B A E, continetur sub B A, & excessu, quo A K dupla superat G A compositam ex G B, B A, hoc est ex G D dupla, & ipsa B A, cui quidem rectangulo respondet ex resolutione rectang. B. in (A 2 — G 2. — B.*

* *Nota quod rectang. B A G. idem est quod in resolutione B in G 2 + B Q. nam ipsum rectang. B A G, æquale est rectang A B C. plus quadrato A B. hoc est rectangulo A B D. bis, plus quadrato A B, quæ quidem, in resolutione sunt B in G 2 + B Q.*

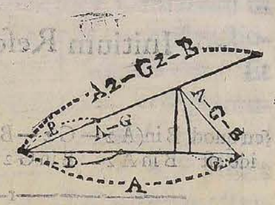
Eundem

Eundem casum alia breuiori via, & resoluam, & componam, in eoque resoluendo proportione vtar, non æqualitate. A

## Eiusdem Casus secunda Resolutio.

Theor. 7 huius

ISdem datis, positisque, vt in antecedente resolutione, & resumpta eiusdem resolutionis figura. Quoniam est* vt differentia crurum trianguli ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, erunt proportionales.




B D A A2—G2—B

Et duplatis antecedentibus, proportionales erunt

B2 D A2 A2—G2—B B

ut antecedens ad consequentem ita antecedentis ad consequentem

Et per conuersionem rationis proportionales erunt

B2 B2—D A2 G2 ✣ B.

Rursus subduplatis antecedentibus, erunt proportionales

B B2—D A G2 ✣ B

Et conuertendo erunt proportionales

B2—D B G2 ✣ B A

Denique permutando proportionales erunt

B2—D G2 ✣ B B A

Hæc autem permutatio non erat necessaria, cum etiam in penultima proportionalium serie, primi tres termini cogniti existant, sed quoniam in eandem proportionem recidit hæc resolutio quemadmodum & antecedens; volui vt etiam eorum Porismata eadem verborum textura exempli arcentur. 9

## Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli præstat differentiæ segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia crurum ad basim.

Ex hoc Porismate idem apparet quod ex præcedenti, eadem ergo Determinatio, quæ illic, intelligatur hic quoq; apposita, ac demonstrata.

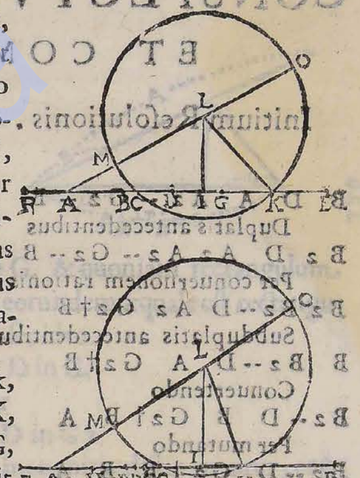
## Primi Casus Compositio secunda.

SIt data vt in priori Compositione differentia crurum trianguli AB, differentia segmentorum basis AC, & excessus, quo basis superat crus maius BD, & oporteat inuenire triangulum. Producatur CA in F, vt sit CF dupla ipsius AB, dupla enim AB maior est, quàm AC, ex determinatione; Deinde fiat vt AF ad AG, ita AB ad aliam, quæ sit AK, ea maior erit quam AC, vt demonstratum est sub antecedenti Compositione. Secetur ergo Ck bifariam in I ad rectos angulos à recta IL, in qua ponatur KL æqualis KD est autem kD maior, quàm kI, vt sub eadem Compositione demonstrauimus, & iungatur AL. Hæc constructio eadem est, quæ in præcedenti compositione; quoniam vtraque fit per rationem vnius, eiusdemque D

Po-



A Porismatis. In triangulo igitur LAk differentia segmentorum basis AI, IK est ipsa AC data, cum sint æquales CI, IK, ex constructione. vt autem ostendantur reliqua, centro L interuallo Lk circulus describatur, secans AL in M, productum vero in O; is circulus transibit per C, cum sint æquales CI, IK. deinde producatur AK in E, vt sit kE æqualis kG. Quoniam igitur EG dupla est ipsius KG, & GB dupla ipsius GD, tota EB erit dupla totius KD, hoc est ipsius kL; sed & MO dupla est ipsius Lk, ergo æqua-




B les erunt BE, MO.

Et quoniam est vt AF ad AG, ita AB ad Ak, erit permutando vt AF ad AB ita AG ad AK, & conuertendo vt AB ad AF, ita AK ad AG, & duplatis antecedentibus vt FC ad AF, ita erit AK bis ad AG, & per conuersionem rationis vt FC ad AC, ita Ak bis ad AE, & rursus subduplatis antecedentibus, vt AB ad AC, ita erit AK ad AE, sed vt AC ad AM, ita est AO ad AK; ergo in perturbata proportione erit vt AB ad AM, ita AO ad AE; atque MO ostensa est æqualis BE, ergo & AM* æqualis erit AB. restat igitur vt basis Ak superet crus maius LA, excessu BD; id autem ita fit manifestum; Theor. 4. huius

C Quoniam enim Lk superatur ab Ak, excessu AD, ex constructione, ab LA verò excessu AB, vt demonstrauimus, LA superabitur ab Ak, reliquo excessu BD. Constructum est igitur triangulum EAK, &c. quod faciendum erat.

## Scholium.



Hæc demonstratio procedit per resolutionis filum vsque ad illam seriem quatuor proportionalium AB, AC, AK, AE inclusiue, ordine vt hic iacent dispositarum, illinc enim Resolutio sumpsit initium. Sed quoniam AM conferenda est cum AB, ad quod omne consilium dirigi debet, opus

D fuit eximere duas medias proportionales AC, Ak, & in earum locum alias duas subrogare AM, AO; quippe quæ prioribus ad constitutionem proportionalium manentibus extremis AB, AE sunt æquiualentes; cùm rectangulum CAK* æquale sit rectangulo MAO; quæ quidem subrogatio 36 tertij fit per argumentationem ex æquali in proportione perturbata, vt cernitur.

# CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

## Initium Resolutionis.

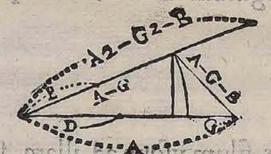
B D A A2 -- G2 -- B
Duplatis antecedentibus
B 2 D A2 A2 -- G2 -- B
Per conuersionem rationis
B 2 B2 -- D A2 G2 † B
Subduplatis antecedentibus
B B2 -- D A G2 † B
Conuertendo
B2 -- D B G2 † B A
Per mutando
B2 -- D G2 † B B A

## Finis Resolutionis.

## Finis Compositionis.

AM AO
AB AC AK AE
Subduplatis antecedentibus
FC AC AK2 AE
Per conuersionem rationis
FC AF AK2 AG
Duplatis antecedentibus
AB AF AK AG
Conuertendo
AF AB AG AK
Permutando
AF AG AB AK

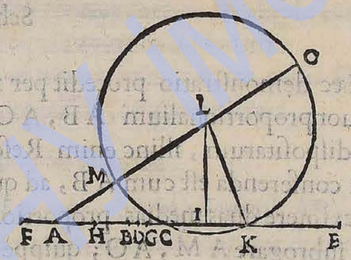
## Initium Compositionis.







C




D

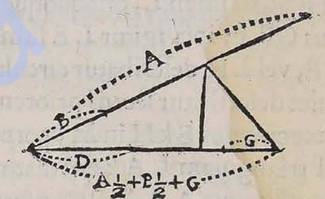
Alias duas Resolutiones, & Compositiones eiusdem Casus proferam, quarum altera per æqualitatem, altera per proportionem procedet; sed aliter atque in præcedentibus, in ijs enim quæsita est basis trianguli; in his de aggregato crurum quæram.

Pri-



A

### Primi Casus Resolutio tertia.




Corol. 2 Probl. 2 primi

ISdem datis, nempe differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, & excessus quo basis superat crus maius G. Oportet inuenire triangulum.

Aggregatum crurũ de quo quæratur esto A, ergo duplum cruris maioris* erit A ✣ B; quare simplum A ½ ✣ B ½ & cum basis superet crus maius excessu G, erit basis A ½ ✣ B ½ ✣ G. & quoniam rectangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base; ideo

B

B in A æquabitur D in A ½ † D in B ½ † D in G.

Et duplicatis omnibus vt fractiones vitentur

B in A 2 æquabitur D in A † D in B ✣ D in G 2

Auferatur vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

B in A 2 — D in A æquabitur D in B ✣ D in G 2

Seu quod idem est B 2 — D ) in A æquabitur B † G 2 ) in D

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

B 2 — D  B ✣ G 2  D  A

### Porisma.

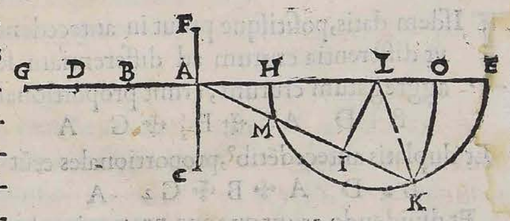
C Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differẽtiam segmentorum basis ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia segmentorum basis ad aggregatum crurum.

Datur ergo aggregatum crurum.

Idem apparet ex hoc Porismate, quod ex præcedẽtibus, nempè duplam differentiam crurum, maiorem esse differentia segmentorum basis; quare intelligatur hìc quoque eadem determinatio, quæ supra.

### Primi Casus Compositio tertia.

D SIt data differentia crurum trianguli, A B, differentia segmentorum basis A C, & excessus quo basis superat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. Positis in directũ A B, B D, duplicetur B D in G, & C A producatur in F, vt sit C F dupla ipsius A B, est autẽ A B dupla maior, quàm A C, ex Determinatione. Deinde fiat vt A F ad A G, ita A C ad aliam, quæ sit A E, ea maior erit, quàm A G,




G 2 quia

quia ∠ A C maior est, quàm A F, atque ablatis A B ab A G, & A H, æqua- A
li ipsi A B ab A E, reliqua H E maior erit, quàm reliqua B G, & cum secetur
H E bifariam in L, erit quoque L E maior, quàm B D, quæ dimidia est ip-
sius G B. in ipsa igitur L E sumatur L O æqualis B D, & centro L interuallo
L E, vel L H describatur circulus, similiter centro A interuallo A O alius cir-
culus describatur secans priorem in K, & iungantur A K, L K, ipsam autē A k
secet circulus E k H in M, perpendicularis vero L I in I. Itaque constructū
est triangulum L A k quemadmodum Porisma docet, factum est enim vt A F
excessus, quo A B dupla superat A C ad A G compositam, ex A B, & B D du-
pla, ita A C ad A E aggregatum crurū trianguli A L K. Huius igitur trian-
guli crura L A, L K differunt per A k æqualem datæ A B, ex constructione;
basis verò A k superat crus maius A L excessu L O æquali ipsi B D, pariter ex B
constructione. Supereſt igitur vt differentia segmentorum basis ostendatur
æqualis datæ A C, id autem repetendo resolutionis vestigia, ita perspicuū fiet.

3 Tertij Quoniam enim L I perpendicularis est ad A k * erunt æquales M I, I K;
quare differentia segmentorum A I, I K, erit A M. Et quoniam est vt A F
ad A G, ita A C ad A E, rectangulum F A E sub extremis, æquale est re-
ctangulo C A G sub medijs, sed rectangulum F A E, idem valet, quod re-
ctangulum F C A E minus rectangulo C A E, hoc est idem valet, quod re-
ctangulum H A E bis, minus rectangulo C A E, ergo rectangulum H A E
bis, minus rectangulo C A E, æquale erit rectangulo C A G, addito vtrique
parti rectangulo C A E, rectangulū H A E bis, æquale erit rectangulo C A G,
plus rectangulo C A E, hoc est æquale erit rectangulo, C A, G E, sed rectan- C
gulum C A, G E duplum est rectanguli C A O, nam cum sint æquales A B,
A H, & æquales quoque L E, L H, erit E B dupla ipsius A L, sed & B G du-
pla est ipsius L O, ergo tota E G dupla erit totius A O, & consequenter re-
ctangulum C A, G E duplum rectanguli C A O. rectangulum igitur. H A E
bis, hoc est M A K, bis, æquale erit rectangulo C A O bis, vel C A k bis, vn-
de & rectangulum M A K semel, æquale rectangulo C A K semel, quare & re-
cta M A æqualis rectæ A C, quod erat ostendendum. Constructum est igitur
L A K, &c. quod faciendum erat.

### Primi Casus Resolutio quarta.

Theor. 7 huius I Isdem datis, positisque prout in antecedenti Resolutione. Quoniam * est D
vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad
aggregatum crurum, erunt proportionales.

B D A½ ✣ B½ ✣ G A

Et duplatis antecedētib⁹, proportionales erūt

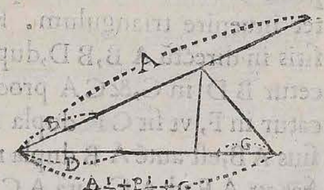
B 2 D A ✣ B ✣ G 2 A

Et diuidendo erunt quoque proportionales

B 2 — D D B ✣ G 2 A

Et permutando erunt proportionales

B 2 — D B ✣ G 2 D A.




Hæc



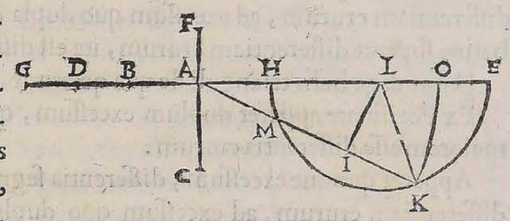
A Hæc permutatio quamuis non sit necessaria, cum & in penultima propor-
tionalium serie primi tres termini cogniti existant; tamen facta est, vt cum
sit eadem proportio, quæ in antecedenti Resolutione, sit quoque idem &
Porisma.

### Porisma.

Vt excessus quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam
segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu,
quo basis superat crus maius; ita est differentia segmentorum basis ad ag-
gregatum crurum.

### Primi Casus Compositio quarta.

B



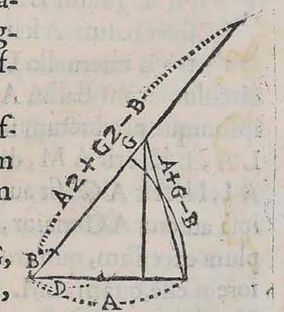

I Isdem datis quæ in antece-
denti compositione, ea-
demque constructione fa-
cta. ostendendum est A M dif-
ferentiam segmentorum basis
æquari A C datæ; cætera enim,
vt illic, ex constructione patēt.

Quoniam enim vt A F ad A G, ita est A C ad A E, ex constructione, erit
permotando, vt A F ad A C, ita A G ad A E, & componendo vt F C ad A C,
ita G E ad A E, sed F C dupla est ipsius A B, vel A H ex constructione, & G E
C dupla ipsius A O, vt ostensum est in præcedenti compositione, ergo subdu-
platis antecedentibus erit A H ad A C, vt A O, hoc est A k ad A E, sed & A H
ad A M, est quoque vt A k ad A E, ergo vt A H ad A C ita erit eadem A H
ad A M, quare A M æqualis erit A C, quod erat ostendendum. Constructum
est igitur triangulum L A k in quo A H differentia crurū æqualis est datæ A B,
& A M differentia segmentorum basis; æqualis A C, atque L O excessus, quo
basis A k superat crus A L, æqualis B D. quod facere oportebat.

### Resolutio Secundi Casus.

D Deinde excessus, qui est inter crus maius, & ba-
sim sit penès ipsum crus, atq; differentia seg-
mentorum basis sit maior, quàm dupla dif-
D ferentia crurum.

Sit igitur data differentia crurum trianguli B, dif-
ferentia segmentorum basis D, quæ sit maior; quàm
dupla B, & excessus, quo crus maius superat basim
sit G. oportet inuenire triangulum.




Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A ✣ G,
crus minus A ✣ G — B, differunt enim crura per B,
atque adeo aggregatum crurum erit A 2 ✣ G 2 — B,
& quoniam rectangulū sub differentia crurum, & aggregato eorundē * æquale Theor. 6 huius

est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ideo A

B in A 2 + B in G 2 — B Q æquabitur D in A.

Quoniam autem ponitur D maior, quàm dupla B, planum D in A maius erit plano B 2 in A, vel quod idem est B in A 2, itaque poterit B in A 2 auferri A D in A. auferatur ergo vtrinque, vt cognita ad incognitis separentur, ergo

B in G 2 — B Q æquabitur D in A — B in A 2.

Seu quod idem est G 2 — B ) in B æquabitur D — B 2 ) in A

Et reuocata ad proportionem æqualitate, erunt proportionales

D — B 2 G 2 — B B A

## Porisma.

Vt excessus quo differentia segmentorum basis trianguli superat duplam B differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, ita est differentia crurum, ad basim.

Datur ergo basis trianguli de qua quæritur.

Ex Porismate apparet duplum excessum, quo crus maius superat basim, maiorem esse differentia crurum.

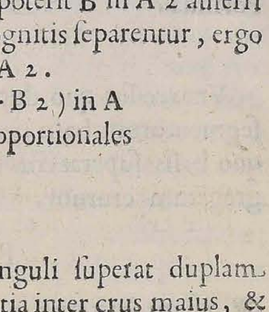
Apparet quoque excessum, differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & & basis superat differentiam crurum, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. primus enim excessus ad secundum se habet vt differentia crurum ad basim. sic Porisma indicat.

Hæc omnia ostendenda sunt vt data intra terminos coerceantur, non enim C ex quibuscunque datis Problema construi posse manifestum est. Dico igitur Lemmata ad determinationes pertinentia sic propono.

## Lemma I.

Si basis trianguli fuerit crure maiore minor; differentia autem segmentorum basis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum; Duplus excessus, quo crus maius superat basim, maior erit quàm differentit crurum.

SIt triangulum L A k, in quo perpendicularis L I secet basim A k in duo segmenta A I, I k, & centro L interuallo L K, cruris minoris, describatur circulus secans basim A k in C, crus vero L A in M, ipsumque productum in O. Differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero segmentorum A I, I k erit A C. sit autem basis A K minor crure L A; ipsa autem A C maior, quàm dupla A M. Dico duplum excessum, quo crus A L superat basim A k, maiorem esse, quàm A M. Secetur enim A M bifariam. in H, erit igitur L H dimidia ipsius A O; Et quoniam* est vt A M ad A C, ita A k ad A O, duplatis antecedentibus erit, vt A M dupla ad




D

Theor. 7 huius



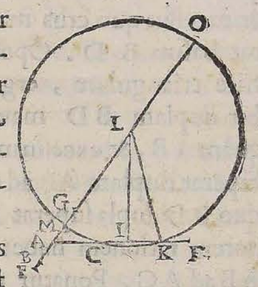
A ad A C, ita dupla A K ad A O, sed A M dupla ponitur minor, quàm A C, ergo & A k dupla minor erit quàm A O; & consequenter A K simpla minor, quàm L H, dimidia videlicet ipsius A O; quare excessus, quo L A superat A K maior erit, quàm A H, & per consequens duplus est excessus maior, quàm dupla A H, hoc est, quàm A M. quod erat ostendendum.

## Lemma II.

Iisdem positis. Excessus, quo differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & basis superat differentiam crurum, minorem habebit rationem, quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis.

B

REsumatur antecedentis Lemmatis figura, & M A duplicetur in B, ac etiam producatur in F, vt sit M F æqualis A C. producatur quoque A K in E, vt sit A E æqualis A L; & sumatur B G dupla ipsius K E. Dico B F ad A G, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Hoc demonstrabitur progrediendo per filum resolutionis directo ordine, non inuerso. hac ratione.




Quoniam enim æquales sunt B A, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipsius A L, hoc est

C ipsius A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc est B A O, seu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B æquale est rectangulo C A K, sed cùm sit B O dupla ipsius A E; rectangulũ A B O æquale est duplo rectanguli B A E, hoc est duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, k E; hoc est & simplo rectangulo A B G, est enim B G dupla ipsius k E, ergo duplum rectanguli B A k, plus rectangulo A B G minus quadrato A B, æquale erit rectangulo C A k, hoc est, rectangulo M F, A K; auferatur vtrinque duplum rectanguli B A K, ergo rectangulũ A B G minus quadrato A B, hoc est, rectangulum B A G æquale erit rectangulo M F A K, minus duplo rectanguli B A K, hoc est, minus rectangulo M B A k, seu quod idem est, æquale erit rectangulo F B A k. Cùm igitur rectangulum

D B A G æquale sit rectangulo F B A k, reuocata ad proportionem æqualitate; erit vt F B ad A G ita B A, hoc est A M, ad A K, sed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M ad A C. quod erat ostendendum.

His igitur demonstratis patet, non ex quibuscumque datis Problema construi posse; ideo præfiniendi sunt limites, intra quos data consistant.

## Determinatio I.

OPortebit duplum excessum, quo crus maius superat basim maiorem esse differentia crurum.

De-

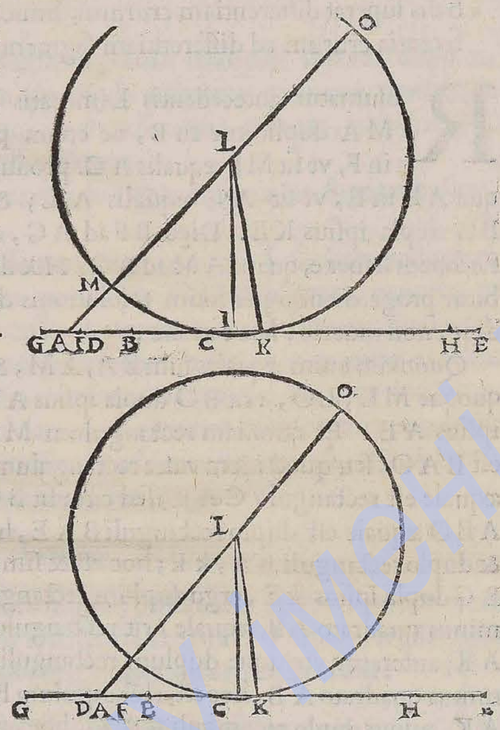
A

## Determinatio II.

OPortebit quoque excessum quo differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & basis superat differentiam crurum, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum, ad differentiam segmentorũ basis.

### Compositio secundi casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit maior, quàm dupla A B, & excessus quo crus maius superat basim B D. Oportet inuenire triangulum, ergo oportebit duplam B D maiorem esse quàm A B, & excessum quo AC superat duplam AB ad excessum; quo B D dupla superat A B, minorem rationem habere, quàm AB ad AC. Ponatur ergo C F æqualis duplæ A B, & duplicetur B D in G, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam quæ sit A k, ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C quoniam & A F ad A G, minorẽ rationẽ habet quàm A B ad A C ex determinatione, quare Ak maior erit, quàm A C. Secetur ergo C K bifariam in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D, & iungatur L A.




B C D

Posuimus K L æqualem k D, pro crure minore trianguli construendi; nam cum crus maius debeat superare crus minus excessu A B, basim vero excessu B D minori in prima figura quàm A B, basis A K maior esse debet crure minore excessu D A. In secunda autem figura, crus maius trianguli construendi, debet superare crus minus, excessu A B, basim vero, excessu B D qui maior est, quàm A B, ergo basis A K minor esse debet crure minore, excessu D A. Triangulum igitur L A k constitutum est quemadmodum Porisma docet; est enim vt A F excessus, quo A C superat duplam A B ad A G excessum, quo B D dupla superat A B, ita A B ad A K basim trianguli



A guli L A k; in eo autẽ triangulo esse ea, quæ requiruntur, sic demonstrabitur.

Centro L interuallo L K describatur circulus secans A L in M, productam vero in O, is circulus transibit per C cum sint æquales C I, I k; differentia igitur segmentorum basis A I, I k erit ipsa A C data. Duplicetur autem G K in E, & fiat E H æqualis G A. Quoniam igitur E G dupla est ipsius k G, & G B dupla ipsius G D, erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum B A G sub medijs, æquale erit rectangulo F A k, sub extremis; hoc est rectangulo C A K, minus rectangulo G F, A k, seu minus duplo rectanguli B A k recta enim C F dupla est ipsius A B, ex constructione. addatur vtrique parti duplum re-

B ctanguli B A k, ergo rectangulum B A G, vnà cum duplo rectanguli B A K, hoc est vna cum rectangulo B A H; seu quod idem valet, rectangulum B A G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A k, hoc est M A O, atqui sunt æquales M O, B E, vt est demonstratum, ergo* & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit ipsi A B. Supereſt igitur vt crus A L maius sit basi A K, excessu B D; id autem ita fit manifestum.

Theor. 9 huius

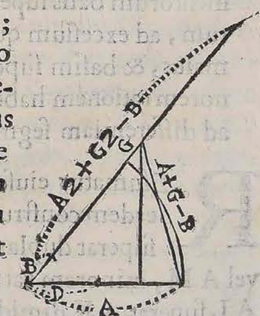
Quoniam enim in prima figura crus L k superatur à crure A L, excessu A B, vt ostendimus, à basi vero A K excessu A D, ex constructione, basis A k superabitur à crure A L reliquo excessu B D, in secunda vero figura basis A k superatur à crure L K, excessu D A, ex constructione, ipsumque crus L k superatur à crure L A, excessu A B, ergo basis A k superabitur à crure

C A L vtroque excessu D A, A B; hoc est excessu B D; quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L A K, in quo A M differentia crurum A L, L k æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum basis A I, I K, est ipsa A C data, atque crus maius A L superat basim A k excessu B D quod erat faciendum.

Aliter eundem casum breuiori via & resoluam & componam, omissaque æqualitate, proportione vtar.

### Alia Resolutio Secundi casus.

D SIt data differentia crurum trianguli vt prius B; differentia segmẽtorum basis D, & excessus quo crus maius superat basim, G, & oporteat inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A ✣ G, crus minus A ✣ G — B, vnde aggregatum crurum A 2 ✣ G 2 — B. Et quoniam est* vt differentia segmentorum basis ad differentiam crurum, ita aggregatum crurum ad basim; erunt proportionales.




Theor. 7 huius

D B A 2 ✣ G 2 — B A

Et duplatis consequentibus, proportionales erunt.

D B 2 A 2 ✣ G 2 — B A 2

Et

Et quoniam dupla differentia crurum ponitur minor, quàm differentia A
segmentorum basis, hoc est B 2 ponitur minor quàm D, poterit B 2 auferri
à D, ergo à diuisione rationis argumentabor; hoc est diuidendo proportio-
nales erunt

D — B 2 B 2 G 2 — B A 2

Et rursus subduplatis consequentibus, erunt proportionales

D — B 2 B G 2 — B A

Atque permutando proportionales erunt.

D — B 2 G 2 — B B A

Hæc permutatio licet non sit necessaria, cum in præcedenti quoque pro-
portionalium serie dentur primi tres termini; tamen addita est, quò commo-
dius Porisma, ac Determinationes ordinentur, B

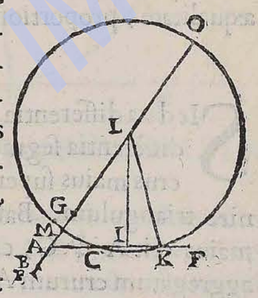
Porisma.

Vt excessus, quo differentia segmentorum basis trianguli superat duplam
differentiam crurum ad excessum, quo dupla differentia inter crus maius, &
basim superat differentiam crurum, ita est differentia crurum ad basim.

Illud ipsum Porisma est, quod ex antecedente Resolutione deducitur.
Eadem ergo Lemmata, eædemque determinationes, quæ illic, hic quoque
intelligantur præpositæ. Sed quoniam secundum illud Lemma, quod ad
secundam Determinationem huius Casus pertinet, ostenditur per repetitio-
nem vestigiorum Resolutionis, eaque resolutio procedit per æqualitatem, hæc C
autem per proportionem; idem Lemma hic etiam, sed aliter, omissa æqualita-
te, per proportionem demonstrabo.

Lemma.

Si basis trianguli fuerit crure maiore minor, differen-
tia autē segmentorum basis fuerit maior, quàm du-
pla differentia crurum. Excessus quo differentia seg-
mentorum basis superat duplam differentiam cru-
rum, ad excessum quo dupla differentia inter crus
maius, & basim superat differentiam crurum, mi-
norem rationem habebit quàm differentia crurum
ad differentiam segmentorum basis.




D

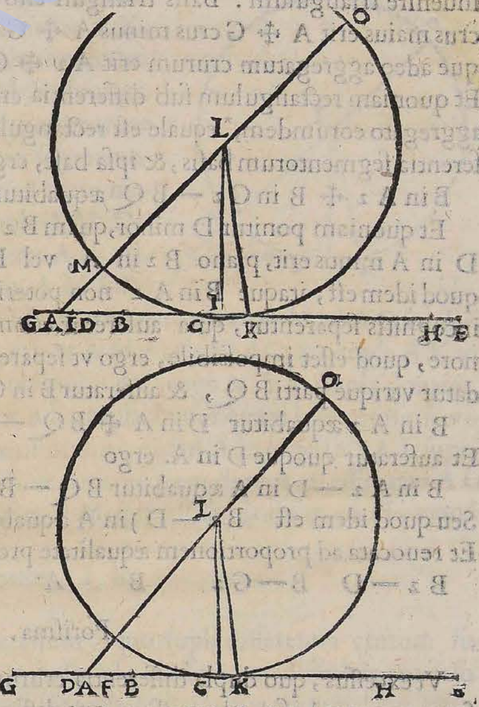
RE sumatur eiusdem Lemmatis figura, & fiat
eadem constructio. Dico B F excessū quo AC,
superat duplam A M ad A G, excessum quo dupla K E superat A B,
vel A M, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim
A L superat A K dimidia B G; est enim B G dupla ipsius, K E, superabit du-
pla A L, hoc est recta B O duplam A k tota B G, quare G O dupla erit ipsius
A K. Et quoniam est vt A C, hoc est F M ad A M, ita A O ad A k; duplatis
conse-



A consequentibus, erit vt F M ad M B, ita A O ad G O, & diuidendo, vt
F B ad B M; ita A G ad G O, rursus subduplatis consequentibus erit F B ad
A M, ita A G ad A K, & permutando, vt F B ad A G, ita A M ad A k, sed
A M ad A K, minorem rationem habet quàm A M ad A C, ergo & F B ad
A G, minorem rationem habebit, quàm A M, ad A C, quod erat ostendendum.

Alia Compositio secundi casus.

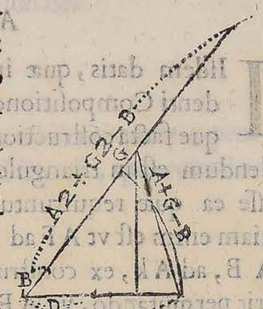
IIsdem datis, quæ in antece-
denti Compositione, eadem-
que facta cōstructione, Osté-
dendum est in triangulo L A k,
B esse ea quæ requiruntur. Quo-
niam enim est vt A F ad A G, ita
A B, ad A k, ex constructione,
erit permutando, vt A F ad A B,
ita A G ad A K, & duplatis con-
sequentibus, vt A F ad F C, ita
A G ad A K, & componendo, vt
A C ad F C, ita erit G H, hoc est
A E, ad A H; & rursus subdupla-
tis cōsequentibus, vt A C ad A B,
ita erit A E ad A k. Vt autem
C A B conferatur cum A M, deleā-
tur extremæ A C, A K propor-
tionalium, & in earum locum
substituantur A M, A O, quip-
pe quæ ad constitutionem pro-
portionalium, manentibus me-
dijs A B, A E sunt æquiualentes:
propter quod rectangulū M A O,
æquale est rectangulo, C A k; sed ad eas delendas, aliasque substituendas
oportet prius commutare extremas proportionalium cum medijs; nam ar-
gumentatio ex æquali in proportione perturbata eximit medias proportiona-
D lium, aliasque substituit, non autem eximit extremas. Conuertantur itaque
proportionales vt extremę cum medijs commutentur; ergo, vt A B ad A C,
ita erit A k ad A E; sed vt A C ad A M, ita est A O ad A k, ergo in pertur-
bata proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque sunt æquales
M O, B E, vt ostensum est in antecedenti Compositione, ergo* & A M dif- * Theor. 6 huius
ferentia crurum A L, L K, æqualis erit A B datæ. differentia autem segmen-
torum basis A I, I k est ipsa A C data: & basim A K superari à crure A L,
excessu B D ostendetur eadem ratione, qua in antecedenti compositione.
Constructum est igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat.




Re-

## Resolutio Tertij Casus.

RVrsus sit excessus, qui est inter crus maius, & basim penes ipsum crus, sed differentia segmentorum basis sit minor, quàm dupla differentia crurum; sit igitur data differentia crurum trianguli B differentia segmentorum basis D minor, quàm dupla B, & excessus, quo crus maius superat basim sit G. Oportet inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A ✣ G crus minus A ✣ G — B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 ✣ G 2 — B.




Et quoniam rectangulum sub differentia crurum, & aggregato eorumdem, æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ergo

Theor. 6 huius

B in A 2 ✣ B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Et quoniam ponitur D minor, quàm B 2, planum D in A minus erit, plano B 2 in A, vel B in A 2, quod idem est; itaque B in A 2 non poterit vtrinque auferri, vt cognita ab incognitis separentur, quia auferetur etiam à D in A, maius videlicet à minore, quod esset impossibile, ergo vt separentur cognita ab incognitis, addatur vtrique parti B Q, & auferatur B in G 2. ergo

B in A 2 æquabitur D in A ✣ B Q — B in G 2

Et auferatur quoque D in A. ergo

B in A 2 — D in A æquabitur B Q — B in G 2

Seu quod idem est B 2 — D ) in A æquabitur B — G 2 ) in B.

Et reuocata ad proportionem æqualitate proportionales erunt

B 2 — D  B — G 2  B  A

## Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis; ita est differentia crurum ad basim.

Ex hoc Porismate apparet, duplum excessum, quo crus maius superat basim, minorem esse differentia crurum.

Apparet etiam, excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis; primus enim excessus ad secundum se habet, vt differentia crurum ad basim. sic Porisma indicat. Quæ quoniam ad determinationes pertinent, ostendenda sunt. Lemmata igitur ad id opus sic propono.

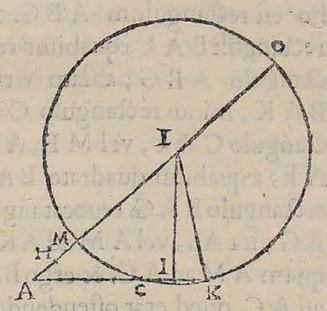
Lem-



### Lemma I.

Si basis trianguli fuerit crure maiori minor, ac etiam differentia segmentorum basis minor, quàm dupla differentia crurum. Duplus excessus quo crus maius superat basim, minor erit, quàm differentia crurum.

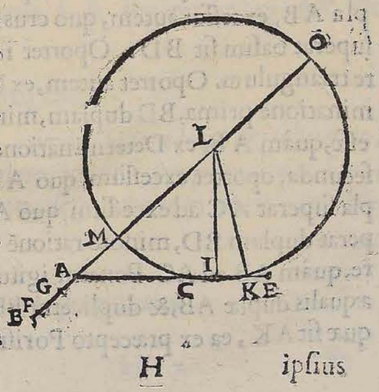
SIt triangulum L A K, in quo perpendicularis L I secet basim A K in duo segmẽta A I, I K, & centro L interuallo L K, cruris minoris, describatur circulus secans basim A K in C, crus vero K L in M, ipsumque continuatum in O. differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero segmentorum A C. Sit autẽ basis A K minor crure maiori A L, & A C minor, quàm dupla A M. Dico duplum excessum, quo A L superat A k, minorem esse, quàm A M. Secta enim A M bifariam in H erit A O dupla ipsius L H. Et quoniam est vt A M ad A C, ita A K ad A O, duplatis antecedentibus, erit vt A M dupla ad A C, ita dupla A K ad A O, sed dupla A M ponitur maior quàm A C, ergo & A k dupla, maior erit, quàm A O, & consequenter A k simpla, maior quam L H, dimidia videlicet ipsius A O; sed A k ponitur minor, quàm A L; ergo ipsa A L superat A K excessu minori, quàm A H, & per cõsequens duplus excessus, quo A L superat ipsam A k, minor erit, quàm A M, quæ est dupla ipsius A H, quod erat ostendendum.




### Lemma II.

Ijsdem positis. Dico insuper excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differẽtia crurũ superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis.

REsumatur enim antecedentis Lemmatis figura, & duplicetur M A in B, ab eaq. abscindatur M F æqualis A C, & producatur A k in E, vt sit A E æqualis A L, & rectæ k E: fiat dupla B G. ea minor erit quam A B, ex antecedente Lemmate. Ostendendum est igitur B F ad G A minorem rationem habere, quàm A M ad A C, idque fiet per resolutionis filum procedendo, directo tamen ordine. Quoniam igitur æquales sunt A B, A M, & æquales quoq; M L, L O, erit B O dupla




H ipsius

ipsius A L, vel A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc est B A O, seu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B, æquale est rectangulo C A k, rectangulum autem A B O æquatur duplo rectanguli BAE, cum sit B O dupla ipsius A E, hoc est æquatur duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, K E, ergo duplum rectanguli B A K vnà cum duplo rectanguli B A, k E (minus quadrato A B æquale erit rectangulo C A K; addatur vtrobique quadratum B A, & auferatur duplum rectanguli B A, k E, hoc est rectangulum A B G. est enim B G dupla ipsius k E, ergo duplum rectanguli B A k æquabitur rectangulo C A k, & quadrato B A, minus rectangulo A B G; ablato vtrinque rectangulo C A k, duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A k, hoc est rectangulum M B, A k minus rectangulo C A k, vel M F, A K, seu quod idem valet, rectangulum B F, A k, æquabitur quadrato B A, minus rectangulo A B G, hoc est æquabitur
56 sexti rectangulo B A G. reuocata igitur ad proportionem æqualitate erit* vt B F ad A G, ita Ab, vel A M ad A K, sed A M ad A K minorem rationem habet, quàm A M ad A C, & ergo B F ad A G, minorem ratione habebit, quàm A M ad A C. quod erat ostendendum.

A

B

His igitur demonstratis præponendæ sunt huiusmodi Determinationes.

### Determinatio I.

OPortebit duplum excessum, quo crus maius superat basim, minorem esse differentia crurum.

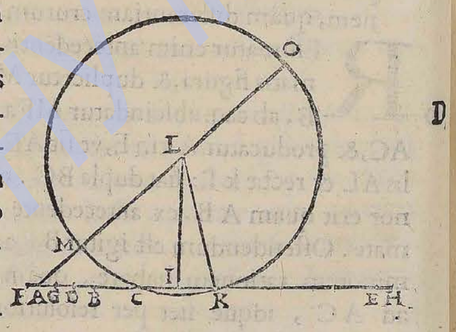
### Determinatio I I.

C

OPortebit quoque excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem ratione habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis.

### Compositio tertij casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B; differentia verò segmentorum basis A C, quæ sit minor, quàm dupla A B, excessus autem, quo crus maius superat basim sit B D. Oportet inuenire triangulum. Oporret autem, ex Determinatione prima, B D duplam, minorem esse, quàm A B; ex Determinatione vero secunda, oportet excessum, quo A B dupla superat A C ad excessum, quo AB superat duplam BD, minorē ratione habere, quàm AB ad AC. Ponatur igitur C F æqualis duplæ AB, & duplicetur BD in G, & fiat vt AF ad AG, ita A B ad aliá quæ sit A K, ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi,




D

atque



A atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C, quoniam & A F ad A G minorem rationem habet, quàm A B ad A C ex determinatione; quare A k maior erit, quàm A C. Secetur ergo C k bifariam in I perpendiculariter à recta I L, in qua ponatur K L æqualis k D, & iungatur L A. posita est K L æqualis K D, pro crure minore crianguli construendi; nam cum crus maius trianguli debeat superare crus minus, excessu A B; basim vero excessu B D; basis A K maior esse debet crure minori, excessu D A; itaque triangulum L A k constructum est, quemadmodum Porisma docet; est enim vt A F excessus, quo dupla A B superat A C ad A G excessum, quo A B superat duplam B D; ita A B ad A k basim trianguli L A K. in eo autem triangulo esse ea, quæ requiruntur, sic demonstrabitur.

B Centro L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, ipsamque productam in O, is circulus transibit per C cum sint æquales CI, Ik. Differentia igitur segmentorum basis A I, I k, erit ipsa A C data. Duplicetur autem G K in E, & A k in H. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & B G dupla ipsius G D, erit & reliqua E B dupla, reliquæ K D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A k sub extremis, æquale erit rectangulo B A G sub medijs, sed rectangulum F A K æquale est rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A k, seu æquale est rectangulo B A k bis, minus rectangulo C A k (est enim C F dupla ipsius A B) ergo rectangulum B A K bis, minus rectangulo C A K æquabitur re-
C ctangulo B A G; addatur vtrique parti rectangulum C A k, ergo rectangulum B A k bis, hoc est rectangulum B A H, æquabitur rectangulis C A K, B A G; auferatur vtrinque rectangulum B A G, ergo rectangulum B A H, minus rectangulo B A G, seu quod idem valet rectangulum B A, G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A K; hoc est rectangulo M A O, sed æquales sunt M O, B E, vt est demonstratum, ergo &* A M æqualis erit A B. Et quo- Theor. 3 huius niam L K superatur ab A K excessu A D, ex constructione, ab A L vero excessu A M æquali A B, vt ostendimus, ipsa A k superabitur ab A L reliquo excessu D B. Constructum est igitur triangulum L A K in quo A M, differentia crurum æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data: atque excessus quo crus L A superat basim A k est
D B D. quod erat faciendum.

### Alia Resolutio tertij Casus.

IIsdem datis. quæratur basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione, & resumatur eadem figura. Quoniam igitur* proportionales sunt, Theor. 7 huius differentia crurum trianguli, differentia segmentorum basis, ipsa basis, & aggregatum crurum, hoc est

B D A A2 ✣ G2 -- B

Duplatis antecedentibus, erunt quoque proportionales

B2 D A2 A2 ✣ G2 -- B

Et per conuersionem rationis proportionales erunt A

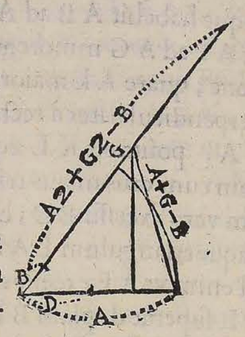
B 2 B 2 -- D A 2 B -- G 2

Et rursus subduplatis antecedentibus, proportionales erunt

B B 2 -- D A B -- G 2

Et conuertendo B 2 -- D B B -- G 2 A

Et permutando B 2 -- D B -- G 2 B A




Hæc permutatio non erat necessaria, sed addita est ob eas, quas in resolutione secunda, & quarta primi Casus, & in Resolutione secunda secundi, attuli rationes.

## Porisma. B

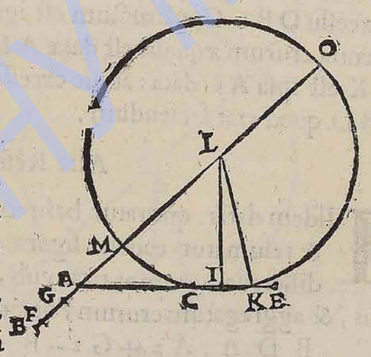
Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis; ita est differentia crurum ad basim.

Illud ipsum Porisma, quod per antecedentem resolutionem inuentum est, neque ideo opus est Lemmata illa, ac Determinationes, quæ post eam Resolutionem sequuntur repetere. Verùm quoniam Lemma illud secundum per filum resolutionis ostenditur, hìc etiam idipsum alia via per alium huiusce Resolutionis filum demonstrabo.

## Lemma. C

Si basis trianguli fuerit crure maiori minor, & differentia segmentorum basis minor quoque, quàm dupla differentia crurum. Excessus quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationem habebit, quàm differentia crurum, ad differentiam segmentorum basis.

REsumpta eiusdem Lemmatis figura, eademque facta constructione. Ostendendum est B F excessum quo M A dupla superat A C, ad excessum A G, quo M A superat duplam k E, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim æquales sunt A B, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipsius A L, sed cum A L superet A K dimidia B G; est enim B G dupla ipsius k E superabit dupla A L, hoc est ipsa B O duplã A K, tota BG; quare GO ipsius AK dupla erit. Et quoniam est, vt AM ad A C ita AK ad AO, duplatis antecedẽtibus erit, vt BM ad AC hoc est ad MF, ita GO ad



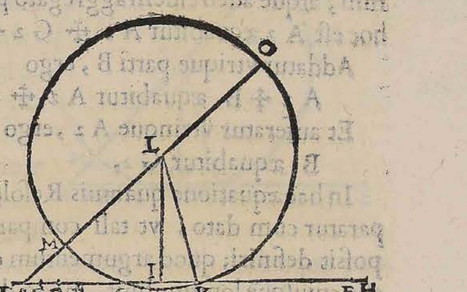

D



A ad O A, & per conuersionem rationis, vt B M ad B F, ita G O ad G A, & rursus subduplatis antecedentibus, vt A M ad B F, ita erit A K ad A G: & conuertendo, vt B F ad A M, ita A G ad A K; ac denique permutando erit, vt B F ad A G, ita A M ad A k, sed A M ad A k, minorem rationem habet quàm A M ad A C; ergo & B F ad A G minorem rationem habebit quàm A M ad A C, quod erat ostendendum.

## Alia Compositio tertij casus.

B IIsdem datis, quæ in antecedenti Compositione, factaq. eadem constructione. Quoniam igitur est, vt A F ad A G, ita A B ad A K; erit permutando, vt A F ad A B, ita A G ad A k; & conuertendo, vt A B ad A F, ita A K ad A G, & duplatis antecedentibus, vt C F ad F A, ita A H ad H G, & per conuersionem rationis, vt C F ad C A, ita A H ad H G, hoc est ad A E. & rursus subduplatis antecedentibus erit, vt A B ad A C, ita A k ad A E; sed vt A C ad A M, ita est A O ad A k, ergo in perturbata



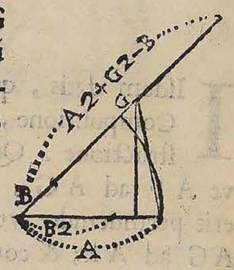

C proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E, atque æquales sunt M O, B E, vt demonstratum est in antecedenti compositione: ergo & * reliqua A M reliquæ A B æqualis erit. Et cum L k superetur ab L A, excessu A M æquali A B, vt ostendimus, ab A K vero, excessu A D, ex constructione, ipsa A k superabitur ab A L, reliquo excessu D B. Constructum est igitur triangulum L A k, cuius crurum L A L k differentia A M, æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum A I, I k, est ipsa A C data, atque crus L A superat basim A k, dato excessu B D, quod erat faciendum. * Theor. 4. huius

## Scholium.

D IN hac quoque demonstratione, vt A M cum A B conferri possit, opus fuerit eximere proportionalium medias A C A K, & in eorum locum alias A M, A O subrogare, prioribus ad constitutionem proportionalium (manentibus extremis A B, A E) æquiualentes, vt factum est in secunda Compositione primi Casus, & in secunda secundi, & sic cum aliquid simile occurret faciendum erit.

Resolutio quarti, & vltimi Casus. A

DEnique existente excessu, qui est inter crus maius, & basim, penes ipsum crus, sit differentia segmentorum basis æqualis duplæ differentiæ crurum, vtpotè sit differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis B 2, & excessus, quo crus maius superat basim G. Oportet inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, crus igitur maius erit A + G, crus verò minus A ✣ G — B aggregatum ideo crurum A 2 ✣ G 2 — B; sed cũ




Theor. 7 huius sit vt B ad B 2; ita A ad A 2, * erit A 2 aggregatum crurum, atque adeo eidem aggregato prius inuento æquale; hoc est A 2 æquabitur A 2 ✣ G 2 — B B

Addatur vtrique parti B, ergo

A 2 ✣ B æquabitur A 2 ✣ G 2,

Et auferatur vtrinque A 2, ergo

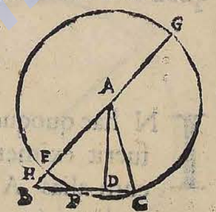
B æquabitur G 2.

In hac æquatione quamuis Resolutio ritè sit peracta, quæsitum non comparatur cum dato, vt tali comparatione & ipsum innotescat, atque adeo possit definiri; quod argumentum est, basim trianguli, de qua quæritur, posse esse cuiusque longitudinis, modo datam differentiam segmentorum basis excedat, cùm basis maior sit, quàm ipsa differentia. Apparet tamen ex resolutione, duplum excessum, quo crus maius superat basim, æqualem esse differentiæ crurum, idque quoniam ad determinationem pertinet demonstrandum est. Lemma igitur ad id opus ita propono. C

Lemma.

Si differentia segmentorum basis fuerit dupla differentiæ crurum. Crus maius excedet basim, excessu dimidiæ differentiæ crurum æquali.

SIt triangulum A B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, & centro A, interuallo A C, quod sit crus minus, describatur circulus secans basim B C in F; crus verò A B in E, ipsumq. productum in G; sit autem B F differentia segmentorum basis, dupla B E differentiæ crurum. Dico A B excedere ipsam B C, excessu æquali dimidiæ B E. Secetur enim B E bifariam in H. Quoniam igitur est vt B F ad B E, ita B G ad B C, & est B F dupla ipsius B E, erit & B G dupla ipsius B C; sed & ipsius A K dupla est B C, cum sint A F, E H æquales ipsis A G, H B, vtraque vtrique, ergo B C æqualis erit A H. itaque A B superat ipsam B C excessu H B æquali dimidiæ B E, quod erat ostendendum.




D

Deter-



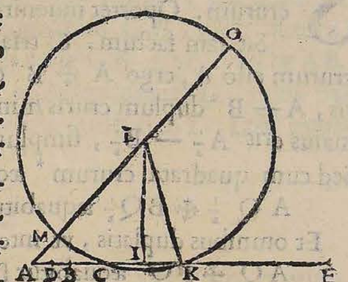
A

Determinatio.

OPortebit, excessum, quo crus maius trianguli superat basim, æqualem esse dimidiæ differentiæ crurum.

Compositio quarti Casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit dupla ipsius A B, & excessus quo crus maius superat basim B D, is debet esse B æqualis dimidiæ A B, ex Determinatione. Oportet inuenire triangulum. Producatur A C quantum libuerit in K, & C k secetur bifariam in I ad rectos Angulos à recta I L, in qua ponatur K L æqualis K D, & iungatur A L. Dico, triangulum L A k Problema efficere. Duplicetur enim A K in E, & centro L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, ipsamque productam in O. is circulus * transibit per C; cum sint æquales C I, I k, ex con- ; tertij




structione. Et quoniam A E dupla est ipsius A K, & A B dupla ipsius A D; erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, sed & M O dupla est eiusC dem K L, ergo M O æqualis erit B E. Et quoniam est vt A B ad A C, ita A K ad A E; sunt enim consequentes antecedentium duplæ, & vt A C * ad A M; Theor. 7 huius ita est A O ad A k; erit in perturbata proportione, vt A B ad A M, ita A O ad A E: atque sunt æquales B E, M O, vt est demonstratum, ergo & A M * theor. 4 huius A B æquales erunt, & cum L k superetur ab A k excessu A D, ex constructione, ab A L vero excessu A B, basis A K superabitur à crure L A, reliquo excessu D B. Atque differentia segmentorum basis A I, I K, est ipsa A C data. Constructum est igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat.

Is Casus, vt dixi in principio Problematis, vix inter Problemata annumerari potest, manentibus enim ijsdem datis, innumera triangula construi possunt, vt ex supradictis patet; basis enim A k fit ad libitum, eaque potest fieri & maior, & minor, requiritur tantum vt datam A C differentiam segD mentorum basis excedat. Conuenientior huic Problemati locus erat in primo libro, cum in Resolutionibus omnium eius casuum simplices æquationes existant; sed quoniam pluribus Determinationibus indiget, in eoque libro nulla fit de Determinationibus tractatio, visum fuit illud in hoc secundo libro collocare.

Pro-

## Problema VIII.

Data basę trianguli, angulum rectum subtendente, & differentia crurum. Inuenire triangulum.

### Resolutio.

SIt D data basis trianguli rectanguli, B differentia crurum. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum. & trianguli illius aggregatum crurum estò A, ergo A ✣ B * erit duplum cruris maioris, A — B * duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$, simplum crus minus $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$. Sed cum quadrata crurum * æqualia sint quadrato basis

Corol. 1 Probl. 8 Lib 2

47 Primi

$AQ\frac{1}{2}$ ✣ $BQ\frac{1}{2}$ æquabitur $DQ$

Et omnibus duplatis, vt integra fiat Potestas

$AQ$ ✣ $BQ$ æquabitur $DQ2$

Et ablato vtrinque $BQ$, vt cognita ab incognitis separentur

$AQ$ æquabitur $DQ2 - BQ$

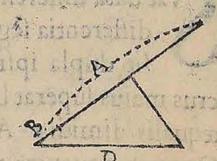
### Porisma:

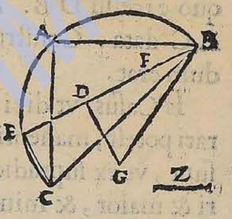
Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale est quadrato aggregati crurum.

Datur ergo aggregatum crurum de quo quærebatur.

### Compositio.

SIt data basis trianguli angulum rectum subtendens AB, differentia crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iungatur BC. à quadrato igitur BC quod est duplum quadrati AB, debet auferri quadratum Z. sic Porisma iubet, ergo describatur in BC semicirculus, in quo aptetur CE æqualis Z, & iungatur EB, erit angulus CEB rectus in semicirculo, & ob id quadratum EB * æquale erit quadrato CB, minus quadrato EC, hoc est æquale erit duplo quadrato AB, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Porismatis aggregatum crurum trianguli construendi debet æquari rectæ EB, ita tamen, vt differentia eorundem crurum æquetur ipsi Z, vt Problema exigit. ergo sumatur in EB recta BF æqualis EC, vel Z; reliqua vero FE secetur bifariam in D à perpendiculari DG æquali ipsi DE, vel DF, & iungatur GB. Composita igitur ex cruribus GD, DB trianguli DGB æqualis est ipsi EB, differentia verò eorundem crurum, hoc




47 primi

est



A est BF æqualis ipsi Z. Itaque constructum est triangulum DGB, quemadmodum Porisma docet. ipsum autem triangulum Problema efficere hoc modo demonstrabitur. Quoniam enim rectus est angulus CEB in semicirculo, quadratum EB æquale erit quadrato CB, minus quadrato EC, hoc est æquale erit duplo quadrati AB, minus quadrato FB, addatur vtrique parti quadratum FB, ablatum enim fuit in Resolutione, ergo quadratum EB vnà cum quadrato FB, hoc est duplum * quadratorum ED, DB, æquale erit duplo quadrati AB; quare & simplum simplo, sed quadrata ED, DB, hoc est GD, DB * æqualia sunt quadrato GB, ergo quadratum GB quadrato AB æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ AB. Constructum est igitur triangulum DGB rectangulum in D, cuius basis GB æqualis est ipsi AB, & FB differentia crurum GD, DB æqualis ipsi Z, quod faciendum erat.

Theor. 4 prim.

47 primi

B

## Problema IX.

Data basę trianguli angulum rectum subtendente, & aggregato crurum. Inuenire triangulum.

### Resolutio.

C SIt D data basis trianguli rectanguli, B aggregatum crurum. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum esse, & differentia crurum trianguli esto A, ergo B ✣ A erit *duplum cruris maioris*, & B -- A duplum cruris minoris. vnde simplum crus maius erit $B\frac{1}{2}$ ✣ $A\frac{1}{2}$: simplum crus minus $B\frac{1}{2}$ -- $A\frac{1}{2}$. horum quadra simul * æqualia sunt quadrato basis, ergo

47 primi

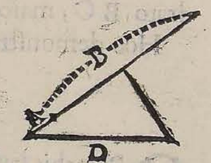
$BQ\frac{1}{2}$ ✣ $AQ\frac{1}{2}$ æquabitur $DQ$

Et omnibus duplatis, vt Potestas integra fiat

$BQ$ ✣ $AQ$ æquabitur $DQ2$

Et ablato vtrinque $BQ$

$AQ$ æquabitur $DQ2 -- BQ$




### Porisma.

D

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato aggregati crurum, æquale est quadrato differentiæ crurum.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

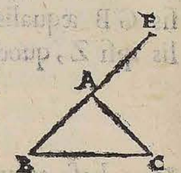
Ex Porismate apparet si crura trianguli sunt inæqualia, duplum quadratum basis, maius esse, quadrato aggregati crurum; si verò sunt æqualia, duplum illud quadratum huic quadrato æquale esse; nam cum sint crura æqualia, nulla est eorum differentia, & consequenter nullum differentiæ quadratum, sed quadratum differentiæ crurum æquale est excessui, quo duplum quadratum basis superat quadratum aggregati crurum; sic Porisma

ma indicat, ergo & excessus ille nullus erit; in hoc enim casu nihil nihilo A
adæquatur. Cum igitur nullus sit excessus inter duplum quadratum basis, & quadratum aggregati crurum, duplum illud quadratum huic quadrato æquale erit secundum Porisma. Hæc omnia demonstranda sunt, vt Problemati ea quam decet determinatio præponatur.

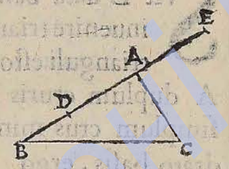
## Lemma.

Recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato basis subtendentis angulum rectum trianguli, non est minor aggregato crurum.

SIt triangulum ABC rectangulum in A, cuius basis BC. Dico rectam cuius quadratum æquale est duplo quadrato ex BC, non esse minorem composita ex cruribus, BA, AC. Producatur enim BA in E, vt sit AE æqualis AC, & sint primum æqualia crura AB, AC. Quoniam igitur quadratum BC æquale est quadratis BA, AC, hoc est BA, AE duplum quadratum BC æquabitur duplo quadratorum BA, AE, hoc est æquabitur quadrato BE, quare & recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato BC, æqualis erit ipsi BE. Non igitur minor. B




Deinde sint inæqualia crura AB, AC à maiori ergo quod sit AB, abscindatur AD æqualis AC, vel AE. C
Theor. 4 primi quadrata igitur BE, BD* æqualia erunt duplo quadratorum BA, AE. hoc est duplo quadrati BC, ergo duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum. vnde & recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrato BC, maior quam recta BE. quare constat propositum.



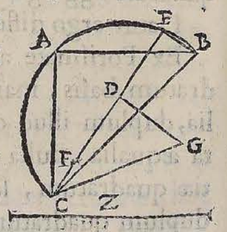

Hoc demonstrato, Problema ita determinandum erit.

## Determinatio.

OPortebit basim minorem esse aggregato crurum. Rectam autem, cuius quadratum æquale est duplo quadrato basis, non esse minorem. D

## Compositio.

SIt data basis trianguli angulum rectum subtendens AB; aggregatum crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & connectatur CB, à cuius quadrato (est enim duplum quadrati AB) auferendum est quadratum Z; sic Porisma iubet, ergo in BC describatur semicirculus, & in eo aptetur CE æqualis Z; recta enim BC, ex Determinatione, non est minor quam Z; dein-




de



A de connectatur EB, erit igitur quadratum EB æquale quadrato CB, minus quadrato EC. hoc est æquale erit duplo quadrati AB, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Porismatis differentia crurum trianguli construendi debet æquari rectæ EB. Sumatur igitur in EC recta CF æqualis EB, & FE secetur bifariam in D ad rectos angulos à recta DG æquali ipsi DE, vel DF, & iungatur CG. Differentia igitur crurum CD, DG trianguli CDG, æqualis est ipsi EB, aggregatum verò æquale ipsi CE, hoc est Z. Itaque triangulum CDG constructum est quemadmodum Porisma docet. nunc ostendendum est in eo esse ea quæ Problema requirit. Quoniam enim rectus est angulus CEB in semicirculo; quadratum EB, vel CF æquale erit quadrato CB, minus quadrato
B EC, hoc est æquale erit duplo quadrato AB, minus quadrato EC, addito vtrobique quadrato EC quadratum CF vnà cum quadrato CE. hoc est* duplum quadratorum CD, DE, æquale erit duplo quadrati AB, Theor. primi quare & simplum simplo. sed quadrata CD, DE. hoc est CD, DG æqualia sunt quadrato CG, ergo quadratum CG quadrato AB æquale erit. vnde & recta CG basis trianguli CDG æqualis rectæ AB. est autem & composita ex cruribus CD, DG æqualis ipsi CE, hoc est Z datæ, ex constructione. Constructum est igitur triangulum CDG quale construendum proponebatur.

Finis Libri Secundi.

# MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

## LIBER TERTIVS.

DE ijs, quæ ad Resolutionem, & Compositionem pertinent, A existentibus simplicibus laterum, aut quadratorum æquationibus; superioribus libris satis me dixisse censeo. venio nunc ad explicanda ea, quæ in Resolutionibus, & Compositionibus occurrunt, quando in æquationibus quadrata affectionibus implicantur. Sed prius dicam quomodo huiusmodi æquationes explicentur.

Multi sanè Auctores de explicandis quadratorum affectorum æquationibus scripserunt, ijque omnes præter Diofantum, ac Petrum Nonium, vna eademque Methodo, aut parum distanti vtuntur, quamuis diuersas afferant demonstrationes. Diofantus quidem non curat quadratum æquationis à comite, hoc est à data magnitudine in quam ductum est liberare, vt ex se subsistat, quemadmodum notat Bachetus, sed præcipit duci homogeneum comparationis in eundem Comitē quadrati, & reliqua perfici, vt suo loco dicetur. B quo fit vt magnitudines ad plano plana ascendant, ac proinde longiori operatione, & ad Geometricas Compositiones minimè apta æquatio explicetur. Petrus autem Nonius sumit totam coefficientem longitudinem, non autē dimidiam prout communis Methodus docet; sumit quoq; quadruplum homogeneum comparationis, & sic explicata æquatione exhibet duplum latus quæsitum, ex quibus Compositio fit difficilior. hanc Methodum Nonius excogitauit, vt fractiones numerorum vitaret, quæ quoniam in Geometricis locum nō habent, nihil est quod nos cogat ea Methodo vti. Communi igitur Methodo, quæ est simpliciſsima vtar, eamq. Geometrica ratione demonstrabo, alijs tamen medijs, atque alij scriptores; per hæc enim media commodior à Resolutione ad Compositionē fit regressus, ipsaq. Compositio clarius, ac facilius demonstratur, vt exemplis manifestum fiet.

De



A

### De æquationibus quadratorum affectorum explicandis.

TRibus modis æquatio ritè ordinata variari potest. aut enim quadratū afficitur adiunctione plani, sub latere, & data coefficiēte longitudine; aut afficitur multa ipsius plani, aut denique planum ipsum afficitur multa quadrati. Tres igitur Canones proferam, quibus ratio explicandi æquationes continetur.

#### De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine.

#### Canon Primus.

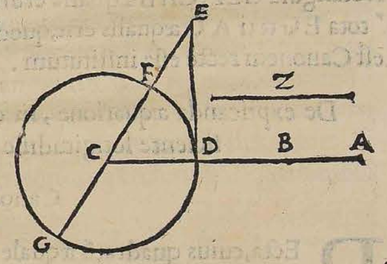
B REctæ cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, demātur dimidia coefficiens; reliqua æquabitur lateri quæsito.

Proponatur A Q + B in A æquari Z Q, explicata secundum Canonem æquationē.

L. V. (B Q ½ + Z Q) -- B ½ æquabitur A lateri quæsito.

#### Demonstratio Canonis primi.

SIt A B casus quæsitum, B C, data coefficiens longitudo, & quadratum ex Z datum comparationis homogeneum. Positis in directum A B, B C C secetur B C bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, æqualis verò ipsi Z, & connectatur E C, ex qua abscindatur C F æqualis C D. Dico reliquam F E æqualem esse A B. Describatur enim ex centro C ad interuallum C F, vel C D circulus secās E C productam in G, is circulus tanget rectam D E in D. & quoniam quadratum A B vnà cum rectāgulo A B C ponitur æquale quadrato Z: est autem * æquale & rectangulo B A C; ideo rectangulu B A C æquale erit quadrato Z, hoc est quadrato D E, D sed & rectangulum F E G * æquale est quadrato D E. ergo rectangula F E G, B A C æqualia erūt, atq; sunt æquales F G, B C, ergo & reliquæ * E F, A B æquales erunt, quod erat ostendendum. Patet igitur Canonem recte esse institutum.




3 secundi

36 tertij

Theor 8 secundi

#### De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur multa plani sub latere, & data coefficiente longitudine.

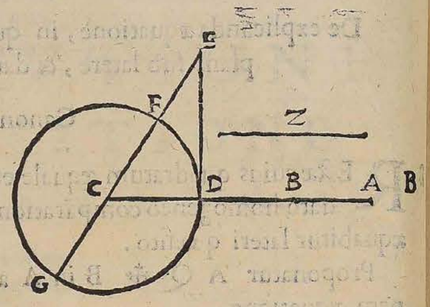
#### Canon Secundus.

REctæ cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, addatur dimidia coefficiens. Cōposita æqua-

æquabitur lateri quæsito. Proponatur A Q -- B in A æquari Z Q. Explicata secundum Canonem æquatione. A

L. V. ( B Q $\frac{1}{2}$ ✣ Z Q ) ✣ B $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæsito.

## Demonstratio Canonis secundi.




SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A C latus quæsitum; & quia ponitur A Q -- B in A æquari Z Q erit B coefficiens, minor quàm A, hoc est data coefficiens longitudo, minor erit latere A C.

Sit igitur data coefficiēs longitudo B C, eaq. secetur bifariā in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, & æqualis ipsi Z, & connectatur EC, eaq. producatur in G, vt sit C G æqualis C D. Dico E G æqualem esse A C. Centro enim C interuallo C D, vel CG describatur circulus secans E C in F, is circulus tanget rectam E D in D. Et quoniam quadratum A C, minus rectangulo A C B, ponitur æquari quadrato z; quadratum autem A C, minus rectangulo A C B, æquale est rectangulo C A B, ergo rectangulum CAB æquale erit quadrato z, hoc
9 tertij est quadrato D E, sed & rectangulum G E F* æquale est quadrato D E, ergo rectangula GEF, CAB æqualia erunt, atque sunt æquales F G, B C, ergo & C
Theor. 3. secundi * tota E G toti A C æqualis erit, quod erat ostendendum, ex quo manifestum est Canonem rectè esse institutum.

### De explicanda æquatione, in qua planum sub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

### Canon Tertius.

REcta, cuius quadratū æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ coefficientis datæ, præstat dato comparationis homogeneo, dempta vel addita dimidiæ coefficienti, reliqua vel composita, latus quæsitū erit.

Proponatur B in A -- A Q æquari z Q. explicata secundū Canonē æquatione. D

B $\frac{1}{2}$ -- L. V. ( B Q $\frac{1}{4}$ -- Z Q ) æquabitur A lateri quæsito.

Vel B $\frac{1}{2}$ ✣ L. V. ( B Q $\frac{1}{4}$ -- z Q ) æquabitur A lateri quæsito.

Antequam demonstratio Canonis fiat, ostendendū est, rectū cuius quadratū æquale est dato comparationis homogeneo nō esse maiorē dimidia coefficiēte. Proponatur B in A -- A Q æquari Z Q. Dico z non esse maiorem dimidia B.

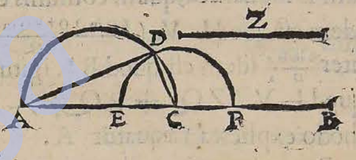
Reuocetur enim ad proportionem æqualitas, erunt tres proportionales B -- A, z, A; sed dupla media non est maior, quàm composita ex extremis; composita autem ex extremis est B, ergo dupla z, non erit maior ipsa B, nec simpla z maior dimidia B, quod erat ostendendum.

Demon-



A

## Demonstratio Canonis tertij.




SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A B data coefficiens longitudo, quæ secetur bifariam in C, erit Z non maior quam A C, vt proximè demonstrauimus. in ipsa igitur A C describatur semicirculus, & in eo accommodetur A D æqualis Z, & iungatur D C. angulus igitur A D C in semicirculo rectus erit, quare quadratum A C
* æquale erit quadratis A D, D C, vnde quadratum D C erit excessus, quo qua- 47 primi
dratum A C, dimidiæ videlicet coefficiētis præstat quadrato A D, hoc est quaB drato Z, quod est datum homogeneum comparationis. Centro igitur C interuallo C D describatur circulus secans rectam A B hinc inde in punctis E F. Dico latus de quo quæritur, minus quidem esse A E, maius autem A F, hoc est rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquari quadrato Z, & rursus rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquari eidem quadrato Z, in huiusmodi enim æquationibus latus quæsitum de duplici termino explicabile est. Quoniam igitur A D tangit circulum E D F in D, cum sit rectus angulus A D C rectangulum F A E* æquale erit quadrato A D, vel qua- 36 tertij
drato z, sed rectangulum F A E, hoc est B E A, æquale est rectangulo B A E, minus quadrato A E, ergo rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquale erit quadrato z, atque adeo latus quæsitum erit A E, quod esto
C primum.

Rursus quoniam rectangulum E A F æquale est quadrato A D, hoc est quadrato z; ipsum autem rectangulū E A F hoc est B F A, æquale est rectangulo B A F, minus quadrato A F, ergo rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquabitur quadrato z, itaq; latus quæsitum erit A F, quod secūdo loco erat ostendendum. ex his igitur manifestum est Canonem rectè esse institutum.

Diophantus autem in explicandis quadratorum affectorum æquationibus hac vtitur Methodo.

### Canon explicandi æquationem in qua quadratum afficitur affirmatè.

D

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & à radice quadrata aggregati auferatur dimidium coefficientis; reliquum vero applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæsitum.

Proponatur A Q in D ✣ B in D in A æquari z Q in D, & explicetur æquatio secundum Canonem, ergo L. V. ( z Q in D Q ✣ B Q in D Q $\frac{1}{4}$ ) -- B in D $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæsito.

Longa quidem operatione, & ad Geometricas Compositiones inutili explicata est hæc æquatio, per ipsam enim operationem magnitudines ad plano

plana ascẽdentes, geometriæ terminos trãscendunt; vtraque tamen Methodus, A
tam Diophantea, quàm cõmunis eodẽ recidunt; nam L. V. ( $\frac{ZQ\text{ in }DQ \dagger BQ\text{ in }DQ\ 1}{D\ \frac{1}{4}}$ )
idem est quod L. V. ( $\frac{ZQ\text{ in }DQ \dagger BQ\text{ in }DQ\ 1}{L.\ DQ\ \frac{1}{4}}$ ) seu quod L. V. ( $ZQ \dagger BQ\ \frac{1}{4}$ ) similiter $\frac{B\text{ in }D\ 1}{D\ \frac{1}{2}}$ idem est quod $B\ \frac{1}{2}$. igitur L. V. ( $\frac{ZQ\text{ in }DQ \dagger BQ\text{ in }DQ\ 1}{D\ \frac{1}{4}}$ ) $--\ \frac{B\text{ in }D\ 1}{2}$ idem est quod L. V. ( $ZQ \dagger BQ\ \frac{1}{4}$ ) $--\ B\ \frac{1}{2}$, cui quoque ( æquatione communi Methodo explicata ) æquatur A.

Repetatur enim eadem æquatio, quæ supra; hoc est A Q in D $\dagger$ B in D in A, æquetur Z Q in D. hæc æquatio non potest dici ritè ordinata, donec A Q liberetur à comite D, ergo applicentur omnia ad D. igitur A Q $\dagger$ B in A æquabitur Z Q, & explicata communi Methodo æquatione L. V. ( z Q $\dagger$ B Q $\frac{1}{iv}$ ) $--$ B $\frac{1}{ij}$, æquabitur A. Siue igitur Methodo Diophantea, siue com- B
muni æquatio explicetur, opus eodem recidit, sed Diophantea quidem Methodus longa est, & Geometricis compositionibus inutilis; communis autem breuis, & commoda, idem intelligendum est de reliquis duobus, quæ sequentur æquationibus, & ne eadem repetantur, hæc dixisse sufficiat.

## Canon explicandi æquationem in qua quadratum efficitur negatè.

DAtum comparationis homogeneum ducatur in Comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & radici quadratæ aggregati, addatur dimidium coefficientis, idque compositum applicetur ad Comitem quadrati, & proueniet latus quæsitum.

Proponatur A Q in D — B in D in A, æquari Z Q in D; explicata secundum Canonem æquatione. C

L. V. ( $\frac{ZQ\text{ in }DQ}{D\ \frac{1}{iv}} \dagger \frac{BQ\text{ in }DQ\ 1}{D\ \frac{1}{iv}} \dagger \frac{B\text{ in }D\ 1}{2}$ æquabitur A

Hoc est L. V. ( z Q $\dagger$ B Q $\frac{1}{4}$ ) $\dagger$ B $\frac{1}{2}$. æquabitur A

Eadem enim ratione, qua sub antecedenti canone ostendemus.

L. V ( $\frac{ZQ\text{ in }DQ}{D\ \frac{1}{4}} \dagger \frac{BQ\text{ in }DQ\ 1}{D\ \frac{1}{4}}$ ) $\dagger \frac{B\text{ in }D\ 1}{2}$ idem esse quod L. V. ( z Q $\dagger$ B Q $\frac{1}{iv}$ ) $\dagger$ B $\frac{1}{2}$.

## Canon explicandi æquationem, in qua quadratum negatur de afficiente homogeneo.

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & D
productum auferatur à quadrato dimidij coefficientis, residui radix quadrata addatur, vel dematur dimidio coefficienti, summa vel residuum applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæsitum.

Proponatur B in D in A $--$ A Q in D æquari z Q in D explicata secundum canonem æquatione.

$\underset{D}{\frac{B\text{ in }D\ \frac{1}{2}}{}} \dagger$ L. V. ( B Q in D Q $\frac{1}{iv}$ $--$ Z Q in D Q ) æquabitur A

Vel B in D $\frac{1}{2}$ $---$ $\underset{D}{}$ L. V. ( B Q in D Q $\frac{1}{iv}$ $--$ Z Q in D Q ) æquabitur A

Atque hæc de æquationibus quadratorum affectorũ explicandis dicta sufficiãt.

Pro-



A

## Problema I.

Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataq. differentia segmentorum basis. inuenire triangulum.

HOc Problema duos Casus habet, aut enim datur crus maius, aut crus minus. Primo Casu oportebit differentiam segmentorum basis minorem esse crure, siquidem crus maius toto maiore segmento maius est; secundus Casus Determinatione non indiget.

### Resolutio primi Casus.

B

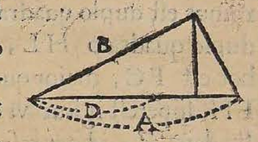
SIt datum crus maius trianguli rectanguli B, differentia segmentorum basis D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum, & basis trianguli esto A, ergo A $\dagger$ D erit * duplum segmenti maioris, & quoniam crus maius trianguli rectanguli medium est * proportionale inter basim, & segmentum maius, rectangulum sub base, & segmento maiori * æquale erit quadrato cruris maioris, & consequenter rectangulum sub base, & duplo segmento maiori æquabitur duplo quadrato cruris maioris, hoc est

Corol. 8 Prob. 2 primi

Corol. Prop. 8 sexti

17 sexti




A Q $\dagger$ D in A æquabitur B Q 2

C Et explicata secundum primum Canonem æquatione.

L. V. ( B Q 2 $\dagger$ D Q $\frac{1}{4}$ ) $--$ D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

### Porisma.

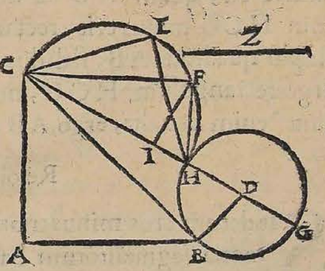
Recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrato cruris maioris trianguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidiæ differentiæ segmentorum basis contracta eadem dimidia differentia æqualis est basi trianguli.

Datur ergo quæsita basis trianguli.

### Compositio primi Casus.

D

SIt datum crus maius trianguli rectanguli A B, data autem differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D: eius quadratũ æquale erit quadratis C B, B D, hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z. ab ipsa igitur C D auferenda est recta æqualis dimidiæ Z, reliqua verò sumenda pro



base trianguli constituendi. sic habetur ex Porisma. centro igitur D interuallo D B describatur circulus secans C D in H. deinde in C H, describatur semicirculus, in quo accommodetur C F æqualis ab ipsa autem A B minor est, quàm C H, vt ostendetur infra. denique iuncta F H factum erit triangulum C F H, vt Porisma docet. à recta enim C D, cuius quadratum æquale est quadratis C B, B D. hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z ablata est D H æqualis dimidiæ Z, & reliqua C H basis est trianguli C F H. Nunc ostendendum est in eo triangulo esse ea, quæ Problema requirit. A

Ducatur enim F I ad basim C H perpendicularis, & producatur C D vsque ad circumferentiam circuli in G. Quoniam igitur in semicirculo est angulus C F H trianguli C F H, is est rectus, & crus F C æquale est A B datæ, ex constructione, ipsumque crus maius esse crure F H manifestum est, nam secta bifariam circumferentia semicirculi C F H in L, & iuncta H L, quadratum C H* æquale erit duplo quadrati H L, sed quadratum C H (cum sit minus quadrato C B, est enim recta C H minor, quàm recta C B) minus est duplo quadrato A B, ergo duplum quadratum A B, maius erit duplo quadrato H L; quare & simplum maius simplo, vnde & recta A B, hoc est F C, maior quam recta H L, & consequenter multo maior, quàm F H superest igitur vt differentia segmentorum C I, I H ostendatur æqualis datæ Z. id per resolutionis regressum ita fit manifestum. B

47 primi

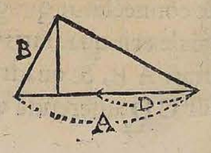
Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum sit rectus angulus C B D, ex constructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato C B, hoc est duplo quadrati A B, seu quod idem est duplo quadrati C F, C sed cum sit C F* media proportionalis inter H C, C I, rectangulum sub H C, C I æquale est quadrato C F, & consequenter rectangulum sub H C, & dupla C I æquale duplo quadrati C F, ergo rectangulum H C G æquale erit rectangulo sub H C & C I dupla; quare C G dupla erit ipsius C I, ac proinde æquales erunt C I, I G; atque adeo differentia segmentorum C I, I H erit H G quæ æqualis est Z datæ ex constructione. Constructum est igitur triangulum F C H quale construendum proponebatur. At verò rectam A B minorem esse, quàm C H manifestum est, si enim non est minor, erit tota C G minor, quàm A B dupla, quia H G, hoc est Z, minor est, quàm A B ex determinatione Problematis. Itaque rectangulum H C G minus erit, rectangulo sub A B, & altera ipsius dupla, hoc est D duplo quadrati A B, sed duplum quadrati A B æquale est quadrato C B, ergo rectangulum H C G, minus erit quadrato C B, sed hoc est falsum; sunt* enim æqualia, ergo A B minor est, quàm C H quod ostendisse oportuit.

Corol. 8. sexti

36 tertij

Resolutio secundi Casus.

SIt datum crus minus trianguli rectanguli B, differentia segmentorum basis D, & oporteat inuenire triangulum.




Basis trianguli estò A, ergo A — D erit * duplum seg-



A segmenti minoris, & quoniam crus minus trianguli * rectanguli medium est proportionale inter basim, & segmentum minus, rectangulum sub base, & segmento minore æquale erit quadrato cruris minoris, & consequenter rectangulum sub base, & duplo segmenti minoris, æquabitur duplo quadrato cruris minoris, hoc est

Corol. 1. Probl. 1 lib. 1. Corol. propos. 8. sexti

A Q — D in A æquabitur B Q 2

Et explicata iuxta secundum Canonem æquatione.

L. V. ( B Q 2 ✣ D Q $\frac{1}{4}$ ) ✣ D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

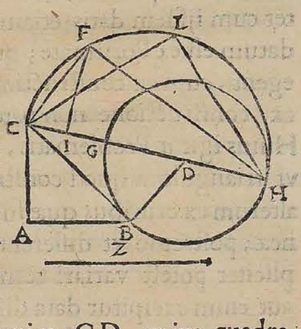
Porisma.

Recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato cruris minoris trianB guli rectanguli, vnà cum quadrato dimidiæ differentiæ segmentorum basis, protracta longitudine eiusdem dimidiæ differentiæ, æqualis est basi trianguli.

Datur ergo basi trianguli quæsita.

Compositio secundi casus.

SIt datum crus minus trianguli rectanguli A B, data differentia segmẽtorum basis Z, & oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur




C quoque C D, eius igitur quadratum æquale est quadratis C B, B D, hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z, ergo ipsa C D continuanda est longitudine dimidiæ Z, eaque sic continuata fieri debet basis trianguli constituendi. sic Porisma docet. Centro igitur D interuallo D B describatur circulus secans C D in G, eandemque continuatam in H, & in C H semicirculus describatur, in quo accommodetur C F æqualis A B, & iungatur F H triangulum igitur F C H constructum est, vt Porisma docet, recta enim C D, cuius quadraD tum æquale est quadratis C B, B D, hoc est duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z protracta longitudine D H, æqualis dimidiæ Z basis est trianguli F C H. Nunc ostendendum est in eo triangulo esse ea, quæ requiruntur.

Angulus C F H cum sit in semicirculo rectus est, & crus F C æquale est A B datæ, ex constructione, ipsumque crus minus esse crure F H, manifestum est, nam secta bifariam circumferentia semicirculi G F H in L, & iuncta H L quadratum C H * æquale erit duplo quadrati H L; sed quadratum C H (cum sit maius quadrato C B, est enim & recta C H maior, quàm recta C B) maius est duplo quadrati A B minus erit duplo quadrati H L;

47 primi

HL; quare & simplum minus simplo; vnde & recta AB hoc est FC, minor quam recta HL, & consequenter multo minor, quàm FH, hæc omnia ex constructione patent: differentiam vero segmentorum basis, æqualem esse Z datæ per repetitionem vestigiorum Resolutionis demonstrabitur hoc modo. A

Quoniam enim recta CB tangit circulum in B, cum sit rectus angulus CBD, ex constructione, rectangulum HCG æquale erit quadrato CB, hoc est duplo quadrati AB; seu quod idem est duplo quadrati CF; sed cum sit CF* media proportionalis inter HC, CI, rectangulum sub HC, CI æquale est quadrato CF, & consequenter rectangulum sub HC, & dupla CI, æquale duplo quadrati CF; ergo rectangulum HCG, æquale erit rectangulo sub HC, & CI dupla quare CG dupla erit ipsius CI, ac proinde æquales erunt CI, IG atque adeo differentia segmentorum CI, IH erit HG quæ æqualis est Z datæ, ex constructione; Constructum est igitur triangulum CFH &c. quod faciendum erat. B

Corol. Prop. 8 sexti

## Scholium.

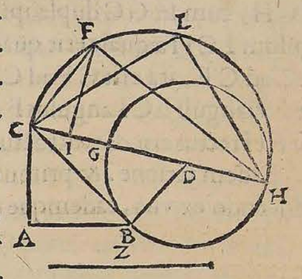
Omne Problema tot admittit Compositiones, ex vna eademque Resolutione pendentes, quot in eo conditiones requiruntur. componitur enim Problema vt ex sola constructione appareant conditiones Problematis omnes adimpletæ, præter vnam quæ postea per repetitionem vestigiorum resolutionis adimpleta ostenditur. Nam disponuntur in constructione Problematis omnia data excepto vno, secundum Porismatis ordinationem: disponitur similiter cum ijsdem datis etiam quæsitum tamquam datum; quoniam & ipsum datum est ex Porismate; quæ quidem sic dispositа alia demonstratione non egent, cum ex constructione pateant. illud autem quod excipitur quoniam ex constructione non patet, per regressum Resolutionis demonstratur. Huius igitur Problematis, cum in eo tres conditiones requirantur, nempè vt triangulum quod construendum proponitur sit rectangulum, deinde vt alterum ex cruribus quæ sunt circa angulum rectum sit æquale datæ rectæ lineæ; postremo vt differentia segmentorum basis æquetur alteri datæ, tripliciter potest variari compositio ex vna, eademque resolutione pendens, aut enim excipitur data differentia segmentorum basis, aut crus datum, aut datus verticis angulus, qui est rectus. In antecedente compositione excepta est differentia segmentorum basis, constructum est enim triangulum ex crure, & angulo recto quæ data sunt, & ex base, vt data, quoniam reuersa & ipsa data est ex Porismate; ipsumque crus æquari cruri dato, & angulum verticis esse rectum, manifestum est ex constructione; differentiam vero segmentorum basis æqualem esse datæ differentiæ, ostensum est per repetitionem vestigiorum Resolutionis. Nunc in hac quæ sequitur secunda Compositione secundi Casus excipiam crus datum, atque ex differentia segmentorum basis, & angulo recto, & base iam per Resolutionem inuenta, construam triangulum iuxta rationem Porismatis, cuius trianguli crus æquale esse cruri dato retrograda Resolutionis via ostendetur; cætera vero ex constructione perspi- C D



A spicua erunt. in tertia denique compositione excipiam angulum rectum, & ex differentia segmentorum basis, & crure, & base inuenta, triangulum componam, secundum præceptum Porismatis, cuius trianguli angulum verticis rectum esse, per Resolutionis regressum demonstrabo, reliqua ex constructione patebunt.

## Secunda compositio secundi casus.

SIt igitur datum crus minus trianguli rectanguli AB. data differentia segmentorum basis Z. & oporteat inuenire triangulum. in-




B clinatis, vt prius ad angulos rectos AB, AC æqualibus connectatur CB, eique perpendicularis ducatur BD æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque CD, & centro D interuallo DB describatur circulus secans CD in G, continuatam vero in H, & circa diametrum CH, alius circulus describatur (hactenus eadem constructio, quæ in antecedenti compositione) deinde secetur CG bifariam in I à perpendiculari IF ducta vsque ad circumferentiã circuli, & iungantur CF, FH: Trianguli igitur FCH angulus GFH, cum sit in semicirculo rectus est, & GH differentia segmentorum CI, IH æqualis est datæ Z. hæc C omnia ita se habent ex constructione; crus autem FC æquari ipsi AB, regressu resolutionis demonstrabitur hoc modo.

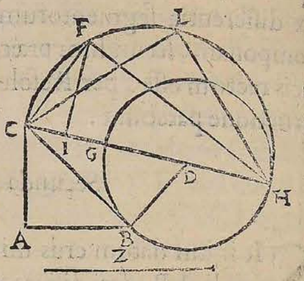
Quoniam enim recta CB tangit circulum in B, cum sit rectus angulus CBD, rectangulum GCH æquale erit quadrato CB, hoc est duplo quadrati AB, sed cum sit CF* media proportionalis inter HC, CI, rectangulum ICH æquale est quadrato CF, & consequenter rectangulum GCH æquale duplo quadrati CF; est enim CG dupla ipsius CI, ergo quadratum CF, æquale erit quadrato AB: vnde & recta FC æqualis rectæ AB. Constructum est igitur triangulum FCH, &c. quod faciendum erat. Corol. 8. sexti

## Tertia Compositio secundi Casus.

D

IIsdem datis inclinentur vt prius ad angulos rectos AB, AC æquales & connectatur CB, eique perpendicularis agatur BD, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque CD, & centro D interuallo DB describatur circulus secans CD in G, eamque continuatam in H (hactenus præcedens compositio) deinde secetur CG bifariam in I ad rectos angulos à recta IF indefinita, in qua ponatur CF æqualis CA; est autem CA maior, quàm CI, nam cum ipsa CA maior sit quàm dimidia CB ea multo maior erit quàm dimidia CG, hoc est quàm CI denique connectatur FH. in triangulo igitur FCH crus FC æquale est CA, hoc est AB datæ, ex constructione, simi-

militer & G H differentia segmentorum C I, I H æqualis datæ Z, ex constructione; superest igitur vt angulus C F H sit rectus; id autem repetendo resolutionis vestigia ita fit manifestum. Quoniam enim est rectus angulus C B D, recta C B tanget circulum in B, ac proinde rectãgulum G C H* æquale erit quadrato C B, hoc est duplum erit quadrati A B, seu quod idem est quadrati C F, sed idem rectangulum G C H duplum est rectanguli I C H, cum sit G C dupla ipsius C I; ergo rectangulum I C H æquale erit quadrato C F vt* igitur I C ad C F, ita erit C F ad C H; quare* similia erunt triangula F C I, F C H sed trianguli F C I angulus F I C rectus est, ergo & trianguli F C H angulus C F H rectus erit. Constructum est igitur triangulũ F C H, vt facere oportebat.




36 tertij

17 sexti

6 sexti

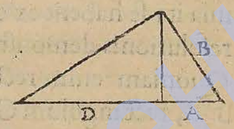
Eadem ratione. & primus Problematis Casus tripliciter cõponi poterat deducendo ex vna, eademque resolutione Compositiones.

## Problema II.

**Dato vno ex cruribus trianguli, angulum rectum ambientibus, datoque alterno basis segmento. inuenire triangulum.**

### Resolutio.

SIt datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B alternum autem basis segmentum D. oportet inuenire triangulum. Factum sit hoc, & alterum segmentũ basis de quo quæratur estò A. Quoniam autem crus B medium* proportionale est inter basim trianguli, & segmentum A, ergo proportionales erunt.




Corol. 8 sexti

D ✣ A B A

17 sexti Quod autem sit sub extremis,* æquale est mediæ quadrato, ergo

D in A ✣ A Q æquabitur B Q

Et explicata æquatione

L. V. ( B Q ✣ D Q $\frac{1}{4}$ ) — D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

### Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato vnius crurum trianguli angulum rectum ambientium, vna cum quadrato dimidij alterni segmenti basis, contracta dimidio eiusdem segmenti, æqualis est alteri segmento.

Datur ergo alterum segmentum de quo quærebatur.

Atque hoc Problema cum in eo tres conditiones requirantur triplici via componi potest deducendo ab vna eademque resolutione compositiones.

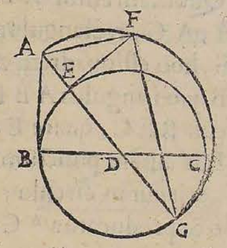
Com-



A

### Compositio Prima.

SIt datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus A B segmentum autem basis alternum B C. Oportet inuenire triangulum. inclinentur ad rectos angulos A B, B C, & secetur B C bifariã in D, & iungatur A D. Quadratum igitur A D æquale est quadratis A B, B D, cruris videlicet, & dimidij segmenti. Itaque ab ipsa A D debet auferri recta æqualis B D. sic Porisma docet. Centro igitur D, interuallo D B; vel D C describatur circulus secans A D in E, productam autem in G, reliqua igitur A E debet æquari alteri segmento basis, vt Porisma indicat. Sed E G, cum sit æqualis dato segmento B C, tota A G fieri debet basis trianguli constituendi. In ipsa igitur A G describatur semicirculus A F G, & ducatur perpendicularis E F vsque ad circumferentiam, & iungantur A F, F G. Triangulum igitur A F G constitutum est, quemadmodum Porisma iubet; à recta enim A D cuius quadratum æquale est quadratis A B, B D cruris videlicet, & dimidij segmenti alterni; ablata est D E æqualis ipsi B D dimidio segmenti, & ex reliqua A E factum est alterum segmentum basis, vt Porisma docet. Ipsum autem triangulum A F G esse quale Problema exigit, sic demonstrabitur.




B

Angulus enim A F G, cum sit in semicirculo, rectus est, & basis segmentum E G, æquale est datæ B C ex constructione. crus autem A F æquale esse A B datæ per repetitionem vestigiorum resolutionis; ita ostendetur. Quoniam enim rectangulum G A E* æquale est quadrato A B, recta enim A B tangit circulum; erunt tres* proportionales G A, A B, A E; quarum media erit A B, sed inter easdem G A, A E est quoque* media proportionalis A F: ergo A F æqualis est A B, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum A F G, &c. quod faciendum erat.

C

16 tertij

17 sexti

Corol. 8 sexti

### Compositio Secunda.

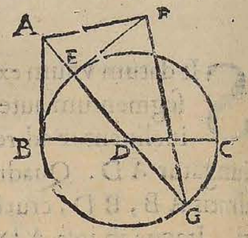
D

IN præcedenti compositione exceptum est crus datum, ex dato enim basis alterno segmento, & angulo recto, & ex reliquo basis segmento quod per resolutionem inuentum est, constructum est triangulum, secundum præceptum Porismatis. in hac secunda Compositione constituam ipsum triangulum ex dato crure, & angulo recto, & ex segmento per resolutionem inuento alternum autem basis segmentum æquari segmento dato, per regressum resolutionis demonstrabo.

Sint igitur eadem data, & inclinentur ad angulos rectos A B, B C & secta B C bifariam in D iungatur A D, & centro D interuallo D B, vel D C, describatur circulus, quem A D secet in E, ipsi autem A D ducatur perpendicularis E F indefinita, in qua ponatur A F æqualis ipsi A B, & ex F ducatur ipsi A F perpendicularis F G occurrens A D productæ in G. In triangulo igitur

F A G

FAG crus AF continens, cum crure FG angulum rectum, æquale est ipsi AB, ex constructione, & angulus AFG rectus est, pariter ex constructione. segmentum autem EG æquari ipsi BC, per repetitionem veltigiorum resolutionis demonstrabitur hac ratione.

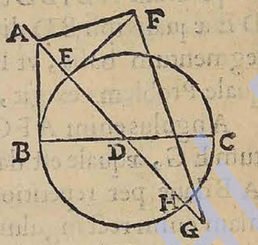



Corol. prop. 8. sexti 17 sexti

Quoniam enim AF* media proportionalis est inter EA, AG, rectangulum EAG* æquale erit quadrato AF, hoc est quadrato AB, atque AB tangit circulum in B quod angulus ABD rectus est, ergo punctum G erit in circumferentia circuli BEC, quare EG diameter erit, ac proinde diametro BC æqualis.

Esse autem punctum G in circumferentia circuli BEC patet. si enim non est, erit aut in circulo, aut extra circulum. sit primum si possibile est in circulo & producatur AG vsque ad circumferentiam in H, itaque rectangulum EAH æquale erit quadrato AB, sed & rectangulum EAC ostensum est æquale quadrato AB, ergo rectangulum EAG rectangulo EAH æquale erit, quare & recta AG æqualis rectæ AH, pars toti quod est absurdum. Non est igitur punctum G in circulo.

Deinde sit si fieri potest punctum G. extra circulum, ergo recta AG secabit circumferentiam, secet in H, rectangulum igitur EAH æquabitur quadrato AB, sed eidem quadrato æquatur & rectangulum EAG, ergo rectangula EAH, EAG æqualia erunt; quare & rectæ AH, AG æquales pars & totum quod itidem est absurdum. Non igitur punctum G est extra circulum, sed neque in circulo, ergo in circumferentia circuli erit, quod erat ostendendum.




## Compositio Tertia.

IIsdem datis, inclinentur ad angulos rectos AB, BC & secta BC bifariam in D iungatur AD, & centro D interuallo DB, vel DC describatur circulus, quem AD secet in E, continuata vero in G, & ex E ipsi AD ducatur perpendicularis AF indefinita, in qua ponatur AF æqualis AB, & iungatur FC. In triangulo igitur FAG, crus FA æquale est AB datæ, & EG segmentum basis alternum æquale ipsi BC, diameter nempe diametro; superest igitur vt angulus AFG sit rectus; id autem per Resolutionis regressum ostendetur hoc modo.

Corol. 16 tertij 6 sexti

Quoniam enim recta AB* tangit circulum cum sit rectus angulus. ABC, rectangulum EAG æquale erit quadrato AB, hoc est quadrato AF, quare vt AE ad AF, ita erit AF ad AG: vnde* similia erunt triangula EAF, FAG, sed rectus est angulus AEF trianguli EAF ergo, & angulus AFG trianguli FAG rectus erit quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum FAG quemadmodum facere oportebat.

Pro-



## Problema III.

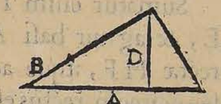
Data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari. inuenire triangulum.

### Resolutio.

SIt data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium B, perpendicularis autem D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam inuentum, eiusque basis, esto A.

Quoniam igitur ab angulo recto trianguli ducta est in basim perpendicularis; triangula ad perpendicularem* similia sunt toti triangulo, vt igitur basis totius trianguli ad crus vnum, ita erit crus alterum ad perpendicularem, ac proinde id quod fit sub extremis* æquabitur ei, quod fit sub medijs, hoc est




8 sexti

16 sexti

D in A æquabitur rectangulo sub cruribus,

Sed quadratum differentiæ crurum æquale est quadratis crurum, minus duplo rectangulo sub cruribus, ergo

BQ æquabitur AQ - D in A 2

quadratum enim basis, quod est AQ æquale est quadratis crurum, & duplum rectangulum sub base, & perpendiculari, quod est D in A 2, æquale duplo rectangulo sub cruribus, vt est demonstratum. Denique explicata æquatione.

L. V. (BQ + DQ) -- D æquabitur A.

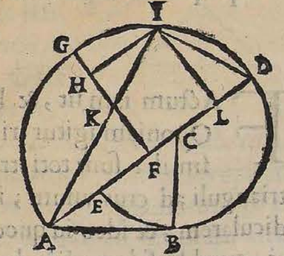
### Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadratis differentiæ videlicet crurum trianguli circa angulum rectum, & perpendicularis, aucta ipsa perpendiculari, æqualis est basi trianguli.

Datur igitur quæsita basis trianguli.

### Compositio.

SIt data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium AB, perpendicularis autem BC. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & connectatur AC: eius quadratum æquale erit quadratis AB, BC, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis; ipsa igitur AC, augenda est longitudine CB, & sic aucta debet fieri basis trianguli construendi. sic Porisma docet.




K ergo

ergo centro C interuallo C B describatur circulus secans A C continuatam in D, deinde in A D describatur semicirculus A G D, ex cuius centro, quod sit F, ducatur perpendicularis F G, in qua sumatur F H, æqualis C B, vel C D, ipsi autem A D parallela agatur H I, secans circumferentiam in I, & connectantur A I, I D. Constructum est igitur triangulum A I D, quemadmodum Porisma docet; recta enim A C, cuius quadratum æquale est quadratis datarum A B, B C, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis, aucta longitudine C B basis est trianguli A I D. Nunc ostendendum est ipsum triangulū esse quale Problema requirit. A

Sumatur enim I k æqualis I D, & circulus D B E secet rectam A C in E, & agatur basi A D perpendicularis I L; ea parallela erit, & æqualis rectæ H F, atque adeo æqualis quoque C B datæ, atque angulus A I D in semicirculo rectus est. hæc omnia ex constructione patent. ipsam autem A k differentiam crurum A I, I D æqualem esse A B datæ, per resolutionis regressum ita ostendetur. B

Quoniam enim rectus est angulus A B C, ex constructione, & ideo A B tangit circulum in B quadratum A B* æquale erit rectangulo E A D, seu quod idem est quadrato A D, minus rectangulo A D E, hoc est minus duplo rectangulo A D, I L, est enim D E dupla ipsius I L, ex constructione; sed quadratum A D,* æquale est quadratis A I, I D, & rectangulum A D, I L æquale rectangulo A I D; nam cum sint* similia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L sub extremis, æquale erit rectangulo A I D sub medijs; ergo quadratum A B æquale erit quadratis A I, I D, minus duplo rectangulo A I D; sed & quadratum A k differentię ipsarum A I, I D,* æquale est quadratis A I, I D, minus duplo rectangulo A I D, ergo quadratum A K quadrato A B, æquale erit, quare & recta A K æqualis rectę A B. Constructum est igitur triangulum A I D, &c. quod facere oportebat.

3 secti
7 primi
8 sexti
Thes. primi

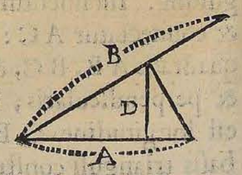
## Problema IV.

Dato aggregato crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari, inenire triangulum.

SIt data composita ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B. perpendicularis autem D, oportet inuenire triangulum. D

### Resolutio.

FActum iam sit, & basis illius trianguli esto A. Quoniam igitur triangula ad perpendicularem* similia sunt toti triangulo, erit vt basis totius trianguli ad crus vnum; ita crus alterum, ad perpendicularem, & ideo id quod fit sub extremis* æquabitur ei, quod fit sub medijs, hoc est




D in

8 sexti
16 sexti



A D in A æquabitur rectangulo sub cruribus, A

Sed quadratum compositæ ex cruribus* æquale est quadratis crurum, vna cum duplo rectangulo sub cruribus, ergo 4 secundi

B Q æquabitur A Q ✣ D in A 2.

Quadratum enim basis, hoc est A Q æquale est quadratis crurum; duplum autem rectangulum sub base, & perpendiculari, hoc est D in A 2 æquale duplo rectangulo sub cruribus, vt est demonstratum. Denique explicata æquatione.

L. V. (B Q ✣ D Q) - D æquabitur A

### Porisma.

B Recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati videlicet crurum, angulum rectum ambientium, perpendicularis, contracta ipsa perpendiculari, æqualis est basi trianguli.

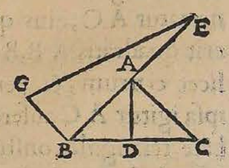
Datur ergo basis trianguli, de qua quærebatur.

Ex Porismate apparet triplam perpendicularem non esse maiorem rectà, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis; nam si ab ea recta auferenda est perpendicularis, & ex reliqua facienda basis trianguli construendi, vt Porisma docet, ipsa basis non debet esse minor, quàm dupla perpendicularis, in triangulo enim rectangulo si crura sunt æqualia, basis dupla est ipsius perpendicularis, si inæqualia, maior est quàm dupla C perpendicularis. Hæc demonstranda sunt, & Problemati adijcienda determinatio, ne data suos limites egrediantur.

### Lemma.

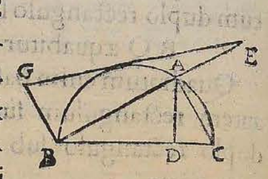
Tripla perpendicularis trianguli rectanguli ab angulo recto in basim cadens, non est maior, quàm recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

SIt triangulum rectangulum A B C, à cuius angulo recto B A C cadat in basim B C perpendicularis A D, & B A producatur in E longitudine A C, & ducatur ipsi B E D perpendicularis B G; æqualis autem ipsi A D, & connectatur G E; eius quadratum æquale erit quadratis B E, B G, hoc est aggregati crurum, & perpendicularis. Dico igitur triplam A D, non esse maiorem rectà G E: Aut enim æqualia sunt crura B A, A C, aut inæqualia, sint primum æqualia, ergo æquales erunt & B D, D A, D C: vnde quadratum B A duplum erit quadrati A D, sed quadratum B E quadruplum est quadrati B A, cum sit B E dupla ipsius B A, ergo quadratum B E octuplum erit quadrati A D, sed quadratum G E æquale est quadratis G B, B E, & est recta G B æqualis rectæ A D, ergo quadratum G E nonuplum



erit quadrati A D, & consequenter recta G E tripla rectæ A D. Tripla igitur A D non est maior, quam G E. A

Sed sint inæqualia crura B A, A C, ergo & B D, D C erunt inæquales. Describatur autem in B C semicirculus B A C, eius circumferentia transibit per A, propter angulum rectum B A C, & recta D A non erit ex centro, quare B C maior erit quam A D dupla, & consequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati A D, & rectangulum B C, A D maiùs duplo quadrati A D, & per consequens duplum rectanguli B C, A D maius quadruplo quadrati A D, atque adeo quadratum B C, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, sed quadratum B C æquale est quadratis B A, A C, & duplum rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C, est enim propter* similitudinem triangulorum A B C, D A C, vt B C ad B A, ita A C ad A D, & ideo rectangulum sub extremis B C, A D, æquale rectangulo B A C sub medijs; ergo quadrata B A, A C vnà cum duplo rectanguli B A C, hoc est* quadratum B E, quæ est æqualis compositæ ex B A, A C, maius erit octuplo quadrati A D, atque adeo quadratum G E, cui æqualia sunt quadrata G B, B E maius erit nonuplo quadrati A D, vnde & recta G B maior erit, quam tripla A D: quare constat propositum.




B

9 quinti

4 secundi

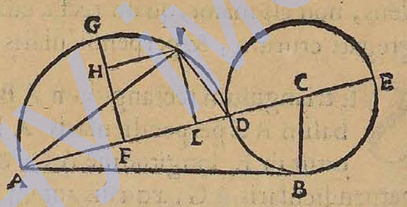
Hoc igitur demonstrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio. C

OPortebit triplam perpendicularem non esse maiorem recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

Compositio Problematis.

SIt datum aggregatũ crurum trianguli angulum rectum ambientiũ A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulũ. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C, eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C aggregati videlicet crurum, & perpendicularis. ab ipsa igitur A C auferenda est recta æqualis C B; reliqua vero sumenda pro basi trianguli constituendi; sic Porisma præcipit ergo centro C interuallo C B describatur circulus secans A C in D, in reliqua vero A D describatur semicirculus A G D, ex cuius centro quod sit F ducatur perpendicularis F G, in qua sumatur F H æqualis C B, vel C D, est autẽ C B non maior, quàm F G; nam ex determinatione Problematis tripla C B non est maior, quam A C, ergo nec dupla C B maior erit, quàm A C; nec simpla C B maior quàm F G. Ipsi autem A D parallela agatur H I secans circumferentiam




D

in



A in I, & connectantur A I, I D. Itaque constructum est triangulum A I D, quemadmodum Porisma docet: recta enim A C, (cuius quadratum æquale est quadratis datarum A B, B C, aggregato videlicet crurum, & perpendicularis) contracta longitudine C B basis est trianguli A I D. Nunc ostendendum est illud triangulum Problema efficere.

Producatur enim A C vsque ad circumferentiam circuli in E, & in A D cadat perpendicularis I L: ea parallela erit, & æqualis rectæ H F; atque adeo æqualis quoque datæ C B. est autem & angulus A I D in semicirculo rectus. Hæc omnia patent ex constructione. Compositam autem ex cruribus A I, I D, æqualem esse A B datæ, repetendo resolutionis vestigia, ita ostendetur.

B Quoniam enim rectus est angulus A B C, & ideo A B tangit circulum in B, quadratum A B* æquale erit rectangulo E A D, seu quod idem est quadrato A D vnà cum rectangulo A D E, hoc est vnà cum duplo rectãgulo A D I L; est enim D E dupla ipsius I L, ex constructione; sed quadratum A D* æquale est quadratis A I, I D, & rectangulum A D, I L æquale rectangulo A I D: nam cum sint* similia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L sub extremis; æquale est rectangulo A I D sub medijs; ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectangulo A I D; sed & quadratum compositæ ex A I, I D,* æquale est quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectanguli A I D, ergo quadratum compositæ ex A I, I D, æquale erit quadrato A B: vnde & ipsa C composita æqualis rectę A B. Constructum est igitur triangulum A I D, &c. quod erat faciendum.

B 16 tertij

47 primi

8 sexti

4 secundi

C

Problema V.

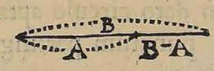
Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte æquale sit quadrato partis reliquę.

HÆc est Propositio vndecima libri secundi Elementorum, seu trigesima sexti, quę iubet datam rectam lineam extrema, ac media ratione secare.

Resolutio.

D SIt data recta linea secanda B, vt rectangulum sub tota, & altera parte æquale sit quadrato partis reliquę.

Secta iam sit, & pars maior esto, A, ergo minor pars erit B - A. Et cum rectangulum sub tota & minori parte æquale sit quadrato partis maioris




B Q - B in A æquabitur A Q

Addito vtrique parti B in A, vt cognita ab incognitis separentur.

B Q æquabitur A Q + B in A

Et explicata æquatione L. V. (B Q + B Q $\frac{1}{4}$) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

### Porisma.

A

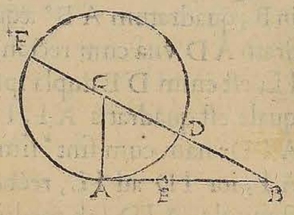
Recta cuius quadratum æquale est quadratis totius datæ, & dimidiæ eiusdem contracta eadem dimidia, æqualis est parti maiori.

Datur ergo pars maior, de qua quæritur.

Hoc Problema vnico modo ab vna resolutione pendente componitur, quoniam in eo vna tantum conditio requiritur, nempe vt rectangulum sub tota data, & altera parte æquale sit quadrato partis reliquæ.

### Compositio.

B




SIt data recta linea A B, quam oportet secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte, æquale sit quadrato reliquæ partis. Ducatur A C perpendicularis, & æqualis dimidiæ A B, & iungatur C B, à qua abscindatur C D æqualis C A, reliquæ vero D B fiat æqualis B E. Secta est igitur A B in E, quemadmodum habetur ex Porismate: à recta enim C B, cuius quadratum æquale est quadratis A B, A C totius videlicet datæ, & dimidiæ eiusdem, ablata est C D æqualis dimidiæ A B, reliquæ verò B D facta est æqualis B E. Itaque ostendendum est rectangulum B A E æquari quadrato B E. id autem per repetitionem vestigiorum Resolutionis fiet manifestum.

C

Centro enim C interuallo C A, vel C D circulus describatur secans B C continuatam in F, is circulus tanget rectam A B in A, ac proin-
2 secundi de rectangulum D B F quod * constat quadrato D B, & rectangulo F D B
36 tertij * æquale erit quadrato A B. auferatur vtrinque rectangulum F D B, quoniam in Resolutione additum fuit; ergo reliquum quadratum D B, hoc est E B, æquabitur quadrato A B, minus rectangulo F D B, hoc est minus rectangulo A B E; sunt enim æquales F D, A B; cum sit A C dimidia ipsius A B; & æquales quoque D B, B E, seu quod idem est, æquabitur rectangulo B A E. Secta est igitur A B in E, vt Problema exigit, quod faciendum erat.

D

### Problema VI.

In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

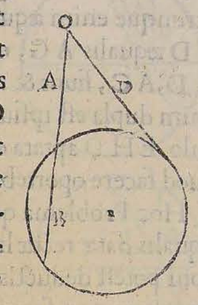
HOc Problema duos casus habet, aut enim datum est punctum extra circulum, aut intra; primo Casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem diametro circuli; secundo vero Casu oportebit eã nec esse maiorẽ diametro circuli, nec minorẽ ea recta linea in circulo,

quæ



A quæ in dato puncto secat diametrum ad rectos angulos; ea enim minima est omnium, cum sit à centro omnium remotissima.

### Resolutio primi Casus.




SIt iam factum. hoc est sit aptata, in dato circulo, vt petitur, data recta linea B; quæ producta perueniat ad datum punctum O, à quo ducatur recta tangens circulum, ea data erit; quoniam datum est & punctum O positione, circulus vero positione & magnitudine. Sit igitur ea tangens D, & quæratur continuatio aptatæ; quæ est inter datum punctum, & aptatum. ea esto A, ergo to-
B ta continuata, seu secans circulum, erit A ✣ B. Et quoniam rectangulum sub tota secante, & parte exteriori eiusdem æquale est quadrato, tangentis, ideo

A Q ✣ B in A æquabitur D Q

Et explicata æquatione. L. V. ( D Q ✣ B Q $\frac{1}{4}$ ) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

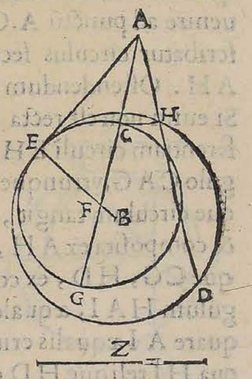
### Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato tangentis circulum, & quadrato dimidiæ aptatæ in circulo, contracta eadem dimidia æqualis est continuationi aptatæ, quæ dato puncto, & aptata terminatur.

Datur ergo continuatio aptatæ de qua quæritur.

C

### Compositio Primi Casus.




SIt datus circulus E H D cuius centrum B; datum autem punctum A, quod sit extra circulum, & data magnitudine recta linea Z, quæ non sit maior diametro circuli. Oportet in circulo E H D rectæ lineæ, Z æqualem rectam lineam aptare, quæ ad punctum A pertingat. Si diametro circuli E H D æqualis est ipsa Z ducatur à puncto A per centrum circuli recta linea, & factum erit quod proponitur. Si vero ipsa Z minor est
D diametro, ducatur A E contingens circulum E H D in E, & connectatur B E, erit igitur angulus A E B rectus. deinde in E B sumatur E F, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque A F; quadratum igitur A F æquale erit quadratis A E, E F, hoc est tangentis, & dimidiæ Z. itaque à recta A F auferenda est recta æqualis ipsi F E, vel dimidiæ Z, residuæ vero facienda est æqualis continuatio aptandę, quę dato puncto, & aptanda terminabitur. Sic habetur ex Porismate. ergo à recta F A abscindatur F C æqualis F E, & centro A internallo A C describatur arcus secans circulum E H D in H, & per punctum H ducta recta linea A H D vsque ad cauam eiusdem

cir-

circuli circumferentiam, aptata erit H D in circulo, quemadmodum Porisma docet. Eam autem æqualem esse Z datæ, sic demonstrabitur. A

Centro enim F interuallo F E, vel F C describatur circulus secans A F continuatam in G. Quoniam igitur æqualia sunt rectangula H A D, C A G vtrunque enim æquale est quadrato A E, atque est A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G, quare per subductionem æqualium A H, A C, æqualibus A D, A C, fiunt & reliquæ H D, C G æquales; sed C G æqualis est Z, vtraque enim dupla est ipsius E F; ergo & H D ipsi Z æqualis erit. In dato igitur circulo E H D aptata est H D datæ Z æqualis, eaque ad punctum A pertingit quod facere oportebat.

Hoc Problema quia duas conditiones exigit nempe vt aptata in circulo sit æqualis datæ rectæ lineæ, & vt ad datum punctum pertingat, dupliciter componi potest deductis ab vna, eademque Resolutione compositionibus, & licet hæc altera quæ sequitur Compositio sit multis de causis inferior, quàm prima eam tamen subijcere volui, vt ostendatur ex qualibet Resolutione, tot compositiones oriri, quot in Problemate conditiones requiruntur. B

## Alia eiusdem Casus Compositio.

SInt igitur eadem data, & oporteat facere quod imperatum est. Ducatur A E, vt prius contingens circulum E H D in E, & iungatur B E, & in ea sumatur E F æqualis dimidiæ Z, & iungatur A F, ab eaque abscindatur F C æqualis F E, & centro A interuallo A C describatur arcus secans circulum F H D in H, in quo accommodetur H D æqualis Z. Dico H D Problema efficere, eamq. productã peruenire ad punctũ A. Cẽtro enim F. interuallo F C, vel F E describatur circulus secans A F productam in G, & iungatur A H. Ostendendum est igitur A H D rectam esse lineam.




Si enim non est recta linea A H D producatur A H. vsque ad cauam circumferentiam circuli E H D in I. Rectangulum igitur H A I æquale erit rectangulo C A G, vtrunque enim æquale est quadrato A E tangentis, ea enim vtrumque circulum tangit, sed rectangulum C A G æquale est rectangulo sub H A, & composita ex A H, H D; sunt enim æquales A C, A H; & æquales quoque C G, H D, ex constructione, & ideo æquales, & A G, A I; ergo rectangulum H A I, æquale erit rectangulo sub H A, & composita ex A H, H D; quare A I æqualis erit compositæ ex A H, H D dempta communi A H; reliqua H I reliquę H D æqualis erit, quod est absurdum: recta est igitur linea A H D; quod ostendisse oportuit, atque adeo aptata est in circulo recta H D, eaque ad punctum A pertingit quod faciendum erat. D

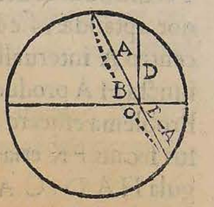
Re-

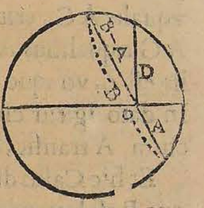


A

## Resolutio secundi Casus.

FActum iam sit, hoc est sit aptata in circulo vt petitur data recta linea B, eaque transeat per datum punctum O, per quod ducatur circuli diameter cui à puncto O, ducatur perpendicularis vsque ad circumferentiam. Quoniam igitur datum est punctum O, positione, circulus vero positione, & magnitudine, ergo & diameter eius transiens per O dabitur positione, & magnitudine, atque adeo dabitur & ipsa perpendicularis, ergo sit ea D, & quæratur alterutra pars aptatæ, quæ in dato puncto diuiditur: ea estò A; ergo reliqua pars erit B -- A & rectangulum sub partibus aptatæ * æquale erit rectangulo sub partibus diametri, hoc est quadrato perpendicularis, itaque,




B in A -- A Q æquabitur D Q

Et explicata secundum tertium Canonem æquatione

B $\frac{1}{2}$ + L. V. ( B Q $\frac{1}{4}$ -- D Q ) æquabitur A

Vel B $\frac{1}{2}$ - L. V. ( B Q $\frac{1}{4}$ -- D Q ) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus est pars maior aptatæ, secundus pars minor, in eamdem enim æquationem incidit siue de maiori parte aptatæ quæritur, siue de minori.

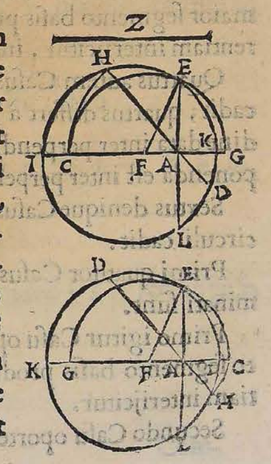
## Porisma.

C

Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ aptatæ superat quadratum perpendicularis, æqualis est parti maiori aptatæ, quæ dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis est parti minori.

## Compositio Secundi Casus.

SEd sit in circulo datum A punctũ, & data z non sit maior diametro circuli dati H E D, neque minor ea recta linea in circulo, quàm diameter D per punctũ A ducta secat ad rectos angulos, & oporteat facere quod imperatum est. Ducatur per A circuli diameter I A K, cui si sit æqualis Z data, factum iam erit quod proponitur si vero sit minor ducatur per A ipsi diametro ad rectos angulos E A L & si ipsa E L æqualis sit datæ Z, rursus factũ erit quod proponitur, si vero Z maior sit quam E L ponatur in A I recta linea E F æqualis dimidiæ Z; est autem dimidia Z maior, quam A E, cum tota Z ponatur maior, quàm tota E L, quæ dupla est ipsius A E. Quadratum igitur E F superat qua-



quadratum E A quadrato A F, itaque dimidiæ Z addenda est recta A F, ei- A
que sic aucte facienda æqualis pars maior aptandæ, quæ in puncto A diuisa erit.
Vel dimidiæ Z detrahenda est recta A F, & residuæ facienda æqualis pars mi-
nor aptandæ, sic Porisma fieri docet. Igitur rectę F E fiat æqualis F C, &
centro A interuallo A C describatur arcus secans circulum H E D in H, &
iuncta H A producatur vsque ad circumferentiam in D. Dico rectam H D
Problema efficere. Centro enim F interuallo F C, vel F E describatur circu-
lus secans F K etiam productam in G. Quoniam igitur æqualia sunt rectan-
gula H A D, C A G; vtrunque enim æquale est quadrato A E, atque est A H
æqualis A C, erit & A D æqualis A G; quare per additionem æqualium A D,
A G æqualibus A H, A C, fiunt quoque æquales & H D, C G, sed C G æqua-
lis est Z, vtraque enim dupla est ipsius F E, ergo & H D ipsi Z æqualis erit. B
In dato igitur circulo H A D aptata est H D æqualis Z datæ, eaque per pun-
ctum A transit, quod erat faciendum.

Et hic Casus duplicem admittit Compositionem, vtramque ex vna, eadem-
que Resolutione emanantem, sed primi Casus compositiones ad exemplum
sufficiant.

## Problema VII.

Dato semicirculo, & recta linea sit ipsius basi perpendicularis. Inter ipsam
perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam
magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat. C

HOc Problema sex Casus habet; tres quidem sunt cum perpendicu-
laris secat basim semicirculi productam. primus differt à reliquis
duobus, quod in primo ponenda est recta magnitudine data inter
perpendicularem, & conuexam semicirculi circumferentiam. In reliquis
vero ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. Secun-
dus autem Casus differt à tertio, quod in secundo basis semicirculi non est
maior segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumfe-
rentiam interijcitur, in tertio autem maior est.

Quartus autem Casus, & quintus est cum perpendicularis in ipsam basim
cadit; quartus differt à quinto, quod in quarto ponenda est recta magnitu-
dine data inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. At in quinto D
ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam conuexam.

Sextus denique Casus est cum perpendicularis in extremitatem basis semi-
circuli cadit.

Primi quatuor Casus determinatione indigent: duo vero reliqui indeter-
minati sunt.

Primo igitur Casu oportet rectam magnitudine datam non esse minorem
eo segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferen-
tiam interijcitur.

Secundo Casu oportet illam magnitudine datam, non esse minorem base pro-



A producta, vsque ad perpendicularem.

Tertij Casus determinaionem quære ex Porismate Resolutionis, siquidem in ea semicirculi, & perpendicularis positione non dum liquet, quæ sit mini-
ma interceptarum à circumferentia, & perpendiculari quemadmodum cer-
nitur in præcedentibus, & in ea quæ sequitur inspecta tantum semicirculi
& perpendicularis positione.

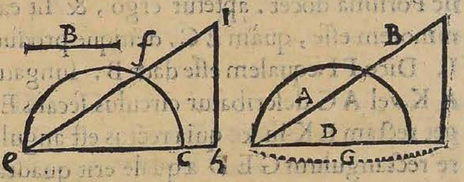
Quarto denique Casu oportebit rectam magnitudine datam non esse ma-
iorem segmento basis semicirculi, quod inter perpendicularem, & circumfe-
rentiam interijcitur ex ea parte ponendæ.

## Resolutio primi Casus.

B

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basim productam cadat perpen-
dicularis I H, & data recta linea B, quæ non sit minor, quam C H.
Oportet inter circumferentiam semicirculi, & ipsam perpendicula-
rem ponere rectam lineam æqualem datæ B; itaut ad punctum E perti-
neat.

Sit iam factum, & sit ea recta F I, & connectatur C F. sit autem da-
tarum F I, E C, E H, prima B,
secunda D, tertia G, vt in se-
cunda figura, & quæratur E F,
ea esto A. duplicem figuram
C appolui, primam quidem vt ex-
positio Problematis clarior fiat;
secũdum vero vt Rosolutioni ser-




uiat, easque distinxi, ne multitudine, & diuersitate literarum, quæ in vna
figura existerent obruantur studiosi potius, quàm iuuentur. Quoniam igi-
tur similia sunt triangula E F C, E H I, angulus enim E F C in semicir-
culo rectus est, & ideo æqualis angulo recto H, & angulus ad E commu-
nis est vtrique, erit vt E F ad E C, ita E H ad E I, hoc est in figura ad
resolutionem pertinente proportionales erunt.

A D G A ✣ B

Sed quod fit sub extremis æquale est facto sub medijs, ergo

D A Q ✣ B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. ( B Q ÷ ✣ D in G ) --- B ÷ æ-
quabitur A.

### Porisma.

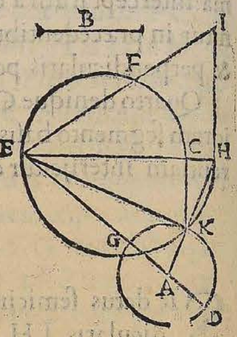
Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ F I & rectangulo
C E H, contracta dimidia F I æqualis est rectæ E F.

Datur ergo E F quæsita.

Com-

## Compositio Primi Casus.

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basim E O productam cadat perpendicularis I H, & data quoque recta linea B, quæ non sit minor, quàm C H. Oportet inter perpendicularem I H, & circumferentiam E F C datæ B æqualem rectam ponere, quæ ad punctum E pertingat. Si B æqualis sit rectæ C H, factum iam erit quod proponitur, si vero sit maior; describatur in E H semicirculus E k H, & ipsi E H agatur perpendicularis C k, & iungantur E K, k H. angulus igitur E k H in semicirculo rectus est, ac proinde E k* media proportionalis inter C E, E H, quare quadratum E k* æquabitur rectangulo C E H. Producatur autem H k in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A: quadratum igitur E A æquale erit quadratis A K, k E, hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo C E H. à recta igitur E A auferenda est A G æqualis A K, vel dimidiæ B, residuæ vero E G æqualis aptanda est recta in semicirculo E F C sic Porisma docet. aptetur ergo, & sit ea E F, demonstrabitur infra, A G minorem esse, quàm E C. denique producta E F donec occurrat rectæ H I in I. Dico F I æqualem esse datæ B. Iungatur enim F C, & centro A interuallo A K, vel A G describatur circulus secans E A productam in D. is circulus tanget rectam E K in k quia rectus est angulus E K, cum sit rectus & k H; quare rectangulum G E D æquale erit quadrato E B hoc est rectangulo C E H, vt igitur G E, seu E F ad E C, ita erit E H ad E D; sed propter similitudinem triangulorum E F C, E H I, est vt E F ad A C, ita E H ad E I ergo ipsa E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D hoc est datæ B, æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentiam E F, & perpendicularem I H recta F I æqualis B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.




Corol. 8. sexti ex secti

At vero E G minorem esse, quàm E C manifestum est, si enim non est minor, erit maior, vel æqualis: sed ponitur & G D, hoc est B, maior quàm C H, ergo & E D tota maior erit quàm tota E H. vnde rectangulum G E D, hoc est quadratum E K, maius erit rectangulo C E H, quod est absurdum, illud enim quadratum huic rectãgulo* æquale est. Non igitur E G maior est quàm E C, aut ei æqualis, ergo minor quod ostendisse oportuit. D

Corol. 8 sexti

Determinatione cautum est ne data B sit minor, quàm C H; nam ipsa C H minima est omnium, quæ ad punctum E pertinentes inter circumferentiam E F C, & rectam I H interijciuntur. Ducatur enim alia vtrun que recta linea E F I, ea maior erit quam E H, sed & E C maior est quam E F, ergo reliqua C H minor erit quàm reliqua F I & sic ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium C H, quare manifesta est determinatio.

Reso-

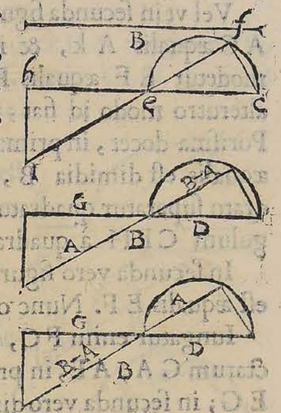


A

## Resolutio secundi Casus.

SIt datus semicirculus e f c è cuius basè continuata longitudine, non minore ipsa basè, cadat perpendicularis h i: data autem recta linea B, quæ non sit minor, quàm c h. Oportet inter perpendicularem h i, & circumferentiam e f c ponere rectam lineam æqualem datæ B, ita vt ad punctum e pertingat.

Sit iam factum, & sit ea recta f e i, & iungatur f c. datæ sunt igitur f i, c e, e h. prima sit B, secunda D, tertia G, & quæratur siue e i, siue e f. altera earum esto A, ergo reliqua erit B --- A.




B Et quoniam similia sunt triangula e f c, e h i, nam angulus e f c in semicirculo rectus est, & ideo æqualis angulo recto e h i, & angulus f e c æqualis angulo h e i, cum sint ad verticem, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc est in figura Resolutionis proportionales erunt:

B --- A  D  G  A

Vel A  D  G  B --- A

Et quod fit sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs, ergo

B in A --- A Q æquabitur D in G

C Et explicata æquatione B $\frac{1}{2}$ ± ( B Q $\frac{1}{4}$ --- D in G ) æquabitur A

Vel B $\frac{1}{2}$ --- ( B Q $\frac{1}{4}$ --- D in G ) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus est e i, secundus e f si quidem in eandem æquationem inciditur, siue de e i quæritur, siue de e f.

### Porisma.

Dimidia f i, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ f i superat rectangulum c e h, æqualis est rectæ e i; contracta verò æqualis rectę e f.

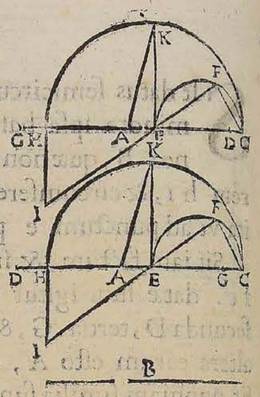
D Datur ergo vtraque ei, ef.

## Compositio secundi Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod propositum est. Si B data æqualis sit H C, factum iam erit quod proponitur. si vero sit maior, agatur ipsi H C perpendicularis E K, quam semicirculus in H C descriptus secet in k, erit E k minor quàm dimidia B, cum sit & H C minor quam tota B. Itaque poterit à puncto K in rectam E H duci recta æqualis dimidię B. ducatur igitur k A

L ea

ea maior erit quam AH, minor autem quam AC; nam cum sit Ak maior, quàm dimidia HC, erit centrum circuli HKC in AC, & ideo AK maior quam AH, & minor quam AC. Producatur ergo AH in G, vt sit AG æqualis AK, vel dimidiæ B, & in HI ponatur EI æqualis EG, eaque producatur ad circumferentiam in F.




Vel vt in secunda figura ab AC abscindatur recta AG æqualis Ak, & in semicirculo EFC accommodetur EF æqualis EG, eaque producatur in I, alterutro modo id fiat, factum erit quemadmodum Porisma docet, in prima enim figura rectæ AG, cui æqualis est dimidia B, addita est AE, cuius quadrato superatur quadratum KE à quadrato AK, hoc est superatur rectangulum CEH à quadrato dimidiæ B, & toti EG facta est æqualis EI.

In secunda vero figura rectæ AG detracta est AE, & reliquæ EG facta est æqualis EF. Nunc ostendendum est rectam IEF Problema efficere.

Iungatur enim FC, & sumatur AD æqualis AG. Quoniam igitur rectarum GA, AE, in prima quidem figura differentia est ED, aggregatum EG; in secunda vero differentia est EG, aggregatum ED; ideo in vtraque figura rectangulum GED, sub aggregato, & differentia* æquale erit differentiæ quadratorum GA, AE, seu kA, AE, hoc est quadrato kE, vel rectangulo HEC; sed & rectangulum IEF æquale est eidem rectangulo HEC, nam cum sint similia triangula EHI, EFC, est vt EH ad EI, ita EF ad EC, & ideo rectangulum HEC sub extremis æquale rectangulo IEF sub medijs; ergo rectangulum GED æquale erit rectangulo IEF. In prima quidem figura sic argumentor. Sed se æqualis est GE, ergo & EF, ac proinde tota IF æqualis toti GD, hoc est ipsi B. In secunda vero figura argumentor hoc modo; sed EF æqualis est EG, ergo & EI æqualis erit ED, & consequenter tota IF, æqualis toti DG, hoc est datæ B, quod erat ostendendum. Posita est igitur inter perpendicularem HI, & circumferentiam EFC recta IF æqualis datæ B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.

Theor. 8 primi

At vero rectam HC minimam esse omnium, quæ ad punctum E pertinent, & inter perpendicularem HI, & circumferentiam EFC interijciuntur sic demonstrabitur. D

Ducatur enim alia quæcunque recta IEF, & iungatur FC. Quoniam igitur propter similitudinem triangulorum EFC, EHI, est vt EF ad EC, ita EH ad EI, atque est maxima quidem EI, minima vero EF; erit IF composita ex maxima, & minima maior, quàm HC composita ex reliquis: & sic ostendetur HC minor omnibus alijs. Quare manifesta est determinatio.





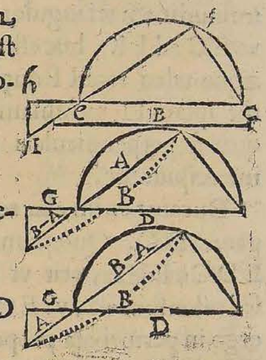
A

## Resolutio Tertij Casus.

SIt datus semicirculus efc, è cuius basi continuata longitudine minori ipsa basi cadat perpendicularis hi, dataque recta linea B: & oporteat facere quod imperatum est. In hoc casu quoniam ex hac semicirculi, & perpendicularis positione non videtur offerri minima interceptarum a perpendiculari, & circumferentia semicirculi, quemadmodum in casibus præcedentibus, ideo determinatio petenda est ex Porismate.

Sit igitur factum ducta scilicet recta ief æqualis datæ B, & iungatur FC, sitque datarum if, ec, eh, prima B, secunda D, tertia G, & quæratur alterutra partium ei, ef, ea esto A, ergo reliqua

B erit B -- A, & propter similitudinem triangulorum efc, ehi, erit vt ef ad ec, ita eh ad ei, hoc est in figuris ad resolutionem pertinentibus, proportionales erunt.




A D G B -- A

Vel B -- A D G A

Et factum sub extremis æquale erit facto sub medijs, hoc est

B in A -- AQ æquabitur D in G.

Et explicata æquatione $B\frac{1}{2} \dotplus L.V.(BQ\frac{1}{4} -- D$ in G) æquabitur A

C Vel $B\frac{1}{2} -- L.V.(BQ\frac{1}{4} -- D$ in G) æquabitur A

Et in hac quoque æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus indicat maiorem quæsitarum ef, ei, secundus minorem.

### Porisma.

Dimidia fi protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ fi superat rectangulum hec, æqualis est maiori partium ef, ei, contracta verò, minori.

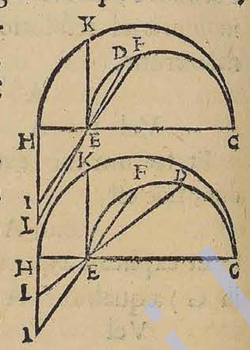
Ex hoc Porismate apparet, dimidiam B, non esse minorem mediâ pro-

D portionali inter rectas eh, ec. Porisma enim indicat quadratum dimidiæ B non esse minus rectangulo hec; iubet enim auferri rectangulum illud à quadrato dimidiæ B, minus videlicet à maiori, vel saltem æquale ab æquali, non autem maius à minori; neque enim, vt dictum est, Porisma iubet, quod fieri non potest. Determinatio igitur tertij Casus, quam dixi ex Porismate petendam, hæc erit.

### Determinatio tertij Casus.

OPortebit datam B non esse minorem dupla media proportionali inter HE,EC. Nam ipsa media dupla minima est omnium interceptarũ à perpendiculari HI, & circumferentia EFC; quod quidem sic demonstrabitur.

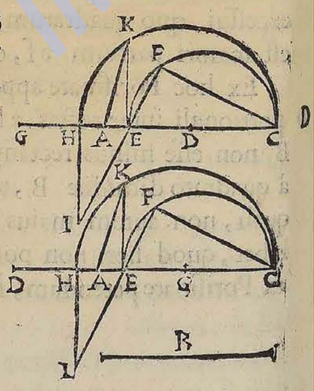
Resumatur antecedens figura, & describatur in HC semicirculus secans Ek ipsi HC perpendicularem in k, erit ergo Ek media proportionalis inter EH, EC. Accommodetur autem in semicirculo EFC recta EF æqualis Ek, eaque producta secet perpendicularem HI in I, & iungatur FC. erit ob similitudinem triangulorum EFC, EHI vt EC ad EF, ita EI ad EH, sed B vt EC ad EK, hoc est ad EF, ita est EF ad EH, * ergo EF æqualis erit EI, atque adeo tota IF dupla erit ipsius EK. Dico igitur ipsam IF minimam esse omnium ductarum per E, quæ à perpendiculari HI, & circumferentia EFC intercipiuntur.




Ducatur enim alia recta vtcumque LED, & iungatur DC. Quoniam igitur similia sunt triangula EDC, EHL, erit vt ED ad EC, ita EH ad EL; sed ostensum est, vt EC ad EF, ita esse EI ad EH, ergo in perturbata proportione erit vt ED ad EF, ita EI ad EL, sed in prima quidem figura maxima est EL, minima ED; in secunda vero maxima est ED, minima EL, vtroque igitur Casu LD cum sit composita ex maxima, & minima, maior erit, quàm IF composita ex reliquis. & sic demonstrabitur IF minor omnibus alijs. Minima est igitur IF, quod erat ostendendum.

### Compositio tertij Casus.

SIt datus semicirculus EFC, vt dictum est; data autem recta linea B, quæ non sit minor dupla proportionali inter HE, EC. & oporteat facere quod imperatum est. Describatur in HC semicirculus, quem acta perpendicularis Ek secet in k, & in EH ponatur kA æqualis dimidiæ B; est autem dimidia B non minor, quàm KE; cum tota B non sit minor quàm dupla Ek, ex Determinatione: Deinde producatur AH in G, vt sit AG æqualis AK, & in HI ponatur EI æqualis EG, eaque producatur ad circumferentiam in F.



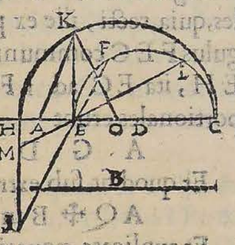

Vel vt in secunda figura sumatur in AC recta AG æqualis AK, & in se-



A semicirculo EFC accommodetur EF æqualis EG, eaque producatur in I. siue hoc, siue altero modo fiat constructio, ea facta erit quemadmodum Porisma iubet. rectamque IEF æqualem esse datæ B demonstrabitur eadem ratione, qua in antecedenti Casu immo eadem verborum textura. quare ijs repetitis habebis demonstrationem.

Quando autem data B maior est, quàm dupla Ek, non autem quàm HC, possibile est per punctum E ducere duas rectas lineas, quarum vtraque inter perpendicularem HI, & circumferentiam EFC interiecta æqualis erit datæ B

Repetatur enim eadem constructio, quæ supra, & sit inter perpendicularem HI, & circumferen-




B tiam EFC posita recta IEF æqualis ipsi B, & à puncto K ad centrum circuli HkC, quod sit O, ducatur KO, ea non erit minor, quàm kA, cui æqualis est dimidia B, cum & HC ponatur non minor quam B, quare neque quadratum KO minus erit quadrato kA; hoc est neque quadrata KE, EO minora erunt quadratis kE, EA, atque ablato communi quadrato KE, reliquum quadratum EO non erit minus reliquo quadrato EA; nec ideo recta EO minor, quàm recta EA, sed & OC non est minor quàm AG, ergo tota EC non erit minor quam EG tota. Accommodetur igitur in semicirculo EFC recta EL

C æqualis EG, vel EI, & producatur donec secet perpendicularem HI in M, & iungatur LC. Quoniam igitur propter similitudinem triangulorum ELC, EHM est vt EL ad EC, ita EH ad EM, & propter similitudinem triangulorum EFC, EHI, vt EC ad EF, ita EI ad EH, erit in perturbata proportione, vt EL ad EF, ita EI ad EM, sed EL prima æqualis est tertiæ EI, ex constructione, ergo & secunda EF æqualis erit EM quartæ, & consequenter tota ML æqualis toti IF, atque adeo vtraque æqualis B datæ.

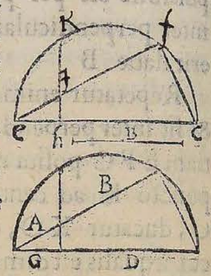
Idem autem Casus poterit construi alia quoque ratione in eodem Porismate exposita, vbi enim in semicirculo EFC accommodata est recta EL æqualis EG, vel EI, hìc, omissa ea accommodatione ponatur in HI recta EM æqualis ED, vel EF, si quidem ipsa ED, vel EF non est minor quam

D EH, quia cum sit ob similitudinem triangulorum EFC, EHI, vt EC ad EF, ita EI ad EH, atque EC prima non minor, quam tertia EI, vel EC, vt demonstrauimus supra, erit & secunda EF non minor, quàm EH quarta. Ipsa autem ME producatur ad circumferentiam EFC in L, & iungatur LC, erit igitur ob similitudinem triangulorum EFC, EHI, vt EF ad EC, ita EH ad EI, sed vt EC ad EL, ita est EM ad EH, ob similitudinem triangulorum ELC, EHM, ergo in perturbata proportione, vt EF ad EL, ita erit EM ad EI, sed EF prima æqualis est EM tertiæ, ex constructione, ergo & secunda EL æqualis erit quartæ EI; itaque tota IF æqualis erit, toti ML, & per consequens vtraque æqualis B datæ.

## Resolutio quarti Casus.

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basim cadat perpendicularis I H data autem recta linea B, quæ non sit maior quàm H C. Oportet inter perpendicularem H I, & cauam circumferentiam E F C ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.

Sit factum & sit ea recta I F, & connectatur F C. Sit autem datarum I F, E C, E H prima B, secunda D, tertia G, & quæratur E I. ea esto A. Quoniam igitur similia sunt triangula EHI, E F C, anguli enim E H I, E F C sunt æquales, quia recti, ille ex positione, hic ex vi semicirculi & angulus F E C communis est vtrique triangulo, erit vt E I ad E H, ita E C ad E F, hoc est in resolutionis figura, proportionales erunt




A G D A ✣ B

Et quod fit sub extremis æquale erit ei quod fit sub medijs, nempe

A Q ✣ B in A æquabitur G in D

Et explicata æquatione L. V. ( B Q $\frac{1}{4}$ ✣ G in D ) -- $\frac{1}{4}$ æquabitur A.

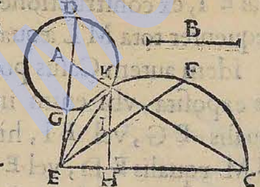
## Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ I F, & rectangulo H E C contracta eadem dimidia I F æqualis est rectæ E I.

Datur ergo E I quæsita.

## Compositio quarti Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod imperatum est. Si data B, æqualis sit rectæ H C, factum iam erit quod proponitur. Si vero sit minor secet recta H I circumferentiam in k, & connectatur E K, K C. angulus igitur E K C in semicirculo rectus erit, & ideo E K* media proportionalis inter H F, F C, ac proinde quadratum E k* æquale rectangulo H E C. producatur autem C k in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & connectatur A E eius quadratum æquale erit quadratis A k, K E; hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C. Itaque à recta A E auferatur A G æqualis dimidiæ B, residuæ vero E G ponatur in H k æqualis E I, sic Porisma iubet. inferius autem ostendetur ipsa A G maior, quàm A H producta; denique E I ad circumferentiam in F. Dico I F æqualem esse datæ B. Connectatur enim F C, & centro A interuallo A G, vel A K describatur circulus quem E A producta secet in D, is circulus tangit rectam E k in k; angulus enim A K E rectus est, cum sit rectus & angulus E k C in semicirculo, & ideo re-




Corol 3 sexti
17 sexti

D



A rectangulum G E D æquabitur quadrato E K hoc est rectangulo H E C, quare vt G E, hoc est E I ad E H, ita erit E C ad E D; sed vt E I ad E H, ita est quoque E C ad E F, propter similitudinem triangulorum E H I, E F C, anguli enim E H I, E F C sunt æquales, quia recti, & angulus I E H communis est vtrique triangulo, ergo E F æqualis erit E D, demptis æqualibus E I, E G, reliqua I F reliquæ G D, hoc est datæ B, æqualis erit, quod erat ostendendum. Posita est igitur recta I F, vt facere oportebat.

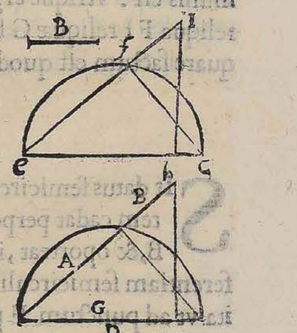
At vero E G maiorem esse, quàm E H sic demonstrabimus. sit enim, si fieri potest, non maior, ergo cum G D cui æqualis est B, minor sit, quàm H C, vt ponitur, erit & tota E D minor, quàm tota E C, atque adeo rectangulum G E D minus erit rectangulo H E C, hoc est* quadrato E k, quod est Corol. 8 sexti
B absurdum; rectangulum enim G E D quadrato E k æquale est. Maior est igitur E G, quàm E H, quod erat ostendendum. Rectam autem H C maximam esse omnium, quæ à puncto E ductæ inter perpendicularem k H, & cauam circumferentiam K C interijciuntur, sic ostendemus.

Ducatur enim alia vtrumque recta E I F; ea minor erit, quàm E C; sed & E H minor est quàm E I, ergo reliqua H C maior erit, quàm reliqua I F: & sic ipsa H C ostendetur omnibus alijs maior: Maxima est igitur omnium H C. quod erat ostendendum.

## Resolutio quinti casus.

C SIt datus semicirculus E F C, in cuius basim cadat perpendicularis I H: data autem recta linea B: & oporteat inter ipsam perpendicularem, & conuexam circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.

Sit factum, & sit ea recta F I, & iungatur F C, sitque datarum F I, E C, E H prima B, secunda D, tertia G, & quæratur E F, ea estò A. Quoniam igitur similia sunt triangula E F C, E H I, angulus enim E F C, cum sit in semicirculo rectus est, & ideo æqualis recto E H I, & angulus E communis est vtrique, erit vt E F ad E C, ita E H ad E I, hoc est in figura resolutionis, proportionales erunt




D

A D G A ✣ B

Et quod fit sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs nempe

A Q ✣ B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. ( B Q $\frac{1}{4}$ ✣ D in G ) -- B $\frac{1}{4}$ æquabitur A.

Po-

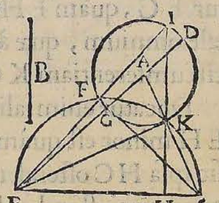
Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ F I, & rectangulo H E C, contracta eadem dimidia F I æqualis est rectæ E F.

Datur ergo E F quæsita.

Compositio quinti Casus.

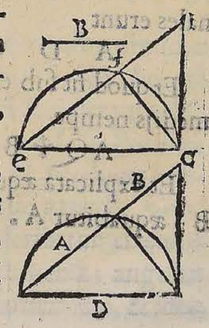
SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod propositum est. Ducantur ad punctum k, in quo perpendicularis I H secat circumferentiam E F C rectæ E K, C K, ipsaque C K, producatur in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A, ab eaque abscindatur A G æqualis A k, & in semicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, & producatur vsq, ad perpendicularem H I. Factum est igitur quemadmodum Porisma docet: à recta enim A E, cuius quadratum æquale est quadratis A K, K E, hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C, ablata est A G æqualis dimidiæ B, & residuæ E G aptata est in semicirculo æqualis E F. Rectam autem F I æqualem esse datæ B, ita fit manifestum.




Iungatur enim F C & centro A interuallo A E, vel A G describatur circulus secans E A productam in D, is circulus tangit rectam E K in K, rectus est enim angulus A K E, cum sit rectus & angulus EkC in semicirculo, & propterea rectangulum G E D æquale erit quadrato E k, hoc est rectangulo H E C, quare vt G E seu E F ad E C, ita erit E H ad E D, sed vt E F ad E C, ita est quoque E H ad E I ob similitudinem triangulorum E F C, E H I, quorum anguli E F C, E H I sunt recti, & ideo æquales, & angulus I E H communis est. vtrique ergo E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc est datæ B æqualis erit: quod erat ostendendum. quare factum est quod oportebat.

Resolutio Sexti Casus.

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basis extremitatem cadat perpendicularis I C; data autem recta linea B, & oporteat, inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.




Sit factum & sit ea recta F I, & connectatur F C. sitque datarum F I, E C, prima B, secunda D, & quæratur E F ea esto A. Quoniam igitur angulus E F C in semicirculo rectus est, erit E C* media proportionalis inter E F, E I ideest in resolutionis figura proportionales eruut.

Corol. 8 sexti

A D



A A D A ✣ B

Et quod fit sub extremis æquabitur quadrato mediæ hoc est

A Q ✣ B in A æquabitur D Q.

Et explicata æquatione L. V. ( B Q ÷ ✣ D Q ) -- B ÷ æquabitur A

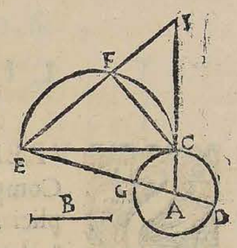
Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadratis E C, & dimidiæ F I, contracta eadem dimidia F I, æqualis est rectæ E F.

Datur ergo E F quæsita.

B Compositio Sexti Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt dictum est, & oporteat iussum facere. Producatur I C in A, vt sit C A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A. eius quadratū æquale erit quadratis E C, & C A, hoc est, & dimidiæ B, à recta igitur E A auferatur A G æqualis dimidiæ B, & reliquæ E G accommodetur in semicirculo æqualis E F, eaque producta secet perpendicularem C I in I, hæc constructio habetur ex Porismate. Rectam autem F I æqualem esse datæ B, ita ostendetur. Iungatur enim F C, &




C describatur ex centro A ad interuallum A C, vel A G circulus secans E A continuatam in D is circulus tanget rectam E C, in C, cum sit rectus angulus E C A, & ideo rectangulum G E D* æquale erit quadrato E C, vnde recta E C erit media proportionalis inter E G, E D; sed eadem E C est quoque* media proportionalis inter E F, E I, cum sit rectus angulus E F C in semicirculo, atque est E F æqualis E G, ex constructione, ergo & E I æqualis erit F D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc est datæ B, æqualis erit quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportuit.

* 36 tertij

Corol. 8 sexti

Finis Libri Tertij.

MA-

# MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

## LIBER QVARTVS.

SVPERIORI libro exposui exempla ad Resolutionem, & A
Compositionem pertinentia, vbi quadrata in æquationibus simplici affectione implicantur, ideſt simplici plano sub latere, & data coefficiente lõgitudine, & ideo absque difficultate Æquationes ipsæ explicantur, ac deinde Compositiones, quæ inde deducuntur, facili opera perficiuntur. Nunc venio ad Resolutionem, & Compositionem difficiliorum Problematum, vbi quadrata implexis affectionibus obuoluuntur, ideſt vel pluribus planis, partim affirmatis, partim negatis, vel etiam planis sub latere, & aliqua longitudine, non quidem ex se data, sed ad datam ex se, datam habente rationem, quo fit vt æquationes difficilius explicentur, atque adeo Compositiones, quæ ab ipsis proficiscuntur fiant difficiliores. B

### Theorema I.

Si quatuor magnitudinum proportionalium vna extremarum, aut mediarum fuerit maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, sitque A ad B, vt C ad D, & sit vna extremarum vtpote A omnium maxima. Dico alteram extremam D minimam esse. Quoniam enim maxima ponitur A prima, ea maior est quàm C tertia, ergo & secunda B maior est, quàm D quarta. & cum sit, vt A ad B, ita C ad D, A autem maior quàm B, erit & C maior quàm D. itaque ipsa D omnium est minima.




Sed



A SEd sit maxima vna mediarum vtpote B. Dico alteram mediam C minimam esse, Quoniam enim vt A ad B minor nempè ad maiorem, ita est C ad D, erit & C minor quam D, & cum sit, vt A ad B, ita C ad D erit conuertendo vt B ad A, ita D ad C, est autem B maior quam D, cum sit omnium maxima, ergo & A, quàm E C maior erit. Minima est igitur omnium C. quare constat propositum.




### Theorema II.

Si composita ex extremis quatuor magnitudinum proportionaliu m fuerit maior, quam composita ex medijs, vel differentia extremarum maior, quam
B differentia mediarum, altera extremarum maxima erit, altera minima, sin minor altera mediarum maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, sitque composita ex extremis A D maior, quã composita ex medijs B C. Dico alterã extremarum A D maximam esse, alteram minimam. Si enim fieri potest neutra ipsarum A D sit maxima, ergo maxima erit vna ex medijs B C & * consequenter altera minima, quare composita ex maxima & minima, hoc est ex B C, * maior erit quam composita ex reliquis, quod est absurdum; ponitur enim composita ex A D maior,
C quam composita ex B C: Cùm igitur neutra mediarum sit maxima, erit maxima vna extremarum, & per consequens * altera minima. Eadem ratione ostendemus si composita ex extremis fuerit minor, quam composita ex medijs, alteram mediarum, maxima esse alteram minimam.

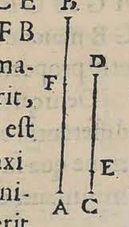



ex antec.

ex quinti

ex antec.

Rursus sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F differentia extremarum A B, B F maior quam C E differentia mediarum C D, D E. Dico A B maximam esse, F B minimam. Si enim fieri potest non sit maxima A B, ergo C D maxima erit, & consequenter * D E minima: itaque D E minor erit, quàm B F; quare reliqua E C maior, quàm reliqua F A. quod est absurdum; ponitur enim A F maior quàm C E. Non igitur maxima est C D, quare A B maxima erit, & * consequenter B F minima. Eadem ratione ostendemus si differentia extremarnm fuerit minor, quàm differentia mediarum, alteram mediarum maximam esse, alteram minimam. Quare constat propositum.

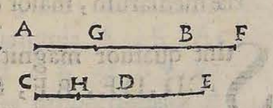



ex antec.

ex antec.

Hoc Theorema demonstrauimus ratione ducente ad impossibile, sed tamen possumus etiam recta demonstratione vti hoc modo.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F composita ex extremis maior quàm C E composita ex medijs. Dico alteram extremarum A B, B F maximam esse, alteram minimam



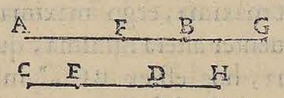
mam. Sit enim A B maior, quam B F, & C D non minor, quam D E; A
possunt enim C D, D E esse quoque æquales. Quoniam igitur A B ponitur maior, quàm B F, & C D non minor quam D E, erit B F minor, quàm C D: alioquin rectangulum A B F sub extremis maius esset rectangulo C D E sub medijs; quod esset absurdum. Sumatur ergo D H æqualis F B, & B G æqualis E D: erit G F æqualis H E, vnde reliqua A G maior erit, quàm reliqua C H, ponitur enim tota A F maior, quàm tota C E.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita D E ad B F; erit permutando vt A B ad D E, hoc est ab B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, sed A G ostensa est maior, quam C H, ergo & G B maior erit quam H D; atque adeo tota A B maior, quàm tota C D, & consequenter maior etiam, quàm D E, ponitur B
enim C D non minor, quàm D E, itaque A B maxima erit proportionalium, & per * consequens B F minima.

ex antec.

Rursus sint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E, sed C E composita ex extremis sit minor quàm A F composita ex medijs. eadem ratione, qua supra ostendemus alteram mediarum A B, B F, maximam esse, alteram minimam.

Item sint quatuor proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F differentia extremarum maior, quàm C E differentia mediarum. Dico alteram, extremarum A B, B F maximam esse, alteram minimam. Producatur enim A B in G, vt sit B G æqualis E D. similiter producatur C D in H, vt sit D H æqualis F B, erunt igitur æquales F G, E H, sed A F ponitur maior, quàm C E, ergo tota A G maior erit, quàm tota C H.




C

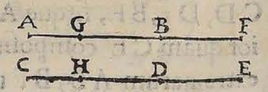
Et quoniam est vt A B ad C D, ita D E ad B F, erit permutando, vt A B ad E D, hoc est ad B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & componendo, vt A G ad G B, ita C H ad H D, sed A G ostensa est maior, quàm C H, ergo & G B maior erit, quàm H D, hoc est E D maior, quàm F B, itaque F B minima
ex antec. erit proportionalium A B, C D, D E, B F, & * consequenter A B maxima.

Denique sint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E: sit autem C E differentia extremarum minor, quàm A F differentia mediarum. eadem ratione qua supra ostendemus alteram mediarum A B, B F maximam, alteram minimam esse. quare constat propositum. D

## Theorema III.

Si composita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis compositæ ex medijs, vel differentia extremarum æqualis differentiæ mediarum, maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F composita ex extremis æqualis C E compositæ ex medijs, & sit




A B



A B maior extrema, C D maior media. Dico A B, C D æquales esse, itemque æquales D E, B F; sumatur enim B G æqualis E D, & D H æqualis F B, ergo tota F G æqualis erit toti E H, sed & A F ponitur æqualis C E, ergo & reliqua A G æqualis erit reliquæ C H.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita B E ad B F; erit permutando, vt A B ad E D, hoc est ad B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, sed A G ostensa est; æqualis C H, ergo & G B æqualis erit H D, hoc est E D æqualis F B, minor videlicet mediarum, minori extremarum. & si ab æqualibus A F, C E auferantur æquales F B, D E, reliqua B A reliquæ D C æqualis erit, hoc est maior extrema maiori mediæ.

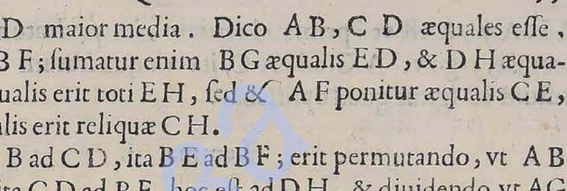
Rursus sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D H, B G, B sitque A G differentia extremarum æqualis C H differentiæ mediarum. Dico A B, C D æquales esse, & æquales D H, B G, producatur enim A B, C D, vt sit B F æqualis D H, & D E æqualis B G. Quoniam igitur B F æqualis est D H, & B G æqualis D E; erit tota F G æqualis toti E H, sed & A G ponitur æqualis C H, ergo tota A F toti C E æqualis erit.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita D H ad B G, erit permutando, vt A B ad D H, hoc est ad B F, ita C D ad B G, hoc est ad D E, & componendo, vt A F ad F B, ita C E ad E D sed A F ostensa est æqualis C E, ergo & F B æqualis erit E D, hoc est D H æqualis B G minor videlicet mediarum minori extremarum, sed ponuntur æquales & A G, C H, ergo tota A B toti C D æqualis erit; hoc est maior extrema maiori mediæ. Maior igitur extremarum maiori me-
C diarum minor minori æqualis est, quod erat ostendendum.

## Problema I.

Dato quadrato aliud quadratum in data ratione inuenire.

SIt datum quadratum, cuius latus A k, & data ratio A G ad A C. Oportet inuenire aliud quadratum, vt quadratũ A K ad quadratũ inuentũ habeat rationẽ, vt A G ad A C. Ponatur in directum
D A G, A C, & ex pũcto A ducatur A k, ita vt cũ A C constituat angulum quẽcunq, & iungatur G k, eiq. parallela ducatur c y occurrens K A productæ in y: in rectũ autem k y describatur semicirculus y I K, & ex A ipsi k y ducatur perpendicularis A I, vsque ad circumferentiam: si quidem punctum A sit in diametro K y; si vero sit extra diametrum, ducatur A I contingens semicirculum in I. Quoniam igitur parallelæ sunt G k, c y, erunt anguli A G K, A c y æquales, & æquales quoque anguli A k G, A y c; vnde similia triangula A G K, A c y: vt igitur A G ad A C, ita erit A k ad A y, sed vt A K ad A y, ita est quadratum A k ad quadratum A I, sunt enim tres proportionales A K,




M A I

Corol. 2. propos. 22 sexti

AI, Ay, & est vt * prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, ergo vt AG ad AC, ita erit quadratum Ak ad quadratum AI. Factum est igitur quod oportebat.

## Lemma I.

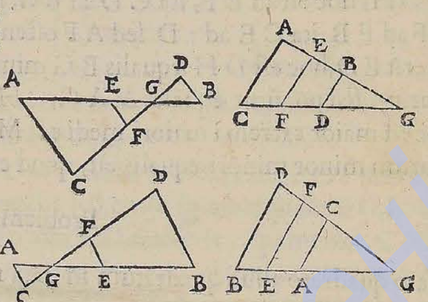
Si à medio & extremitatibus vnius rectæ lineæ ducantur tres rectæ parallelæ, alteram rectam lineam secantes. Segmenta sectæ inter parallelas interiecta æqualia erunt.




B

SInt duæ rectæ lineæ AB, CD, quarum AB secetur bifariam in E, & à punctis AEB. ducantur tres parallelæ AC, EF, BD secantes rectam CD in punctis, CFD. Dico æquales esse CF, FD. Si enim AB, CD sunt parallelæ. parallelogramma sunt AF, FB, ac proinde latera AE, CF ex aduerso æqualia, atque æqualia latera EB, FD, sed ponuntur æquales AE, EB, ergo & CF, FD sunt quoque æquales.

Si vero AB, CD non sunt parallelæ conuenient inter se, conueniant in G, ergo similia erunt triangula GAC, GEF, ob parallelas enim EF, AC angulus GAC æqualis est angulo GEF, & angulus GCA angulo GFE, quare vt AG ad GE, ita erit CG ad GF, & existente quidem puncto E inter puncta AG, erit diuidendo, & conuertendo, existēte vero G inter AE erit componendo, & conuertendo, existēte autem A inter EG erit conuertēdo, & per conuersionem rationis, vt GE ad EA, ita GF ad FC.




C

Et quoniam propter parallelas BB, EF angulus GDB, æqualis est angulo GFE, & angulus GBD angulo GEF, similia erunt triangula GDB, GFE, vt igitur BG ad GE, ita erit DG ad GF, & existente G inter EB, erit componendo, existente vero E inter GB, erit diuidendo, at existente B inter EG, erit conuertendo, & per conuersionem rationis, & rursus conuertendo, vt BE ad GE, ita DF ad GF; sed vt GE ad EA, ita est GF ad FC, vt demonstrauimus, ergo ex * æquali, erit vt BE ad EA, ita DF ad FC; sed BE æqualis est EA, ergo & DF æqualis erit FC.

D

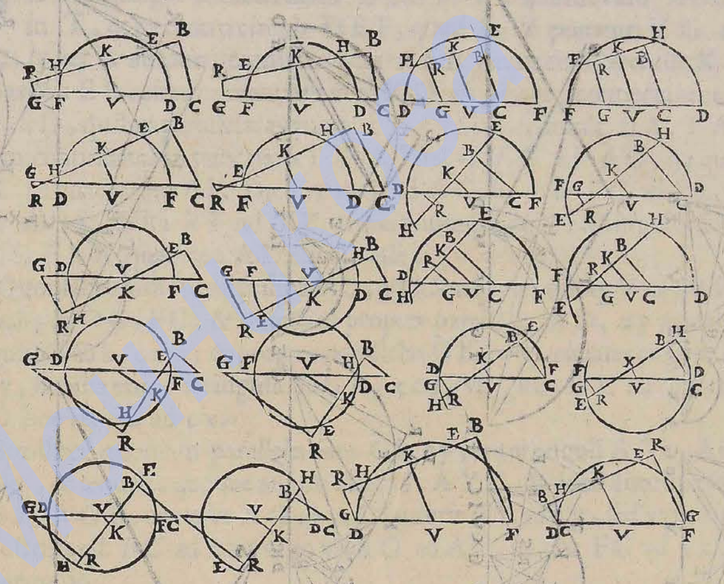
## Lemma II.

Si in diametro circuli, etiam producta, sumantur duo puncta à centro æquè distantia, & ab ijs ducantur ad rectam lineam cadentem in circulum duæ rectæ perpendiculares; Segmenta cadentis inter circumferentiam, & perpendiculares interiecta, æqualia erunt.

Suman-



A Sumantur in diametro circuli DF. duo puncta CG à centro quod sit V,

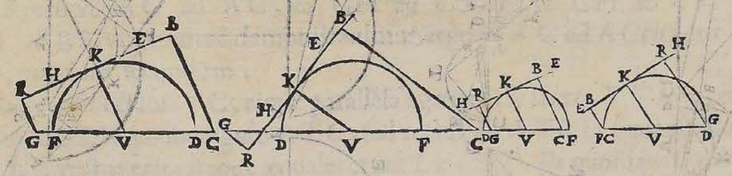


B

æque distantia, & ab alijs ad rectam EH cadentem in circulum ducantur duæ perpendiculares CB, GR, ipsa autem EH secet circulum in punctis EH. Dico EB, HR æquales esse. Ducatur enim VK perpendicularis ad EH, erunt igitur tres parallelæ BC, kV, GR atque sunt æquales GV, VC, ergo ex antecedente Lemmate æquales erunt, & KR, KB, sed æquales quoque sunt KH, KE, ergo per æqualium æqualibus ablationem, vel additionem, erunt æquales & EB, HR.

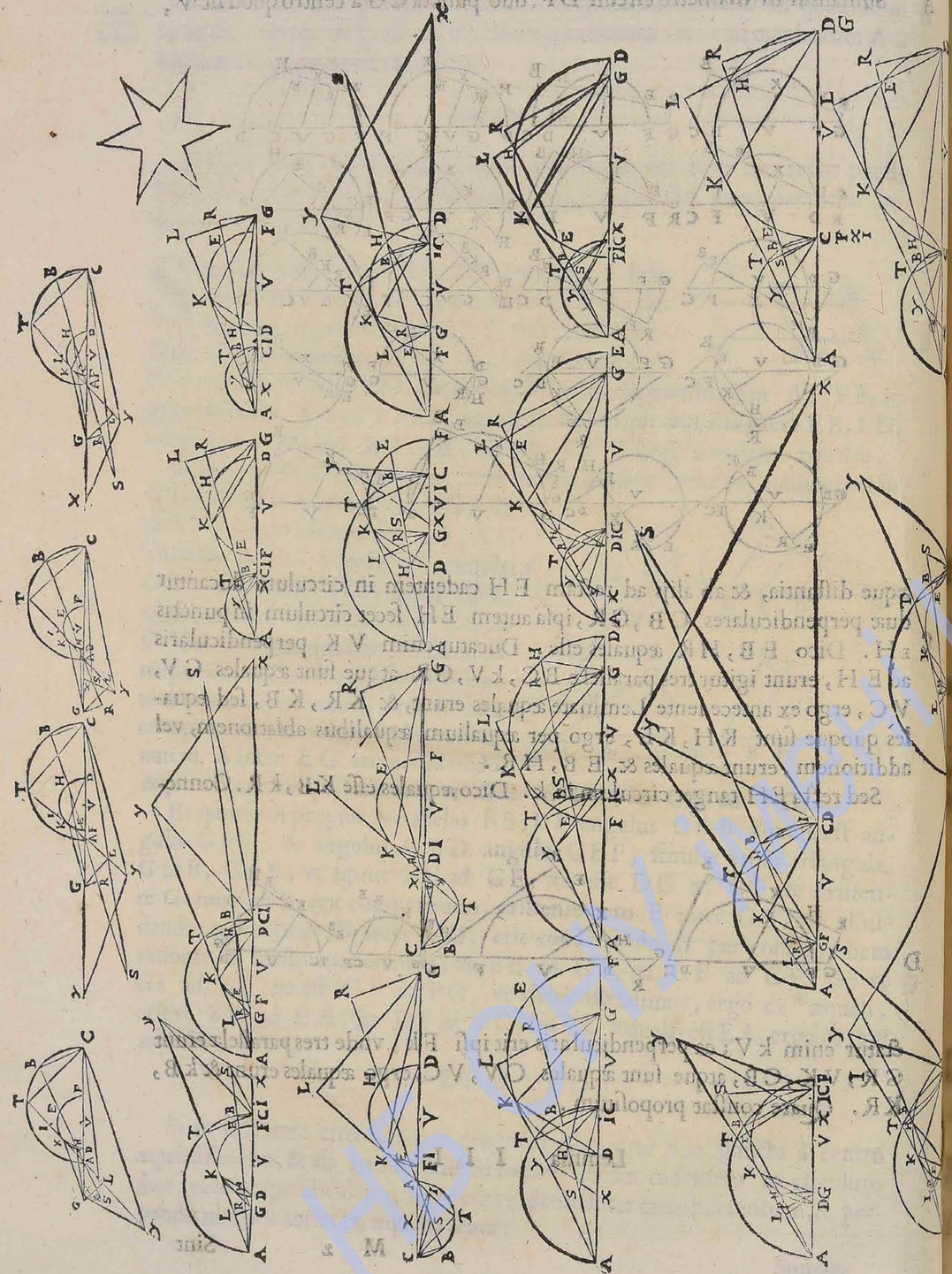
C

Sed recta EH tanget circulum in k. Dico æquales esse KB, kR. Connectatur enim kV; ea perpendicularis erit ipsi Fk, vnde tres parallelæ erunt GR, VK, CB, atque sunt æquales GV, VC, ergo æquales erunt & kB, KR. Quare constat propositum.



D

## Lemma III.





A SInt duo ſemicirculi A B C, D E F in directum baſes habentes, & recta A k contingat ſemicirculum D E F in K, ipſum vero A B C ſecet in T, & ex centro circuli D E F, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & per A ducatur vtcumque recta A E B ſecans circũferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam verò K D in H, & connectantur G H, G k, k D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x ſecantes B A, T A, F A etiam continuatas in punctis S Y X, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratũ A K ad quadratum A I. Dico vt A G ad A C, ita eſſe F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita k T ad T Y, atque vnumquodque rectangulorũ Y A k, E A S, F A X quadrato A I æquale eſſe. Probl. 1 huius

Quoniam enim æquales ſunt V G, V C, & æquales quoq; V D, V F, erũt
B æquales & D G, F C, & quoniam propter parallelas K D, x y æquales ſunt anguli G D k, c x y, & propter parallelas G K, c y æquales anguli D G k; x c y, ſimilia erunt triangula D G K, x c y; vt igitur G k ad c y, ita erit G D hoc eſt F C ad c x.

Similiter quoniam parallelæ ſunt G k, c y, erunt anguli A G k, A C Y æquales, & æquales quoque anguli A K G, A Y C, & ideo ſimilia triangula A G k, A C Y, quare vt A G ad A C, ita erit G K ad c y, ſed vt G k ad c y, ita oſtenſa eſt F C ad c x; ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad c x. quod eſt primum.

Deinde iungatur B C, eique parallela agatur G R ſecans B S in R. angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, quia & ipſe
C A B C in ſemicirculo rectus eſt, vnde H R, * E B æquales erunt. Lem. 2.

Et quoniam parallelæ ſunt G H, c s, erit angulus G H R æqualis angulo c S B, eſt autem & angulus H R G æqualis angulo S B C, rectus nempe recto, ergo ſimilia erunt triangula H R G, S B C; quare vt G H ad C S, ita erit H R, hoc eſt E B ad B S.

Æquè quoniam ob parallelas G H, c s æquales ſunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, & ideo ſimilia triangula A G H, A c S; erit vt A G ad A C, ita G H ad C S, ſed vt G H ad C S, ita eſt E B ad B S, vt proximè demonſtrauimus, ergo vt A C ad A C, ita erit E B ad B S, quod eſt ſecundum.

Iam connectatur T C, eique parallela agatur G L ſecans Y T in L, erit an-
D gulus K G L æqualis angulo A T C, ſed rectus eſt A T C in ſemicirculo, ergo & k L G rectus erit: itaque æquales erunt L k, K T. Et quoniam ſimilia ſunt triangula k L G, Y T C, ſunt enim æquales anguli G K L, C Y T ob parallelas G k, c y, & æquales anguli k L G, Y T C, quia recti, erit vt G K ad c y, ita k L, hoc eſt k T, ad T y, ſed & A G ad A C eſt, vt G k ad c y, ob ſimilitudinem triangulorum A G k, A C Y, ergo vt A G ad A C, ita erit k T ad T y, quod eſt tertium.

Et quoniam propter eandem triangulorum A G K, A c y ſimilitudinem, eſt vt A G ad A C, ita A k ad A y, vt autem A K ad A y ita * eſt quadratum A k ad rectangulum y A k, cum ſint eiuſdem altitudinis A k, ergo vt * 1 ſexti

AG ad AC, ita erit quadratum Ak ad rectangulum YAk, sed vt AG ad A
AC, ita ponitur quadratum Ak ad quadratum AI ergo rectangulum YAK
quadrato AI æquale erit. quod est quartum.

Similiter quoniam supra ostensa sunt similia triangula AGH, ACS, erit
1 sexti vt AG ad AC, ita AH ad AS, sed vt AH, ad AS, * ita est rectangulum
EAH ad rectangulum EAS, eandem enim habent altitudinem EA, ergo
36 tertij vt AG ad AC, ita erit rectangulum EAH, hoc est * quadratum AK, ad rectangulum EAS, sed vt AG ad AC, ita ponitur quadratum Ak ad quadratum AI, ergo rectangulū EAS æquale erit quadrato AI quod est quintum.

Postremo quoniam parallelæ sunt kD, xy, erunt anguli ADK, AXY
æquales, & æquales anguli AKD, AYk, & ideo similia triangula ADK,
17 sexti AXY; vt igitur AD ad Ak, ita erit AX ad AY; sed vt AD ad AK * ita est B
4 6 tertij AK ad AF; rectangulum enim FAD * æquatur quadrato Ak, ergo vt AX ad AY, ita erit AK ad AF; vnde rectangulum FAX sub extremis, æquale erit rectangulo YAk sub medijs, sed rectangulum YAK æquale est quadrato AI, quarto loco demonstrauimus, ergo & rectangulum FAX eidem quadrato AI æquale erit, quod postremo loco erat ostendendum.

### Corollarium.

EX demonstratis patet rectangula YAk, EAS, FAX æqualia esse, ostensum est enim vnumquodque eorum æquari quadrato AI. C

### Problema II.

Datis duobus semicirculis in directum bases habentibus, inter eorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad vnius semicirculorum angulum pertingat.

HOc Problema multos Casus habet, eosque omnes in secundo libro mei Apollonij Rediuiui in tria capita congestos absolui, nunc octo ex principalibus in exemplum Resolutionis & Compositionis explicabo, omissis ijs in quibus dati duo semicirculi se inuicem secant aut tangunt, ij enim Casus ad illorum similitudinem, & resoluentur & componentur.

### Casus primus. D

Primum vergant dati duo semicirculi ad eandem partem, neutro reliquum includente.

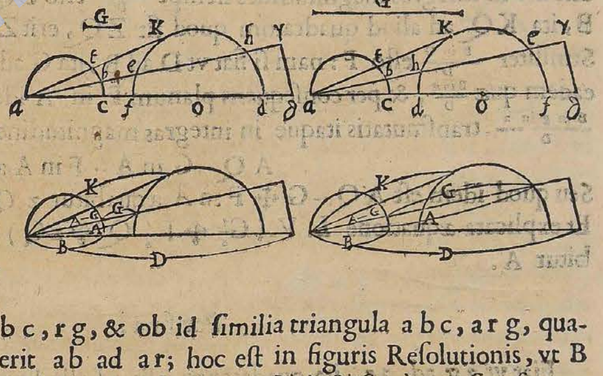
SInt itaque dati duo semicirculi abc, def, vt dictum est. data autem recta linea G. & ducatur ak contingens semicirculum def in k: ipsum vero ABC secans in t. Oportet inter circumferentias tc, kf ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat. Quamuis autem ex hac semicirculorum positione duo Casus oriantur, aut enim po-



A ponenda est illa magnitudine data inter conuexam vtriusque semicirculi circumferentiam, aut inter conuexam vnius, & cauam alterius, tamen vna, eademque resolutione vtrique satisfit.

### Resolutio.

FActum iam sit ducta nimirum recta abe habens segmentum be æquale datæ G, & producatur ad in g, vt og recta ex centro circuli def, quod sit o sit æqualis oc, & in ae productam sectamque à circumferentia kd in h ducatur perpendicularis gr, & connectatur cb, eaque eidem ae perpendicularis erit, quoniam angulus abc in semicirculo rectus
B est, quare * æquales erunt hr, eb. Lem 2.




Quoniã igitur datæ sunt ac, ag, be, ak prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinẽtibus designatũ est, & quæratur ae, ea esto A: ergo ab erit A -- G, & cum sint anguli abc, C
arg recti, & ideo æquales parallelæ erunt bc, rg, & ob id similia triangula abc, arg, quare vt ac, ad ag, ita erit ab ad ar; hoc est in figuris Resolutionis, vt B ad D ita A -- G ad $\frac{D\text{ in }A - D\text{ in }G}{B}$ atque adeo ar erit $\frac{D\text{ in }A - D\text{ in }G}{B}$, à qua si auferatur recta hr, cui æqualis est eb, reliqua ah erit $\frac{D\text{ in }A - D\text{ in }G}{B}$ -- G; sed rectangulum eah æquale est quadrato aK, ergo

$\frac{D\text{ in }AQ -- D\text{ in }G\text{ in }A}{B}$ -- G in A æquabitur KQ

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

D in AQ -- D in G in A -- B in G in A æquabitur KQ in B.

Applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis nempe AQ ex se subsi-
D stat, ergo

AQ -- G in A -- $\frac{B\text{ in }G\text{ in }A}{D}$ æquabitur $\frac{K\,Q\text{ in }B}{D}$

Præcipere autem vt omnia ducantur in B, ac deinde producta applicentur ad D, perinde est ac si dicatur fiat vt D ad B, ita vtraque æqualitatis pars seperatim ad alias partes, harum namque partium altera quidem esset AQ -- G in A -- $\frac{B\text{ in }G\text{ in }A}{D}$, altera vero $\frac{KQ\text{ in }B}{D}$ eadem nempe partes, quæ ex illa ductione, & applicatione procreantur, nam vtrobique eadem est operatio exemplores fiet illustrior.

$\frac{D\text{ in }AQ -- D\text{ in }G\text{ in }A}{E}$ -- G in A æquetur KQ

& fiat vt D ad B ita $\frac{D\text{ in }AQ -- D\text{ in }G\text{ in }A}{B}$ -- G in A ad alia plana, ea erunt AQ -- G

in

in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ nam

A $\frac{D \text{ in } A\,Q \,-\, D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ducitur in B, & productum quod est D in A Q -- D in G in A -- B in G in A applicatur ad D, ex eaque applicatione oritur A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$.

Similiter fiat, vt D ad B, ita K Q ad aliud planum id erit $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$ tota igitur hæc progressio fit per plana non autem per solida, & in eandem incidit æquationem. Hoc monuimus quoniam in demonstratione, quæ ordinanda est per regressum Resolutionis procedetur per proportionem planorum, non autem per æqualitatem solidorum; neque enim opus erit plana in longitudines ducere, solidaque ex huiusmodi ductu facta, ad alias longitudines applicare, vt rursus ad plana deueniant, cum in æqualitatem eorundem planorum incidatur per proportionem planorum progrediendo.

B Vt autem clarior existat æquatio, faciliusque explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines nempe $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$ esto Z Q, si enim fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ esto F: nam si fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } g}{D}$, & per consequens planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } g \text{ in } a}{D}$. transmutatis itaque in integras magnitudines fractionibus.

A Q -- G in A -- F in A æquabitur Z Q

Seu quod idem est A Q -- G ✣ F in A æquabitur z Q,

Et explicata æquatione L. V. ( $G\frac{1}{2}$ ✣ $F\frac{1}{2}$ Q ✣ z Q ) ✳ $G\frac{1}{2}$ ✣ $F\frac{1}{2}$ æquabitur A.

C

## Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F; deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ compositæ ex G, & F; addita eadem dimidia composita, fiet recta æqualis quæsitæ a e.

Datur igitur a e quæsita.

## Compositio.

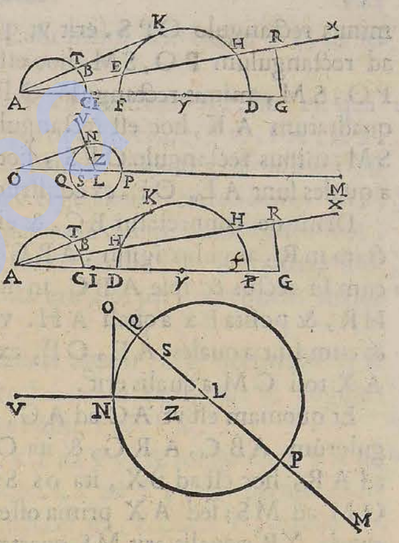
D SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V z, & contingat A K semicirculum D E F in K secet vero ipsum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertingat. Duo sunt Casus vt in Resolutione dictum est. in primo oportebit datam V z non esse maiorem, quàm K T, nec minorem quam F C. in secundo oportebit non esse maiorem, quam F C, nec minorem quàm K T. Si quidem data V z sit æqualis alteri ipsarum k T, F c: factum iam erit quod proponitur, si vero maior sit minore, minor autem maiore producatur A D in G, vt y G recta ex centro circuli D E F, quod sit y, æqualis sit y c, & fiat

Probl. 1 huius

vt



A vt A G ad A C, ita quadratũ A K ad aliud quadratũ quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L cõposita ex V Z, Z L secetur bifariã in N, eiq. ducatur ad rectos angulos N O æqualis ipsi A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L, itaq; rectæ O L addenda est recta æqualis ipsi L N. sic Porisma fieri iubet.




Producatur ergo O L in P, vt sit L P æqualis L N, & à puncto A ad circumferẽ-

B tiam k F ducatur A E æqualis O P secans circumferentiã T C in B, ipsam autẽ O P, in primo quidem casu, maioré esse quàm A F, minorẽ quàm A K, in secundo vero, minorẽ quàm A F, maiorẽ quã A K infra demonstrabitur. Iam facta est constructio Problematis, prout Porisma docet. Nunc ostendendũ est B E æqualem esse V Z datæ. Producatur A E, vbi opus exigit donec secet circumferentiã k D in H, & centro L interuallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O P in Q, & sumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum sit rectus angulus

C O N L ex constructione; quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, 36 tertij hoc est quadrato O P, minus rectangulo O P Q, seu minus rectangulis O P S O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraq; æqualitatis pars seperatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas in Resolutione conuerso modo factum est nempe, vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars seperatim ad alia plana. At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I ex constructione, hoc est ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis, alterum vero sic explorabimus.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M, ea maior erit, quàm S P, quoniam

D & O S maior est, quàm Q S, sed vt O S ad S M ita * est rectangulum P O S 1 sexti ad rectangulum P O, S M, eandem enim habent altitudiuem P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc est quadratum O P, minus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M; sed vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita * est quoque rectangulum O P, S Q ad rectangulum 1 sexti O P S: sunt enim eiusdem altitudinis O P. ergo vt quadratum O P, minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt totum ad totum ita ablatum ad ablatum, quare & * reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum ideſt & quadra- 19 quinti tum O P minus rectangulo O P S, ac etiam minus rectangulo O P, S Q

minus

minus rectangulo O P S, erit vt quadratum O P minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, hoc est vt A C ad A G. Rectangulum igitur P O, S M, minus rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A K, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulo P O, S M, minus rectangulo O P S, hoc est æquale erit rectangulo O P M; sed æquales sunt A E, O P, ex constructione ergo & A H, P M æquales erunt. A

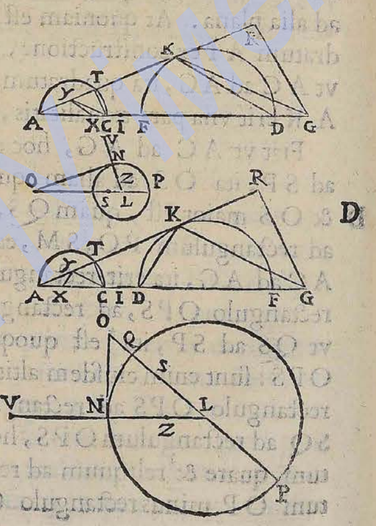
Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A E productam in R, angulus igitur, A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus
Lem. 2 cum sit rectus & ipse A B C in semicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, & posita E x æquali A H. vel P M tota B X æqualis erit toti A R, & cum sint æquales A E, O P, ex constructione, & æquales e x P M, tota A X toti C M æqualis erit. B

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R ob similitudinem triãgulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B X, ita o s S M, & componendo vt A X ad X B, ita O M ad M S; sed A X prima ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda X B æqualis erit M S quartæ, vnde ablatis æqualibus E x, e x P M reliqua E B æqualis erit reliquæ P S, hoc est V Z datæ, quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportebat:

Rudis est quidem hæc demonstratio, sed talem Resolutio genuit, & nos nostrum institutum secuti, quod est à vestigijs Resolutionis in Demonstratione non recedere, ipsam demonstrationem per orsum resolutionis texuimus. sic etiam sequentium Casuum demonstrationes texentur. facile autem eas expoliet, qui non ea se lege adstrinxerit, vt per vestigia Resolutionis omnino regrediatur. quemadmodum neglectis ex parte resolutionem vestigijs, demonstrationes omnium Casuum huius Problematis in secundo libro nostri Apollonij Rediuiui explicauimus. C

At vero rectam O P in primo quidem Casu maiorem esse quam A F, minorem quam A k, in secundo vero minorem quam A F, maiorem quam A k sic demonstrabimus.

Connectantur G K, K D, eisque parallelæ agantur C y, y x secantes A T, A C in punLem. 3 ctis y x, erit * igitur vt A G ad A C, ita F C ad C X, sed vt A G ad A C, ita est quoque V Z ad Z L ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad c x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare vt V Z ad F C, ita erit quoque V L hoc est P Q ad F x, hoc est vt vna antecedentium ad vnam consequentium; ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z in primo quidem Casu ponitur maior, quam F c, in secun-




D

do



A do vero minor, ergo & p Q in primo Casu maior erit quam F x, in secundo minor.

Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, hoc est quaLem. 3 drato O N, seu rectangulo P O Q, proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, sed P Q differentia extremarum in primo quidem Casu ostensa est maior, quam F x, differentia mediarum, ergo altera * extremarum p O, Theor. 2 huius O Q, nempe ipsa p O maxima erit, & per consequens maior quam F A. in secundo vero Casu ipsa P Q ostensa est minor quam F x, ergo altera * me- Theor. 2 huius diarum F A, A x, hoc est ipsa A F maxima erit, & per consequens maior quam O P.

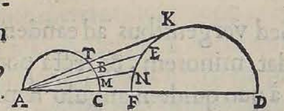
Deinde connectatur C T, eique parallela agatur G R occurrens A K
B continuatæ in R, erit angulus A R G rectus, cum sit rectus & angulus A T C in semicirculo, ac proinde * æquales erunt T K, k R. Lem. 2

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Lem. 3 Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita Z L ad T y, & consequenter ita V L ad k Y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z, in primo quidem Casu ponitur minor, quàm K T, in secundo vero maior, ergo & V L hoc est P Q in primo Casu minor erit, quam K Y in secundo maior.

Et quoniam rectangulum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est qua- Lem. 3 drato O N, seu rectangulo P O Q, proportionales erunt y A, Q o, o P, A k, sed y k differentia extremarum, in primo quidem Casu ostensa est ma- Theor. 2 huius
C ior, quam p Q differentia mediarum, ergo altera * extremarum y A, A k, nempe ipsa A k maxima erit, & consequenter maior quàm O P: In se- Theor. 2 huius cundo vero Casu y k ostensa est minor, quàm P Q ergo altera * mediarum Theor. 2 huius Q O, O p, nempè ipsa p O erit maxima, & per consequens maior quam A k. Recta igitur O p. in primo quidem Casu maior est quàm A F, minor quàm A K, in secundo vero minor, quàm A F, maior quàm A K. quod erat ostendendum.

Diximus oportere in primo quidem Casu datam V Z non esse maiorem, quam K T, nec minorem quam F C: in secundo vero non esse maiorem, quàm F C, nec minorem, quàm K T. Quoniam in primo Casu k T maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias
D T C, k F interijciuntur: F C minima: In secundo vero maxima est F C, minima K T, aliarum autem in vtroque Casu propinquior minimæ remotiore minor est, idque sic demonstrabitur.

Ducatur vtrumque recta A B E secans circumferentias T C, K F in punctis B E. Quoniam igitur in primo Casu A K maior est, quàm A E, A T autem minor, quàm A B, reliqua T K maior erit, quàm reliqua B E, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T.

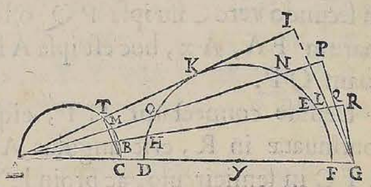



Similiter quoniam A F minor est, quàm A E, A C autem maior quàm A B,

AB, reliqua CF minor erit, quàm reliqua BE: Eademque ratione demonstrabitur omnibus alijs minor. minima est igitur omnium FC. A

Rursus ducatur alia recta AMN secans circumferentias TC, KF in punctis MN, sitque recta MN minimæ CF propinquior, quàm BE. Quoniam igitur AN minor, est quàm AE, AM autem maior quam AB reliqua MN, minor erit quàm reliqua BE. Propinquior igitur minimæ, minor est remotiore.

In secundo autem Casu sumatur ex centro circuli DEF, quod sit y recta yG æqualis yc, & connectatur CB eique parallela agatur GR secans AE productam in R, quàm etiam secet circumferentia kD in H. Angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, sed rectus est ABC



B

Lem. 2 in semicirculo ergo & ARG rectus erit, quare* æquales erunt EB, HR, & AG maior erit quam AR, sed AD minor est quam AH, ergo reliqua DG, hoc est FC, maior erit quam reliqua HR. & sic ostendetur ipsa FC maior omnibus alijs. Maxima est igitur FC.

Deinde connectatur CT, & ei parallela agatur GI secans Ak productam in I, ipsam vero AR in L, angulus AIG æqualis erit angulo ATC

Lem. 2 & ideo rectus, cum sit rectus & ipse ATC in semicirculo, quare* æquales TK, KI, & AI minor erit quam AL, & multo minor quam AR, sed AK maior est quàm AH, ergo reliqua KI seu kT minor erit, quàm reliqua HR, hoc est quam EB, & sic ipsa KT ostendetur omnibus alijs minor. Itaque minima est KT. C

Postremo ducatur alia recta AMN secans circumferentias TC, KF in punctis MN, circumferentiam vero kD in O, sitque recta MN minimæ KT propinquior quam EB, & connectatur CM, cui parallela agatur GP secans AN productam in P, ipsam vero AR in Q. angulus igitur APG æqualis erit angulo AMC, & ideo rectus, cum sit rectus & AMC

Lem. 2 in semicirculo, vnde æquales* erunt MN, OP, & AP minor erit quam AQ, & multo minor quam AR, sed AO maior est, quàm AH, ergo reliqua AP seu MN, minor erit, quàm reliqua HR. hoc est quam BE. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Quare manifesta est Determinatio. D

## Casus Secundus.

Sed vergentibus ad eandem partem datis duobus semicirculis, maior includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi maioris, à quo quidem angulo semicirculus minor plus distet, quàm à reliquo.

SInt igitur dati duo semicirculi abc, def, quales ponuntur, data autem recta linea G, & contingat ak semicirculum def in K, ipsum



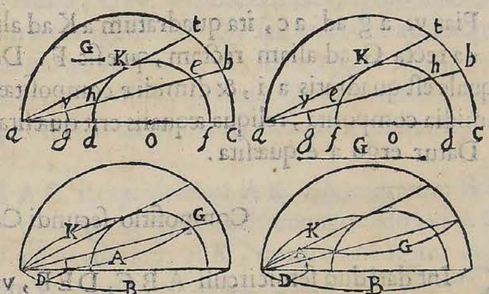
A sum vero abc secet in t. Oportet inter circumferentias tc, kf ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat. Hic quoque duplex oritur Casus, aut enim ponenda est data recta inter cauam vnius & conuexam alterius semicirculi circumferentiam, aut inter cauam vtriusque. vnica tamen Resolutione vtrique casui satisfit.

## Resolutio.

POsita iam sit recta linea eb æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, quemadmodum Problema exigit, & ex centro circuli def, quod sit o ponatur og æqualis oc, & recta aeb secet circumferentiam kd in h, ipsique ab ducatur perpendicularis gr, & iungatur cb;

B ea quoque eidem ab perpendicularis erit, angulus enim abc in semicirculo rectus est vnde* æquales erunt hr, eb. Theor. huius

Quoniam igitur datæ sunt ac, ag, be, aK, prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus designatum est, & quæratur ae, ea esto A, ergo ab erit A ✣ G, & cum sint similia triangula abc, arg, anguli enim abc, arg sunt æquales, quia recti, & angulus a communis vtrique triángulo, erit vt ac ad ag, ita ab ad ar, hoc est in figuris




C resolutionis, vt B ad D, ita A ✣ G ad $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$, atque adeo ar erit $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$, cui addita rh, quæ æqualis est ipsi eb tota ah erit $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$ ✣ G, sed rectangulum eah* æquale est quadrato AK, ergo 16 tertij

$\frac{D \text{ in } AQ \dagger D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ✣ G in A æquabitur kQ.

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat. ergo

D in AQ † D in G in A † B in G in A æquabitur KQ in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis, nempe AQ ex se subsistat. ergo

D AQ ✣ G in A ✣ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{kQ \text{ in } B}{D}$.

Ductio hæc, & applicatio vtramq; æqualitatis partē trāsmutant in alias partes ibidem æquales, resolutionemq. ad æquationem secundū artis præcepta perducunt. idem fieret si operatio per proportionē institueretur, hoc modo. Fiat vt D ad B, ita vtraq; æqualitatis pars separatim ad alias partes, nam & hæ quidē partes æquales erunt eædēq. quæ ex operatione ductionis, & applicationis procreantur. Hoc monuimus quēadmodū in antecedētis casus resolutione factum est, quoniā in demonstratione instituenda, regressus qui fieri debet resolutionis vestigia repetendo, fiet non per æqualitatem solidorum, sed per proportionem

planorum, vt factum est in compositione antecedentis Casus, & ne eadem in omnibus Casibus repetenda sint eadem dicta esse intelligantur in similibus sequentium Casuum locis. A

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutione antecedentis Casus factum est nempe $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ estò ZQ, nam si fiat, vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum quod sit ZQ, erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{E \text{ in } G}{D}$ esto F, nam si fiat, vt D ad B, ita G ad alium quæ sit F, erit F eademque quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & ideo planum F in A idem erit quod planum $\frac{E \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. Facta igitur transmutatione fractionum in integras magnitudines.

AQ ✣ G in A ✣ F in A æquabitur ZQ.

Vel AQ ✣ G ✣ F in A æquabitur ZQ. B

Et explicata æquatione L. V. $(G \frac{1}{2} \text{ ✣ } F \frac{1}{2} Q \text{ ✳ } ZQ) \text{ --- } G \frac{1}{2} \text{ --- } F \frac{1}{2}$ æquabitur A

## Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. Deinde rectæ, cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ compositæ ex G, & F dematur eadem dimidia composita, reliqua æqualis erit quæsitæ, a e.

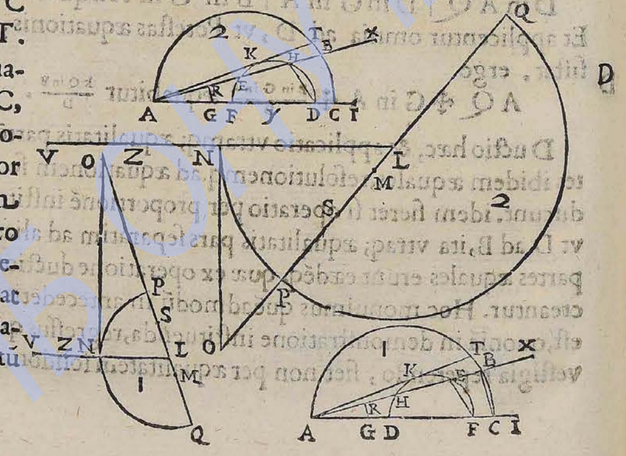
Datur ergo a e quæsita.

C

## Compositio secundi Casus.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V Z, & contingat A K semicirculum D E F in K, secet vero alterum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertingat. Duplex est Casus, vt dictum est in Resolutione. In primo quidem oportebit datam V z non esse maiorem quam K T, nec minorem quam F C, in secundo vero non esse maiorem quã F C nec minorem quam K T.

Siquidem V Z sit æqualis alteri ipsarum k T, F C, factum iam erit, quod Proponebatur, si vero maior sit minore, minor autem maiore, ponatur ex centro circuli D E F quod sit y recta y G æqualis y c, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratũ quod




D



A quod sit A I. similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L composita ex V Z, Z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O, quæ sit æqualis A I, & connectatur O L. Quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L: itaque rectæ O L detrahenda est recta æqualis ipsi L N. sic Porisma fieri iubet. Centro igitur L interuallo L N describatur circulus secans O L in P, ipsamque continuatam in Q. infra demonstrabimus rectam O P, in primo quidem Casu minorem esse, quàm A F, maiorem quam A K: in secundo vero maiorem esse, quam A F; minorem quam A K. Itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, & producatur donec secet circumferentiam T C in B. Facta est igitur constructio quemadmodum Porisma docet. Nunc ostendam E B æqualem esse V Z datæ. Producatur
B A E, vbi res postulat ad circumferentiam K D in H, & sumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L, est enim P Q æqualis V L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum sit rectus angulus O N L ex constructione, quadratum, O N* æquale erit rectangulo P O Q, hoc est quadrato O P, vna cum rectangulo O P Q, seu vna cum rectangulis O P S, O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars seperatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas. In Resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. * 36 tertij

C At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K, quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, alteram vero sic inueniemus. Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M: vt autem O S ad S M, ita* est rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; sunt enim eiusdem altitudinis P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc est quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M. * 1 sexti

Rursus vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita est rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, cum sint eiusdem altitudinis O P, ergo vt
D quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, & ita quoque* omnes antecedentes ad omnes consequentes, nempe vt quadratum O P, plus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, hoc est vt A C ad A G, ita quadratum O P vnà cum rectangulis O P S, O P, S Q ad rectangulum P O, S M vna cum rectangulo O P S. Rectangulum igitur P O, S M, vnà cum rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A k, hoc est* rectangulum E A H æquale erit rectangulo P O, S M, vnà cum rectangulo O P S hoc est, æquale erit rectangulo O P M, sed æquales sunt A E, O P ex constructione, ergo & A H, P M æquales erunt. * 1 quinti * 36 tertij

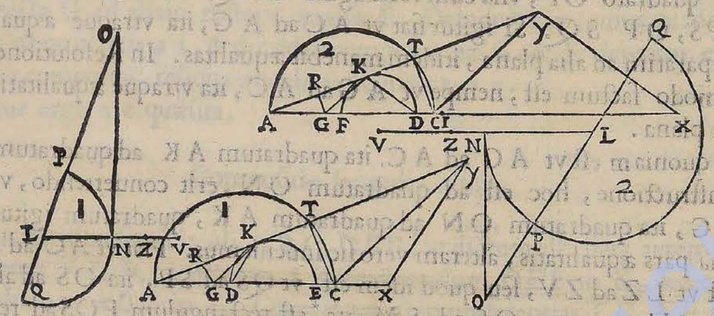
Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A H in R, angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, cum sit rectus & ipse A B C in semicirculo, quare* æquales erunt E B, H R, & posita B x æquali A R, tota E x æqualis erit toti A H, vel P M, & cum sint æquales A E, O P, ex constructione, & æquales e x, P M, tota A x toti O M æqualis erit. A

Lem. 2

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R, ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B x, ita O S ad S M, & componendo vt A x ad x B, ita O M ad M S, sed prima A x ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda x B æqualis erit M S quartæ, atque ablatis æqualibus x B, M S ab æqualibus e x, P M, reliqua E B reliquæ P S, hoc est V Z datæ, æqualis erit, quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportebat. B

At vero rectam O P, in primo quidem Casu minorem esse, quam A F, maiorem quam A K: in secundo vero maiorem quàm A F, minorem quam A K, sic demonstrabitur.

Connectantur G k, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A T




C

Lem. 3

A C continuatas in punctis y x. erit igitur vt* A G ad A C, ita F C ad C x, sed vt A G, ad A C, ita est quoque V Z ad, Z L, ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C, ad C x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare &* ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita V L, vel P Q ad F x. sed V Z in primo casu ponitur maior, quam F C: in secundo minor, ergo & P Q in primo Casu maior erit quam F x, in secundo minor. D

12 quinti

Lem 3.

Et quoniam rectangulum F A x* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu* rectangulo P O Q,* proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, sed P Q differentia extremarum, in primo quidem Casu ostensa est maior, quam F x differentia mediarum, ergo altera* extremarum P O, O Q, nempe ipsa P O minima erit, & per consequens minor quam A F. In secundo vero Casu ipsa P Q ostensa est minor, quàm F x, ergo altera* mediarum F A, A x, hoc est ipsa A F, minima erit, & consequenter minor quam O P.

16 tertij 36 sexti

Theor. 6 huius

Theor. 2 huius

Iam connectatur C T, eique parallela agatur G R secans A K in R.

erit



A erit angulus A R G æqualis angulo A T C, & ideo rectus, cum sit rectus & angulus A T C in semicirculo quare* æquales erunt T k, k R.

Lem. 3.

Et quoniam est vt A G ad, A C, *ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit, vt V Z ad Z L ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita erit Z L ad T y, & consequenter ita* quoque V L ad K y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, & rursus conuertendo vt V Z ad V L, ita k T ad k y. sed V Z in primo casu ponitur minor, quam k T, in secundo maior, ergo, & V L, hoc est P Q in primo Casu minor erit, quam K y, in secundo maior.

Lem. 3.

12 quinti

Postremo quoniam rectangulum y A K* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N seu* rectangulo Q o P, proportionales erunt y A, Q o o P, A K, sed y K differentia extremarum. in primo quidem Casu ostensa est maior, quàm P Q differentia mediarum, ergo altera* extremarum y A, A k nempe ipsa A K minima erit, & consequenter minor, quam O P. In secundo vero Casu y k ostensa est minor, quàm P Q, ergo altera* mediarum Q O, o P, nempe, ipsa O P minima erit, & per consequens minor quàm A k. Recta igitur O P in primo Casu minor est, quàm A F, maior quam A k, in secundo minor quàm A K, maior quàm A F. quod erat ostendendum. B

Lem. 3

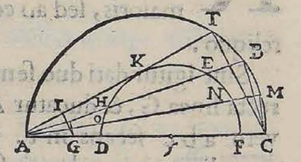
36 tertij

Theor. 2 huius

Theor. 2 huius

Diximus oportere in primo quidem Casu datam V Z non esse maiorem, quàm k T, nec minorē, quam F C, in secundo vero non esse maiorem, quam F C, nec minorem, quam k T, nam in primo Casu k T maxima est omnium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias T C, k F interijciuntur, F C minima. In secundo autem maxima est F C, minima k T. aliarum autem propinquior minimæ, remotiore minor est. idque sic demonstrabitur. C

In primo Casu ducatur vtrumque recta A E B secans circumferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam vero K D in H, & ex centro circuli D E F, quod sit y sumatur y G æqualis y c, & connectantur C B, C T, eisque parallelæ agantur G R, G I, quarum G R secet rectam A B in R, altera vero G I secet vtramque A B, A T in punctis Q I. Æquales igitur erunt anguli A T C, A I G, & æquales quoque anguli A B C, A R G sed recti sunt A T C, A B C in semicirculo, ergo & anguli A I G, A R G recti erunt, ac proinde* æquales I K, K T, &* æquales R H, E B. Et quoniam A k maior est, quàm A H, A I autem minor, quàm A Q, & multo minor quam A R, reliqua I K maior erit, quàm reliqua R H, hoc est K T, maior quam E B & sic ipsa K T ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T. D



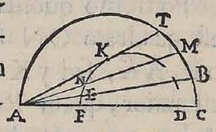

Lem. 2

Æque quoniam A D minor est, quàm A H, A G autem maior quàm A R reliqua G D minor erit, quàm reliqua R H, hoc est F C minor, quàm E B. Minima est igitur F C.

Sed ducatur alia recta A N M secans circumferentias K F, T C in punctis N M; circumferentiam vero k D in O, sitque N M ipsi F C propinquior, quàm E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P secans rectam A M in P, quam etiam secet G R in L. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, sed rectus est A M C in semicirculo, ergo & A P G rectus erit, ac proinde* æquales erunt P O, N M. Et quoniam A O minor est, quàm A H, ipsa autem A L maior, quàm A R, & A P multo maior, ergo reliqua P O hoc est N M minor erit, quàm reliqua R H, hoc est quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. A

Lem. 2

In secundo autem Casu ducatur recta A E B secans circumferentias k F, T C in punctis E B. Quoniam igitur A C maior est, quàm A B, A F autem minor, quàm A E, reliqua F C maior erit, quàm reliqua E B. Maxima est igitur omnium F C.




B

Similiter quoniam A T minor, est quàm A B; A K autem maior, quàm A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B. Minima est igitur omnium k T.

Postremò ducatur alia recta A N M secans circumferentias k F, T C in punctis N M, & sit N M ipsi k T propinquior, quàm E B. Quoniam igitur A M minor est, quàm A B, & A N maior, quàm A E, reliqua N M minor erit, quàm reliqua E B, hoc est propinquior minimæ minor remotiore. Quare manifesta est determinatio.

C

## Casus Tertius.

RVrsus vergant ad eamdem partem dati duo semicirculi, maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi maioris, sed ab eo angulo semicirculus minor minus distet, quàm à reliquo.

Sint igitur dati duo semicirculi a b c, d e f, quales ponuntur; data autem recta linea G, & ducatur A K contingens semicirculum d e f in K; ipsum vero a b c secans in t. Oportet inter circumferentias t c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat. Et hic Casus in duos alios Casus diuiditur, aut enim ponenda est ea recta inter cauam circumferentiam vnius semicirculi, & conuexam alterius, aut inter cauas vtriusque, tamen vterque vno eodemque modo resoluitur. D

## Resolutio.

SIt iam posita recta linea e b æqualis datæ G, vt Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod sit O, ponatur O g æqualis o c, & recta a e b secet circumferentiam K d in h, & ducatur g r perpendicularis ad b a productam, & connectatur c b. angulus igitur a b c in semicirculo rectus est, ac proinde h r* æqualis e b.

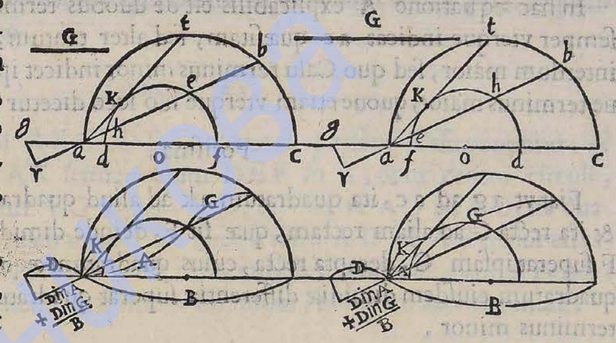
Lem. 2

Quo-



A Quoniam igitur datæ sunt a c, a g, b e, a k. prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus designatũ est, & quæratur a e. estò illa A, ergo recta A B erit A ✣ G, & cùm sint similia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, B a r g sunt recti, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad a, quia sunt ad verticem, erit vt a c ad a g ita a b ad a r, hoc est in figuris ad resolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita A ✣ G ad $\frac{D\text{ in }A + D\text{ in }G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D\text{ in }A + D\text{ in }G}{B}$, quæ si auferatur à recta r h æquali ipsi e b, remanebit a h, itaque a h erit G -- $\frac{D\text{ in }A + D\text{ in }G}{B}$, sed rectangulum e a h* æquale est quadrato A k, ergo

36 tertij




G in A -- $\frac{D\text{ in }A\,Q + D\text{ in }G\text{ in }A}{B}$ æquabitur k Q

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

B in G in A -- D in G in A -- D in A Q æquabitur K Q in B

G in A -- $\frac{D\text{ in }A\,Q + D\text{ in }G\text{ in }A}{B}$ ducto in B alicui videbitur productum debere esse B in G in A -- D in A Q ✣ D in G in A (non autem vt nos exposuimus) quod C verum non est; nam cum à G in A auferenda sit tota fractio $\frac{D\text{ in }A\,Q + D\text{ in }G\text{ in }A}{B}$ à producto quoque B in G in A auferri debet totum productum fractionis, quod est D in A Q ✣ D in G in A. Itaque G in A -- $\frac{D\text{ in }A\,Q + D\text{ in }G\text{ in }A}{B}$ ducto in B, productum erit B in G in A -- D in A Q -- D in G in A, quod animaduertisse fuerit operæ pretium.

Denique applicentur omnia ad D, vt A Q, Potestas nempe æquationis ex se subsistat, ergo

$\frac{B\text{ in }G\text{ in }A}{D}$ -- G in A -- A Q æquabitur $\frac{k\,Q\text{ in }B}{D}$

Ea, quæ de huiusmodi ductione, & applicatione in Resolutionibus duorum præcedentium Casuum in simili loco dicta sunt, hic quoque dicta esse intelligantur ob rationes ibidem allatas. D

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, hoc est fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q\text{ in }B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B\text{ in }G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planũ $\frac{B\text{ in }G\text{ in }A}{D}$ facta igitur transmutatione.

F in A --- G in A --- A Q æquabitur Z Q

Vel F -- G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata æquatione F $\frac{1}{1}$ G $\frac{1}{1}$ -- L. V. ( F $\frac{1}{2}$ -- G $\frac{1}{0}$ Q -- Z Q ) æquabitur A

Vel

Vel $F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} \dotplus L.V.(F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2}Q - ZQ$ æquabitur A. A

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum non semper vterque indicat a e quæsitam, sed alter tantum, interdum minor, interdum maior, sed quo Casu terminus minor indicet ipsam quæsitam, quoue terminus maior, quoue etiam vterque suo loco dicetur.

## Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F, deinde dimidiæ differentiæ, qua F superat ipsam G, dempta recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ differentiæ superat quadratum a i, reliqua erit terminus minor. B

Vel eidem dimidiæ differentiæ addita eadem recta fiet terminus maior.

## Scholium.

Ex Porismate apparet dimidiam differentiam, qua F superat G, non esse minorem recta a i, eo quod quadratum ipsius dimidiæ differentiæ non est minus, quadrato a i, & licet in Porismate appareat ipsum quadratum a i superari à quadrato dimidiæ differentiæ, non tamen potest dici absolutè, quadratum dimidiæ differentiæ maius esse quadrato a i, affirmari autem debet non esse minus; nam quadratum dimidiæ differentiæ nonnumquam præstat quadrato a i nihilo, idque contingit cum ratio a d ad a f, non est maior ratione a g, ad a c, & præterea data G, exposita est æqualis minimæ C earum, quæ inter circumferentias K f, &c. interijciuntur. immo si ipsa G exponeretur minor minima, sequeretur dimidiam differentiam rectarum F, & G, minorem fieri rectam a i, quod quidem aduersus constructionem Problematis, instaret; nam cum in circulo, cuius diameter æqualis est ipsi dimidiæ differentiæ, aptanda sit ex præcepto Porismatis recta æqualis a i, id fieri non posset, si ipsa dimidia differentia minor esset quam a i. Similiter si ratio a d ad a f maior esset, ratione a g ad a c, & recta G exponeretur minor minima, sequeretur aut dimidiam differentiam rectarum F & G minorem fieri recta a i, quod quidem constructionem Problematis eadem ratione impediret, aut terminum indicantem quæsitam a e maiorem fieri recta a f, quod pariter constructioni, sed alia ratione, aduersaretur; nam à puncto a ad circumferentiam k f non posset duci recta æqualis ipsi termino, vt Porisma fieri præcipit, si ipse terminus maior esset, quàm a f. Similis quoque instantia constructioni occurreret, si data G exponeretur maior maxima, siue ratio a d ad a f, maior sit ratione a g ad a c, siue non maior: nam terminus indicans a e quæsitam fieret, vel minor minore rectarum a K, a f, vel maior maiore: Itaque à puncto a ad circumferentiam K f, non posset duci recta æqualis ipsi termino, vt Porisma fieri iubet. Hæc omnia suis locis demonstrabuntur. Ad destruendas igitur huiusmodi instantias præfigi debet Problemati Determinatio, ne data G maximam

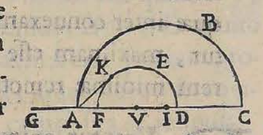


A ximam superet, neue à minima superetur. Itaque ostendendum est, quæ sit maxima, quæue minima, sed quo clarius, atque facilius id fiat prius sequens Lemma demonstrabo.

## Lemma IV.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & contingat recta A K semicirculum D E F in K, & ex centro circuli, quod sit V ponatur V G æqualis V C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F maior est ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem esse maiore rectarum A F, A k, & si æqualis æqualem, & si minor minorem, maiorem autem minore. * Probl. 1 huius

B



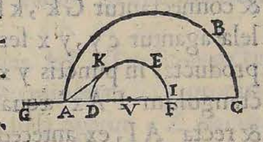

SIt primum ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo duo sunt Casus, aut enim F C intercepta est inter conuexam vnius semicirculi circumferentiam, & cauam alterius, aut inter cauam vtriusque. sit primum intercepta inter vtriusq; cauam, erit A K maior, quàm A F. Quoniam igitur est vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A k ad quadratum A I ex positione, erit quadratum A k, minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quam recta A I. Recta igitur A I maior est maiore rectarum A F, A k.

Deinde sit F C intercepta inter conuexam cir-



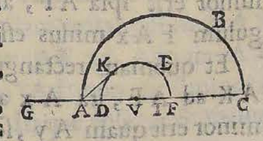

C cumferentiam, & cauam erit A F maior, quàm A k, & quoniam ratio A D ad A F ponitur maior ratione A G ad A C vt autem A G, A C, ita est quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F maior erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium ▵ D, ▵ K, ▵ F ad tertiam, ita est quadratum secundæ ▵ k ad quadratum ▵ F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum ▵ F maior erit, ratione quadrati ▵ k ad quadratum A I; quare quadratum A I * maius erit quadrato A F, & consequenter recta A I maior, quam recta A F, quod primum. * 10 quinti

Sed sit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad




D A C, ergo eadem erit, quæ quadrati A k ad quadratum A I, sed vt A D ad A F, ita est quadratum A K ad quadratum A F, vt demonstrauimus ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I, æqualis rectæ A F, quod est secundum.

Denique sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A k ad quadratum A I; sed vt A D ad A F, ita ostensum est quadratum A k ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati ▵ K ad quadratum ▵ F



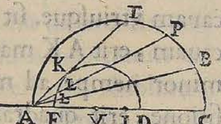

mi-

minor erit ratione quadrati Ak ad quadratum AI, quare* quadratum A
AI minus erit, quadrato AF, & consequenter recta AI minor, quàm recta AF; quod est tertium.

Et quoniam est vt AG ad AC ita quadratum Ak ad quadratum AI, AG autem minor, quàm AC erit & quadratum Ak minus quadrato AI, quare & recta AK minor, quàm recta AI; recta igitur AI maior est minore rectarum AF, Ak, quod vltimo loco erat ostendendum.

## Lemma V.

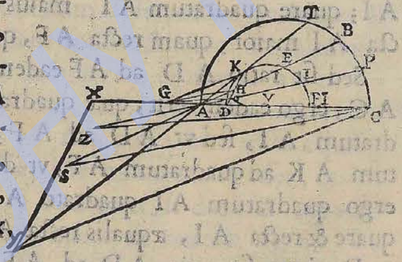
Iisdem positis sit ratio AD ad AF non minor ratione AG ad AC. Dico FC maximam esse omnium quæ à puncto A ductæ inter cauas circumferentias kF, TC interijciuntur, minimam kT, earum vero quæ inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC interijciuntur, maximam esse KT, minimam FC. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore maiorem esse. B




Ducantur enim vtrumque recta linea AEB secans circumferentias KF, TC in punctis EB, & sit primum FC interiecta inter cauas circumferentias KF, TC. Quoniam igitur AC maior est, quàm AB, AF autem minor, quàm AE, reliqua FC maior erit, quam reliqua EB, & sic ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur FC. C

Æque quoniam AT minor est, quàm AB ex vero maior quam AE reliqua KT minor erit, quàm reliqua EB, atque eadem ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur KT.

Rursus ducatur alia recta ALP secans circumferentias kF, TC in punctis LP, & sit LP minimæ KT propinquior, quàm EB erit igitur AP, minor, quam AB, sed AL maior est quam AE, ergo reliqua LP minor erit, quam reliqua EB, nempe propinquior minimæ minor remotiore.




Sed sit FC interiecta inter cauam circumferentiam TC, & conuexam KF, & connectantur Gk, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes TA, CA productas in punctis yx; erit igitur rectangulum FAx* æquale quadrato AI, & recta AI, ex antecedente Lemmate, non minor quam AF; quare neque Ax, minor erit ipsa AF, alioquin rectangulum FAx minus esset quadrato AI. D

Lem. 3

Et quoniam rectangulum FAx* æquale est rectangulo yAK* erit vt AK ad AF, ita Ax ad Ay, sed Ak minor est, quàm AF, ergo & Ax minor erit quam Ay, sed Ax ostensa est non minor quàm AF, ergo & AF

Corol. Lem. 3 16 sexti



A AF minor erit quam Ay, atque AK multo minor. quare Ay maxima erit quatuor proportionalium AK, AF, Ax, Ay; minima vero AK; atque adeo yk composita ex maxima, & minima* maior, quàm xF composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est* vt AG ad AC, ita kT ad Ty, & ita FC ad cx, Lem. 3
erit vt kT ad Ty, ita FC ad Cx, & conuertendo vt yT ad Tk, ita xc ad CF, & diuidendo vt yk ad kT, ita xF ad FC, sed yk prima ostensa est maior, quàm xF tertia, ergo, & secunda kT maior erit, quàm FC quarta.

Secet autem recta EB circumferentiam kD in H, & iungatur GH, cui parallela agatur CS occurrens BA continuatæ in S. rectangulum igi-
B tur yAK* æquale erit rectangulo SAE, quare vt* Ak ad AE, ita erit AS Corol. Lem. 3 16 sexti
ad AI, sed AK minor est, quàm AE, ergo & AS minor erit quam Ay, est autem & AF minor quam Ay, vt demonstrauimus, ergo AE multo minor erit, atque AK multo minor. quare Ay maxima erit quatuor proportionalium Ak, AE, AS, Ay, minima vero Ak, atque adeo yk composita ex maxima, & minima* maior erit quam S e composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est vt AG ad AC,* ita EB ad BS, & ita kT ad Ty, Lem. 3
erit vt KT ad Ty, ità EB ad BS, & conuertendo vt yT ad Tk, ità SB ad BE, & diuidendo, vt yk ad KT, ita Se ad eB, sed yk ostensa est maior, quam Se, ergo & KT maior erit, quàm EB. Atque eadem ratione ostendetur ipsa KT omnibus alijs maior. Maxima est igitur kT.

C Deinde quoniam* æqualia sunt rectangula FAx, EAS, erit vt* AE ad Corol. Lem. 3 16 sexti
AF, ita Ax ad AS, sed AE minor est, quàm AF, ergo & Ax minor erit, quam AS sed Ax ostensa est non minor, quàm AF, ergo & AF minor erit, quàm AS, atque AE multo minor. itaque AS maxima erit quatuor proportionalium AE, AF, AX, AS, minima vero AE; atque adeo Se composita ex maxima, & minima,* maior erit quàm xF com- 25 quinti
posita ex reliquis.

Et quoniam est vt AG ad AC* ita EB ad BS, & ita FC ad cx, Lem. 3
erit Fc ad cx, vt EB ad BS, & conuertendo vt xc ad CF, ita SB ad BE, & diuidendo vt xc ad cF, ita Se ad eB, sed xF ostensa est minor. quàm Se, ergo & FC minor erit, quàm EB, eaque* demonstrabitur
D omnibus, alijs minor. Minima est igitur FC.

Sed ducatur alia recta ALP secans circumferentias kF, Tc in punctis LP, circumferentiam vero KD in Q, & sit LP minimæ FC propinquior, quàm EB, & connectatur GQ, cui parallela agatur cZ occurrens PA continuatæ in Z. rectangula igitur LAZ, EAS* æqualia erunt Corol. Lem. 3 16 sexti
quare* vt AL ad AE, ita erit AS ad AZ, sed AL maior est, quam AE, ergo & AS maior erit, quam AZ. Et quoniam rectangulum EAS *æquale est quadrato AI erit vt AE ad AI, erit* vt AE ad AI, ita AI Lem. 3 17 sexti Lem. 4
ad AS, sed AE minor est, quàm AI, cum ipsa AI non sit* minor, quàm AF, ergo & AI minor erit, quam AS. Itaque ipsa AS maior

erit,

erit, quàm AL, & multo maior, quàm AE, est quoque maior quàm AZ vt demonstrauimus, ergo ipsa AS maxima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, AZ, & *consequenter AE minima, vnde SE composita ex maxima, & minima, *maior erit quam ZL composita ex reliquis; hoc est ZL minor quam SE. A

Theor. 2 huius 25 quinti

Et quoniam est vt AG ad AC, *ita EB ad BS, & ita *LP ad PZ, erit vt LP ad PZ, ita EB ad BS, & conuertendo vt ZP ad PL, ita SB ad BE, & diuidendo vt ZL ad LP, ita SE ad EB, sed ZL ostensa est minor, quàm Se, ergo & LP minor erit, quàm eB, propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Quare constat propositum.

lem. 3

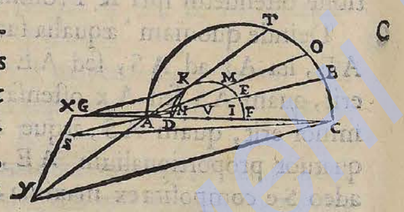
## Lemma VI.

B

Rursus ijsdem positis. sit autem ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, ergo AI* minor erit, quàm AF, maior autem, quàm Ak. à puncto igitur A ad circumferentiam KF, ducatur AM æqualis AI, & producatur ad circumferentiam TC in O. Dico maiorem rectarum KT, FC maximam esse omnium, quæ à puncto A ductæ inter circumferentias KF, Tc interijciuntur. Minimam vero MO. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore, ex eadem parte, minorem esse.

lem. 4

DVcatur enim à puncto A vtrumque recta linea AEB secans circumferentias KF, TC in punctis EB; circumferentiam vero kD in H, & connectatur GH, GK, kD, quibus parallelæ ducantur cS, cy, yx secantes EA, KA, FA productas in punctis Syx, & sit primum KT maior, quàm FC. quoniam igitur est* vt AG ad AC, ita FC ad cx, & *ita KT ad Ty, erit KT ad Ty, vt FC, ad cx; & diuidendo, erit Tk ad ky, vt cF ad Fx; sed kT ponitur maior, quàm FC. ergo & ky quam Fx* maior erit.




C

14 quinti

Et quoniam* æqualia sunt rectangula yAK, FAx: erit vt* Ay ad AF, ita Ax ad Ak: sed ky composita ex extremis Ay, AK, ostensa est maior, quàm Fx, composita ex medijs, ergo altera* extremarum Ay, Ak, maxima erit altera minima: sed AK non est maxima, quia minor est, quàm AF, ergo minima erit, & consequenter Ay maxima. Itaque Ay maior erit, quàm AF, & multo maior, quàm AE: Et quoniam* æqualia sunt rectangula yAK, EAS, erit* vt Ak ad AE, ita AS ad Ay: sed Ak minor est, quàm AE, ergo & AS minor erit, quàm Ay. Cum igitur Ay maior sit, quàm AS, & maior, quàm AE, vt demonstraui, ac etiam maior, quam Ak, erit ipsa Ay maxima quatuor proportionalium Ak, AE, AS, Ay; *minima vero Ak, vnde yk compo-

Corol. Lem. 3 16 sexti

Theor. 2 huius

D

Corol. Lem. 3 16 sexti

Theor. 2 huius

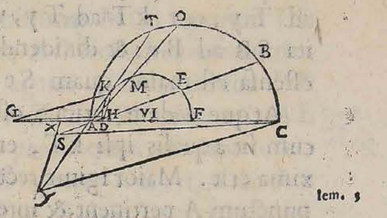


A posita ex maxima, & minima, * maior erit quàm Se composita ex reliquis.

Et quoniam est, vt AG ad AC, *ita EB ad BS, & *ita kT ad Ty, erit KT ad Ty, vt EB ad BS, & conuertendo, vt yT ad Tk, ita SB ad BE: & diuidendo, vt yk ad kT, ita Se ad EB, sed yk ostensa est maior, quàm Se, ergo & kT quàm EB maior erit, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur KT.

lem. 3

Sed sit FC maior, quàm KT: quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita Fc ad Cx, & *ita kT ad Ty; erit Fc ad Cx, vt kT ad Ty: & diuidendo, vt cF ad Fx, ita erit TK ad Ky, sed cF ponitur maior,




B quàm TK, ergo & Fx maior erit, quàm Ky, sed Fx composita est ex extremis quatuor proportionalium AF, Ay, Ak, Ax, ipsa vero ky ex medijs (constat autem eos proportionales esse, ex eo quod* æqualia sunt rectangula FAX, yAk) ergo altera * extremarum AF, AX maxima erit, altera minima: sed AF non est minima, cum sit maior, quàm Ak, ergo maxima erit: vnde AX minima: itaque AX minor erit quàm AK, & multo minor, quàm AE.

lem. 3

Theor. 2 huius

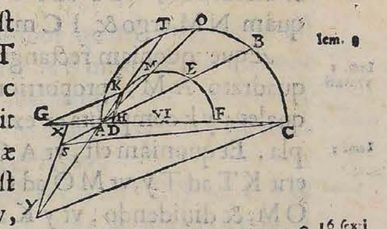
Et quoniam æqualia sunt rectangula FAX, EAS, erit vt AF ad AE, C maior nempe ad minorem, ita AS ad AX, quare & AS maior erit, quàm AX: sed AX ostensa est minor, quàm AE, & consequenter multo minor est, quàm AF, ergo quatuor proportionalium AF, AE, AS, AX minima erit AX: * quare AF maxima, vnde XF composita ex maxima, & minima, * maior erit, quàm Se composita ex reliquis.

Theor. 2 huius 25 quinti lem. 3

Et quoniam est, vt AG ad AC, *ita Fc ad cx, & ita EB ad BS, erit Fc ad cx, vt EB ad BS, & conuertendo, vt xc ad cF, ita erit SB ad BE, & diuidendo vt xF ad Fc, ita Se ad EB; sed xF ostensa est maior, quàm Se; ergo & Fc, quàm EB maior erit. eademq. ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare maxima est Fc.

lem. 3

Sed sint æquales KT, Fc: quoniam igitur est




D vt AG ad AC,* ita Fc ad cx, & * ita KT ad Ty; erit Fc ad cx, vt kT ad Ty: sed Fc ponitur æqualis KT, ergo & cx æqualis erit Ty; quare ablatis æqualibus FC, KT, reliquæ xF, yk, æquales erunt: sed xF composita est ex extremis quatuor proportionalium FA, Ay, Ak, Ax, ipsa vero yk ex medijs, constat autem eas* proportionales esse ex eo, quod* rectangula FAx, yAk sunt æqualia; ergo * maior ex extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit. itaque AF extremæ maiori mediæ, minor minori æqualis erit. itaque AF extremæ æqualis erit alteri mediarum yA, Ak; sed non est æqualis ipsi AK,

lem. 3

16 sexti Corol. lem. 3 Theor. 3 huius

hæc enim tangit circulum D E F; illa vero secat; ergo ipsa A F æqualis A
erit A y.

Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A k, E A S; erit A y ad A E, Corol. Lem. 5
vt A S ad A K; sed A y, cum sit æqualis ipsi A F, maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quàm A k, vnde quatuor proportionalium A y, Theor. 1 huius
A E, A S, A K, minima erit A K; & per * consequens maxima A y, 25 quinti
itaque y K composita ex maxima, & minima * & maior erit, quàm S e, composita ex reliquis.

Postremo quoniam est vt A G ad A C, ita E B ad B S & ita k T ad T y; erit k T ad T y, vt E B ad B S: & conuertendo, vt y T ad T K, ita S B ad B e: & diuidendo, vt y k ad k T, ita erit S e ad e B; sed y k B
ostensa est maior quam S e, ergo & K T maior erit, quam E B.

Atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum sit æqualis ipsi k T, erit quoque omnibus maior: itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum K T, F C, maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur. quod est primum.

Deinde secet recta A M circumferentiam k D in R, & iungatur G R, eique parallela agatur C N secans M A productam in N. Rectangulum igi- Lem. 3
tur M A N * æquale erit quadrato A I; hoc est quadrato A M sunt enim æquales A I, A M, ex constructione, quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum y sit rectangulum F A x * æquale qua- Lem. 1 & 17 sexti
drato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x sunt autem & inæqualis, quia A F maior est, quàm A M, ergo x F composita ex extremis, maior erit quàm dupla media, hoc est, quàm M N. Et Lem. 3
quoniam est, vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & * ita M O ad O N; erit F C ad C x, vt M O ad O N: & conuertendo, vt x C ad C F, ita N O ad O M: & diuidendo, vt x F ad F C, ita erit N M ad M O; sed x F ostensa est maior, quàm N M, ergo & I C maior erit, quàm M O;

Æque quoniam rectangulum y A k *, æquale est quadrato A I, hoc est Lem. 1 & 17 sexti D
quadrato A M, * proportionales erunt A k, A M, A y: sunt autem & inæquales; y k composita ex extremis maior erit, quàm M N, media videlicet dupla. Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & * ita M O ad O N: Lem. 3
erit K T ad T y, vt M O ad O N, & conuertendo vt y T ad T k, ita N O ad O M, & diuidendo, vt y K ad k T, ita erit N M ad M O: sed y k ostensa est maior, quàm N M, ergo & k T maior erit, quàm M O.

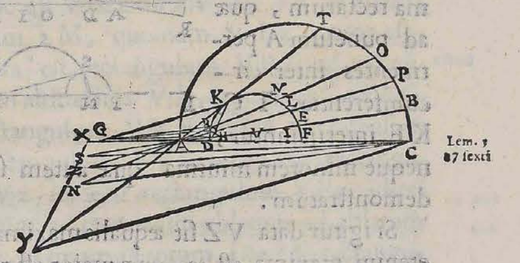
Eadem ratione quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, Lem. 1 & 17 sexti
hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem & inæquales. ergo S E, composita ex extremis, maior erit quàm

dupla



A dupla media; hoc est, quàm N M. Et quoniam est vt A G ad A C, * ita Lem. 3
E B ad B S, & * ita M O ad O N, erit E B ad B S, vt M O ad O N: & conuertendo, vt S e ad E B, ita N O ad O M; & diuidendo, vt S e ad e B, ita erit N M ad M O: sed S e maior est, quàm N M, vt demonstrauimus, ergo & E B maior erit, quam M O. Atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa M O. Minima est igitur M O omnium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias k F, T C interijciuntur. quod est secundum.

Postremo ducatur alia recta A L P secans circumferentias k F, T C in punctis L P, sintque L P, E B, ex eadem parte minimæ M O, quarum L P ipsi M O sit propinquior, quàm E B, & recta A P secet circumferentiam
B k D in Q, & iungatur G K, eique parallela agatur C Z occurrens P A continuatæ in Z. * æqualia erunt rectangula L A Z, E A S: quare vt * A L Corol Lem. 1 16 sexti
ad A E, ita erit A S ad A Z. siquidem A L propinquior est centro V, quàm A E, sic argumentor, sed A L maior est, quàm A E, ergo & A S maior erit, quàm A z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A E, A M, A S; Lem. 1 17 sexti
sed A E minor est, quàm A M, ergo & A M minor erit quàm A S: itaque A S maior erit, quàm A L, & multo maior quam A E est quoque maior, quam A z, vt demonstrauimus; ipsa igitur A S maxima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z, & * consequenter A E mini- Theor. 1 huius
C ma; vnde S E composita ex maxima, & minima maior erit, quàm z L composita ex reliquis, hoc est z L minor, quàm S e.




Si vero A L remotior est à centro V, quàm A E, argumentor in hunc modũ, sed A L minor est, quàm A E: ergo & A S minor erit, quam A z.

Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, vel A M: * proportionales erunt A E, A M, A S. sed A E maior est, quàm A M, ergo & A M maior erit, quàm A S. quare A S minor erit, quàm A L, & multo minor quam A E; atque est
D minor, quàm A z, vt demonstrauimus. itaque A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z, & * consequenter A E maxima, quare S E composita ex maxima, & minima, * maior erit quàm z L, composita ex reliquis, quod etiam demonstrauimus & supra.

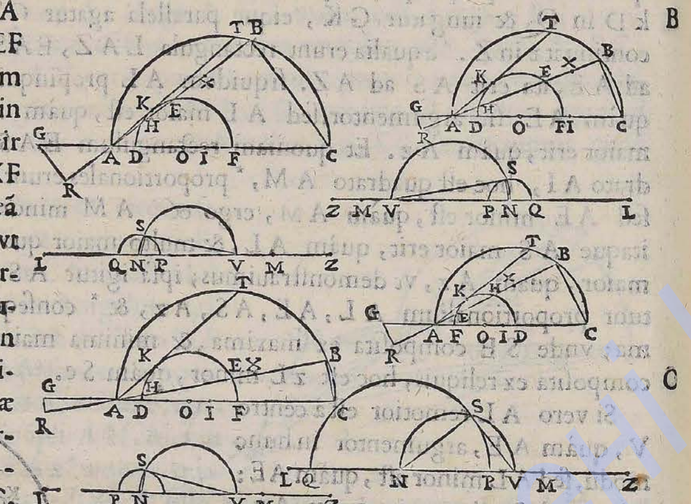
At quoniam in vtroque Casu est, vt A G ad A C, ita * E B ad B S & ita * L P ad P z, erit vt L P ad P z ita E B ad B S; & conuertendo vt z P ad P L, ita S B ad B e; & diuidendo, vt z L ad L P, ita S e ad e B; sed z L ostensa est minor, quàm S e, ergo & L P minor erit, quàm E B; hoc est propinquior minimæ, minor remotiore ex eadem parte. Quod tertio loco erat ostendendum.

## Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint, manifestum est KT maximam esse omnium, quæ inter circumferentias KM, TO interijciuntur. Earum verò quæ interijciuntur inter circumferentias MF, OC maximam esse FC.

## Compositio tertij Casus.

SInt dati duo semicirculi ABC, DEF, vt dictum est; data autem recta linea VZ, & cõtingat A k semicirculũ DEF in k; semicirculum vero ABC secet in T. Oportet inter circũferentias TC, KF ponere rectam lineã æqualem VZ, ita vt ad punctum A pertineat. Oportet autem ipsam VZ non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias TC, KF interijciuntur, neque minorem minima. quæ autem sit maxima, quæue minima, iam est demonstratum.




Si igitur data VZ sit æqualis maximæ, factum iam erit, quod proponitur, etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum kT, FC, si vero sit æqualis minimæ, minimaq. sit vel FC, vel KT, idem factum erit, quod proponitur. Si autem neutra ipsarum FC, kT sit minima inuenta, minima Problemati satisfiet, inuentio autem minime patet ex Lemmate sexto. Sed si VZ minor sit maxima, maior autem minima, ponatur ex centro circuli DEF, quod sit O recta OG æqualis OC, & fiat vt AG ad AC, ita quadratum AK ad aliud quadratum, quod sit AI. Similiter fiat, vt AG ad AC, ita VZ ad aliam, quæ sit ZL; & sit ipsarum Vz, zL differentia LV, quæ secetur bifariam in N: Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Porisma iubet; describatur in VN semicirculus, in quo accommodetur VS æqualis AI infra demonstrabimus ipsam AI minorem esse, quàm VN, & iungatur SN: Quadratum igitur Nv superat qua-

Probl. 1 huius



A quadratum SV, quadrato SN, cum sit rectus angulus VSN in semicirculo: itaque rectæ VN auferenda est vel addenda recta æqualis N. S; sic Porisma fieri iubet; auferatur igitur, vel addatur prout sequentia præcepta docebunt; eaque sic diminuta, vel aucta sit VP, ea non erit minior minore restarum AF, Ak, nec maior maiore, vt tria sequentia Lemmata ostendent; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam KF duci recta AE æqualis VP. ducatur igitur AE, & producatur ad circumferentiam TC in B. Dico EB Problema efficere.

Secet enim BA circumferentiam kD in H, & centro N interuallo NP describatur circulus secans VL in Q, is circulus tanget rectam SV in S, ac proinde quadratum VS, æquale erit rectangulo PVQ, vel
B VPL, seu quod idem est rectangulo VP, LZ minus rectangulo VPZ: Si igitur fiat, vt AC ad AG, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit inter ea plana æqualitas.

At quoniam est vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI, ex constructione, hoc est ad quadratum VS; erit conuertendo vt AC ad AG, ita quadratum VS ad quadratum AK; quadratum igitur AK erit vna pars æqualitatis; alteram vero sic explorabimus.

Quoniam est vt AG ad AC, ita VZ ad ZL, ex constructione, erit conuertendo vt AC ad AG, ita LZ ad zV vt autem Lz ad zV, ita * sexti est rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz, eandem enim habent altitudinem PV, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VP, Lz
C ad rectangulum PVz.

Deinde fiat, vt AC ad AG, hoc est vt Lz ad zV, ita Pz ad aliam, quæ sit zM erit zV maior, quam zM, quoniam & Lz maior est, quàm Pz; vt autem Pz ad zM; ita * est rectangulum VPZ ad rectangulum VP, zM; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM; sed ita ostensum est & rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz, ergo vt rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz, ita erit rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, hoc est vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum quare & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, i. e. & rectangulum VP, Lz minus rectangulo VPz. ad rectangulum PVz minus rectangulo VP, zM * erit vt rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz,
D hoc est vt AC ad AG. Itaque rectangulum PVz minus rectangulo VP, zM erit altera pars æqualitatis.

Quadratum igitur AK, hoc est rectangulum EAH æquale erit rectangulo PVz, minus rectangulo PV, zM, hoc est æquale erit rectangulo PVM, sed PV æqualis est AE, ex constructione; ergo & IVM æqualis erit AH.

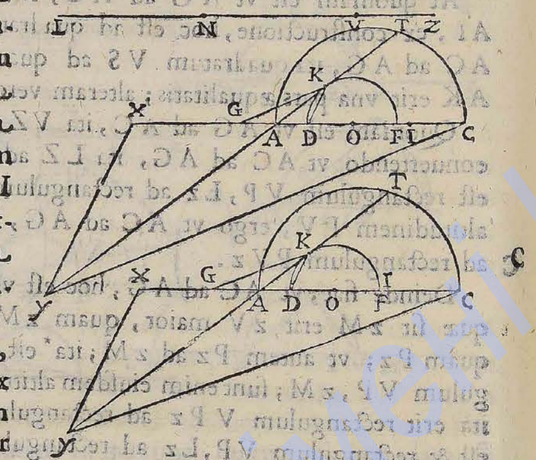
Denique connectatur BC, & ei parallela agatur GR secans EA continuatam in R; anguli igitur ARG æqualis erit angulo ABC, & ideo rectus cum sit rectus, & ipse ABC in semicirculo; quare æquales erunt

erunt EB, HR, & sumpta Ex æquali EH, vel VM, reliqua xB æqua
A lis erit reliquæ AR, & cum sint æquales AE, VP, & æquales EX, VM
tota AX toti PM æqualis erit.

Et quoniam similia sunt triangula ABC, ARG anguli enim ABC, ARG sunt æquales, quia recti, hic ex constructione, ille ex vi semicircu-li, Atque anguli BAC, RAG ad verticem sunt æquales, ideo vt AC ad AG, ita erit AB ad AR, sed vt AC ad AG, ita est quoque PZ ad ZM, ex constructione, ergo vt AB ad AR, hoc est ad BX, ita erit PZ ad ZM, & dividendo vt Ax ad xB, ita erit PM ad MZ, sed Ax ostensa est æqualis PM, ergo & xB æqualis erit MZ, sed Ex æqualis est VM, ex constructione, ergo tota EB æqualis erit toti VZ. Posita est igitur inter circumferentias kF, TC recta EB æqualis VZ datæ, B eaque ad punctum A pertinet, quod erat faciendum.

At vero rectam AI minorem esse, quàm VN sic demonstrabimus.

Duo sunt Casus, aut enim AD ad AF minorem rationem habet quam AG ad AC, aut non minorem. primum habeat non minorem & FC sic intercepta inter conuexam circumferentiam KF, & cauam Tc, ergo AI non* erit minor, quàm AF, at- Lem. 4 Lem. 5
que Fc* minima erit omnium interceptarum inter circumferentias kF, Tc, C




Connectantur autem Gk, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes TA, CA productas in punctis yx: rectangulum igitur FAx* æquale est quadrato AI: Lem. 3 Lem. 5
quare* proportionales sunt FA, AI, Ax vnde Fx composita ex extremis, non erit minor, quàm dupla media AI.

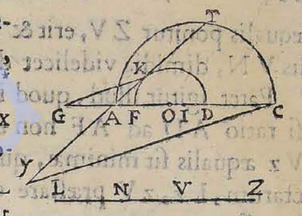
Et quoniam est vt AG ad AC* ita FC ad cx, & ita VZ ad ZL ex D constructione, erit Fc ad cx, vt VZ ad ZL, & diuidendo vt cF ad Fx, ita erit ZV ad VL, sed CF cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm ZV, ponitur enim ZV maior minima, ergo & Fx minor erit, quàm VL: sed Fx ostensa est maior, quàm AI dupla, ergo AI dupla minor erit, quàm VL, & consequenter simpla AI minor quàm VN dimidia videlicet ipsius VL.

Sed sit FC intercepta inter caulas circumferentias kF, TC, ergo kT* Lem. 5
minima erit omnium interceptarum inter circumferentias KF, TC. Connectatur autem GK, & ei parallela agatur cy occurrens KA productæ in y.

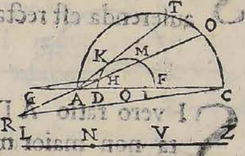
Re-



A Rectangulum igitur yAK* æquale erit quadrato AI; & ideo* proportionales erunt yA, AI, AK, sunt autem & inæquales, quia AI maior est, quam AK, ergo yk composita ex extremis maior erit, quàm AI dupla; Et quoniam est vt AG ad AC* ita KT ad Ty, & ita quoque Vz ad zL, ex constructione, erit KT ad Ty vt Vz zL; & diuidendo erit vt TK ad ky, ita zV ad VL, sed TK cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm zV, ergo & Ky minor erit, quam VL, sed ky ostensa est maior, quàm dupla AI, ergo AI dupla minor erit, quàm VL & consequenter AI B simpla minor, quàm VN dimidia videlicet ipsius VL. Lem. 1 & 7 sexti Lem. 4 Lem. 7




Sed habeat AD ad AF minorem rationem, quàm AG ad AC, ergo AI* minor erit, quam AF, maior autem quàm AK, itaque poterit à puncto A ad circumferentiam KF duci recta æqualis AI ducatur ergo, eaque sit AM, quæ producti secet circumferentiam Tc in O; erit MO* minima omnium, quæ inter circumferentias kF, TC intercipiuntur. Secet autem recta AM circumferentiam KD in H, & connectatur GH, eique parallela agatur GR occurrens MA continuatæ in R. Rectangulum igitur MAR* æquale erit quadrato AI, hoc est quadrato AM qua- Lem. 3
C re æquales erunt AR, AM.




Et quoniam est vt AG ad AC,* ita MO, ad OR; & ita Vz ad zL Lem. 3
ex constructione, erit MO ad OR, vt Vz ad zL: & diuidendo erit vt OM ad MR, ita zV ad VL: sed OM, cum sit omnium interceptarum minima, minor est, quàm zV ponitur enim zV maior minima; ergo erit & MR minor, quàm VL, & consequenter AM, vel AI minor, quam VN, dimidia videlicet minor quàm dimidia. Quare constat propositum.

Scholium.

Si autem existente ratione AD ad AF non maiori quam AG ad AC data Vz sit æqualis minimæ interceptarum, erit & AI æqualis VN, id-
D que ita ostendemus,

Primum sit ratio AD ad AF eadem, quæ AG ad AC, ergo FC* Lem. 5
minima erit interceptarum & AI* æqualis AF, & cum sit rectangulum Lem. 4
FAx* æquale quadrato AI, erit & Ax æqualis AF, atque adeo tota Fx Lem. 5
dupla ipsius AI; & quoniam ostensæ sunt supra, proportionales CF, Fx, zV, VL, prima autem cF æqualis est zV tertiæ, ponitur enim zV æqualis minimæ, ergo & secunda Fx æqualis erit VL quartæ, & consequenter AI æqualis VN, dimidia videlicet dimidiæ.

Sed sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC. Quoniam igitur ostensæ sunt proportionales OM, MR, zV, VL, & OM minima

æqua-

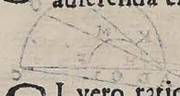
æqualis ponitur Z V, erit & M R æqualis V L; vnde & A M vel A I æqualis V N, dimidia videlicet dimidiæ. A

Patet igitur illud, quod in Scholio per Resolutionem monuimus; nempe si ratio A D ad A F non sit maior ratione A G ad A C, & præterea data V z æqualis sit minimæ, quadratum V N, dimidiæ videlicet differentiæ rectarum, L z, z V præstare quadrato A I nihilo: id est alterum alteri æquale esse.

Quo autem Casu rectæ V N auferenda sit recta æqualis N S, quoue addenda; ratio his constat præceptis.

### Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non sit minor ratione A G ad A C, rectæ V N B auferenda est recta æqualis N S.



### Præceptum II.

SI vero ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & V Z data non maior minore rectarum K T, F C, rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S: in hoc enim Casu recta æqualis datæ V z potest optari inter circumferentias k F, T C ex vtraq; parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur, aptabitur ea recta è regione K T, si vero addatur aptabitur è regione F C.

### Præceptum III. C

QVod si V Z data maior sit minore rectarum K T, F C; recta ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k F, T C ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C, ergo existente k T maiore, quam F C, rectæ V N auferenda est recta æqualis N S existente minore, addenda.

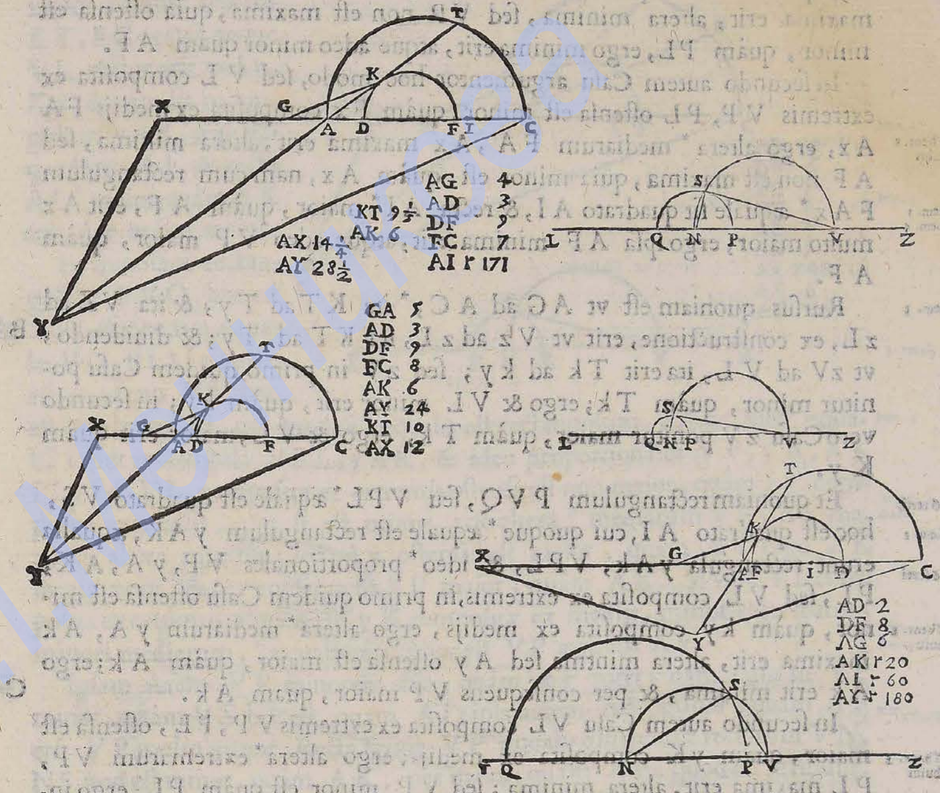
Nunc ostendendum est rectam V P sumptam quemadmodum præcepta docent non esse maiorem maiore rectarum A F, A k, nec minorem minore quo pertinent tria quæ sequuntur Lemmata.

### Lemma VII. D

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P æqualem differentiæ rectarum V N, N S minorem esse maiore rectarum A F, A k maiore autem minore.

AVt enim recta F C intercipitur inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C; quo Casu A F maior est, quam A k, aut inter vtramque cauam, & A F minor est, quàm A K. Primo Casu k T* maxima est omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minima vero F C, itaque V Z data minor est quàm k T, maior autem, quam F C ponitur enim V Z minor maxima, maior minima. Lem 5






A nima. Secundo Casu* minima est K T, maxima F C, vnde V Z data maior, est quam k T, minor quàm F C. Lem 5

Connectantur autem G k, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes k A, C A continuatas in punctis y x. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita F C ad C x, & ita V Z ad Z L, ex constructione, erit V Z ad Z L, vt F c ad C x: & diuidendo, vt Z V ad V L, ita erit C F ad F x; Lem 3
C sed Z V in primo quidem Casu ponitur maior, quàm C P; ergo & V L maior erit, quàm F x. In secundo vero Casu ponitur Z V minor, quàm F C ergo & V L minor erit, quàm F x.

Et quoniam æquales sunt L N, N V, ex constructione, & æquales quoque N P, N Q, vt semidiametri, ergo sunt quoque æquales L P, V Q: quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, sed rectangulum
B P V Q* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A x, ergo rectangulum V L P æquale erit rectangulo F A x quare proportionales erunt V P, F A, A x, P L. in primo quidem Casu sic argumentor; sed V L composita ex extremis ostensa est maior

Mirror

ior, quàm Fx composita ex medijs; ergo altera* extremarum VP, PL maxima erit, altera minima, sed VP non est maxima, quia ostensa est minor, quàm PL, ergo minima erit, atque adeo minor quàm AF. A

In secundo autem Casu argumentor hoc modo, sed VL composita ex extremis VP, PL ostensa est minor, quàm Fx composita ex medijs FA Ax, ergo altera* mediarum FA, Ax maxima erit, altera minima, sed AF non est maxima, quia minor est, quàm Ax, nam cum rectangulum FAx* æquale sit quadrato AI, & recta AI* maior, quàm AF, erit Ax multo maior, ergo ipsa AF minima erit, atque adeo VP maior, quàm AF.

Theor. 2 huius

Lem. 1 Lem. 4

Rursus quoniam est vt AG ad AC,* ita KT ad Ty, & ita VZ ad zL, ex constructione, erit vt Vz ad zL, ita KT ad Ty; & diuidendo, vt zV ad VL, ita erit Tk ad ky; sed zV in primo quidem Casu ponitur minor, quàm Tk; ergo & VL minor erit, quàm ky; in secundo vero Casu zV ponitur maior, quàm Tk, ergo & VL, maior erit quàm Ky. B

Lem. 3

Et quoniam rectangulum PVQ, seu VPL* æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yAK, æqualia erunt rectangula yAk, VPL, & ideo* proportionales VP, yA, AK, PL, sed VL composita ex extremis, in primo quidem Casu ostensa est minor, quàm ky composita ex medijs, ergo altera* mediarum yA, Ak maxima erit, altera mintma sed Ay ostensa est maior, quàm Ak; ergo Ak erit minima, & per consequens VP maior, quam Ak. C

36 tertij

Lem. 3

96 sexti

Theor. 2 huius

In secundo autem Casu VL composita ex extremis VP, PL, ostensa est maior, quàm yK composita ex medijs; ergo altera* extremarum VP, PL maxima erit, altera minima; sed VP minor est quàm PL; ergo ipsa VP minima erit, atque adeo minor, quàm Ak. Existente igitur ratione AD ad AF, non minori, quàm AG ad AC, recta VP* æqualis differentiæ rectarum VN, NS, minor est maiore rectarum AF, AK, maior minore, quod erat ostendendum. A

Theor. 2 huius

## Lemma VIII.

Sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, & data Vz non maior minore rectarum KT, FC. Dico neque differentiam rectarum VN, NS, neque compositam ex ijsdem minorem esse, quàm AK, aut maiorem, quàm AF. D

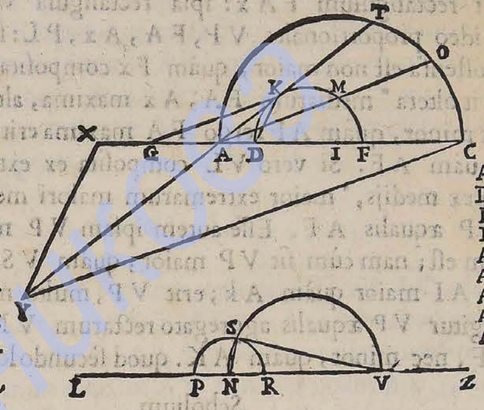
COnnectantur enim Gk, kD quibus parallelæ agantur cy, yx secantes TA, CA productas in punctis yx, & sit primum VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS. d

Lem. 3

Quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita kT ad Ty, & ita quoque VZ ad ZL ex constructione erit, vt VZ ad ZL, ita KT ad Ty: & diuidendo, vt ZV ad VL, ita erit TK ad Ky, sed ZV non est maior, quàm Tk, po-



A ponitur enim ZV non maior minore rectarũ KT, FG; ergo neque VL maior erit quàm Ky. & cum sit rectangulum yAK* æquale quadrato AI, & recta AI,* maior, quàm AK erit Ay multo maior.




AD 2
DF 6
FC 7
KT 8
AK 4
AG 5
AI 12
AX 6
AY 12

lem. 3

lem. 4

Et quoniam rectangulum PVQ, hoc est B VPL (sunt enim æquales VQ, PL) * æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yAk; ideo æqualia erunt rectangula VPL, yAK, & ideo proportionales VP, yA, AK PL: sed VL composita ex extremis ostensa est non maior, quàm ky composita ex medijs, ergo si est minor, erit altera * mediarum yA, Ak maxima, altera minima; sed Ay ostensa est maior, quàm AK ergo AK minima erit, & per consequens VP maior, quàm AK. Si vero VL composita ex extremis æqualis est yK compositæ ex medijs, minor extremarum minori mediarum, * æqualis erit: hoc est VP æqualis Ak. C

3. tertij

lem. 3

Theor. 2 huius

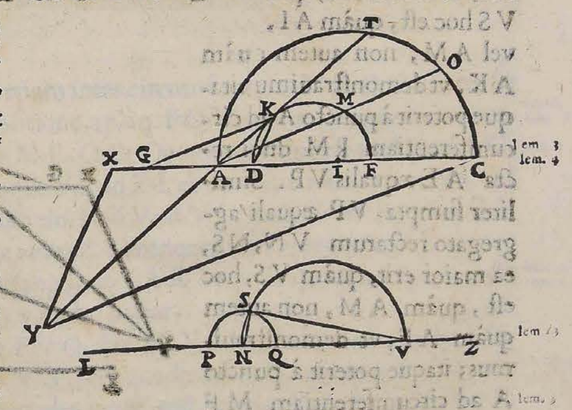
Theor. 8 huius

Ipsam autem VP minorem esse, quàm AF patet; nam cum sit VP minor, quàm VS hoc est, quam AI, ipsa autem AI* minor, quam AF erit VP multo minor. Recta igitur VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS non est minor, quàm AK, nec maior, quàm AF, quod est primum. Sed sit VP æqualis aggregato rectarum VN, NS.

lem. 4

Quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita Fc ad cx, & ita quoque VZ ad ZL, ex constructione, erit vt VZ ad ZL ita FC ad Cx: & diuidendo vt ZV ad VL, ita CF ad Fx; sed ZV non est maior quam CF: ponitur enim ZV non maior minore rectarum KT, FC, ergo neque VL D maior erit, quàm Fx. Et cum sit rectangulum FAx* æquale quadrato AI, & recta AI* minor, quàm AF, erit Ax multo minor.

lem. 3




lem. 3 lem. 4

lem. 3

Et quoniam rectangulum PVZ, hoc est VPL (sunt enim æquales VQ, PL) * æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque*

æqua

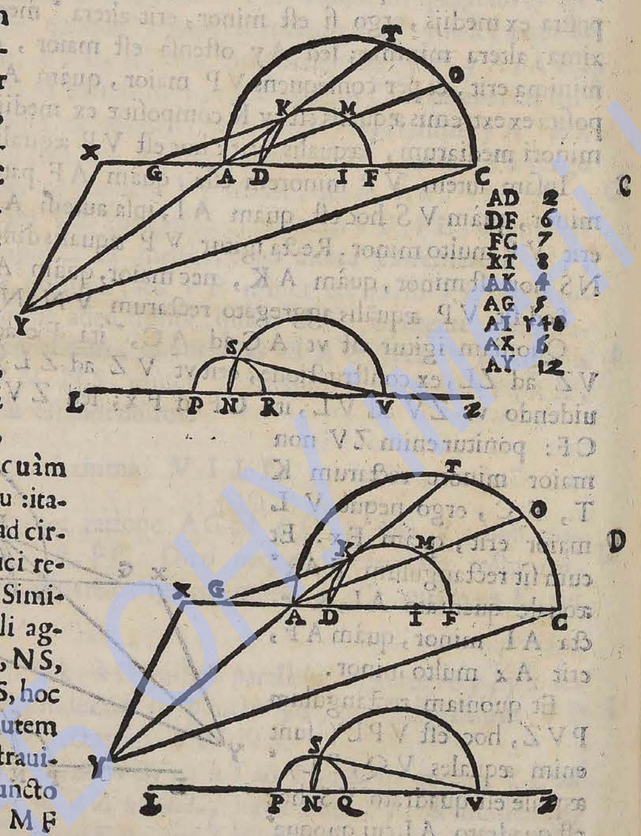
æquale est rectangulum F A x: ipsa rectangula V P L, F A x æqualia A
erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L: sed V L composita ex
extremis ostensa est non maior, quàm F x composita ex medijs, ergo si est
Theor. 8 huius minor, erit altera * mediarum F A, A x maxima, altera minima; sed A x
ostensa est minor, quàm A F: ergo F A maxima erit, & consequenter V P
minor, quàm A F. Si vero V L composita ex extremis æqualis est F x
Lem. 1 huius compositæ ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit,
hoc est V P æqualis A F. Esse autem ipsam V P maiorem, quàm A k,
manifestum est; nam cùm sit V P maior, quàm V S, hoc est, quàm A I;
ipsa autem A I maior quàm A k; erit V P, multo maior.

Recta igitur V P æqualis aggregato rectarum V N, N S non est maior
quàm A F, nec minor, quàm A K. quod secundo loco erat ostendendum; B

## Scholium.

Ex demonstratis patet, cum A D ad A F minorem rationem habet, quàm A G ad A C, data autem V Z non est maior minore rectarum k T, F C; Problema duobus modis absolui posse. Nam si à puncto A ad circũferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec secet circumferentiã T C in O, erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias K F, T C interijciuntur, & sumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S, ea minor erit, quã V S hoc est, quàm A I, vel A M, non autem quàm A K, vt demonstrauimus: itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k M duci recta A E æqualis V P. Similiter sumpta V P æquali aggregato rectarum V N, N S, ea maior erit, quàm V S, hoc est, quàm A M, non autem quàm A F, vt demonstrauimus; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam M F du-

Lem. 8




C

D



A duci recta A E æqualis ipsi V P. Igitur si A E ducatur æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur recta datæ V z æqualis inter circumferentias K M, T O; si vero ducatur A L æqualis aggregato ipsarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, ac proinde Problema duobus modis absolui. quod in præcepto secundo monuimus.

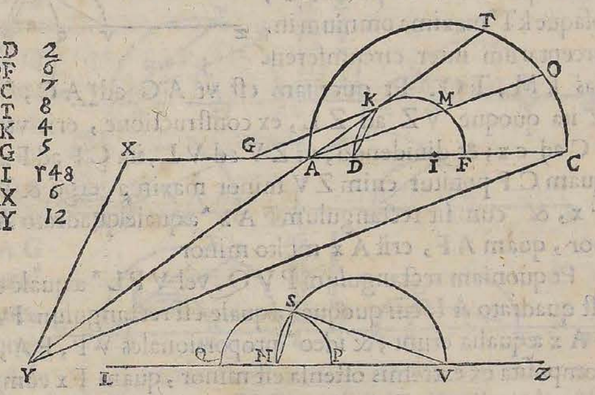
## Lemma IX.

Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z sit maior minore rectarum K T, F C, & à puncto A ad circumferen-
B tiam k F ducatur A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam T C in O, est autem A I * minor, quàm A F, & maior quam A k. Dico si K T Lem. 4
maior sit, quàm F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse, quàm A K, minorem quam A M; sin minor, compositam ex V N, N S, minorem esse, quàm A E, maiorem, quàm A M.

Connectantur enim G k, k D, quibus parallelæ agantur C y, y x secantes T A, C A productas in punctis y x, & sit primum V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S. & k T maior, quã F C, ergo ipsa k T maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C: quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit

C

| | |
|---|---|
| AD | 2 |
| DF | 6 |
| FC | 7 |
| KT | 8 |
| AK | 4 |
| AG | 5 |
| AI | 1748 |
| AX | 6 |
| AY | 12 |




D V Z maior, quam F C, ex positione, ipsaq. F C * maxima omnium intercep- Corol. Lem. 6
tarum inter circumferentias M F, O C: Quoniam igitur est vt A G ad A C, lem. 3
* ita K T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita T K ad k y: sed Z V minor est, quàm T k; ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor erit, quàm k y, & cum sit rectangulum y A K * æquale quadrato A I, & recta lem. 3 lem. 4
A I * maior, quàm A k, erit A y multo maior.

Et quoniam rectangulum P V Q hoc est V P L (sunt enim æquales V Q, P L) * æquale est quadrato V S, vel quadrato A I; cui quoque * æquale terrij lem. 5
est rectangulum y A k, æqualia erunt rectangula V P L, y A k, &

ideo* proportionales V P, y A, A K, P L, sed V L composita ex extremis A
Theor. 2 huius ostensa est minor, quam k y composita ex medijs, ergo altera* mediarum y A, A k maxima erit, altera minima; sed A y ostensa est maior, quàm A k ergo A k minima erit, & consequenter V P maior, quàm A k. Quod autem ipsa V P minor sit, quàm A M patet ex eo, quod ea minor est quàm V S, ipsique V S æqualis A I, vel A M, ex constructione. Existente igitur k T maiore, quàm F C, recta V P differentia rectarum V N, N S maior est, quàm A K, minor autem quam A M. quod est primum.

Sed sit V P æqualis compositæ ex V N, N S, & K T minor,
Lem. 6 quam F C, ergo F C* maxima est omnium interceptarum inter circumferentias k F, T C, quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non etiam inter circumferentias k M, T O cum sit V Z maior quam k T ex positione, ipsaque k T* maxima omnium in-
Corol. Lem. 6 terceptarum inter circumferentias k M, T O. Et quoniam est vt A G ad A C,* ita F C ad C X,
lem. 3 & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita C F ad F x: sed Z V minor est C
lem. 3 quàm C F ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor erit, quam
Lem. 4 F x, & cum sit rectangulum F A x* æquale quadrato A I, & recta A I* minor, quàm A F, erit A x multo minor.

36 tertij Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale est quadrato V S, hoc
lem. 3 est quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A x rectangula V P L
86 sexti F A x æqualia erunt, & ideo* proportionales V P, F A, A x, P L, sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quàm F x composita ex medijs ergo
Theor. 2 huius altera* mediarum F A, A x maxima erit, altera minima; sed A x ostensa est minor, quàm F A, ergo ipsa F A maxima erit, quare V P minor, quàm A F. Ipsam autem V P maiorem esse, quam A M manifestum est: nam ea maior est quam V S, V S autem æqualis A I, vel A M, ex constructione. Existente igi- D
tur K T minorem, quam F C recta V P æqualis compositæ ex V N, N S minor est, quàm A F, maior autem quam A M. quod secundo loco erat ostendendum, quare constat propositum.

Plerumque accidit vt Resolutio Problematis incidat in æquationem de duobus terminis explicabilem, ex quibus vnus tantum solutioni Problematis idoneus sit, quippe non semper vterque indicat id quod quæritur, sed alter tantum, interdum minor, interdum maior. Dicendum est igitur quomodo terminus quæsitum indicant dignoscatur.

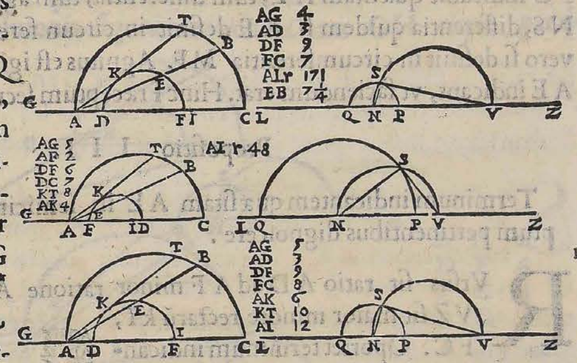
Dignoscitur terminus quæsitum indicans ipsa terminorum, prout Po-



A Porisma præcipit, exhibitione: nam exhibitis illis terminis, si vnus tantum idoneus est solutioni Problematis, alter in construendo Problemate manifesto se ostendit, aut maiorem quæsito, aut minorem, aut etiam alia via constructioni aduersantem: is ergo reijciendus; sumendus autem alter pro indice quæsiti; si vero vterque terminus solutioni idoneus est, quia vero non indicat eundem quæsitum vterque, sunt enim eo Casu duæ magnitudines, de quibus potest quæri, altera minor, altera maior. Ideo si de minore quæritur sumendus est pro indice quæsiti terminus minor; si verò de maiore sumendus maior. Hæc omnia exemplis fient euidentiora.

## Propositio I.

B Terminum quæsitam A E indicantem in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.




Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumantur compositionis figuræ ad huiusmodi Casum pertinetes. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt V P differentia rectarum V N, N S, & V Q aggregatum earundem, manifestum est alterum C eorum quæsitam A E indicare. Et quoniam ratio A D ad A F ponitur non minor ratione A G ad A C, recta A I non erit* minor maiore rectarum A F, A k, vnde A E quæsita minor erit, quam A I, hoc est quam V S, & multo minor quam V Q. ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P. Itaque existente ratione A D ad A F, non minore quam A G ad A C, differentia rectarum V N, N S indicat D A E quæsitam. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est.

## Propositio II.

Terminum quæsitam A E indicantem in semicirculis ad secundum Præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & data V Z non sit maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur Compositionis figura ad huiusmodi ca-

sum pertinens. Quoniam igitur termini, de quibus æquatio explicabilis est sunt V P minor, V Q maior, manifestũ est alterum eorum indicare quæsitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, hoc

lem. 4 potest fieri, est enim A I* minor quàm A F, maior autem quam A k. Aut igitur quæsita A E desinit in circumferẽtia M K, aut in circumferentia M F. Si in M K, ea erit minor quam A M, hoc est quam A I, seu V S, & multo minor, quàm V Q aggregatum rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat A E quæsitam, ergo eam indicat V P differentia ipsarum V N, N S. B

Si verò quæsita A E desinit in circumferentia M F, ea maior est, quã A M, hoc est quam A I, vel V S, & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat A E, quæsitum ergo eam indicat V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & data V Z non sit maior minore rectarũ K T F C indicabit quæsitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N N S, differentia quidem si A E desinit in circumferentia k M, aggregatum vero si desinit in circumferentia M F. Agnitus est igitur terminus quæsitum A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum secundum cõstitutum est.

## Propositio III. C

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

RVrsus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z sit maior minore rectarũ k T, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Fiat cõstructio vt supra, & producatur A M ad circumferentiam T C in O. erit M O* minima

Lem. 6 omnium interceptarum inter circumferẽtias k F, T C; manifestum est igitur rectã datæ V Z æqualẽ posse aptari inter circumferentias semicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C. Itaque sit primum k T maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias K M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C cum sit V z maior quam F C, ipsaque F C

Corol. lem. 6 * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur: itaque A E quæsita desinit in circumferentia K M, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam A S, & multo minor quàm V Q, quæ est æqualis aggregato rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat quæsitam A E, D

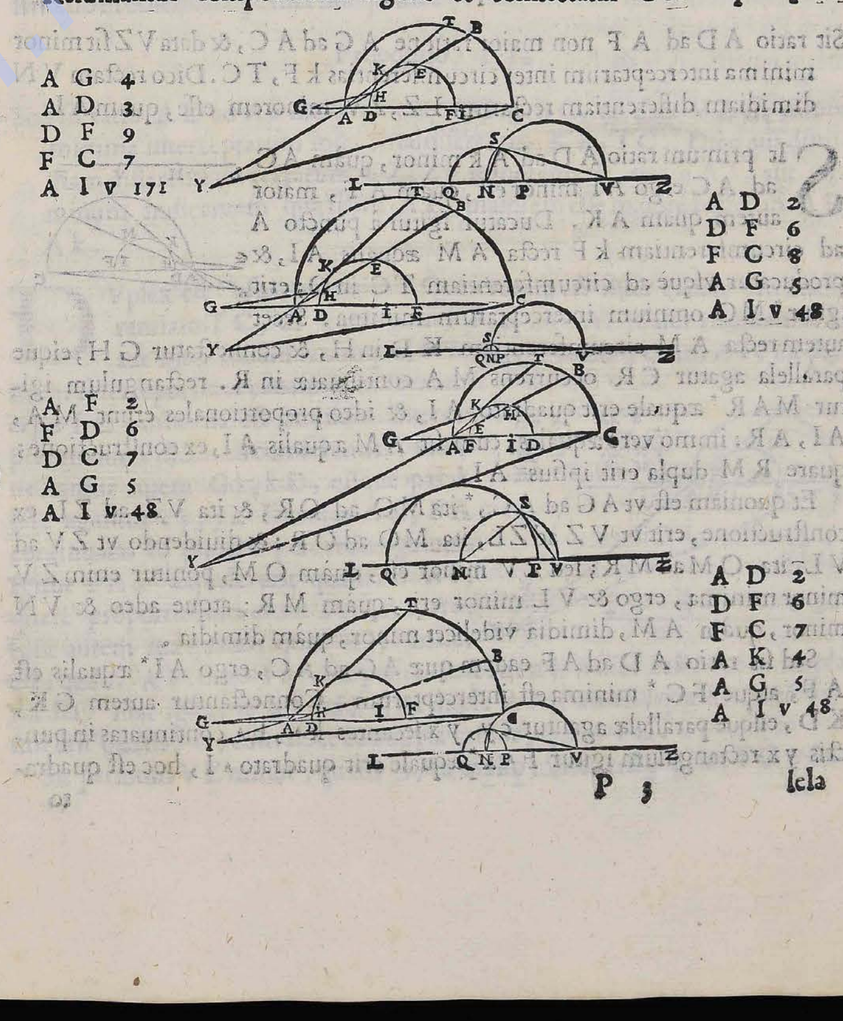


A E, ergo eam indicat V P æqualis differentiæ ipsarum V N, N S.

Sed sit F C maior, quàm K T, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, T O. Itaque A E quæsita desinit in circumferentia M F, & ideo maior est, quam A M, hoc est quam A I, seu quàm V S, atque multo maior, quàm V P. Ipsa igitur V P nõ indicat quæsitam A E, ergo eam indicat recta V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, data autem V z maior minore rectarum K T, B F C, differentiam rectarum V N, N S existente K T maiore, quam F C indicabit A E quæsitam, existente vero minore, aggregatum. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium constitutum est.

Ostensa ratione qua sciri possit vter terminorum de quibus Æquatio explicabilis est, indicet A E quæsitam, consentaneum est ostendere, indicante vno terminorum quæsitam A E quid indicet terminus alter.

Resumantur compositionis figuræ & connectatur G H eique paral-

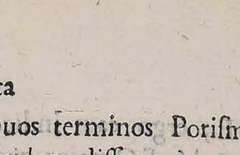


lela agatur c y occurreus B A continuatæ in y. Duos terminos Porisma A
constituit, de quibus A E explicabilis est; vnum quidem differentiam rectarum V N, N S, alterum verò aggregatum earundem. Dico igitur indicante vno terminorum quæsitam A E alterum rectæ A y indicem esse. Indicet enim quæsitam A E terminus V P, siue sit differentia rectarum
Lem. 3 V N, N S, siue aggregatum. Quoniam igitur rectangulum E A y * æquale
86 tertij est quadrato A I, & rectangulum P V Q æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia sunt, quia & rectæ A I, V S æquales sunt ex constructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y, sed V P, cum indicet quæsitam A E, æqualis est ipsi A E, ergo & V Q æqualis erit A y. itaque ipsa V Q, quæ est alter terminus indicat rectam A y. Indicante igitur vno terminorum V P, V Q, quæsitam A E alter rectam A y indicat B
quod erat ostendendum.

Expositis quæ ad constructionem pertinent non alienum videtur instantias constructioni aduersantes, & vnde ipsæ oriantur indicare, quod in Scholio post Resolutionem monuimus: quo circa tres sequentes propositiones proferuntur.

## Propositio I.

Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C, & data V Z sit minor minima interceptarum inter circumferentias k F, T C. Dico rectam V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quam A I. C

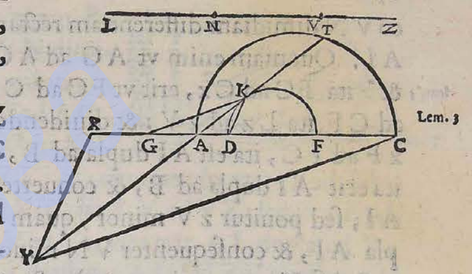



Lem. 6 Sit primum ratio A D ad A k minor, quàm A G ad A C ergo A I minor est, quàm A F, maior autem quam A K. Ducatur igitur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, & c producatur vsque ad circumferentiam T C in O; erit
Lem. 6 igitur * M O omnium interceptarum minima. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur C R occurrens M A continuatæ in R. rectangulum igi-
Lem. 8 tur M A R * æquale erit quadrato A I, & ideo proportionales erunt M A, A I, A R: immo vero æquales, cum sit A M æqualis A I, ex constructione; quare R M dupla erit ipsius A I. D
Lem. 3 Et quoniam est vt A G ad A C, * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita M O ad O R: & diuidendo vt Z V ad V L, ita O M ad M R; sed Z V minor est, quàm O M, ponitur enim Z V minor minima, ergo & V L minor erit, quàm M R; atque adeo & V N minor, quàm A M, dimidia videlicet minor, quàm dimidia.
Lem. 4 Lem. 5 Sed sit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo A I * æqualis est A F, atque F C * minima est interceptarum. Connectantur autem G K, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes k A, F A continuatas in pun-
Lem. 3 ctis y x rectangulum igitur F A x * æquale erit quadrato A I, hoc est quadra-





A to A F: vnde æquales erunt F A, A x, ac proinde F x dupla erit ipsius A F, vel A I.




Lem. 3 Et quoniam est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex constructione, & * ita F C ad Z L, ex constructione, & * ita F C ad c x erit V Z ad Z L, vt F c ad c x. & diuidendo vt Z V ad V L, ita C F ad F x, sed Z V cum sit minor minima minor est quàm C F, ergo & V L minor erit quàm F x: vnde & V N minor, quàm A I; dimidia videlicet minor, quàm dimidia.

B

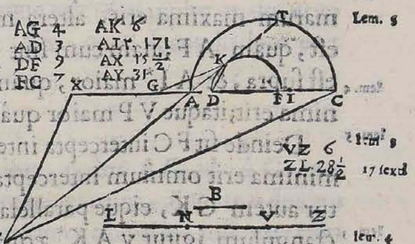
### Scholium.

Ex his constat cum ratio A D ad A F non est maior, quàm A G ad A C instantiam constructioni aduersantem oriri ex data V Z deficiente à minima. nam eo Casu necesse est, quod V N dimidia differentia rectarum L Z, Z V minor sit quàm A I, & eo id rectæ ipsi A I æqualis non possit aptari in circulo, cuius diameter est V N, prout Porisma fieri iubet, atque adeo constructio Problematis perfici non possit.

## Propositio II.

C Sed sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & data V Z sit minor minima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico aut dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quàm A I, aut terminum indicantem quæsitam A E, maiorem esse maiore rectarum A F, A k.

Dvplex est Casus, aut enim F C intercepta est inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F; & ideo A F maior est, quàm A k, aut inter cauam vtramque, & ideo A K maior, quam A F. Sit primum intercepta inter cauam & conuexam;




Lem. 5

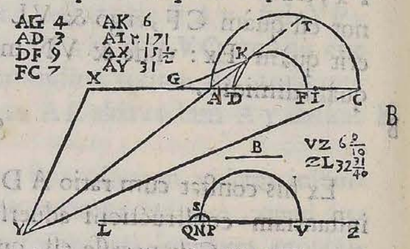
Lem. 8 17 secd

Lem. 4

D ergo F C * minima est omnium interceptarum inter dictas circumferentias. Connectantur autem G k, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A K, F A continuatas in punctis y x. rectangulum igitur F A x * æquale erit quadrato A I; quare * proportionales erunt F A, A I, A x; sunt autem inæquales, quia A I, * maior est, quàm A F. ergo F x composita ex extremis maior erit, quàm dupla A F. ergo F x ad F c, ita dupla A I ad aliam, quæ sit B: ea minor erit quàm F C, cum sit & A I dupla minor, quam F K.

Sit primum V Z minor, quam B, ea multo minor erit, quam F C. Di-

co V N dimidiam differentiam rectarum L Z, z V, minorem esse, quàm A
A I. Quoniam enim vt A G ad A C ita est V z ad z L, ex constructione,
lem. 3 & * ita F C ad C x, erit vt F C ad C x, ita V z ad z L, & conuertendo vt x C
ad C F ita L z ad z V: & diuidendo vt x F ad F C, ita L V ad V z; sed
x F ad F C, ita est A I dupla ad B, ex constructione, ergo vt L V ad V z,
ita erit A I dupla ad B, & conuertendo vt z V ad V L, ita B ad duplam
A I; sed ponitur z V minor, quàm B, ergo & V L minor erit, quàm du-
pla A I, & consequenter V N minor, quàm simpla A I, quod est primum.




Sed sit V z non minor, quàm B, minor B
autem quàm F C. Eadem ratione quâ su-
pra, ijsdemque verbis ostendemus, vt Z V
ad V L, ita esse B ad duplam A I; sed po-
nitur z V non minor, quàm B; ergo ne-
que V L minor erit quàm A I dupla; id-
circo nec V N minor quàm A I simpla.
In circulo igitur circa diametrum V N de-
scripto poterit aptari recta æqualis A I. aptetur ergo, eaque sit V S, & con-
nectatur N S, cui æqualis e x, N V auferatur N P; reliqua V P indicat A E
quæsitam sic habetur in Porismate, per cuius rationem texuimus constructio-
nem Problematis. Dico igitur ipsam V P maiorem esse, quàm A F. Quo-
lem. 3 niam enim vt A G ad A C, ita est V z ad z L ex constructione, & * ita F C
ad C X, erit vt F c ad c x, ita V z ad z L. & diuidendo vt C F ad F x ita erit
z V ad V L, sed C F ponitur maior quam z V, ergo & ∠ F x maior erit C
quam V L.

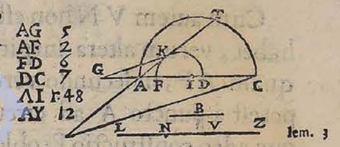
Describatur autem ex centro N ad interuallum N S, vel N P circulus se-
36 sexti cans N L in Q. rectangulum igitur P V Q * æquale erit quadrato V S, hoc
est quadrato A I, sed rectangulum quidem P V Q æquale est rectangulo
lem. 3 V P L; sunt enim æquales V P, P L, quadratum vero A I æquale rectangulo
F A x, ergo rectangulum F A x rectangulo V P L æquale erit, quare *
46 sexti proportionales erunt F A, V P, P L, A X; sed F x composita ex extre-
Theor. 2 huius mis ostensa est maior, quàm V L composita ex medijs, ergo altera * extre-
marum maxima erit, altera minima; sed A x non est minima, quia maior
est, quàm A F; nam cum sint proportionales F A, A I, A X, vt ostensum
lem. 4 est supra, & A I * maior, quàm A F, erit A x multo maior, ergo A F mi- D
lem. 5 nima erit; itaque V P maior quàm A F quod secundo loco erat ostendendum.

Deinde sit F C intercepta inter cauas circumferentias T C, k F, ergo k T *
minima erit omnium interceptarum inter dictas circumferentias. connecta-
tur autem G K, eique parallela agatur c y secans k A continuatam in y. re-
lem. 3 & ctangulum igitur y A K * æquale erit quadrato A I; quare * proportionales
29 sexti erunt y A, A I, A K; sunt autem inæquales, quia A I * maior est, quàm A K,
Lem. 4 ergo y k composita ex extremis maior erit quàm dupla media A I. Fiat igi-
tur vt y K ad k T ita dupla A I ad aliam, quæ sit B. ea minor erit, quàm k T
cum sit & A I dupla minor, quàm y k.

Pri-

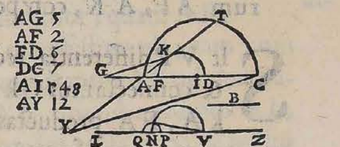


A Primum igitur sit V Z data minor, quam B.
ea multo minor erit, quam K T. Dico V N dimi-
diam differentiam rectarum L Z, Z V minorem
esse, quàm A I. Quoniam enim vt A G ad A C,
ita est V Z ad Z L ex constructione, & * ita K T
ad T y, erit vt k T ad T y, ita V Z ad Z L: & conuertendo vt y T ad T k,
ita L Z ad Z V: & diuidendo, vt y k ad K T, ita L V ad V Z: sed vt y K ad
K T, ita est A I dupla ad B, ergo vt L V ad V z, ita erit A I dupla ad B;
& conuertendo, vt Z V ad V L, ita B ad duplam A I; sed Z V ponitur mi-
nor quam B, ergo & V L minor erit, quàm A I dupla, vnde & V N mi-
nor, quàm A I simpla, quod est primum.




lem. 3

B Sed sit data V Z non minor, quàm B, minor
autem quàm k T: eadem ratione qua supra ijsdem-
que prorsus verbis ostendemus, vt z V ad V L ita
esse B ad duplam A I, sed z V ponitur non minor,
quam B, ergo neque V L minor erit, quàm A I
dupla, atque adeo nec V N minor quam A I simpla. in circulo igitur cuius
diameter V N aptetur recta V S æqualis A I, & connectatur N S, & ex N V
abscindatur N P æqualis N S; reliqua V P indicat A E quæsitam: sic enun-
ciatum est in Porismate. Dico igitur ipsam V P maiorem esse, quàm A k.




Quoniam enim vt A G ad A C, ita est V z ad z L ex constructione, & * ita lem. 3
k T ad T y, erit vt k T ad T y, ita V z ad z L, & diuidendo vt T k ad K y,
C ita erit z V ad V L sed T k ponitur maior, quàm z V, ergo & k y maior
erit, quàm V L.

Describatur autem circulus sub N centro interuallo N S, vel N P secans
N L in Q: rectangulum igitur P V Q hoc est V P L * æquale erit quadrato 36 tertij lem. 1 & 46 sexti
V S, hoc est quadrato A I, seu quod idem est * rectangulo y A k, quare *
proportionales erunt y A, V P, P L, A k, sed y K composita ex extremis,
ostensa est maior, quam V L composita ex medijs, ergo altera * extremarum Theor. 2 huius
y A; A K maxima erit, altera minima, sed A y non est minima, quia ma-
ior est quàm A K, nam cum sint proportionales y A, A I, A K, & A I ma-
ior quam A k, vt demonstratum est, vtrumque erit A y multo maior ergo
A k minima erit, quare V P maior quam A k. quod secundo loco erat
D ostendendum.

Scholium.

Existente igitur ratione A D ad A F maiore, quàm A G ad A C, ma-
nifestum est ex data V z minore minima interceptarum, alteram è duabus
instantijs constructioni aduersantibus oriri; oritur enim prima instantia cum
V N dimidia differentia rectarum L z, z V minor est, quàm A I; nam re-
cta æqualis ipsi A I non potest aptari in circulo circa diametrum V N descri-
pto, quemadmodum Porisma fieri iubet, & ideo Problema construi non
potest.

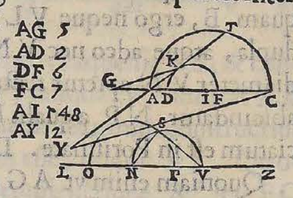
Cum

Cum autem V N non est minor, quam A I, prædicta instantia locum non habet, verum altera surgit, nam recta V P fit maior in primo quidem Casu quàm A F, in secundo vero quàm A K; itaque recta æqualis ipsi V P, non potest à puncto A ad circumferentiam K F duci, vt Porisma præcipit, atque adeo constructio Problematis perfici nequit. A

## Propositio III.

Sed in quacumque ratione extiterint A D ad A F, & A G ad A C. sit data V z maior maxima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico differentiam quidem rectarum V N, N S minorem esse minore rectarum A F, A K, compositam vero ex ijsdem maiorem maiore. B

SIt V P differentia rectarum V N, N S, compositam autem ex ipsis V Q, & connectantur G k, K D, quibus parallelæ agantur c y, y x secantes k A, F A productas in punctis y x. Aut igitur F C intercepta est inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C aut inter vtramque cauam. Primum sit intercepta inter conuexam, & cauam, ergo A F maior erit, quam A k. Et quoniam est vt A G ad A C* ita K T ad T y, & ita A z ad z L, ex constructione, erit vt V z ad z L ita k T ad A y, & diuidendo vt z V ad V L, ita T k ad K y, sed z V maior est, quam T K, ponitur enim z V maior maxima, ergo & V L maior erit, quàm k y. C




Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale est quadrato V S, & rectangulum y A k* æquale quadrato A I, quæ quidem quadrata æqualia sunt, cum sint æquales & rectæ V S, A I ex constructione, ideo rectangula V P L, y A K æqualia erunt, & ideo* proportionales V P, y A, A K, P L; sed V L composita ex extremis, ostensa est maior, quam y K composita ex medijs, ergo altera* extremarum V P, P L maxima erit, altera minima, sed cum sit V P minor, quam P L; ipsa V P minima, & per consequens minor quàm A K.

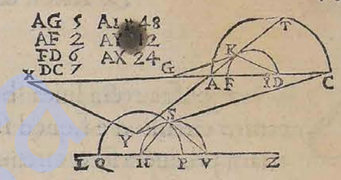
Rursus quoniam est A G ad A C,* ita F c ad c x, & ita V z ad z L ex constructione; erit vt V z ad Z L, ita F c ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: sed z V cum sit maior maxima, maior est quam C F, ergo & V L maior erit quam F x. D

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V Q L* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui* æquale est & rectangulũ F A x rectangulum V Q L rectangulo F A x æquale erit,* quare proportionales erunt V Q, F A, A x, Q L, sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quàm F x composita ex medijs, ergo altera* extremarum V Q, Q L maxima erit, altera minima; sed V Q maior est, quàm Q L ergo ipsa V Q maxima erit, & per consequens maior quàm A F.

Sed sit F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C, ergo A F minor



A minor erit, quàm A K, & quoniam est vt A G ad A C,* ita F C ad c x, & ita V z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad z L ita F C ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: sed z V maior est, quàm C F ea enim ponitur maior maxima; ergo & V L maior erit, quàm F x.




Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui* æquale est, & rectangulum F A x rectangula V P L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L; sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quam F x composita ex medijs, ergo altera* extremarum maxima erit altera minima, sed V P minor est, quam P L, ergo ipsa V P minima erit, & per consequens minor, quam A F. B

Rectam autem V Q maiorem esse, quàm A k manifestum est; nam cum sit vt A G ad A C minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, erit & quadratum A K minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quàm recta A I hoc est quam recta V S, & multo minor quam recta V Q.

Existente igitur V Z maiore maxima interceptarum differentia rectarum V N, N S minor est minore rectarum A F, A k; composita vero ex ijsdem V N, N S maior maiore. quod erat ostendendum.

### Scholium.

C Constat igitur instantiam constructioni aduersantem oriri ex data V Z excedente maximam interceptarum, cum eo Casu necesse sit, vt recta V P quæsitam A E indicans vel minor sit minore rectarum A F, A k, vel maior maiore, & ideo recta æqualis ipsi V P non possit à puncto A ad circumferentiam K F duci, quemadmodum Porisma fieri præcipit, & propterea constructio problematis perfici non possit.

## Casus quartus.

Sed vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi neutro reliquum includente etiamsi complerentur.

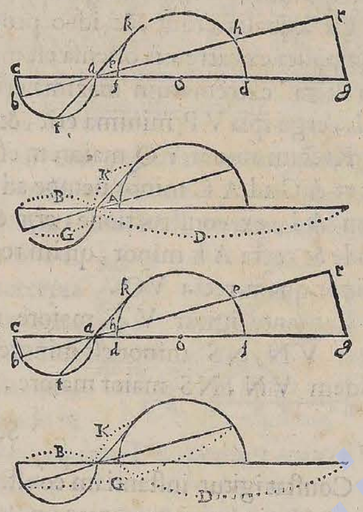
D SInt igitur tales duo semicirculi a b c, d e f data autem recta linea G, & ducatur A k contingens semicirculum d e f in K, ipsum vero a b c secans in T. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum A pertineant.

Hic quoque Casus in duos alios Casus diuiditur: in primo quidem ponenda est ea recta inter cauam circumferentiam vnius semicirculi, & conuexam alterius, in secundo vero ponenda est inter cauas vtriusque.

Re-

Resolutio. A

Sit iam posita recta linea b a e æqualis datæ G, vt impetratum est, & ex centro circuli d e f, quod sit O ponatur o g æqualis o c, & recta b a e etiam producta secet circumferentiam k d in h, & ducatur g r ipsi b e productæ ad rectos angulos, & connectatur c b angulus igitur a b c in semicirculo rectus est, ac proinde h r* æqualis e b. Lem 3.



Et quoniam datæ sunt a c, a g, b e, a k; prima sit B, secunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus: & quæratur a e, esto illa A, ergo recta a b erit G -- A, & cum sint similia triangula a b c, a r g; anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti; hic ex constructione, ille ex vi semicirculi, & æquales quoque b a c, r a o, quia sunt ad verticem, erit vt a c, ad a g, ita a b ad a r. hoc est in figuris ad Resolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, à qua si abscindatur recta h r æqualis ipsi e b, remanebit a h, quæ ideo erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$ -- G; sed rectangulum e a h æquale est quadrato a k, ergo B

$\frac{D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } A Q}{B}$ -- G in A æquabitur K Q

Ducantur omnia in B; ergo

D in G in A -- B in G in A -- D in A Q æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt A Q ex se subsistat, ergo G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ -- A Q æquabitur $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, nempe fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta D igitur transmutatione.

G in A -- F in A -- A Q æquabitur Z Q

hoc est G -- F in A -- A Q æquabitur Z Q.

Et explicata æquatione $G^{\frac{1}{2}} - F^{\frac{1}{2}} +$ L. V. ( $G^{\frac{1}{2}}$ -- $F^{\frac{1}{2}}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel $G^{\frac{1}{2}}$ -- $F^{\frac{1}{2}}$ -- L. V. ( $G^{\frac{1}{2}}$ -- $F^{\frac{1}{2}}$ Q -- Z Q) æquabitur A.

In hac quoque æquatione A explicabilis est de duobus terminis, maiore, & minore; sed quo Casu terminus maior indicet quæsitam a e, quoue terminus minor quoue etiam vterque suo loco dicetur.

Po-



A

Porisma.



Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. deinde dimidiæ differentiæ, qua G superat ipsam F, addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ differentiæ superat quadratum a i, fiet terminus maior. Vel eidem dimidiæ differentiæ dempta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Antequam constructio fiat ostendendæ sunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes, inter circumferentias K f, t c intercipiuntur, idque vt data G possit determinari, ne maximam superaret, neue à
B minima superaretur. sed prius sequens Lemma demonstrabo, quò facilius, ac clarius ea, quæ sequuntur demonstrentur.

Lemma X.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & contingat recta A K semicirculum D E F in K. & ex centro circuli D E F, quod sit V ponatur V G æqualis V C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & rectam A I minorem esse minore rectarum A F, A K, & si æqualis æqualem, & si maior maiorem: at minorem maiore.

C Sit primum ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. aut igitur recta F C intercepta est inter cauas vtriusque semicirculi circumferentias, aut inter cauam vnius, & conuexam alterius. Sit primum intercepta inter cauas. Quoniam igitur est,




vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I ex constructione, quadratum A K maius erit quadrato A I, vnde & recta A k maior, quàm recta A I.

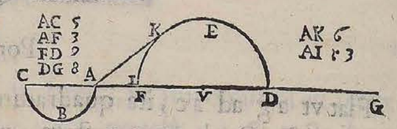
Deinde sit F C intercepta inter cauam, & conuexam circumferentiam. Quoniam igitur ratio A D ad A F ponitur minor ratione A G ad A C, vt autem




D A G ad A C, ita est quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A k, A F ad tertiam, ita est quadratum secundæ A k ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A f, minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I: quare quadratum A I* minus erit quadrato A F, & per consequens recta A I minor, quàm recta A f; recta igitur A I minor est minore rectarum A f, A k, quod est primum. X quinti

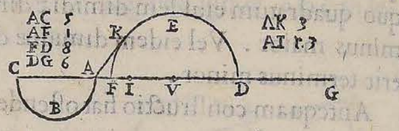
Deinde sit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo eadem erit,

quæ quadrati A K ad quadratum A I, sed vt A D ad A F, ita est quadratum A k ad quadratum A F, vt demonstrauimus: ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I æqualis rectæ A F, quod est secundum.




A

Postremo sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo maior erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F, ita ostensum est quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F maior erit ratione quadrati A K ad quadratum A I; quare quadratum* A I maius erit quadrato A F, & consequenter recta A I maior, quam recta A F: quod est tertium.




B

Denique quoniam est vt A G ad A C maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I; quadratum A K maius erit quadrato A I: vnde & recta A K maior quam recta A I. Recta igitur A I minor est maiore rectarum A F, A K; quod vltimo loco erat ostendendum

## Lemma XI.

Iisdem positis. Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico K T maximam esse omnium, quæ per punctum A ductæ inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C intercipiuntur, minimam F C; earum vero quæ inter cauas circumferentias intercipiuntur, minimam esse k T, maximam F C. Aliarum autem vtroque Casu propinquiorem minimæ remotiore maiorem esse.

C

10 quinti

DVcatur enim per A vtcumque recta linea E A B secans circumferentias K F, T C in punctis E B & sit primum F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior est, quam A B, & A F maior quam A E tota C F maior erit, quam tota B E, & sic ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur F C.




D

Pari ratione quoniam A T minor est, quàm A B, & A k minor quam A E, tota K T minor erit, quàm tota E B, atque eadem ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur K T.

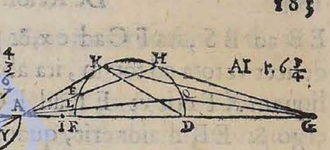
Rursus ducatur per A alia recta L A I secans circumferentias k F, T C in punctis L P, sitque L P minima k I propinquior, quam E B; erit A P minor quam A B, & A L minor quam A E, atque adeo tota P L minor, quam tota B E, hoc est propinquior minimæ. minor remotiore.

Sed



A

Sed sit F C intercepta inter cauam circumferentiã T C, & conuexã K F, & connectantur G k, k D, quibus parallelæ agãtur c y, y x secantes A T, A C in punctis y x. rectangulum igitur F A X* æquale erit quadrato A I, sed recta A I ex antecedente Lemmate non est maior quàm A F, ergo neque A x maior erit quam ipsa A F, alioquin rectangulum F A X maius esset quadrato A I.




lem. 3

Et quoniam rectangulum F A x* æquale est rectangulo y A k, erit vt A K ad A F,* ita A x ad A y: sed A k maior est, quam A F, ergo & A x maior erit quàm A y; sed A x ostensa est non maior, quàm A F, ergo & A F maior erit quàm A y, atque A K multo maior. Itaque quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y minima erit A y, & consequenter maxima A K, atque adeo y k composita ex maxima & minima maior, quàm F x composita ex reliquis.

Corol. Lem. 3 & 6 sexti

B

Theor. 6 huius 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, ita F x ad C x, & ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita F c ad c x: & permutando vt k T ad F C, ita T y ad c x videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, quare & reliqua y k ad reliquam X F, erit vt tota k T ad F C totam, sed y K ostensa est maior, quam X F, ergo & k T maior erit, quàm F C.

lem. 3

Producatur autem B E donec secet circumferentiam k D in H, & connectatur G H, cui parallela agatur C S secans ipsam A B in S. rectangulum igitur y A k* æquale erit rectangulo S A E: quare vt A K* ad A E, ita erit A S ad A y. sed A k maior est, quam A E, ergo & A S maior erit quam A y: est autem & A F maior, quam A y, vt demonstrauimus, ergo A E multo maior erit; atque A K multo maior. Sic igitur quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y minima est A y, maxima vero A K vnde y K composita ex maxima & minima* maior, quam S E composita ex reliquis.

Corol. Lem. 3 & 6 sexti

C

5 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, ita E B ad B S, & ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita E B ad B S: & permutando vt k T ad E B, ita T y ad B S videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam: quare & reliqua y K ad reliquam S E erit, vt k T ad E B; sed y k ostensa est maior, quam S E, ergo k T maior erit, quam E B, eademque ratione ostendetur ipsa K T omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium K T.

lem. 8

D

Deinde quoniam rectangulum F A x* æquale. est rectangulo E a S, erit vt A E ad A F, ita A X ad A S; sed A E maior est; quam A F, ergo & A X maior erit, quam A S; sed a X ostensa est non maior, quàm A F, ergo & A F maior erit, quam a S, atque a E multo maior. itaque quatuor proportionalium a E, a F, a x, a S maxima esto a S, minima vero a E, atque adeo S E composita ex maxima, & minima* maior, quàm x F composita ex reliquis.

Corol. Lem. 3 & 6 sexti

5 quinti

Et quoniam est vt a G ad a C, ita E B ad B S, & ita F C ad c x, erit vt

lem. 3

EB ad BS, ita FC ad cx, & permutando vt EB ad FC, ita BS ad cx. vi- A
delicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; quare & * reliqua SE ad reliquam XF erit vt EB ad FC; sed SE ostensa est maior, quàm XF, ergo & EB maior erit, quam FC; & sic quæcumque alia demonstrabitur maior, quàm ipsa FC. Minima est igitur FC.

Sed ducatur per A alia recta PAL secans circumferentias TC, kF in punctis PL, circumferentiam vero KD in Q, & sit PL minimæ CF propinquior, quàm EB, & connectatur GQ, & ei parallela agatur CZ secans rectam PA in Z. Rectangula igitur LAZ, EAS* æqualia erunt, & ideo * proportionales AL, AE, AS, AZ; sed AL minor est quam AE; ergo & AS minor erit, quam AZ. Corol. Lem. 3 xvi sexti

Et quoniam rectangulum EAS* æquale est quadrato AI, erunt propor- B
tionales AE, AI, AS, sed AE maior est, quam AI, cum ipsa AI non sit* maior, quàm AF; ergo & AI maior erit, quam, AS: itaque ipsa AS minor erit quàm AL, & multo minor, quam AE: est etiam minor quam AZ, vt demonstrauimus, ergo ipsa AS minima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, Az. quare AE maxima, atque SE composita ex maxima, & minima maior erit, quam zL composita ex reliquis, hoc est zL minor, quam SE. Lem. 1 17 sexti Lem. 10

Et quoniam est vt AG ad AC, * ita EB ad BS, & ita LP ad Pz, erit vt LP ad Pz, ita EB ad BS, & per conuersionem rationis vt PL ad Lz; ita BE ad ES, & conuertendo vt ZL ad LP, ita SE ad EB; sed zL ostensa est minor, quam SE, ergo & LP minor erit, quam EB, hoc est pro- C
pinquior minimæ minor remotiore. quare constat propositum.

## Lemma XII.

Rursus ijsdem positis. sit autem ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC, ergo AI* maior erit, quàm AF, minor autem, quam Ak, itaque ducatur à puncto A ad circumferentiam KF recta AM æqualis AI, eaque producatur ad circumferentiam TC in O. Dico maiorem rectarum kT, FC maximam esse omniũ, quæ per A transeunt, & inter circumferentias kF, TC interijciuntur, minimam vero MO. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte, minorem esse. Lem. 10 D




DVcatur enim per A vtcũq; recta BAE secans circũferentias KF, TC in punctis EB; circũferentiam vero KD in N, & connectantur GH, Gk, KD, quibus parallelæ agantur cs, cy, yx, secantes AB, AT, AC in punctis syx, & sit primum kT maior, quàm Fc. Quoniam igitur est, vt AG ad AC, ita * Fc ad cx, & ita * kT ad Ty; erit kT ad Ty, vt Fc ad cx, & per conuersionem rationis Lem. 3

erit



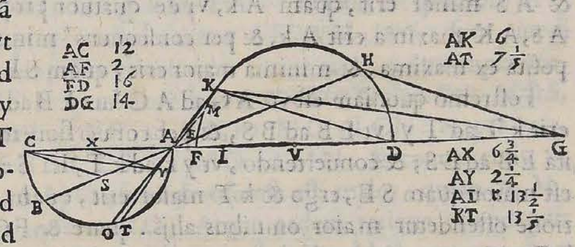
A erit, vt KT ad ky, ita FC ad FX; sed kT ponitur maior, quam FC, ergo & Ky maior erit quam Fx.

Et quoniam æqualia sunt rectangula yAk, FAX, * proportionales erunt yA, AF, AX, Ak, sed Ky composita ex extremis ostensa est maior, quam Fx composita ex medijs, ergo * altera extremarum yA, Ak maxima erit, altera minima; sed Ak non est minima, quia maior est, quàm AF, ergo maxima erit, & per consequens Ay minima. itaque Ay minor est, quam AF, & multo minor, quam AE. Corol. Lem. 3 16 sexti

Similiter quoniam * æqualia sunt rectangula EAS, kAy, erit * vt Corol. Lem. 3
EA ad Ak, ita Ay ad AS; sed AE minor est, quàm AK, ergo 16 sexti
& Ay minor erit, quàm AS. cum igitur Ay minor sit quam AS, &
B minor quam AE, vt demonstraui, & multo minor, quàm Ak, erit ipsa Ay minima quatuor proportionalium EA, Ak, Ay, AS; * maxima vero Theor. 1 huius
AK, vnde yK composita ex maxima & minima * maior erit, quam SE composita ex reliquis.

Et quoniam est vt AG ad AC * ita EB ad BS, & ita kT ad Ty, erit Lem. 3
kT ad Ty, vt EB ad BS; & per conuersionẽ rationis vt KT ad Ky, ita erit EB ad ES: & conuertendo vt yk ad KT, ita SE ad EB; sed yK ostensa est maior, quàm SE; ergo & KT maior erit, quam EB; & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium KT.

Sed sit FC maior, quã kT. Quoniã igitur est vt



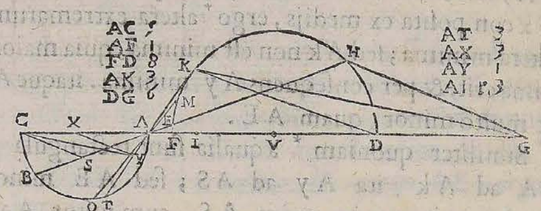

C AG ad AC, * ita FC ad Cx, & * ita KT ad Ty erit vt FC ad cx, ita KT ad Ty, & per conuersionem rationis vt FC ad Fx, ita kT ad ky; sed FC ponitur maior, quàm kT, ergo & Fx maior erit, quam Ky; sed ipsa Fx composita est ex extremis quatuor proportionalium AF, Ay, AK, Ax; ipsa vero Ky ex medijs (constat autem eas proportionales esse ex eo, quod æqualia sunt rectangula FAx, yAK) ergo * altera extremarum AF, Ax maxima erit, altera Theor. 2 huius
D minima, sed AF non est maxima, quia minor est, quam AK, ergo minima erit, vnde Ax maxima itaque Ax maior erit, quàm Ak, & multo maior quam AE. Et quoniam * æqualia sunt rectangula EAS, FAx, erit * Corol. Lem. 1 16 sexti
vt AE ad AF maior nempe ad minorem, ita Ax ad AS, quare & Ax maior erit, quàm AS; sed ipsa Ax ostensa maior, quam AE, & ideo multo maior, quam AF, ergo quatuor proportionalium EA, AF, Ax, AS maxima erit Ax, vnde AF minima, atque adeo xF composita ex maxima, & minima maior, quam Sc composita ex reliquis.

Et quoniam est vt AG ad AC, * ita FC ad cx, & ita EB ad BS, Lem. 3
erit vt FC ad cx, ita EB ad BS, & per conuersionẽ rationis vt FC ad Fx; ita

E B ad A S; & conuertendo vt X F ad F C, ita erit S E ad E B, sed x F ostensa est maior, quam S E, ergo & F C, quam E B maior erit. Eademque ratione ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium F C. A

Sed sint æquales k T, F C. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita F C ad C X, & * ita K T ad T y erit F C ad C x, vt K T ad T y, sed proponuntur æquales F C, k T, ergo æquales erunt & C x, T y, quæ si ab æqualibus C F, T k auferantur reliquæ X F, y K æquales erunt sed X F composita est ex extremis quatuor proportionalium F A, A y, A k, A x; ipsa vero y K ex medijs, constat autem eas proportionales esse ex eo quod * rectangula F A x, y A K sunt æqualia, ergo * maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit; sed A E extrema non est æqualis mediæ A k, hæc enim tangit circulum L I I, illa vero secat ergo æqualis erit ipsi A y. B

Lem 3.




Corol. Lem. 3 Theor. 3 huius

Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A K, F A S, erit vt * A y ad A E, ita A S ad A K; sed A y cum sit æqualis A F minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A k, vnde quatuor proportionalium A y, A E, A S, A K maxima erit A k, & per consequens * minima A y; itaque y k composita ex maxima, & minima maior erit, quam S E composita ex reliquis. C

Corol. Lem. 3 16 sexti

Theor. 3 huius

Postremo quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, erit k T ad T y, vt E B ad B S, & per conuersionem rationis vt k T ad K y, ita E B ad E S; & conuertendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B; sed y K ostensa est maior quam S E, ergo & k T maior erit, quam E B. Atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum sit æqualis ipsi k T, erit quoque omnibus maior; itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum k T, F C maxima est omnium quæ per A ducuntur, & inter circumferentias k F, T C interijciuntur. quod est primum.

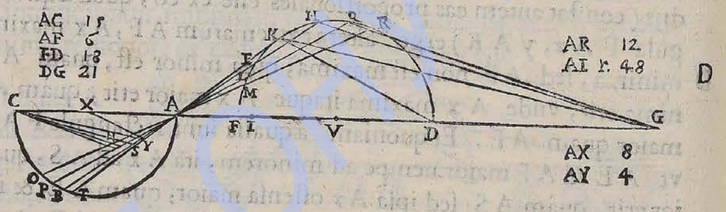
lem. 3

Deinde secet O M producta circumferetiam K D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N secans rectam O M in N. Rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M, sunt enim æquales A I, A M, quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum rectangulum F A x * æquale sit quadrato A I, seu quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x, sunt autem & in-

lem. 3

17 sexti

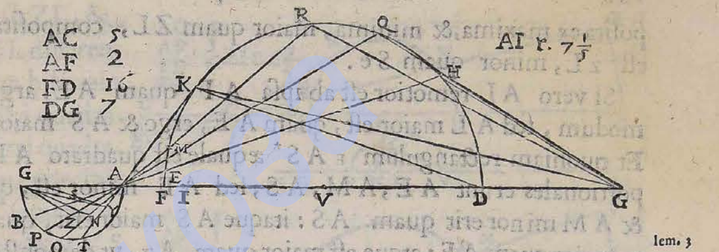
D






A inæquales, ergo x F composita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc est quam M N. Et quoniam est vt A G ad A C ita F C ad C x, & ita * M O ad O N, erit F C ad C x vt M O ad O N, & per conuersionem rationis vt F C ad F x, ita M O ad M N, & conuertendo vt x F ad F c, ita N M ad M O; sed x F ostensa est maior, quam M N, ergo & F c maior erit, quam M O; Æque quoniam rectangulum y A K * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A k, A M, A y. sunt autem & inæquales, quare y K composita ex extremis, maior erit, quam M N media videlicet dupla, & quoniam est vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & ita * M O ad O N, erit K T ad T y, vt M O ad O N; & per conuersionem rationis, vt K T ad K y, ita erit N O ad M N: & conuertendo, vt y k ad K T, ita N M ad M O; sed y k ostensa est maior, quàm M N, ergo & K T maior erit, quàm M O. B

lem. 3




Eadem ratione quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem & inæquales, ergo S E composita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc est quam N M. Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita M O ad O N, erit vt E B ad B S, ita M O ad C N: & per conuersionem rationis vt E B ad E S, ita M O ad M N; & conuertendo vt S E ad E B, ita N M ad M O; sed S E ostensa est maior, quam N M, ergo & E B maior erit, quàm M O. Atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa M O: Minima est igitur M O omnium, quæ per A ducuntur, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur, quod est secundum. Postremo ducatur per A alia recta P A L secans circumferentias T C, k F in punctis P L, sintque P L, B E ex eadem parte minima M O, & sit P L ipsi N O propinquior, quàm B E, & producatur P L ad circumferentiam k D in Q, & iungatur G Q, eique parallela agatur C Z secans P A in Z. * æqualia erunt rectangula L A Z, E A S, & ideo proportionales A L, A E, A S, A Z: si quidem A L propinquior est rectæ A F. sic argumentor, sed A L minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A E, A M, A S, sed A M maior est, quàm A M, ergo & A M maior erit quam A S, itaque A S minor est, quàm A L, & multo minor, quàm A E: est quoque minor quam A Z, vt proxime demonstrauimus, ergo ipsa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A Z: maxima vero A E, atque S E, com-

lem. 3 xvij sexti

C

lem. 3

D

Corol. lem. 3 xvi sexti

lem. 3 xvij sexti

po-

posita ex maxima,& minima, maior quam ZL, composita ex reliquis, hoc A
est zL, minor quam Se.

Si vero AL remotior est ab ipsa AF, quam AE. argumentor in hunc modum, sed AL maior est, quam AE, ergo & AS maior erit, quam Az. Et quoniam rectangulum EAS* æquale est quadrato AI, vel AM, proportionales erunt AE, AM, AS; sed AE minor est, quam AM, ergo & AM minor erit quam AS: itaque AS maior erit, quam AL, & multo maior quam AE: atque est maior quam Az, vt demonstrauimus, ergo ipTheor. 1 huius sa AS maxima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, Az, & consequenter AE minimæ atque adeo Se composita ex maxima & minima maior, quam zL composita ex reliquis, hoc est zL minor, quam Se. quod etiam demonstrauimus & supra. B

Lem. 3 Et quoniam in vtroque Casu est vt AG ad AC, ita EB ad BS, & ita LP ad Pz, erit vt LP ad Pz, ita EB ad BS, & per conuersionem rationis vt PL ad Lz, ita BE ad ES; & conuertendo vt zL ad LP, ita SE ad EB; sed zL ostensa est minor, quam SE, ergo & LP minor erit, quàm EB, hoc est propinquior minimæ minor remotiore, quod tertio loco erat ostendendum.

## Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint; manifestum est KT maximam esse omnium, quæ inter circumferentias kM, TO interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias MF, OC maximam esse FC. C

## Compositio quarti Casus.

SInt dati duo semicirculi ABC, DEF, quales in præsenti Casu ponuntur; data autem recta linea Vz, & contingat Ak semicirculum DEF in k, semicirculum vero ABC secet in T. Oportet inter circumferentias TC, KF ponere rectam lineam æqualem VZ, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem ipsam VZ non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes, inter circumferentias TC, KF interijciuntur, neque minorem minima, quæ autem sit maxima, quæue minima iam est demonstratum. D

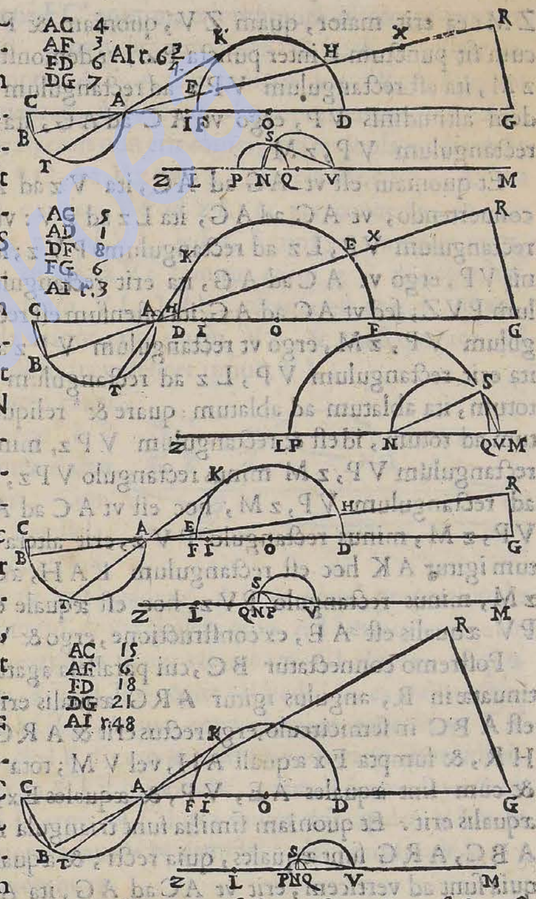
Si igitur data VZ sit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponitur; & enim maxima est ea, quæ maior est rectarum kT, FC: si vero sit æqualis minimæ, minima autem sit ea, quæ minor est ipsarum KT, FC: itidem factum erit quod proponitur.

Si autem neutra dictarum kT, FC sit minima, inuenta minima Problemati satisfiet. inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 16. Si autem VZ minor sit maxima, maior minima, sumatur ex centro circuli DEF, quod sit O recta OG æqualis OC, & fiat vt AG ad AC, ita quadratum Ak ad aliud quadratum, quod sit AI. Similiter fiat vt AG ad AC, ita

VZ



A VZ ad aliam quæ sit ZL, & sit ipsarum VZ, ZL differentia LV, quæ secetur bifariam in N. Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Porisma præcipit describatur in VN semicirculus, in quo accomodetur VS æqualis AI infra demonstrabitur ipsa AI minor, quam VN, & cõnectatur SN. Quadratum igitur NV superat quadratum SV quadrato SN angulus enim NSV in semicirculo rectus est. Itaque rectæ VN addenda est, vel auferenda recta æqualis NS. sic Porisma fieri iubet, addatur ergo, vel auferatur prout sequentia præcepta docebunt, eaque aucta, vel diminuta sit VP cui æqualis ducatur à pũcto A ad circumferentiã KF recta AE, & producatur donec secet semicirculum ABC in B. ipsam autem VP non esse minorem minore rectarum AF, Ax, nec maiorem maiore, tribus quæ sequuntur Lemmatibus manifestum fiet. Iam facta est constructio Problematis. Nunc ostendemus reperendo Resolutionis vestigia EB æqualem esse VZ datæ.




Secet recta AE vel continuata, circumferentiam KD in H, & centro N interuallo NS vel NP describatur circulus secans VL in Q. is circulus tanB get rectam SV in S, ac proinde quadratum SV* æquale erit rectangulo 36 tertij PVQ, vel VPL, seu quod idem est rectangulo VPZ, minus rectangulo VP, LZ; punctum enim L est inter puncta PZ, nam NP cum, sit æqualis NS, maior est diametro NV, hoc est ipsa NL: si igitur fiat vt AC ad AG, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam est vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI, ex constructione; erit conuertendo, vt AC ad AG, ita quadratum AI, hoc est quadratum SV, ad quadratum AK, quadratum igitur AK erit vna pars æqualitatis, alteram vero sic explorabimus.

Fiat vt AC ad AG, hoc est vt Lz ad ZV, ita PZ ad aliam, quæ sit

ZM:

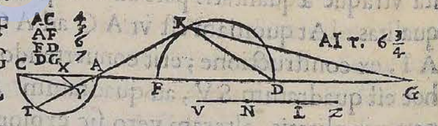
ZM: ea erit maior, quam ZV, quoniam & PZ maior est, quam LZ; A cum sit punctum L inter puncta PZ, vt demonstrauimus. vt autem PZ ad zM, ita est rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM.

Et quoniam est vt AG ad AC, ita Vz ad zL, ex constructione; erit conuertendo, vt AC ad AG, ita Lz ad zV: vt autem Lz ad zV, ita est rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVZ; sed vt AC ad AG, ita ostensum est rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, ergo vt rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, ita erit rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz; nempe vt totum ad B
19 quinti totum, ita ablatum ad ablatum: quare & * reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, id est & rectangulum VPz, minus rectangulo VP, Lz, ad rectangulum VP, zM minus rectangulo VPz, erit vt rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, hoc est vt AC ad AG. Itaque rectangulum VP, zM, minus rectangulo PVz, erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur AK hoc est rectangulum EAH, æquale erit rectangulo VP, zM, minus rectangulo PVz, hoc est æquale erit rectangulo PVM, sed PV æqualis est AE, ex constructione, ergo & VM æqualis erit AH.

Postremo connectatur BC, cui parallela agatur GR occurrens AE continuatæ in R, angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, sed rectus
lem. ij. est ABC in semicirculo, ergo rectus erit & ARG: quare * æquales erunt EB, C HR, & sumpta Ex æquali AH, vel VM; tota Bx æqualis erit toti AR, & cum sint æquales AE, VP, & æquales Ex, VM, tota Ax toti PM æqualis erit. Et quoniam similia sunt triangula ABC, ARG, anguli enim ABC, ARG sunt æquales, quia recti, & æquales quoque BAC, RAG, quia sunt ad verticem, erit vt AC ad AG, ita AB ad AR; sed vt AC ad AG, ita est quoque Pz ad zM, ex constructione; ergo vt AB ad AR, hoc est ad Bx, ita erit Pz ad zM: & permutando, vt AB ad Pz, ita Bx ad zM, videlicet vt pars ad partem, ita tota ad totam; quare & reliqua Ax
19 quinti ad reliquam * MP erit, vt tota Bx ad totam Mz; sed Ax æqualis est MP, ex constructione, ergo & BX æqualis erit zM, sed Ex æqualis est VM ex constructione ergo & reliqua EB reliquæ Vz æqualis erit. Posita est igi- D tur inter circumferentias kF, TC recta EB æqualis datæ Vz, eaque ad punctum A pertinet, quod erat faciendum.

At vero rectam AI minorem esse, quam VN sic demonstrabimus.

Hanc demonstrationem in duas partes diuidam, aut enim AD ad AF



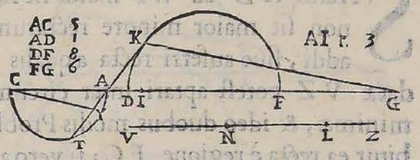

maiorem rationem habet, quam AG ad AC, aut non maiorem. primum habeat non maiorem, & FC sit inter-
lem. 10 cepta inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC; ergo AI * non erit



A erit maior, quàm AF, atque FC* minima erit omnium interceptarum in- lem. 11
ter circumferentias KF, TC. Connectantur autem Gk, KD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes AT, AC in punctis yx. Rectangulum igitur FAx* æquale est quadrato AI, & ideo* proportionales FA, AI, lem. 3 & 17 sexti
Ax, vnde Fx composita ex extremis non erit minor, quàm dupla media AI.

Et quoniam est vt AG ad AC, ita Vz ad zL, ex constructione, & * ita Fc ad cx, erit vt Fc ad cx, ita Vz ad zL: & per conuersionem rationis, vt CF ad Fx, ita erit zV ad VL; sed CF cum sit omnium interceptarum minima minor est, quam zV: ponitur enim zV maior minima, ergo & Fx minor erit, quam VL; sed Fx ostensa est maior, quam AI dupla, ergo AI dupla minor erit, quam VL, & consequenter AI
B simpla minor, quam VN, dimidia videlicet ipsius VL.

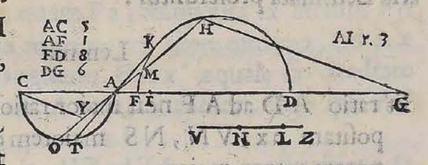
Sed sit FC intercepta inter cauas circumferentias kF, TC, ergo * kT minima est omnium, quæ inter dictas circumferentias intercipiuntur. Connectatur autem Gk, & ei parallela agatur cy secans AT in y, rectan-




Lem. 11

gulum igitur yAk, * æquale erit quadrato AI. & ideo * proportionales lem. 1 & 17 sexti
erunt yA, AI, AK; sunt autem & inæquales, quia AI * minor, est quam lem. 10
AK; ergo yk composita ex extremis maior est, quàm AI dupla. Et quo- Lem. 3
niam est vt AG ad AC, * ita kT ad Ty, & ita Vz ad ZL, ex constructio-
C ne, erit KT ad Ty vt VZ ad ZL, & per conuersionem rationis vt TK ad ky, ita erit ZV ad VL, sed KT cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm ZV, ergo & ky minor erit, quàm VL; sed ky ostensa est maior, quam dupla AI, ergo AI dupla minor erit, quàm VL, & consequenter AI simpla minor, quam VN dimidia videlicet ipsius VL.

Sed habeat AD ad AF maiorem rationem, quam AG ad AC ergo * AI maior erit, quam AF, minor autem, quàm AK: itaque à puncto A ad circumferentiam kF poterit duci recta æqualis AI; ducatur igitur, eaque sit




lem 10

D AM, & producta secet circumferentiam TC in O, ergo * MO minima est omnium interceptarum inter circumferentias kF, TC. Producatur quoque ipsa AM vsque ad circumferentiam kD in H, & connectatur GH, cui parallela agatur OR secans AO in R. rectangulum igitur MAR æquali erit quadrato AI, hoc est quadrato AM; quare æquales erunt AR, AM. lem. 13

Et quoniam est vt AG ad AC ita MO ad OR, & ita VZ ad ZL, lem. 5
ex constructione, erit vt MO ad OR, ita VZ ad ZL, & per conuersionem rationis, vt OM ad MR, ita ZV ad VL. sed OM cum sit omnium interceptarum minima, minor est quàm ZV ponitur enim ZV maior minima,

nima, ergo & MR minor erit, quam VL, & consequenter AM, vel AI minor, quam VN dimidia videlicet minor, quam dimidia. quare constat propositum. A

Quo autem Casu rectæ VN addenda sit recta æqualis NS, quoue auferenda ratio his constat præceptis.

## Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non sit maior ratione AG ad AC, rectæ VN addenda est recta æqualis NS.

## Præceptum II.

SI ratio AD ad AF maior sit ratione AG ad AC, data autem VZ non sit maior minore rectarum KT, FC, rectæ VN poterit siue addi, siue auferri recta æqualis NS: in hoc enim Casu recta æqualis datæ VZ potest aptari inter circumferentias kF, TC ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur aptabitur ea recta è regione FC; si vero addatur aptabitur è regione kT. B

## Præceptum III.

SI vero data VZ maior sit minore rectarum kT, FC, recta ipsi VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias kF, Tc ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum KT, Fc, itaque existente kT maiore, quam FC, rectæ VN addenda est recta æqualis NS, existente minore, auferenda. C

Restat vt recta VP sumpta, quemadmodum præcepta docent, ostendatur non minor minore rectarum AF, AK, nec maior maiore, quo circa tria Lemmata proferuntur.

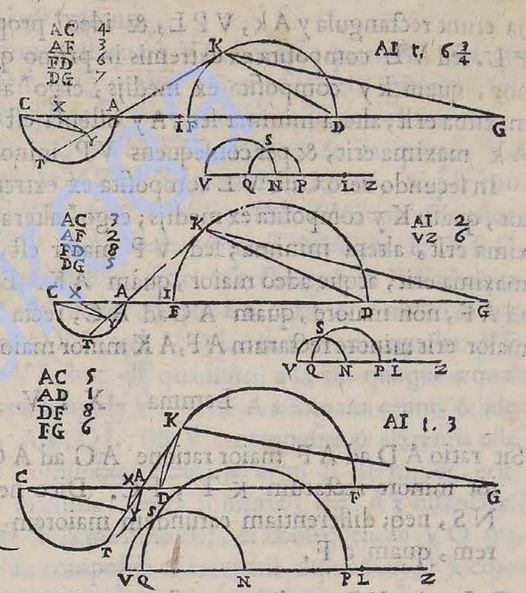
## Lemma XIII.

Sit ratio AD ad AF non maior ratione AG ad AC. Dico VP compositam ex, VN, NS maiorem esse minore rectarum AF, AK, minorem autem maiore.

D

AVt enim recta FC intercepta est inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC: quo Casu AF minor est, quam Ak; aut inter vtramque cauam, quo Casu AF maior est quam AK. Primo Casu KT* maximam est omnium, quæ inter circumferentias KF, TC intercipiuntur, minima vero FC, itaque VZ data minor est quam KT, maior quam FC, ponitur enim VZ minor maxima, maior minima. Secundo autem Casu* minima est KT, maxima FC; vnde VZ data maior est, quam KT, minor quam FC. lem. 11 lem. 11

Connectantur autem GK, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes AT, AC in punctis yx. Quoniam igitur est vt AG ad AC, ita VZ ad ZL ex constructione, & ita* FC ad cx, erit vt VZ ad ZL, ita FC ad cx; & per conuersionem rationis vt ZV ad VL, ita CF ad Fx, sed zV in primo quidem Casu ponitur maior, quàm FC, ergo & VL maior erit, quam Fx. In secũdo vero Casu ponitur ZV minor, quã cF, ergo & VL minor erit, quã Fx. A B




Et quoniam æquales sunt LN, NV, ex constructione, & æquales quoque NP, NQ vt semidiametri, ideo fiunt quoque æquales LP, VQ, quare rectangulum PVQ æquale est rectangulo VPL, sed rectangulum PVQ* æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum FAx, ergo rectangulum VPL æquale est rectangulo FAx. 36 tertij Lem. 5

C quare* proportionales sunt VP, FA, Ax, PL, in primo quidem Casu sic argumentor, sed VL composita ex extremis ostensa est maior, quam Fx composita ex medijs, ergo* altera extremarum VP, PL maxima erit, altera minima; sed VP maior est, quam PL, ergo ipsa VP maxima erit, & consequenter maior quam AF. 16 sexti Theor. ij huius

In secundo autem Casu argumentor in hunc modum. sed VL composita ex extremis VP, PL ostensa est minor, quam Fx, composita ex medijs. FA Ax, ergo* altera mediarum FA, Ax maxima erit altera minima, sed Ax maior est, quam AF, nam cum rectangulum FAx* æquale sit quadrato AI, & recta AI minor, quam AF erit Ax multo minor, ergo ipsa AF maxima erit, atque adeo VP, minor, quam AF, Theor. ij huius lem. 5

D Rursus quoniam est vt AG ad AC, ita VZ ad ZL, ex constructione, & ita* KT ad Ty, erit vt Vz ad zL, ita KT ad Ty: & per conuersionem rationis, vt zV ad VL, ita TK ad Ky, sed zV, in primo quidem Casu ponitur minor, quam TQ. ergo & VL minor erit, quam ky: in secundo vero Casu zV ponitur maior, quam TK, ergo & VL maior erit, quam ky. lem. 5

Et quoniam rectangulum yAK* æquale est quadrato AI, & recta AI* minor, quam AK: erit Ay multo minor. lem. 5 Lem. 10

Et quoniam rectangulum PVQ, hoc est VPL,* æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yAK æqua- 36 tertij lem. 8

16 sexti lia erunt rectangula y A k, V P L, & ideo* proportionales V P, y A, A K, A P L. sed V L composita ex extremis in primo quidem Casu ostensa est mi-
Theor. 2 huius nor, quam k y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A K maxima erit, altera minima sed; A y ostensa est minor, quam A K, ergo A k maxima erit, & per consequens V P minor, quam A K.

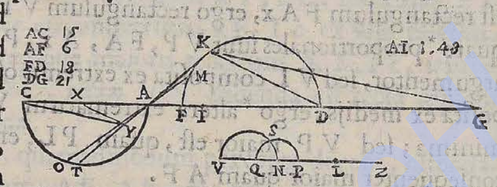
In secundo vero Casu V L composita ex extremis V P, P L ostensa est ma-
Theor. 2 huius ior, quàm K y composita ex medijs; ergo* altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; sed V P maior est, quam P L, ergo ipsa V P maxima erit, atque adeo maior, quàm A K. Existente igitur ratione A D ad A F, non maiore, quam A G ad A C, recta V P composita ex V N, N S maior erit minore rectarum A F, A K minor maiore. quod erat ostendendum. B

## Lemma XIV.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, data autem V Z non maior minore rectarum K T, F C. Dico neque compositam ex V N, N S, neq; differentiam earundem maiorem esse, quàm a k, aut minorem, quàm a F.

SIt enim V P æqualis compositæ ex y N, N S. v Q vero æqualis differentiæ earundem, & connectantur G k, k D, eisq. parallelæ agantur c y y x, secantes a T, a C in punctis y x.

Quoniam igitur est, vt a G ad
lem. 3 a C,* ita k T ad T y, & ita v Z ad z L, ex constructione, erit vt v Z ad z L, ita k T ad T y, & per conuer sionem rationis, vt Z v ad v L, ita erit T K ad K y; sed Z v non est maior, quam T k, ponitur enim Z v non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque v L maior erit, quàm K Y. Et cum sit rectangulum




C

Lem. 3 lem. 10 y A K* æquale quadrato a I, & recta a I* minor, quam a K, erit a y multo minor.

Et quoniam rectangulum P v Q, hoc est v P L sunt enim æquales v Q, P L,
Lem. 3 æquale est quadrato v S, hoc est quadrato a I, cui quoque* æquale est rectan-
xvj sexti gulum y a k, æqualia erunt rectangula v P L, y a K, & ideo* proportionales D v P y a, a k, P L, sed v L composita ex extremis ostensa est non maior, quam k y, composita ex medijs, ergo si est minor, erit altera mediarum y a, a k maxima, altera minima; sed A y ostensa est minor, quam a k, ergo a k maxima erit, & per consequens V P minor quam a k.

Si vero V L composita ex extremis æqualis est y k composita ex medijs,
Theor. 3 huius maior* extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc est V P æqualis a k. Ipsam autem v P non esse minorem, quam a F manifestum est, nam cum v P
Lem. 10 maior sit, quã v S, hoc est quam a I, ipsa autẽ a I* maior, quam a F; erit v P multo maior: Recta igitur v P æqualis cõpositæ ex v N, N S non est maior quã a k,

nec



A nec minor quam A F, quod est primum.

Deinde quoniam V Q minor est quam V S, hoc est, quam A I, ipsaque A I* minor, quam A K; erit V Q multo minor: superest igitur vt ipsa lem. 10 V Q ostendatur non minor, quam a F: id autem ita fit manifestum.

Quoniam enim vt a G ad a C* ita est F C, ad C x, & ita quoque V Z lem. 8 ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x, & per conuersionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x; sed Z V non est maior, quam C F: ponitur enim Z V non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque V L maior erit, quàm F x. Et cum rectangulum F A x* æqua- Lem. 3 lem. 10 le sit quadrato a I, & recta a I* maior, quam F a; erit A x multo maior.

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L, sunt enim æquales V P,
B Q L,* æquale est quadrato V S; hoc est quadrato a I, cui quoque æquale 16 tertij est rectangulum F A x, ipsa rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo* proportionales V Q, F a, A x, Q L: sed V L composita ex extremis ostẽ- 16 sexti sa est non maior, quàm F x composita ex medijs, ergo si est minor, erit* Theor. 2 huius altera mediarum F A, A x maxima, altera minima, sed A x ostensa est maior, quàm F A, ergo ipsa F A minima erit, & consequenter V Q maior, quam A F. Si vero V L composita ex extremis æqualis est F x compositæ ex medijs, minor extremarum* minori mediarum æqualis erit, hoc Theor. 3 huius est V Q æqualis A F. Recta igitur V Q differentia rectarum V N, N S non est minor, quàm A F, nec maior, quam A K, quod secundo loco erat ostendendum.

C Scholium.

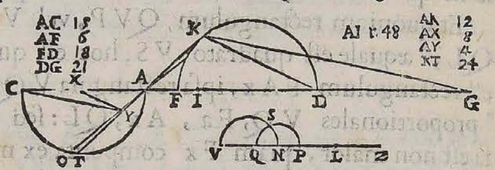
Ex demonstratis igitur manifestum est si A D ad A F maiorem rationem habeat, quàm a G ad a C. data autem V Z non sit maior minore rectarum k T, F C, Problema duobus modis absolui posse; nam si à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta a M æqualis a I, & producatur ad circumferentiam T C in O, erit* M O minima omnium, quæ inter circumferen- lem. 12 tias k F, T C interijciuntur. Et cum V P composita ex V N, N S ostensa sit maior, quàm a I, hoc est quam a M, non autem quam a k; poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta a E, æqualis V P. Similiter cum V Q differentia rectarum V N, N S ostensa sit minor, quàm
D a M, non autem quàm a F, poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta a E æqualis V Q. Itaque si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur a E æqualis V P compositæ ex V N, N S, aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, T O. Si vero ducatur a E æqualis V Q differentiæ ipsarum V N, N S aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, & ideo Problema duobus modis absolui, quod in præcepto secundo monuimus.

## Lemma XV.

Rursus sit ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC. Sed data VZ sit maior minore rectarum KT; FC, & à puncto A ad circumferentiam KF ducatur AM æqualis AI, & producatur ad circumferentiam TC in O est* autem AI maior, quam AF, minor autem quam AK. Dico si KT maior sit, quam FC, compositam ex VN, NS minorem esse, quã Ak, maiorem quam AM; sin minor, differentiam rectarum VN, NS maiorem esse; quam AF, minorem quam AM.

lem. 10

SIt enim VP æqualis compositæ ex VN, NS, VQ vero æqualis differentiæ earundem, & cõnectantur GK, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes AT, AC in punctis y x, & sit primum kT maior, quàm FC, ergo ipsa KT* maxima est omnium interceptarum inter circumferentias KF, TC; quare recta ipsi VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias KM, TO, non etiam inter circumferentias MF, OC, cum sit VZ maior quam FC, expositione, ipsaq. FC




lem. 12

* maxima est omnium interceptarum inter circumferentias MF, OC.

Corol. lem. 12 lem. 3

Et quoniam est, vt AG ad AC,* ita KT ad Ty, & ita quoque VZ ad ZL ex constructione, erit vt Vz ad zL, ita KT ad Ty, & per conuersionẽ rationis vt zV ad VL, ita TK ad ky; sed zV minor est, quam TK: ea enim ponitur minor maxima, ergo & VL minor erit, quam ky, & cum sit rectangulum yAK* æquale quadrato AI, & recta AI* minor, quàm AK, erit Ay multo minor.

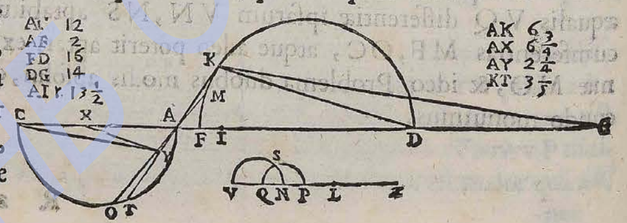
lem. 9 lem. 10

Et quoniam rectangulum PVQ, hoc est VPL (sunt enim æquales VQ, PL)* æquale est quadrato VS, vel quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yAk, ideo æqualia erunt rectangula VPL, yAk, ac proinde* proportionales VP, yA, Ak, PL; sed VL composita ex extremis ostensa est minor, quàm ky composita ex medijs, ergo* altera mediarum yA, AK maxima erit, altera minima; sed ay ostensa est minor, quam aK, ergo aK maxima erit, & consequenter VP minor, quàm AK. Ipsam autem VP maiorem esse, quam aM manifestum est. Nam VP maior est, quam VS, cui æqualis est aI, vel aM ex constructione. Existente igitur KT maiore, quàm FC recta VP æqualis compositæ ex VN, NS minor est, quàm aK, & maior, quam aM, quod est primum.

per tertij lem. 3 & 16 sexti

Theor. 2 huius

Sed sit KT minor quam FC, ergo FC,




lem. 12

* maxima est omniũ interceptarum inter circumferentias, kF, TC, quare recta datæ VZ



A VZ æqualis potest aptari inter circumferentias MF, OC, non etiam inter circumferentias KM, TO, cum sit VZ maior, quàm kT, ex positione; ipsa autem KT maxima omnium, quæ inter circumferentias KM TO interijciuntur.

Et quoniam est vt AG ad AC, ita* FC ad cx, & ita VZ ad ZL ex constructione, erit vt VZ ad ZL, ita Fc ad cx: & per conuersionem rationis, vt zV ad VL, ita CF ad Fx, sed zV minor est, quàm Fc: ea enim ponitur minor maxima, ergo & VL minor erit, quam Fx. Et cum sit rectangulum FAX* æquale quadrato AI, & recta AI* maior, quam AF, erit AX multo maior.

Lem. 5 lem. 5 lem. 10

Denique quoniam rectangulum QVL, vel VQL* æquale est quadra-

56 tertij

B to VS, hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum FAF, rectangula VQL, FAX æqualia erunt, & ideo* proportionales VQ, FA, Ax, QL; sed VL composita ex extremis, ostensa est minor, quam Fx composita ex medijs, ergo* altera mediarum FA, Ax maxima erit, altera minima; sed Ax ostensa est maior, quam AF, ergo ipsa FA minima erit: vnde VQ maior, quàm AF. Ipsam autem VQ minorem esse, quàm AM constat ex eo, quod ea minor est, quàm VS, cui æqualis est AI, vel aM, ex constructione. Existente igitur KT minore, quam FC; recta VQ æqualis differentiæ rectarum VN, NS maior est, quàm AF; minor autem quam aM, quod secundo loco erat ostendendum.

lem. 3

Theor. 2 huius

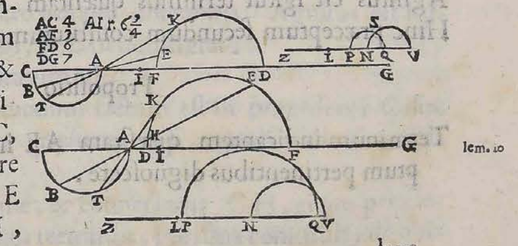
Resolutio huiusce quarti Casus, quemadmodum & tertij, incidit in æqua-

C tionem de duobus terminis explicabilem, quorum maior est aggregatum rectarum VN, NS, minor differentia earundem. Et quoniam non semper vterque indicat AE quæsitam, ideo hic quoque ostendam quomodo terminus quæsitam aE indicans dignoscatur.

### Propositio I.

Terminum indicantem quæsitam AE in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

D SIt ratio AD ad AF non maior ratione aG ad aC. Oportet terminum indicantem quæsitam AE dignoscere. Resumantur compositionis figuræ ad huiusmodi Casum pertinentes. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis est, sunt VP aggregatum rectarum VN, NS, & VQ differentia earundem, ideo manifestum est alterum eorum quæsitam AE indicare; & quoniam ratio AD ad aF ponitur non maior ratione aG ad aC, recta AI non* erit maior minore rectarum AF, Ak, vnde AE quæsita maior erit, quam AI,




lem. 10

hoc

hoc est quam V S, & multo maior quam V Q, ipsa igitur V Q non indi- A
cat quæsitam A E, ergo eam indicat V P. Existente igitur ratione A D ad A F non maiore, ratione A G ad A C, aggregatum rectarum V N, N S indicat quæsitam A E. Itaque agnitus est terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est.

## Propositio I I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & data V Z neutra rectarum K T, F C sit maior. Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur Compositionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis est sunt V P, aggregatum rectarum V N, N S, & V Q differentia earundem, manifestum est alterum eorum indicare quæsitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam k F re- C
lem. 10 cta A M æqualis A I, vel V S, hoc autem potest fieri, nam A I* maior est, quam A F, minor autem quam A k. aut igitur quæsita A E desinit in circumferentia M F, aut in circumferentia M K. si in M F, ea erit maior quam A M, hoc est quam V S, & multo minor quam V P. Recta igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo V Q eam indicat.

Si vero quæsita A E desinit in circumferentia M k, ea maior erit, quam A M, hoc est quam O S, & multo maior, quam V Q. ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo V P eam indicat. Itaque existente ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & data V Z non maiore minore rectarum k T, F C indicat quæsitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum A E desinit in cir- D
cumferentia M F, aggregatum vero cum desinit in circumferentia k M. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum secundum constitutum est.

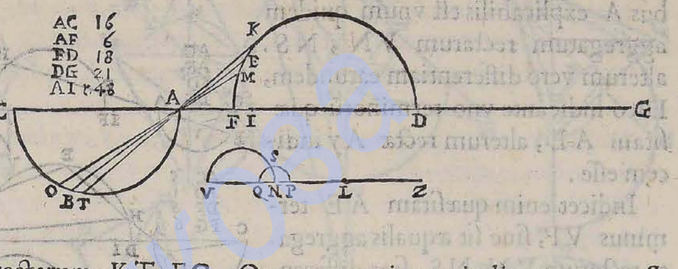
## Propositio I I I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

Rur-



A RVrsus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, sed data V Z sit




maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Fiat constructio vt in antecedenti propositione & producatur M A, vsque ad circumferentiam T C in O, ergo M O* minima
B erit omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Manifestum est igitur rectam datæ V Z æqualem posse aptari inter circumferentias semicirculum ex vna tantum parte minimæ nempe è regione maioris rectarum k T, F C. Itaque sit primum k T maior, quàm F C. ergo recta æqualis datæ V z poterit aptari inter circumferentias k M, T O; non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior, quam F C ex positione, ipsa q. F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C Corol. lem. 12
intercipiuntur; itaque A E quæsita terminabitur in circumferentia K M, & ideo maior erit, quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & multo maior quam V Q, quæ æqualis est differentiæ rectarum V N, N S: Terminus igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P æqua-
C lis aggregato ipsarum V N, N S.

Sed sit K T minor, quam F C, ergo recta æqualis datæ V Z poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, T O, cum sit V Z maior, quàm K T, quæ est* maxima omnium inter cir- Corol. lem. 12
cumferentias K M, T O interceptarum, atque A E quæsita terminabitur in circumferentia M F, vnde minor erit, quam A M, hoc est quàm A I, seu quam V S, & multo minor, quàm V P; terminus igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio A D ad A F



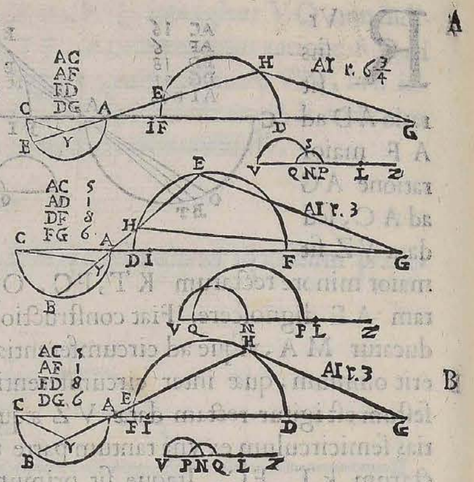

D maior sit, quam A G ad A C, & data V Z maior minore rectarum k T, F C existente K T maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæsitam; existente vero minore differentia. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat.

Hinc præceptum tertium constitutum est.

Superest vt ostendamus quemadmodum factum est in præcedenti Casu, nempe indicante vno terminorum quæsitam A E, quid indicet terminus alter.

Resumantur Compositionis figuræ, & connectatur G H, eique parallela agatur c y secans A B in y. Duos terminos, Porisma constituit, de quibus

bus A explicabilis est vnum quidem aggregatum rectarum V N, N S. alterum vero differentiam earundem, Dico indicante vno terminorũ quæsitam A E, alterum rectæ A y indicem esse.




Indicet enim quæsitam A E terminus V P, siue sit æqualis aggregato rectarum V N, N S, siue differentiæ. Quoniam igitur rectangulum E A y* æquale est quadrato A I, & rectangulum P V Q* æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia sunt, quod & rectæ A I, V S sunt æquales, ex constructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y; sed V P indicans quæsitam A E æqualis est ipsi A E, ergo & V Q æqualis erit A y: itaque recta V Q, quæ est alter terminus indicat rectam A y.

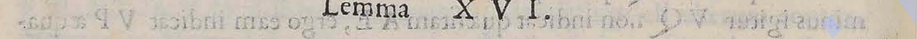
Lem. 3 de tertij

Indicante igitur vno terminorum V P, V Q quæsitam A E, alter rectam A I indicat; quod erat ostendendum;

## Lemma XVI.

Si à duabus rectis lineis abscindantur duæ rectæ æquales, rectangulum autem contextum prima & reliqua parte eiusdem sit minus eo, quod secunda, & reliqua parte eiusdem continetur, prima minor erit, quam secunda, & reliqua pars primæ minor, quam reliqua pars secundæ.

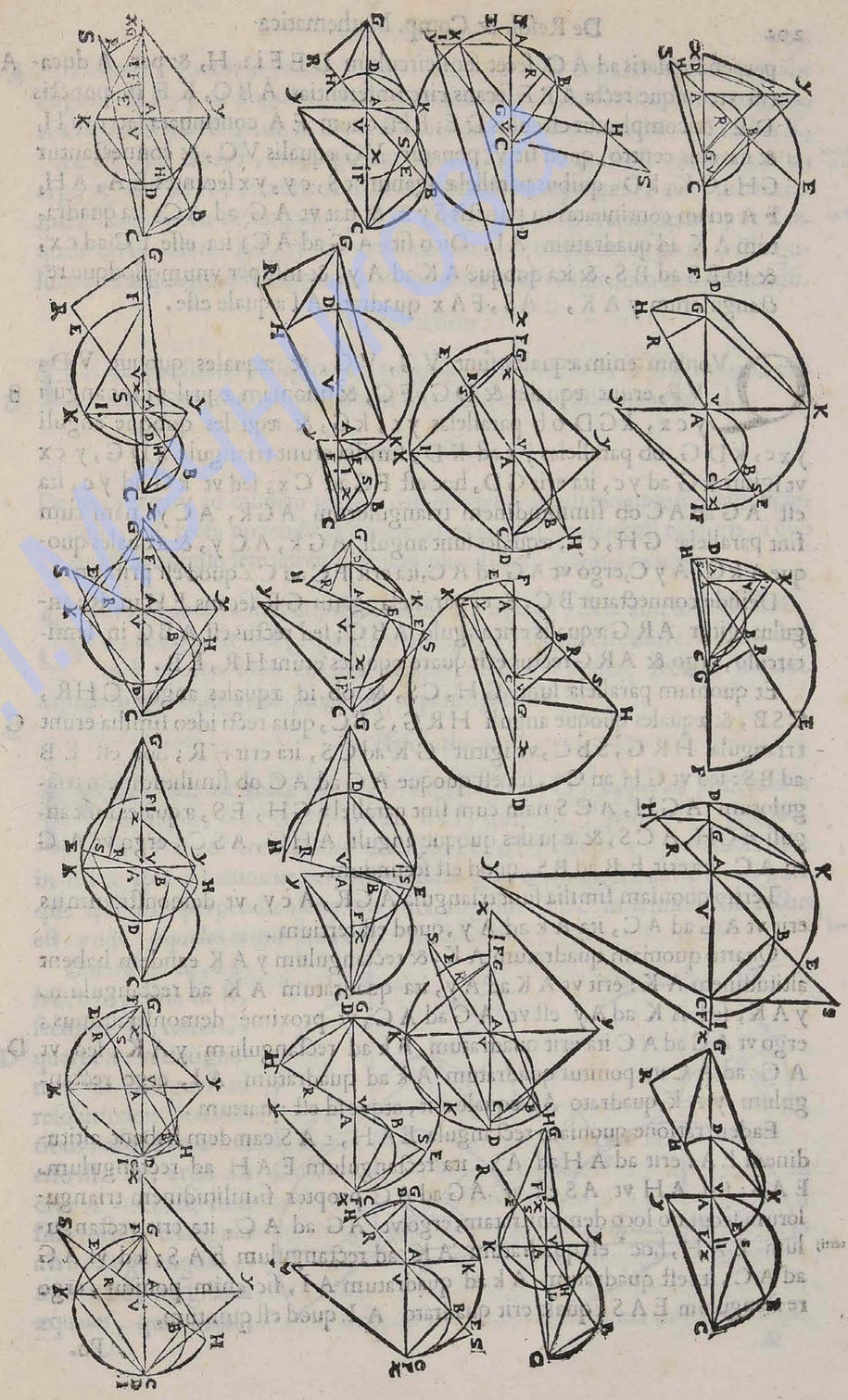
A Duabus rectis A B, C D abscindantur rectæ A E, C F æquales, & rectangulum A B E sit minus rectangulo C D F. Dico A B minorem esse quam C D, itemque E B minorem, quam F D. Secentur enim A E, C F bifariam in G H, erunt æquales G E, H E, vnde & earum quadrata æqualia erunt, sed cum rectangulum A B E minus sit rectangulo C D F, sic enim ponitur, erit ipsum rectangulum A B E, vna cum quadrato G E, minus rectangulo C D F vnà cum quadrato H F; sed rectangulum A B E vna cum quadrato G E* æquale est quadrato G B; similiter & rectangulum G D F, vnà cum quadrato H F* æquale quadrato H D, ergo quadratum G B, minus erit quadrato H D: vnde & recta G B minor, quam recta H D, & additis æqualibus A G, C H, tota A B minor erit, quàm C D tota atque ablatis æqualibus G E, H F, reliqua E B minor erit, quam reliqua F D. quare constat propositum.




6 secundi

## Lemma XVII.

Sint duo semicirculi A B C, D E F in directum bases habentes, & recta A K per-



perpendicularis ad A C. secet semicirculum D E F in H, & per A ducatur vtcumque recta A B E secans circumferentias A B C, K F in punctis D E, & compleatur circulus D E, F H, quem E A continuata secet in H, & ex eius centro, quod sit V ponatur V G æqualis V C, & connectantur G H, G K, k D, quibus parallelæ agantur c S, c y, y x secantes E A, A H, F A etiam continuatas in punctis S y x. & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico sit A G ad A C, ita esse F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita quoque A K ad A y, & insuper vnumquodque rectangulorum y A K, E A S, F A x quadrato A I æquale esse. A

QVoniam enim æquales sunt V G, V C, & æquales quoque V D, V F, erunt æquales & D G, F C, & quoniam æquales sunt anguli y c x, k G D ob parallelas y c, k G, & æquales quoque anguli y x c, k D G ob parallelas y x ad k D, similia erunt triangula k D G, y c x vt igitur k G ad y c, ita erit G D, hoc est F C ad C x; sed vt k G ad y c, ita est A G ad A C ob similitudinem triangulorum A G k, A C y: nam cum sint parallelæ G H, c y, æquales sunt anguli A G k, A C y, & æquales quoque A k G, A y C, ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad C x quod est primum. B

Deinde connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans E H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C; sed rectus est A B C in semicirculo, ergo & A R G rectus erit quare æquales erunt H R, E B.

Et quoniam parallelæ sunt G H, C S, & ob id æquales anguli G H R, C S B, & æquales quoque anguli H R G, S B C, quia recti ideo similia erunt triangula H R G, S B C, vt igitur G K ad C S, ita erit H R; hoc est E B ad B S: sed vt G H ad C S, ita est quoque A G ad A C ob similitudinem triangulorum A G H, A C S nam cum sint parallelæ G H, E S, æquales sunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, ergo vt A G ad A C, ita erit E B ad B S. quod est secundum. C

Tertio quoniam similia sunt triangula A G R, A c y, vt demonstrauimus erit vt A G ad A C, ita A k ad A y, quod est tertium.

Quarto quoniam quadratum A K, & rectangulum y A K eandem habent altitudinem A K: erit vt A K ad A y, ita quadratum A K ad rectangulum y A K; sed A K ad A y est vt A G ad A C, vt proximè demonstrauimus, ergo vt A G ad A C ita erit quadratum A k ad rectangulum y A K, sed vt A G ad A C ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulum y A k quadrato A I æquale erit, atque id est quartum. D

Eadem ratione quoniam rectangula E A H, E A S eamdem habent altitudinem E A. erit ad A H ad A S, ita rectangulum E A H ad rectangulum E A S; sed A H vt A S est vt A G ad A C propter similitudinem triangulorum secundo loco demonstratam, ergo vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H, hoc* est quadratum A K ad rectangulum E A S; sed vt A G ad A C, ita est quadratum A k ad quadratum A I, sic enim ponitur, ergo rectangulum E A S æquale erit quadrato A I. quod est quintum. 35 tertij

Po-



A Postremo quoniam parallelæ sunt k D, y x, erit angulus A D K æqualis angulo A x y, & angulus A K D angulo A y c, & ideo similia triangula A D k, A x y, vt igitur A D ad A k, ita erit A x ad A y; sed vt A D ad A K, * ita est A k ad A F, rectangulum enim D A F * æquale est quadrato A k, ergo vt A x ad A y, ita erit A K ad A F vnde rectangulum F A x sub extremis, * æquale erit rectangulo y A K sub medijs, sed rectangulum y A K æquale est quadrato A I, vt quarto loco demonstrauimus, ergo & rectangulum F A x quadrato A I æquale erit, quod sexto, & vltimo loco erat ostendũ. xvij sexti 35 tertij 16 sexti

Corollarium.

B EX demonstratis colligitur rectangula y A K, E A S, F A x æqualia esse etenim vnumquodque eorum ostensum est æquale quadrato A I.

Casus quintus

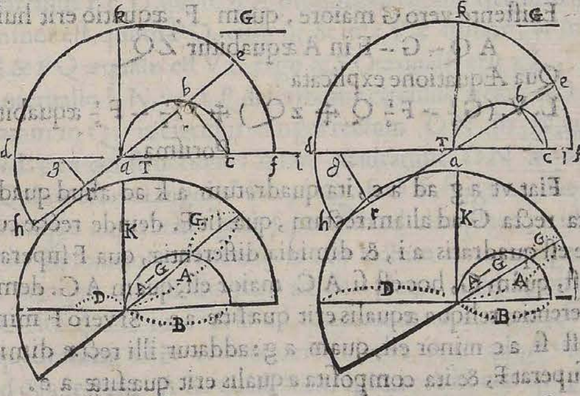
Denuo vergant ad eandem partem dati duo semicirculi maior minorem includens; sed recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi minoris, à quo quidem angulo semicirculus maior plus distet, quam à reliquo.

SInt itaque tales dati duo semicirculi a b c, d e f, data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ipsi d f secans circumferentiam d e f in k oportet inter circumferentias a b c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat. C

Resolutio.

POsita iam sit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod sit T ponatur T G æqualis T C, & compleatur circulus f e, d h, quem e a producta secet in h, & ipsi e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c, ea quoque ipsi e h perpendicularis erit quia angulus a b c in semicirculo rectus est. vnde * æquales erunt h r, e b. Lem. 2

Datarum a c, a g, b e, a k; prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K. vt designatum est in figuris ad resolutionem pertinẽtibus, & quæratur a e. estò illa A, ergo a b erit A - G, & cum sint similia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti, D




&

& æquales quoque anguli ad a, quia sunt ad verticem; erit vt a c ad a g, A
ita a b ad a r, hoc est in figuris Resolutionis vt B ad D, ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$;
atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis est e b tota a h erit
35 lerui $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$ ✣ G; sed rectangulum e a h* æquale est quadrato A K, ergo
$\frac{D \text{ in } A Q - D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ✣ G in A æquabitur K Q

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

D in A Q -- D in G in A ✣ B in G in A æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis ex se subsistat, ergo

A Q -- G in A ✣ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$

Sed vt Æquatio facilius explicetur. trãsmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est; hoc est fiat vt D ad B ita k Q ad aliud quadratum, quod sit Z Q, eritque Z Q idem B
quod $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit E, eritque F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione.

A Q -- G in A ✣ F in A æquabitur Z Q.

In hac æquatione G interdum minor est, quam F, interdum maior; interdum æqualis, nam cum D minor est, quam B fiet & G minor, quam F; est enim vt D ad B, ita G ad F, D autem minor est, quam B cum centrum circuli d e f includentis existit inter puncta a c, maior vero cum existit extra, æqualis autem cum existit in ipso a puncto. Itaque cum G minor est, quàm F quadratum in Æquatione afficitur affirmate; cum autem C
maior afficitur negate, at cum æqualis, nulla est affectio, sed quadratum purum manet, nam id quod est affirmatum æquale est ei quod est negatum, atque adeo affirmationem destruit negatio. Existente igitur G minore quam F, eiusmodi erit Æquatio.

A Q ✣ F -- G in A æquabitur Z Q

Qua Æquatione explicata

L. V. $(F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} Q ✣ Z Q) - \sqrt{(-F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2})}$ æquabitur A *

Existente vero G maiore, quam F. æquatio erit huiusmodi.

A Q -- G -- F in A æquabitur Z Q

Qua Æquatione explicata

L. V. $(G\frac{1}{2} - F\frac{1}{2} Q ✣ z Q) ✣ \sqrt{G\frac{1}{2} - F\frac{1}{2}}$ æquabitur A D

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F superat G si quidem F maior est, quàm G, hoc est si A C maior est, quàm A G. demat ipsi dimidia differentia, reliqua æqualis erit quæsitæ a e. Si vero F minor est, quam G; hoc est si a c minor est, quam a g: addatur illi rectæ dimidia differentia, qua G superat F, & ita composita æqualis erit quæsitæ a e.

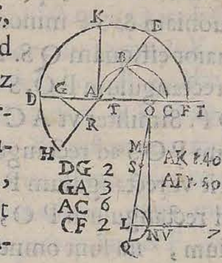




A

## Compositio.

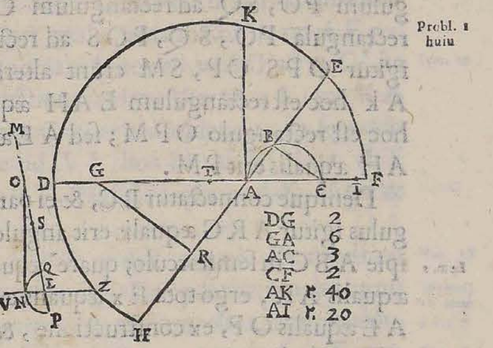
Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A K pertineat. Oportebit autem datam V z non esse minorem, quàm F C, nec maiorem A k perpendiculari à puncto A ad circumferentiam D E F ducta. Siquidem V z æqualis sit alteri ipsarum A k, F C. factum iam erit quod proponitur, si vero maior sit quàm F C, minor autem quam A k. Ponatur ex centro circuli D E F, quod sit T recta B
T G, æqualis T C, & fiat* vt A G ad A C, ita quadratum A K ad aliud quadratum quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad z L, & V L differentia rectarum V z, z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L. itaque si A G minor sit, quàm A C, rectæ O L, C
detrahenda est recta æqualis L N, si vero maior, addenda. Sic Porisma fieri iubet. primo igitur ab ipsa V L abscindatur recta L P æqualis L N, secundo vero addatur L P æqualis L N infra demõstrabimus, rectam O P in primo quidẽ Casu minorem esse, quàm A F, maioré quam A k: in secundo vero maiorem, quàm A F, minorem quam A k. Itaque poterit à puncto A in circumferentiam K F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam semicirculus A B C secet in B, & facta erit constructio, vt Porisma fieri iubet. Nunc ostendenda est E B æqualis datæ V z.




Cõpleatur igitur circulus F E D, quem E A producta secet in H, & sumatur P S æqualis V z. ea minor est, quàm P O, cum sit & ipsa V z minor, vt infra demonstrabimus; sed & P Q æqualis est V L, ergo & S Q æqualis erit z L.

D Deinde centro L interuallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O L, etiam continuatam in Q. is circulus tanget rectam O N in N, cum rectus angulus O N L, ex constructione: quare quadratum O N æquale erit rectangulo P O Q, hoc est rectangulis* P O, S Q, P O S. si igitur fiat vt 1 secundi
A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas: in Resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K: quadratum igitur A k erit vna pars






Probl. 1 huius

æqualitatis. alteram vero sic inueniemus.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z O; seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M, ea in primo quidem casu minor erit, quàm S O, quoniam & S P minor est, quàm Q S. in secundo verò maior: quoniam & S P maior est, quàm Q S. Et quoniam est vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita
2 sexti * rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; sunt enim eiusdem altitudinis
1 sexti O P. Similiter vt A C ad A G, hoc est vt O S ad S M, * ita est quoq; rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M, cum sint eiusdem altitudinis P O: ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; sed vt vna antecedentium ad vnam consequen-
12 quinti tium, * ita sunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. ergo vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt A C ad A G, ita erunt B
rectangula P O, S Q, P O S ad rectangula O P S, P O, S M, rectangula igitur O P S O P, S M erunt altera pars æqualitatis. itaque quadratum A k hoc est rectangulum E A H æquale erit rectangulis O P S, O P, S M, hoc est rectangulo O P M; sed A E æqualis est O P ex constructione, ergo & A H æqualis erit P M.

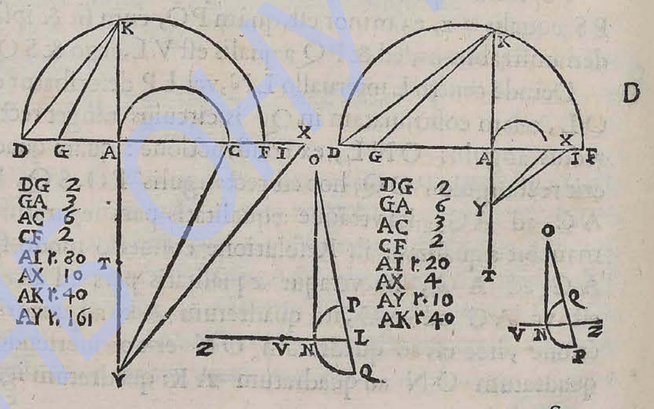
Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus; cum sit rectus &
Lem. 2 ipse A B C in semicirculo; quare* æquales erunt E B, H R. sumatur autem B X æqualis A R, ergo tota E x æqualis erit toti A H, hoc est ipsi P M: & cum sit A E æqualis O P, ex constructione, & E X æqualis P M, reliqua A x reliquæ O M æqualis erit, C

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B x, ita O S ad S M: & diuidendo vt A x ad x B, ita O M ad M S: sed prima A X ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda X B æqualis erit M S quartæ, sed X E ostensa est æqualis P M, ergo & reliqua B E reliquæ P S, hoc est V z datæ, æqualis erit, quod erat ostendendum.

Posita est igitur inter circũferẽtias A B C, D E F recta B E æqualis datæ V Z, eaq. pertinet ad punctũ A, quod faciendũ erat.

At verò rectam O P in primo quidem Casu minorem esse, quam A F, maiorem quam A K. in secundo vero maiorem, quam A F, minorem quam A K; ita ostendemus.

Connectantur G k, k D quibus parallelæ agantur C Y, Y X




D

se-



A secantes K A, A C productas in punctis y x: erit igitur vt A G ad A C* ita Lem. 17
F C ad C x; sed vt A G ad A C, ita est quoque V Z ad Z L, ex constructione, ergo vt V Z ad Z L ita erit F C ad C X, & in primo Casu erit diuidendo, in secundo vero per conuersionem rationis, vt V Z ad V L, hoc est ad P Q, ita F C ad F X: sed V Z ponitur maior quam F C, ergo & P Q maior erit, quàm F X.

Et quoniam rectangulum F A X æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu * rectangulo P O Q, proportionales * erunt P O, F A, A X, O Q. Lem. 17
sed P Q differentia extremarum ostensa est maior, quàm F X, differentia me- 36 vndecimi
diarum, ergo * altera extremarum P O, O Q maxima erit, altera minima. 16 sexti
In primo quidem Casu sic argumentor. sed P O non est maxima, quia mi- Theor. 2 huius
nor est, quàm O Q: ergo minima erit, & consequenter minor quàm A F. In
B secundo verò casu argumentor hoc modo. Sed P O non est minima, quia maior est, quam O Q, ergo maxima erit, & per consequens maior quam A F.

Deinde sumatur A T æqualis A K. quoniam igitur est, vt A G ad A C* ita Lem. 17
K A ad A Y, & ita V Z ad Z L ex constructione; erit vt V z ad z L, ita K A hoc est A T ad A Y. in primo quidem Casu erit diuidendo; in secundo vero per conuersionem rationis, vt V z ad V L, hoc est ad P Q, ita A T ad T y: sed V Z ponitur minor, quàm A T, hoc est, quàm A K. ergo & P Q minor erit quam T y.

Et quoniam rectangulum * y A K, hoc est, y A T æquale est quadrato Lem. 17
A I, hoc est quadrato O N, vel * rectangulo Q O P, * proportionales erunt 36 tertij
y A, Q O, O P, A T; sed y T differentia extremarum ostensa est maior, 16 sexti
C quam P Q differentia mediarum, ergo * altera extremarum y A, a T ma- Theo. 2 huius
xima erit, altera minima; sed in primo quidem Casu a T non est maxima, quia minor est quam a y, ergo ipsa a P, hoc est a k, minima erit, & per consequens O P maior, quàm a k. In secundo verò Casu a T non est minima, ea enim maior est, quàm a y: ergo ipsa a T, hoc est a K maxima erit, & per consequens O P minor quam a k. quare constat propositum.

Similiter rectam V z minorem esse, quàm P O ita fit manifestum.

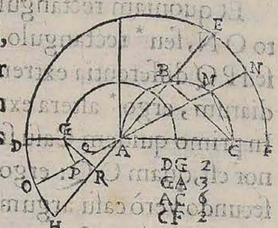
Quoniam enim est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita V z ad z L: vtrumque ex constructione erit, vt V z ad z L, ita quadratum a k ad quadratum a l, hoc est ad quadratum O N, vel ad
D rectangulum P O Q: sed vt V Q ad z L, ita est quadratum V z ad re- 36 tertij
ctangulum V z L, eamdem enim habent altitudinem V z, ergo & quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum a k ad rectangulum P O Q: sed quadratum V z minus est quadrato a k, ponitur enim recta V z minor, quam recta a k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo P O Q, sunt autem æquales V L, P Q, ergo V z minor erit quam Lem. 16
P O, quod erat ostendendum.

Diximus oportere datam V z non esse maiorem, quàm a k, nec minorem quam F C: quoniam a k maximus est omnium, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, K F interijciuntur, F C minima.

Aliarum autem propinquior minima remotiore minor est, quod quidem sic demonstrabitur. A

7 tertij lem. 2 Quoniam enim in primo Casu A k* maior est, quàm A H, ea multo maior erit, quàm H R, hoc* est quam E B, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior.

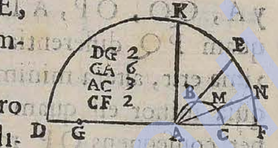
Maxima est igitur omnium A k.




Similiter quoniam A D* minor est, quàm A H, A G autem maior, quam A R reliqua D G minor erit, quàm reliqua H R, hoc est F C minor quam E B, & sic ipsa F C demonstrabitur minor omnibus b alijs. Minima est igitur omnium F C. B

Rursus ducatur alia recta A M N secans circumferentias A B C, k F in punctis M N, & sit recta M N ipsi C F propinquior, quàm B E, & producta N A secet circulum F E D completum in O, & connectatur M C; cui parallela agatur G P secans rectam A O in P, quam etiam secet G R in Q. erit angulus A P G æqualis angulo A M C; sed rectus est A M C in semicirculo, ergo & A P G rectus erit lem. 2 quare* æquales erunt M N, P O. Et quoniam A O minor est, quam A H, A Q autem maior, quàm A R; reliqua Q O minor erit, quam reliqua R H. vnde recta P O multo minor, quam ipsa R H, hoc est M N minor quam B E, propinquior videlicet minimæ minor remotiore.

7 tertij In secundo autem Casu A K* maior est, quàm A E, ergo multo maior quam E B. Maxima est igitur omnium A K. C




Et quoniam A F minor est, quam A E, A C vero maior quam A B, reliqua C F minor erit, quam reliqua B E, & sic F C demonstrabitur omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium F C.

Denique ducatur alia recta A M N secans circumferentias A B C, k F in punctis M N, ita vt M N ipsi C F sit propinquior, quam B E. Quoniam igitur A N minor est quam A E, A M autem maior quam A B, reliqua M N minor erit, quàm reliqua B E. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quare manifesta est determinatio.

## Casus sextus. D

Sed vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi, & maior si compleatur includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculis minoris, à quo quidem angulo semicirculus maior plus distet, quàm à reliquo.

Sint itaque tales dati duo semicirculi a b c, d e f: data autem recta linea G, à puncto autem a demittatur a k ad rectos angulos ipsi a c, vsque ad circumferentiam d e f in k. Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum pertineat.

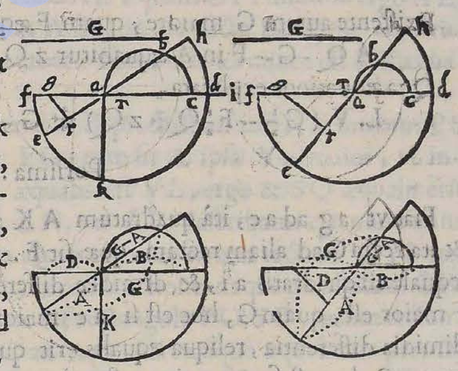
Re-



A

## Resolutio.

POsita iam sit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, & ponatur ex centro circuli d e f, quod sit t. recta t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h secans e b productam in h, ipsique e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c: ea quoque ipsi e h perpendicularis erit, cum sit rectus angulus a b e in semicirculo: quare* æquales erunt h r, e b. lem. 2




B Datarum autem a e, a g, b e, a k prima sit B, secunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad resolutionem pertinentibus. & quæratur a e, esto illa A, ergo a b erit G -- A, & cum sint similia triangula a b c, a r g, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r. hoc est in figuris Resolutionis, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. si auferatur a b, r h æquali ipsi e b, reliqua a h erit $G - \frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. Et quoniam rectangulum e a h C æquale est quadrato a k, ideo

$G \text{ in } A - \frac{D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } AQ}{B}$ æquabitur K Q

Ducantur omnia in B vt fractio euanescat ergo

B in G in A - D in G in A + D in A Q æquabitur k Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis ex se subsistat, ergo

$AQ - G \text{ in } A - \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{kQ \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur. transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus precedentium casuum factum, hoc est, fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod sit z Q, eritque z Q idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, eritque F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. D facta igitur transmutatione

AQ -- G in A + F in A æquabitur z Q.

In hac quoque æquatione quemadmodum in æquatione præcedentis Casus G interdum minor est, quam F, interdum maior, interdum æqualis, prout D minor est quam B, vel maior, vel æqualis, est enim vt D ad B, ita G ad F. D autem minor est, quam B, cum centrum circuli d e f includentis exiitit inter puncta a c, maior verò cum exiitit extra, æqualis autem, cum exiitit in ipso à puncto. Itaque cum G minor est, quam F; quadratum in æquatione afficitur affirmate cum

maior afficitur negate, cum æqualis, nulla est affectio, sed quadratum purum manet, nam cum id quod est affirmatum æquale sit ei quod est negatum, quod affirmatio addit, idem negatio minuit. Existente igitur G minore, quam F: æquatio erit huiusmodi. A

A Q + F -- G in A æquabitur z Q

Qua æquatione explicata.

L. V. ( F -- G Q + z Q ) -- ( F -- G æquabitur A

Existente autem G maiore, quam F æquatio erit huiusmodi

A Q - G -- F in A æquabitur z Q

Qua æquatione explicata

L. V. ( G -- F Q + z Q ) + G -- F æquabitur A. B

Porisma:

Fiat vt a g ad a c, ità quadratum A K ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. Deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F superat G si quidem F maior est, quàm G, hoc est si a c maior est, quàm a g: demptæ ipsa dimidia differentia, reliqua æqualis erit quæsitæ a e. Si vero F minor est quam G, hoc est si a c minor est quàm a g; addatur dimidia differentia, qua G superat F; & ità composita æqualis erit a e quæsitæ.

Porisma hoc idem est, quod Porisma Resolutionis antecedentis Casus, sed tamen non sunt eadem vtriusque Resolutionis vestigia, idcirco constructio C quæ sequitur, eadem prorsus erit, quæ in antecedenti Casu, demonstratio autem paulum diuersa.

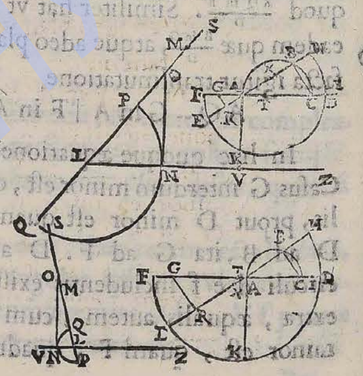
Compositio.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est. data autem recta linea V z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem datam V Z non esse maiorem, quam F C, nec minorem A k perpendiculari ducta à puncto A ad circumferentiam D E F.

Si quidem V Z æqualia sit alteri ipsarum A K F C factum iam erit, quod proponitur. D

si verò minor sit, quàm F C, maior autem, quàm A k. ponatur ex centro circuli D E F quod sit T. recta T G, æqualis T C; & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod sit A I. Probl. 1. huius

Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L differentia rectarum V Z, z L secetur bifariam in N, atque ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connecta-



tur



A tur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L; itaque si A G minor est, quam A C rectæ O L detrahenda est recta æqualis L N, si vero maior addenda. sic Porisma fieri iubet. ab ipsa igitur O L in primo casu abscindatur recta L P æqualis L N, in secundo vero producatur O L in P, vt sit L P æqualis L N. infra autem ostendemus rectam O P. in primo quidem casu maiorem esse, quam A F, minorem quam A k. in secundo vero minorem, quam A F, maiorem quam A k. itaque poterit à puncto in circumferentiam k F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam productam secet semicirculus A B C in B. facta est igitur constructio quemadmodum Porisma fieri iubet. Nunc ostendendum est E B æqualem esse datæ V z.

B Compleatur circulus F E D secans A B productam in H, & sumatur P S æqualis V z. ea maior erit quam P O, cum sit & ipsa V z maior, vt infra demonstrabimus, sed & P Q æqualis est V L, ergo & S Q æqualis erit z L. deinde centro L interuallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O L etiam continuatam in Q: is circulus tanget rectam O N in N, cum sit rectus angulus O N L, ex constructione. itaque quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, hoc est rectangulo P O, S Q, minus rectangulo P O S. Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars seorsim ad alia plana; itidem manebit æqualitas. in resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadra- 36 tertij

C tum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N: erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, nunc verò inueniemus alteram.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ità O S ad aliam, quæ sit S M. ea in primo quidem Casu minor erit, quam S O. quoniam & S P minor est, quam Q S. in secundo vero maior quoniam & S P maior est, quam Q S. Et quoniam est vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; sunt enim eiusdem altitudinis O P. Similiter vt A C ad A G, hoc est vt O S ad S M, ita est quoque rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M cum sint eiusdem altitudinis P O, ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectan-

D gulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; nempe vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, ergo * vt totum ad totum, ita erit 19 quinti & reliquum ad reliquum, id est vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt A C ad A G, ita rectangulum P O, S Q, minus rectangulo P O S ad rectangulum O P S, minus rectangulo P O, S M. rectangulum igitur O P S, minus rectangulo O P, S M erit altera pars æqualitatis, itaque quadratum A k, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulo O P S, minus rectangulo O P S M, hoc est æquale erit rectangulo O P M, sed A E æqualis est O P, ex constructione, ergo & A H æqualis erit P M,

De-

Denique connectatur BC, & ei parallela agatur GR secans A in E R. angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, & ideo rectus cum sit rectus, & ipse ABC in semicirculo quare* æquales erunt EB, HR, abscindatur autem Bx æqualis AR, reliqua XE æqualis erit reliquæ AH, hoc est ipsi PM; sed & AE æqualis est VP ex constructione, ergo & reliqua Ax reliquæ OM æqualis erit. A

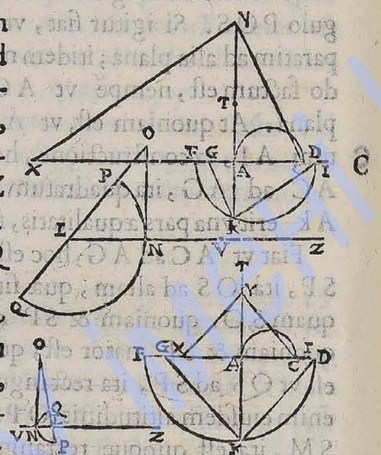
lem. 2

Et quoniam est vt AC ad AG, ita AB, ad AR ob similitudinem triangulorum ABC, ARG, & ita OS ad SM, ex constructione, erit vt AB ad AR, hoc est ad BX, ita OS ad SM. & diuidendo vt AX ad XB, ita OM ad MS; sed prima AX ostensa est æqualis tertiæ OM, ergo, & secundæ XB æqualis erit MS quartæ, sed & XE ostensa est æqualis PM, ergo tota BE toti PS, hoc est VZ datæ æqualis erit, quod erat ostendendum. Posita est igitur inter circumferentias ABC, DEF recta BE æqualis datæ VZ eaque pertinet ad punctum A quod erat faciendum. B

At vero OP in primo quidem Casu maiorem esse, quam AF minorem quam AK; in secundo vero minorem, quàm AF, maiorem quam AK; ita fit manifestum.

Connectatur Gk, k D quibus parallelæ agantur cy, yx secantes KA, CA productas in punctis y x. Quoniam igitur est, vt AG ad AC,* ita FC ad cx, & ita VZ ad ZL, ex constructione, erit vt VZ ad ZL, ita FC ad cx, & in primo quidem Casu erit diuidendo, in secundo vero per conuersionem rationis, vt VZ ad VL, hoc est ad PQ, ita Fc ad FX; sed VZ ponitur minor, quàm Fc. ergo & PQ minor erit, quàm Fx.

lem. 17




lem. 17

Et quoniam rectangulum FAx* æquale est quadrato AI hoc est quadrato ON, seu rectangulo POQ* proportionales erunt PO, FA, AX, OQ: sed PQ differentia extremarum ostensa est minor, quam FX, differentia mediarum, ergo* altera mediarum FA, Ax maxima erit altera minima. in primo quidem Casu sic argumentor, sed FA non est maxima; minor enim est, quàm Ax, ergo minima erit, & per consequens OP maior quam AF. In secundo vero Casu argumentor in hunc modum sed FA non est minima, maior enim est quàm AX, ergo maxima erit, & per consequens OP minor quàm AF.

Thcor. 13 huius

lem. 17.

Deinde sumatur AT æqualis Ak. Quoniam igitur est vt AG ad AC* ita KA ad Ay, & ita VZ ad ZL ex constructione, erit vt Vz ad zL; ita KA hoc est AT ad Ay, in primo quidem Casu erit diuidendo, in secundo vero per conuersionem rationis, vt Vz ad VL, hoc est ad PQ, ita AT ad Ty, sed Vz ponitur maior, quàm AT, hoc est quam AK, ergo & PQ maior



A maior erit quam Ty.

Et quoniam rectangulum yAK, hoc est yAT* æquale est quadrato AI, hoc est quadrato ON vel* rectangulo QOP;* proportionales erunt QO, yA, AT, OP; sed QP differentia extremarum ostensa est maior quàm yT differentia mediarum, ergo* altera extremarum maxima erit, altera minima. in primo quidem Casu sic argumentor, sed OP non est maxima, quia minor est quam OQ, ergo minima erit, & per consequens minor quam AT, hoc est, quam AQ. in secundo vero Casu hoc modo, sed OP non est minima, quia maior est quam OQ, ergo maxima erit, & per consequens maior quam AT, hoc est quam Ak. quare constat propositum.

Lem. 15 16 tertii 16 sexti

Similiter rectam VZ maiorem esse, quam PO. sic demonstrabimus.

B Quoniam enim est, vt AG ad AC, ita quadratum Ak ad quadratum AI, & ita VZ ad ZL, vtrumque ex constructione erit, vt VZ ad zL, ita quadratum AK ad quadratum AI, hoc est ad quadratum ON, seu ad* rectangulum POQ; sed vt Vz ad zL,* ita est quadratum Vz ad rectangulum VzL, eamdem enim habent, altitudinem Vz, ergo vt quadratum Vz ad rectangulum VzL, ita erit quadratum Ak, ad rectangulum POQ, sed quadratum Vz maius est quadrato Ak, ponitur enim recta Vz maior, quàm Ak; ergo & rectangulum VzL maius erit rectangulo POQ, sed sunt æquales VL, PQ, ergo Vz* maior erit, quàm PO. quod erat ostendendum.

16 tertij 1 sexti

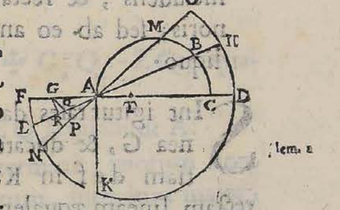
Lem. 16

Diximus oportere datam VZ non esse minorem, quàm Ak, nec maiorem quam FC. ipsa enim AK minima est omnium quæ ad punctum C A pertinent, & inter circumferentias ABC, KF interijciuntur idque ita fit manifestum.

Quoniam enim in primo Casu AK* minor, est quam AH, ea multo minor erit, quam HR; hoc est quam EB, & sic demonstrabitur omnibus alijs minor. Minima est igitur AK.

Similiter quoniam AD maior est quam AH, & AG maior quam AR, erit tota DG maior quam tota HR, hoc est FC maior, quam EB, & sic ipsa FC demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur FC.

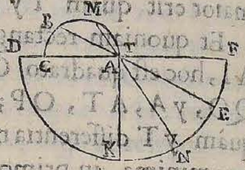
Ducatur autem alia recta NAM ipsi Ak propinquior, quam EB, & producatur donec secet circulum FED completum in O, & connectatur MC, cui parallela agatur GP secans AN in P, rectam vero AE in Q: erit angulus APG æqualis angulo AMC, & ideo rectus, cum sit rectus & AMC in semicirculo, quare* æquales erunt NM OP. Et quoniam AO* minor est, quàm AH; & AP minor quam AQ, & multo minor, quàm AR; tota OP minor erit, quam tota HR hoc est NM minor, quam EB; propinquior igitur minimæ minor est remotiore. D




lem. 2

In secundo autem Casu AK minor est, quàm AE, ergo multo minor quam

quam E B, atque ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur A k.



Æquè quoniam A F maior est quam A E, & A C maior quam A B, tota F C maior erit quam tota E B, & sic demonstrabitur ipsa F C maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C.

Sed ducatur per A alia recta N A M ipsi A K propinquior, quàm E B; erit A N minor, quàm A E; sed & A M minor est quam A B, ergo tota N M minor erit, quàm tota E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quare manifesta est Determinatio.

## Lemma XVIII.

Si recta linea bifariam secetur, & in ea sumantur duo puncta vtcumque. Punctum quod efficit rectangulum maius propinquius est sectioni eo puncto, quod minus rectangulum efficit.

SEcetur recta A B bifariam in C, & in ea sumantur vtcumque duo puncta D E, sitque rectangulum A D B maius rectangulo A E B. Dico punctum D sectioni C propinquius esse, quàm punctum E. Quoniam enim rectangulum A D B vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A C. Similiter & rectangulum A E B vna cum quadrato E C* æquale eidem quadrato A C, ideo rectangulum A D B vna cum quadrato D C, æquale erit rectangulo A E B vna cum quadrato E C; sed rectangulum A D B ponitur maius rectangulo A E B, ergo reliquum quadratum D C minus erit reliquo quadrato E C. vnde & recta D C minor, quàm recta E C. Itaque punctum D sectioni C propinquius erit, quam punctum E, quod erat ostendendum.

A E D C B

2 secundi

A D C E B

C

## Casus VII.

Denuo vergant ad eandem partem dati duo semicirculi maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi minoris; sed ab eo angulo semicirculus maior minus distet, quam à reliquo.

D

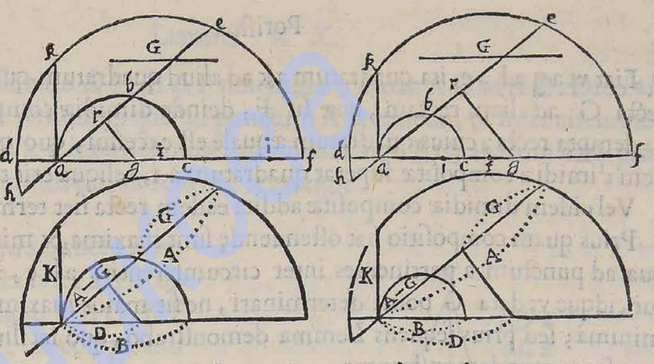
SInt igitur tales dati duo semicirculi a b c d e f. data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ad d f secans circumferentiam d e f in K. Oportet inter circumferentias a b c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat.

### Resolutio.

SIt iam posita recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod sit t ponatur t g æqualis t c, & com-



A & cõpleatur circulus f e, d h, quem ea producta secet in h, & ipsi e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c. ea quoque ipsi e h perpẽdicularis, erit cum sit rectus



B angulus a b c in semicirculo; vnde* æquales erunt h r, e b. Lem. 3

Datarum autem a c, a g, b e, a k. prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus, & quæratur a e. esto illa A, ergo a b erit A -- G, & cum sint similia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti, & angulus à communis vtrique erit vt a c ad a g, ità a b ad a r; quod in figuris ad Resolutionem pertinentibus respondet vt B ad D, ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, itaque a r erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$. sed hæc detrahatur ipsi r h, cui æqualis est e b reliqua a h erit G -- $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$; sed rectangulum e a h* æquale est quadrato a k, ergo 35 tertii

G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ æquabitur KQ

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

C B in G in A ✣ D in G in A -- D in AQ æquabitur k Q in B.

Deinde applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis ex se subsistat, ergo $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ ✣ G in A -- AQ æquabitur $\frac{kQ \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur. transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, hoc est fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum, quod sit ZQ. erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ sit F, eritque F eadem, quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & planum F in A idem quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione.

F in A ✣ G in A -- AQ æquabitur ZQ

vel F ✣ G in A -- AQ æquabitur ZQ

D Et explicata Æquatione $F\frac{1}{2}$ ✣ $G\frac{1}{2}$ -- L. V. ($F\frac{1}{2}$ ✣ $G\frac{1}{2}$Q -- ZQ) æquabitur A

Vel $F\frac{1}{2}$ ✣ $G\frac{1}{2}$ ✣ L. V. ($F\frac{1}{2}$ ✣ $G\frac{1}{2}$Q -- ZQ) æquabitur A.

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum non semper vterque indicat a e quæsitam, sed alter tantum, interdum maior, interdum minor: quo autem Casu terminis maior indicet ipsam quæsitam, quare terminus minor, quoue etiam vterque, suo loco dicetur.

Po.

Porisma. A

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F, deinde dimidiæ compositæ ex G, & F dempta recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ compositæ superat quadratum a i, reliqua erit terminus minor.

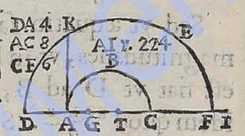
Vel eidem dimidiæ compositæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Prius quam compositio fiat ostendendę sunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a b c, K f intercipiuntur, idque vt data G possit determinari, ne sit maior maximâ, neve minor minimâ; sed prius sequens Lemma demonstrabo, quo facilius, ac clarius ea, quæ sequentur demonstrentur. B

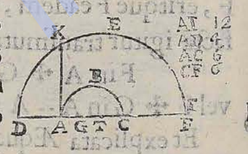
## Lemma XIX.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & recta A K perpendicularis ad A F secet semicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod sit T sumatur T G æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F maior sit ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem esse, quam A F, & si æqualis, æqualem, & si minor, minorem.

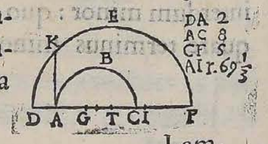
SIt primum ratio A D ad A F maior, quam A G ad A C, ergo ea ratio erit quoque maior ratione quadrati A k ad quadratum A I. est enim vt C
A G ad A C, ità quadratum A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ità est quadratum secundæ A K ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare * quadratum A I maius erit quadrato A k; itaque & recta A I maior quam recta A F quod est primum. 10 quinti




Deinde sit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo eadem erit quæ quadrati A K ad quadratum A F; sed vt A D ad A F, ita est quadratum A k ad quadratum A F, vt demonstrauimus. ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, vnde & recta A I æqualis rectæ A F. quod est secundum. D




Denique sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A k ad quadratum A I, sed vt A D ad A F ita est quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A K ad quadratum A I, quare quadratum A I * minus erit quadrato A F. vnde & recta A I minor, quàm recta A F. quod vltimo loco erat ostendendum. 10 quinti




Lem-

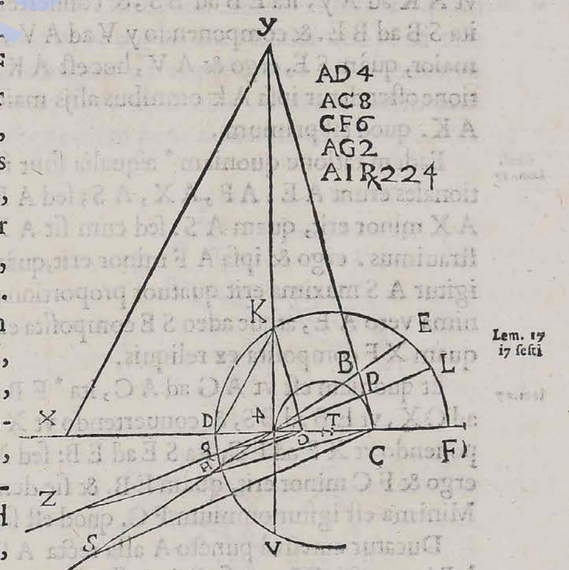


A

## Lemma XX.

Ijsdem positis, sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico a k maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, k F interijciuntur: minimam vero F C; aliarum autē propinquiorem minimæ minorem esse remotiore.

DVcatur enim à puncto A vtcumq; recta linea a B E secans circumferentias a B C, K F in punctis B E, & compleatur B circulus F E D H, quem E a, K a continuatæ secent in punctis H V, & connectantur G k, k D, G H, eisque parallelæ agantur c y, y x, c s secantes a k, a D, a H continuatas in punctis y x s.

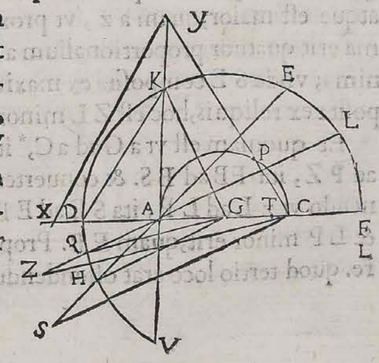



Lem. 17 17 sexti

Quoniam igitur rectangulum F a x * æquale est quadrato a I, proportionales erunt a F, a I, a x: sed a I ex antecedente Lemmate non est minor, quàm a F, C eo quod ratio a D ad a F ponitur non minor ratione a G ad A C, ergo neque a x minor erit, quam a I, nec ideo minor quam a F.

Et quoniam rectangulum F a x * æquale est rectangulo y a k, erit * vt a k, hoc est a V ad a F, ita a x ad a y: sed a V minor est, quàm a F, ergo & a x minor erit, quàm a y: sed ipsa a x ostensa est non minor, quàm a F. ergo & a F, minor erit, quam a y. itaque quatuor proportionalium a V, a F, a x, a y maxima erit a y. minima vero a V. vnde y V composita ex maxima, & minima maior, quàm F x, composita ex reliquis. coro 1. lem. 17 16 sexti

D Et quoniam est vt a G ad a C, ita a k ad a y, & ita * F C ad C x, erit vt a K ad a y, ita F C ad C x, & conuertendo, vt y a ad a K, hoc est ad a V, ita x C ad c F, & componendo, vt y V ad V a, ita x F ad F C, sed y V prima ostensa est maior, quàm x F tertia, ergo & secunda a V, hoc est a k, maior erit quam F C quarta, lem. 19




T Si-

corol. lem 17. 16 sexti Similiter quoniam * æqualia sunt rectangula y A K, E A S. erit vt * A K, hoc est A V ad A E, ita A S ad A y: sed A V minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A y. est autem & A E minor, quàm A y, cum sit & A F minor, vt demonstrauimus: ergo quatuor proportionalium A V, A E, 25 quinti A S, A Y maxima erit A y. minima vero A V; vnde y V * composita ex maxima, & minima maior erit, quam S E composita ex reliquis. lem. 17

Et quoniam est, vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & * ita A K ad A y erit vt A K ad A y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y A ad A k, hoc est ad A V, ita S B ad B E. & componendo y V ad A V, ita S E ad E B; sed y V ostensa est maior, quàm S E, ergo & A V, hoc est A K, maior erit quam E B, eadem ratione ostendetur ipsa A k omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium A K. quod est primum. B

corol. Lem. 17 Eadem ratione quoniam * æqualia sunt rectangula F A X, E A S, proportionales erunt A E, A F, A X, A S; sed A E minor est, quàm A F, ergo & A X minor erit, quam A S: sed cum sit A X non minor, quàm A F, vt demõstrauimus. ergo & ipsa A F minor erit, quàm A S, & A E multo minor. Sic igitur A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S: minima vero A E, atque adeo S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam X F composita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam est vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & ita F C ad C X. erit F C ad C X, vt E B ad B S, & conuertendo vt X C ad C F, ita S B ad B E. & componendo vt X F ad F C, ita S E ad E B: sed X F ostensa est minor, quam S E, ergo & F C minor erit, quàm E B. & sic demõstrabitur omnibus alijs minor. C Minima est igitur omnium F C. quod est secundum.

Ducatur autem à puncto A alia recta A P L secans circumferentias A B C, k F in punctis P L, & sit P L ipsi C F propinquior quam B E, & producatur L A secans circulum F E D completum in Q, & connectatur G Q, & ei parallela ducatur C Z occurrens L Q continuatæ in Z; rectangula igitur L A z

corol. lem. 17. 16 sexti E A S * æqualia erunt. idcirco * proportionales A L, a E, a S, a z: sed a L maior est, quàm a E, ergo & a S maior erit quam a z. Et quoniam rectangulum

lem. 27 E A S * æquale est quadrato a I, proportionales erunt a E, a I, a s, sed a E minor est, quàm a I, cum ipsa a I non sit minor quam a F, ergo & a I minor erit quam a S. atque adeò ipsa a S maior erit, quàm a L, & multo maior quam a E. atque est maior, quam a z, vt proximè demonstrauimus, ergo ipsa a S maxi- D

Theor. 1 huius ma erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, a Z, & * consequenter a E minima; vnde S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam Z L composita ex reliquis, hoc est Z L minor quam S E.

lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, * ita E B ad B S. & ita L P ad P Z, erit vt L P ad P Z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B. Propinquior igitur minime minor est remotiore. quod tertio loco erat ostendendum.

Lem-

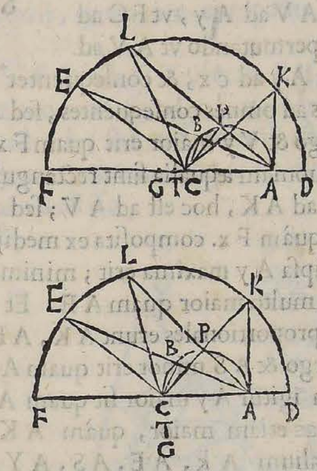


A

## Lemma XXI.

Rursus ijsdem positis. ratio autem A D ad A F sit minor ratione A G ad A C. Dico si semicirculus A B C non extenditur vltra centrum circuli D E F, rectam F C maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur, minimam A K; si verò extenditur, ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I secans semicirculum A B C in O. est autem a i minor * quam lem. 19 a f, maior autem quam a K, cum sit vt a g ad a c, minor nempe ad maiorem, ita quadratam a K ad quadratum a i ex positione. Dico maiorem rectarum a K, c f maximam esse, M O minimam, aliarum autem propinquiorem minimę remotiore ex eadem parte minorem esse.

B




DVcatur enim vtcumq; recta linea a B F secans circumferentias a B C, k F in pũctis B E; & primum semicirculus a B C non extendatur vltra cẽtrum circuli D E F, quod sit T, & connectantur C k, C E, C B; erit angulus a B C in semicirculo rectus. vnde & an-

C gulus E B C rectus erit, quare C E maior erit quam B E; sed C F non est minor quam C E, ergo & C F maior erit quam B E. & sic demõstrabitur maior omnibus alijs. Maxima est igitur C F.

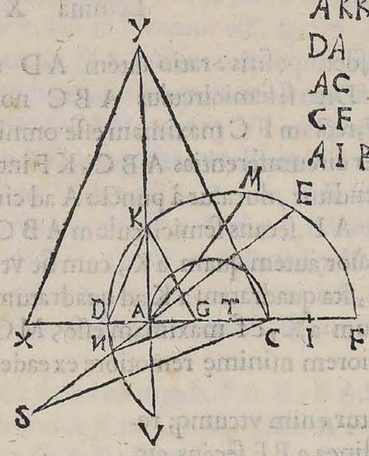
Rursus quoniam C k non est maior; quàm C E, ideo nec quadratum C k maius erit quadrato C E; sed quadratum C k * æquale est quadratis C a, a k, & 47 primi quadratum C E * æquale quadratis C B, B E; ergo nec quadrata C a, a k maiora erunt quadratis C B, B E. sed quadratum C a maius est quadrato C B, ergo reliquum quadratum a k reliquo quadrato B E minus erit. vnde & recta

D a k minor quam recta E B, & sic demonstrabitur minor omnibus alijs. Minima est igitur a F. Sed ducatur alia recta a P L secans circumferentias a B C K F in punctis P L, & sit P L ipsi a k propinquior, quam B E. & connectantur C P, C L erit angulus a P C in semicirculus rectus, quare & angulus C P L rectus erit, & quoniam C L non est maior quàm C E, ideo nec quadratũ C L maius erit quadrato C E, hoc est nec quadrata C P, P L maiora erunt quadratis C B, B E, sed quadratum C P maius est quadrato C B, ergo reliquum quadratum P L reliquo quadrato B E minus erit, quare & recta P L maior quam recta B E. Propinquior scilicet minime minor remotiore.

Sed extendatur semicirculus A B C vltra punctum T. & compleatur circulus F E D quem E A, K A productæ secent in punctis H V, & connectantur G H, G K, K D, quibus parallelæ agantur C S, c y, y x secantes E A, A K, F A, in punctis S Y X, & sit primum A k maior, quam C F. Quoniam igitur est, vt A G ad A C, *ita F C ad C X, & ita A k ad A Y: erit A K, hoc est A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad F C, ita A y ad c x, & consequenter* ita V y ad F x, hoc est ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, sed A V, hoc est A K, ponitur maior quam F C, ergo & V y maior erit quam F x.

lem 17

ja quinti




AK R 20 | RS A
DA 2 | 1
AC 6 | 3
CF 4 | 2
AI R 60 | R 15

Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k, F A X erit, *vt A y ad A F, ita A x ad A K, hoc est ad A V; sed y v composita ex extremis ostensa est maior, quàm F x. composita ex medijs. ergo altera* extremarum A y, A V, nempe ipsa A y maxima erit; minima vero A k, vnde A y maior erit quam A F, & multo maior quam A E. Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k E A S. proportionales erunt A K, A E, A S, A y, sed A K minor est quam A E, ergo & A S minor erit quam A y.

corol. lem. 17. 16 sexti

Theor. 2 huius

corol. Lem. 17

16 sexti

C

Cum igitur A y maior sit quam A S, & maior quam A E, vt demonstrauimus, ac etiam maior, quàm A K; erit ipsa A y maxima quatuor proportionalium A k, A E, A S, A Y; minima vero A k, vnde composita ex y a, a K, maxima videlicet, & minima, idest recta y v, maior erit, quam E S composita ex reliquis.

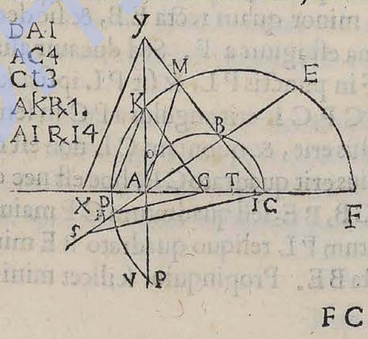
Theor. 1 huius

lem. 17 1. Et quoniam est vt a g ad a c, *ita E B ad B S, & *ita a K ad a y erit a k, hoc est a v ad a y, vt E B ad B S, & conuertendo, & componendo vt y v ad v A, ita S E ad E B; sed y V ostensa est maior, quam S E, ergo & v a, hoc est a K, maior erit quam E B, & sic demonstrabitur maior omnibus alijs. Maxima est igitur omnium a k.* D

lem. 17

Sed sit F C maior quam A k. eadem ratione, quoniam est vt a g ad a c, ita F C ad C X, &* ita a k ad a y, erit F C ad C X, vt a k, hoc est a v ad a y, & permutando vt F C ad a v, ita C X ad a y; & consequenter,* ita F X ad V Y omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed

ja quinti




FC



A F C ponitur maior, quàm A K, hoc est quam A V, ergo & F x maior erit, quàm V y. sed F x composita est ex extremis quatuor proportionalium a f, a y, a v, a x, ipsa vero v y ex medijs; constat autem eas proportionales esse, ex eo quod rectangulum F A X æquale est rectangulo y a k, hoc est y a v; ergo* altera extremarum a f, a x maxima erit, altera minima, sed a f non est minima, cum sit maior quam a v, ergo maxima erit, & * consequenter a x minima, itaque a x minor erit quam a v, & multo minor quam a e.

corol. lem. 17 Theor. 2. huius Theor. 1 huius

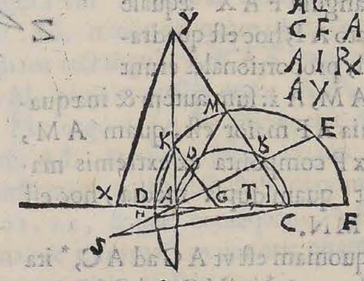
Et quoniam æqualia sunt rectangula F A X, E A S, proportionales erunt a f, a e, a s, a x: sed a f maior est quam a e, ergo & a s maior erit quam a x, est autem & a e maior, quam ipsa a x, vt demonstrauimus, & consequenter a f multo maior: itaque a x minima erit quatuor proportionalium a f, a e, a s, a x. quare a f * maxima, vnde y f composita ex maxima, & minima maior erit, quam s e composita ex reliquis. B

corol. lem. 17

Theor. 2 huius 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, ita F C ad C X, & ita E B ad B S; erit f c ad c x, vt e b ad b s, & conuertendo vt x c ad c f, ita s b ad b e, & componendo vt x f ad f c, ita s e ad e b; sed x f ostensa est maior, quam s e, ergo & f c maior erit, quam e b; eademque ratione ostenditur maior omnibus alijs. Quare maxima est f c.

Sed sint æquales A k, F C. Quoniam igitur est, vt A G ad a c, ita f c ad c x, & *ita a k ad a y, erit f c ad c x, vt a k ad a y, sed f c ponitur æqualis a k, ergo & c x æqualis erit a y, quibus additis æqualibus c f, a v, tota x f æqualis erit toti y v. sed x f composita est ex extremis quatuor proportionalium f a, a y, a v, a x: ipsa vero y v ex medijs: eæ autem sunt proportionales, quia rectangulum f a x * æquale est rectangulo y a k, hoc est y a v, ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit, itaque a f altera extremarum æqualis erit alteri mediarum y a, a v; sed non est æqualis ipsi a v, quia* maior est, ergo æqualis erit ipsi a y.* C D




lem. 17

corol. lem. 18 Theor. 3 huius

7 tertii

lem. 17

Et quoniam rectangulum y a k, hoc est y a v æquale est rectangulo e a s, erit a y ad a e, vt a s ad a v; sed a y cum sit æqualis a f, maior est quam a e, ergo & a s maior erit quam a v, itaque quatuor proportionalium a y, a e, a s, a v minima erit a v, & * consequenter maxima a y. vnde x v composita ex maxima, & minima * maior erit, quàm s e composita ex reliquis.

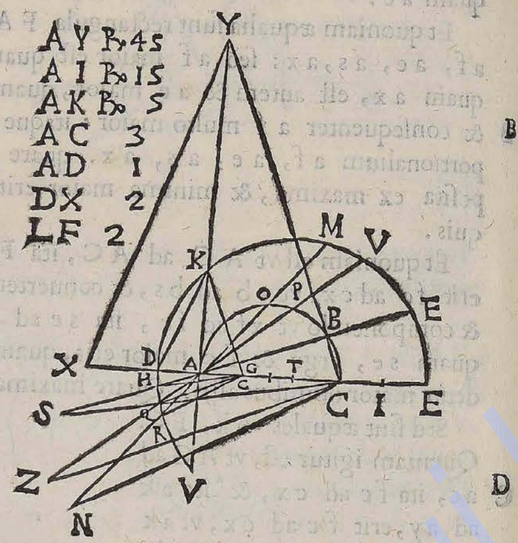
Theor. 5 huius 25 quinti lem. 17.

Et quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita * A K hoc est A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B: sed y V ostensa est maior quam S E, ergo & V A hoc est A k maior erit quàm E B. atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F G cum sit æqualis A k, erit quoque omnibus maior. itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. quod est primum.

Deinde producatur M A donec secet circulum completum F E D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N secans M R productam in N. Rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M: sunt enim æquales A I, A M, ex constructione. quare A M æqualis erit ipsi A N. & cum sit rectangulũ F A X * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A F, A M, A x: sunt autem & inæquales, quia A F maior est, quam A M, ergo x F composita ex extremis maior erit, quam dupla media, hoc est quam M N.

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F C ad c x, & * ita M O ad O N: erit F C ad c x, vt M O ad O N. & conuertendo vt x c ad C F, ita N O ad O M. & componendo vt X F ad F C, ita erit N M ad M O. sed X F ostensa est maior quam N M; ergo & F C maior erit quam M O.

Eadem ratione quoniam rectangulum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt y A, A M, & A K, hoc est & A V: sunt autem & inæquales; ergo y V composita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla.






A Et quoniam est vt A G ad A C, * ita A K ad A y, & * ita M O ad O N: erit vt A k, vel A V ad A y, ita M O ad O N; & conuertendo vt y A ad A V, ita N O ad O M. & componendo vt y V ad V A, ita erit N M ad M O: sed y V ostensa est maior, quam N M; ergo & V A hoc est A K maior erit quam M O.

Similiter quoniam rectangulum E A S æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem, & inæquales, ergo S E composita ex extremis maior erit, quam dupla media hoc est quam N M. Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita M O ad O N: erit E B ad B S, vt M O ad O N. & conuertendo vt S B ad B E ita N O ad O M. & componendo vt S E ad E B, ita erit N M ad M O, sed
B S E maior est, quam N M, vt demonstrauimus. ergo & E B maior erit, quàm M O. atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa M O. Minima est igitur M O omnium quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, k F interijciuntur. quod est secundum.

Postremo ducatur à puncto A alia recta A P L secans circumferentias A B C, k F in punctis P L, sintque P L, B E ex eadem parte minime O M, atque sit P L ipsi O M propinquior, quam B E. deinde producatur L A donec secet circulum F E D completum in Q, & connectatur G Q, eique parallela ducatur c z occurrens L Q continuatæ in z: erunt igitur * æqualia rectangulo L A Z, F A S, ac proinde proportionales A L, A E, A S, A Z. in prima quidem figura vbi A L, A E existunt inter re-
C ctas A M, A K. sic argumentor, sed A L maior est quam A E, ergo & A S maior erit quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S; sed A E minor est quam A M, ergo & A M minor erit quam A S; atque adeò A S maior erit quàm A L, & multò maior quam A E; atque est maior quam A Z, vt demonstrauimus, itaque A S maxima erit quatuor proportionalium a l, a e, a s, a z, & per * consequens. A E minima vnde S E composita ex maxima, & minima * maior erit quam Z L composita ex reliquis, hoc est Z L minor quam S E.

In secunda verò figura vbi A L, A E existunt inter rectas a m, a f, argumentor in hunc modum. sed a l minor est quam a e, ergo & a s mi-
D nor erit quam a z, & quoniam rectangulum e a s * æquale est quadrato a i, vel a m, proportionales erunt a e, a m, a s; sed a e maior est quam a m, ergo & a m maior erit quam a s, itaque a s minor erit quam a l, & multo minor quam a e, atque est minor quam a z, vt demonstrauimus, itaque a s minima erit quatuor proportionalium a l, a e, a s, a z, & consequenter * a e maxima. quare s e composita ex maxima, & minima maior erit quam Z L composita ex reliquis, hoc est z l minor quam S E. quod quidem demonstrauimus & supra.

At quoniam in vtroque casu est, vt a g ad a c, * ita e b ad b s, & ita L P ad P Z, ita E B ad B S, & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad

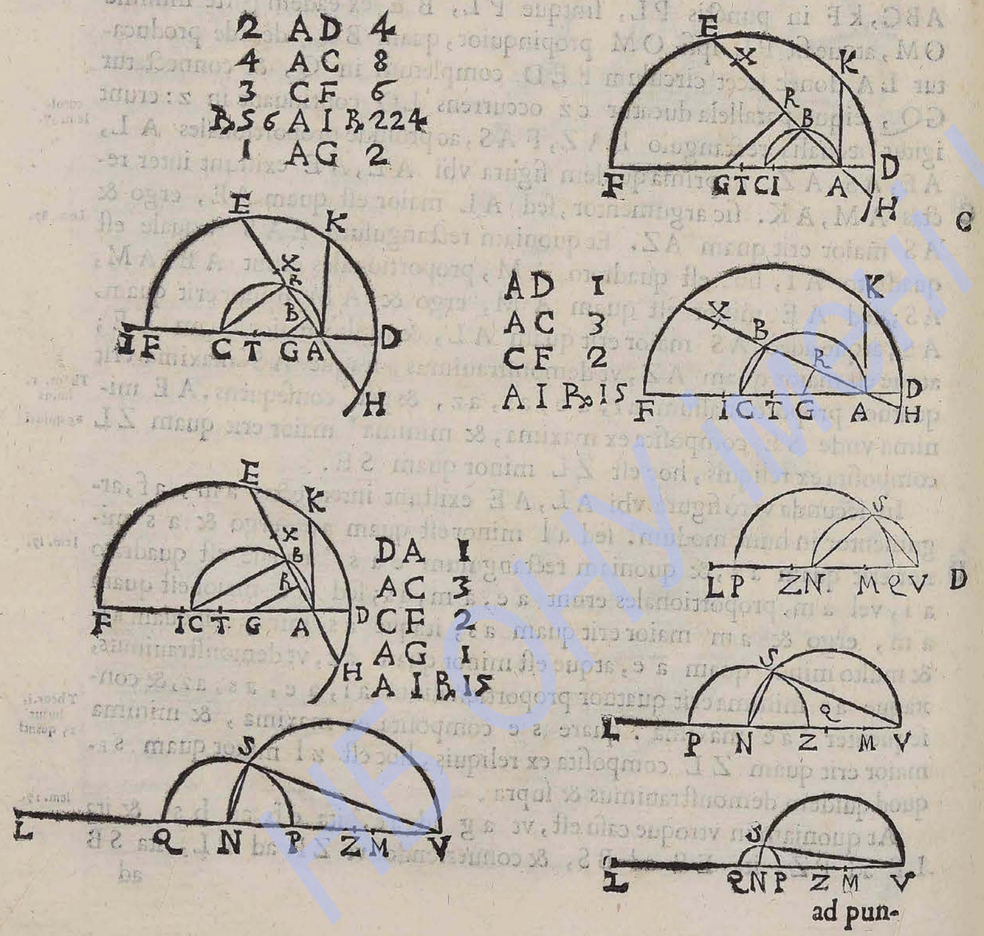
ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est mi- A
nor quam S E, ergo & L P minor erit quam E B. Propinquior igitur mini-
mæ minor est remotiore ex eadem parte. quod tertio loco erat ostendendum.

Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte mi-
nores sint, manifestum est A K maximam esse omnium, quæ inter
circumferentias a O, K M interijciuntur. Earum autem, quæ in-
terijciuntur inter circumferentias O C, M F, maximam esse C F.

Compositio septimi Casus.

SInt dati duo semicirculi a B C, D E F, quales in præsenti Casu ponun- B
tur. data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias a B C,
D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum a perti-
neat. Oportebit autem ipsam V z non esse maiorem, maxima rectarum, quæ






A ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur, neque minorem minima; quæ autem sit maxima, quoque minima, iam est demonstratum. Ducatur ad A F perpendicularis A K secans circumferentiam D E F in k, & si quidem data V Z sit æqualis maximæ. factum iam erit quod proponebatur. etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum A K, F C; si vero sit æqualis minimæ, minima autē sit ea, quæ minor est ipsarū A k, F C, itidem factum erit, quod proponebatur, sed si neutra dictarum A K, F C sit minima, inuenta minima Problemati satisfiet. inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 24. Si autem V Z minor sit maxima, maior minima sumatur ex centro circuli D E F, quod sit T recta T G æqualis T C, & * fiat Probl. 6 huius
vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod sit A I.

B Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad aliam, quæ sit z L. & V L composita ex V Z, Z L secetur bifariam in N. cum igitur à quadrato V N auferendum sit quadratum A I, vt Porisma iubet, describatur in V N semicirculus, in quo accommodetur V S æqualis A I infra ostendetur minor quam V N, deinde connectatur S N. quadratum igitur V N superat quadratum V S quadrato S N, angulus enim V S N in semicirculo rectus est itaque rectæ V N auferenda est, vel addenda recta æqualis N S, sic Porisma fieri iubet, auferatur ergo, vel addatur prout sequentia præcepta docebant. eaque diminuta, vel aucta sit V P; cui æqualis à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta A E secans semicirculum A B C in B, ipsam autem V P non esse maiorem quam A F, nec minorem quam A K, quatuor sequen-
C tia Lemmata ostendent. iam facta est constructio quemadmodum Porisma docet. Nunc ostendemus E B æqualem esse V z datæ.

Producatur E A donec secet circulum F E D completum in H. & centro N interuallo N S, vel N P circulus describatur secans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S. vnde quadratum V S * æquale erit rectangulo 36 tertii
P V Q, vel V P L, seu quod idem est rectangulo V P, L z, minus rectangulo V P z: punctum enim z existit in recta V P, vt quatuor sequentia Lemmata ostendent. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes, itidem manebit inter eas partes æqualitas. igitur quoniam est vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione; erit con-
D uertendo vt A C ad A G; ita quadratum A I, hoc est quadratum V S ad quadratum A k, quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, altera vero pars sic inuenietur.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M; erit Z M minor, quam z V, quoniam & P z minor est, quam L z, sed vt P z ad z M, ita est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: sunt enim eiusdem altitudinis V P: ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M.

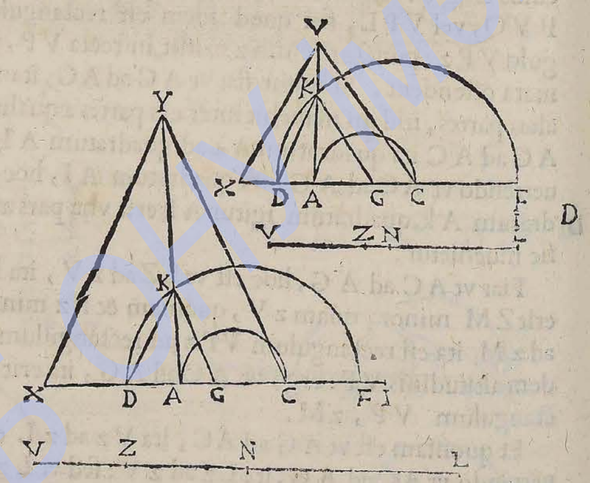
Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L ex constructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V: sed vt L z ad z V, ita est rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z eamdem enim habent altitudinem V P ergo

go vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P L z ad rectangulum P V z: sed A
vt A C ad A G ; ita ostensum est rectangulum V P z ad rectangulum
V P, z M. ergo vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, ita re-
ctangulum V P z ad rectangulum, V P, z M. nempe vt totum ad totum,
5 quinti ita ablatum ad ablatum; quare vt * totum ad totum, ita erit & reliquum ad re-
liquum, hoc est vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, id est vt
A C ad A G, ita rectangulum V P, L z minus rectangulo V P z ad rectangu-
lum P V z minus rectangulo V P, z M. itaque rectangulum P V z minus
rectangulo V P, z M erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur A K,
hoc est rectangulum E a H, æquale erit rectangulo P V z minus rectangulo
V P, z M. hoc est æquale erit rectangulo P V M, sed P V æqualis est A E ex
constructione; ergo & V M æqualis erit A H. B

Denique connectatur B C, cui parallela agatur G R secans A E in R: an-
gulus igitur a R G, æqualis est angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipse a B C
Lem. 2 in semicirculo rectus est. vnde * æquales suut E B, H R: sumatur autem B x
æqualis a R; reliqua x E æqualis erit reliquæ a H, hoc est ipsi V M; sed a E
æqualis est V P, ex constructione, ergo & reliqua x a reliquæ M P æ-
qualis erit.

Et quoniam similia sunt triangula a B C, a R G, anguli enim a B C,
a R G sunt æquales, quia recti & angulus a communis est vtrique: erit vt
a C ad a G, ita a B ad a R; sed vt a C ad a G, ita est quoque P z ad z M,
ex constructione: ergo vt a B ad a R, hoc est ad B x, ita erit P z ad z M.
& componendo vt a x ad x B, ita P M ad M z; sed x a prima ostensa C
est æqualis tertiæ P M, ergo & secunda x B æqualis erit M z quartæ, sed
E x ostensa est æqualis M V, ergo tota E B toti V z æqualis erit. Posi-
ta est igitur inter circumferentias k F, a B C recta E B æqualis datæ V z,
eaque ad punctum a pertinet. quod erat faciendum.

At vero rectam a I mi-
norem esse, quam V N sic
demonstrabimus. Primũ
habeat a D ad a F non
minorem rationem, quam
a G ad a C ergo a I non
lem. 19. * erit minor, quàm a F:
lem. 20 atque F C * minima erit
omnium interceptarum in
ter circumferentias a B C,
k F. Connectatur autem
G k, k D, quibus paral-
lelæ agantur c y, y x secá-
tes a K, a D continuatas
in punctis y x. rectangu-
lum igitur F a x * æquale
lem. 17 erit



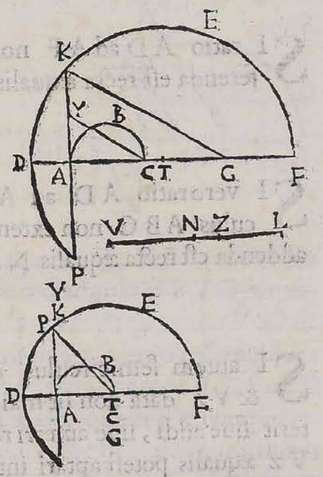

D



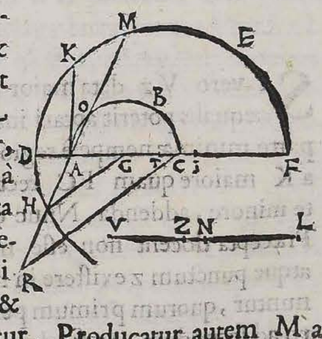
A erit quadrato A I: & ideo proportionales erunt F a, a I, a x: quare F x
composita ex extremis non erit minor quam a I dupla.

Et quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad c x, & ita V z ad z L, ex lem. 19
constructione, erit vt F C ad C x, ita V Z ad Z L, & permutando vt F C ad
V z, ita erit C x ad z L. & consequenter * ita F x ad V L, omnes videlicet
antecedentes ad omnes consequentes: sed F C cum sit omnium interceptа-
rum minima, minor est, quam V z; ponitur enim V z maior minima,
ergo & F x minor erit, quam V L; sed F x ostensa est non minor, quam
dupla A I, ergo & A I dupla minor erit, quam ipsa V L, & consequen-
ter A I simpla minor quàm V N, dimidia videlicet ipsius V L.

Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C. Vel
B igitur semicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod est
T, vel non extenditur. Primum non extendatur, & connectatur G K, ei-
que parallela agatur C y secans A K in y, & producatur k A donec secet
circulum F E D completum in P. Quoniam
igitur rectangulum y A K * æquale est quadra- lem. 17.
to A I, proportionales erunt y A, A I, A K.
quare composita ex extremis y A, A K, hoc est
recta y P, non erit minor quam A I dupla.




Et quotam est vt A G ad A C * ita A k ad lem. 17.
A y, & ita V z ad z L ex constructione, erit vt
a k hoc est. A P ad A y, ita V z ad z L, &
C permutando vt A P ad V z, ita A y ad z L, & 15 quinti.
consequenter * ita P y ad V L, hoc est ita omnes
antecedentes ad omnes consequentes; sed a P
cui æqualis est a k, quæ est * minima intercep- lem. 20.
tarum, minor est quam V z, ponitur enim
V z maior minima: ergo & P y minor erit quã
V L, sed P y ostensa est non minor, quam du-
pla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L,
& consequenter a I simpla minor, quam V N.
dimidia videlicet ipsius V L.




Sed extendatur semicirculus a B C vltra cen-
D trum T. ergo a G minor erit, quam a C, & lem. 18.
per consequens a k minor quam a I. est enim vt
a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum
a I ex constructione. Cum itaque a I sit maior,
quam a k, minor autem quam a F, poterit à
puncto a ad circumferentiam k F duci recta
a M æqualis a I. Ducatur igitur a M secans se-
micirculum a B C in O. ergo * M O erit mini
ma omnium, quæ ad punctum a pertinent, &
inter circumferentias a B C, K F interijciuntur. Producatur autem M a
donec

donec secet circulum FED completum in H, & iungatur GH, cui parallela agatur CR secans MH continuatam in R. Rectangulum igitur MaR* æquale erit quadrato aI, hoc est quadrato aM, quare æquales erunt aR, AM. A

lem. 17 Et quoniam est vt aG ad aC, *ita MO ad OR, & ita Vz ad zL ex constructione, erit vt MO ad OR, ita Vz ad zL, & permutando vt MO
12 quinti ad Vz, ita OR ad zL, & consequenter ita *MR ad VL, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes: sed MO, cum sit omnium interceptarum minima, minor est quam Vz; ponitur enim Vz maior minima, ergo & MR minor erit, quam VL, & per consequens AM, vel AI minor, quam VN dimidia, videlicet minor quam dimidia. quod erat ostendendum.

Quo autem Casu rectæ VN auferenda sit recta æqualis NS, quoue addenda, ratio his constat præceptis. B

## Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non sit minor ratione AG ad AC, rectæ VN auferenda est recta æqualis NS.

## Præceptum II.

SI vero ratio AD ad AF minor sit ratione AG ad AC, & semicirculus ABC non extendatur vltra centrum circuli DEF, rectæ VN addenda est recta æqualis NS. C

## Præceptum III.

SI autem semicirculus ABC extendatur vltra centrum circuli DEF, & Vz data non sit maior minore rectarum aK, FC, rectæ VN poterit siue addi, siue auferri recta æqualis NS. in hoc enim Casu recta datæ Vz æqualis potest aptari inter circumferentias aBC, kF ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur aptabitur ea recta è regione aK; si vero addatur, aptabitur è regione FC.

## Præceptum IV.

SI vero Vz data maior sit minore rectarum ak, FC; recta ipsi Vz æqualis poterit aptari inter circumferentias aBC, kF ex vna tantum parte minimæ nempe è regione maioris rectarum ak, FC. Itaque existente aK maiore quam FC rectæ VN auferenda est recta æqualis NS, existente minore, addenda. Nunc ostendam rectam VP sumptam quemadmodum Præcepta docent non esse maiorem, quam aF, nec minorem quam ak, atque punctum z existere in recta VP. quo circa quatuor Lemmata proponuntur, quorum primum pertinebit ad primum præceptum, secundum vero ad secundum, & sic deinceps.

Lem-



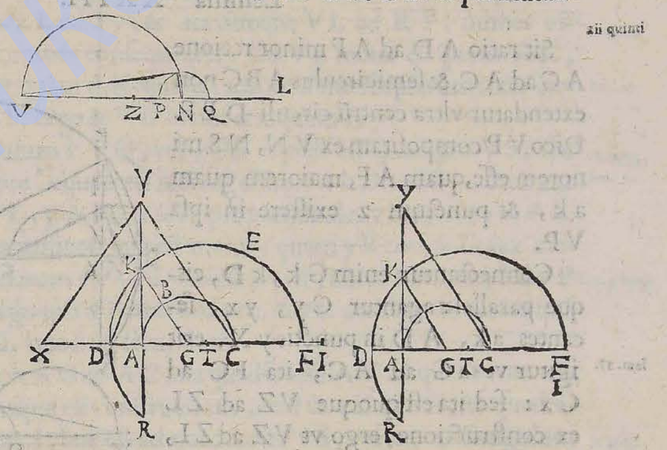
A

## Lemma XXII.

Sit ratio AD ad AF non minor ratione AG ad AC. Dico VP differentiam rectarum VN, NS minorem esse, quam AF, maiorem quam Ak, & punctum z existere in ipsa VP.

COnnectantur enim Gk, kD, quibus parallelæ agantur cy, yx secantes Ak aD continuatas in punctis yx.

Quoniam igitur est vt aG ad aC, * ita FC ad CX, & ita lem. 17
Vz ad zL ex constructione, erit vz ad zL, vt FC ad Cx. & permutando vt Vz ad FC, ita zL ad Cx, & ita* quoque VL ad Fx: est enim vt 12 quinti
B vna antecedentium ad vnã consequentium, ita oẽs antecedentes ad oẽs cõsequentes; sed Vz ponitur maior, quã FC; est enim FC minima oĩum quæ inter circũferentias aBC, KF intercipiuntur. ergo & vL maior erit quam Fx.




Et quoniam æquales
C sunt VN, NL ex constructione, & æquales quoque NQ, NP, vt semidiametri, ergo fiunt quoq; æquales VQ, LP, quare rectangulum PVQ æquale erit rectangulo VPL, sed rectangulum PVQ* æquale est quadrato VS, hoc 36 tertij
est quadrato aI, cui quoque æquale est rectangulum Fax; ergo rectangulum VPL æquale erit rectangulo Fax. quare proportionales erunt VP, Fa, ax PL. sed VL composita ex extremis ostensa est maior quam Fx composita ex medijs, ergo altera* extremarum vP, PL, maxima erit, altera minima; the. 4 huius
sed VP minor est quam PL, ergo ipsa VQ minima erit, atque adeo minor quam AF. quod est primum.

Deinde compleatur circulus FE, BR, quem KA producta secet in R. Quoniam igitur est vt AG ad AC, *ita AK ad Ay, & ita quoque Vz ad zL lem. 17
D ex constructione: erit vt Vz ad zL, ita AK hoc est AR ad Ay. & permutando vt vz ad AR, ita zL ad Ay. & consequenter* ita VL ad Ry, omnes vi- 12 quinti
delicet antecedentes ad omnes consequentes; sed Vz minor est quam AR; ponitur enim zv minor, quam Ak, quæ est* maxima omnium interceptarũ in- lem. 2 a
ter circumferentias ABC, KF: ergo & VL minor erit, quàm Ry.

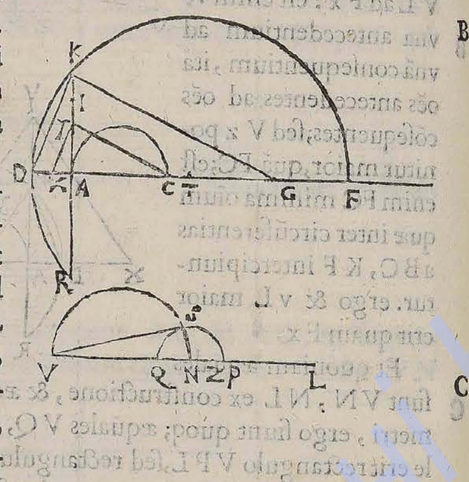
Et quoniam rectangulum PVQ, seu VPL* æquale est quadrato VS, lem. 4
hoc est quadrato AI, cui quoque* æquale est rectangulum yaK, hoc est yaR; æqualia erunt rectangula VPL, yAR; & ideo proportionales VP, YA, aR, PL: sed VL composita ex extremis ostensa est minor, quam

3 huius R y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A R maxima erit, A
altera minima; sed A y maior est quam A R, ergo ipsa A R minima erit,
& per consequens V P maior quam A R, hoc est quam A k. quod est se-
cundum.

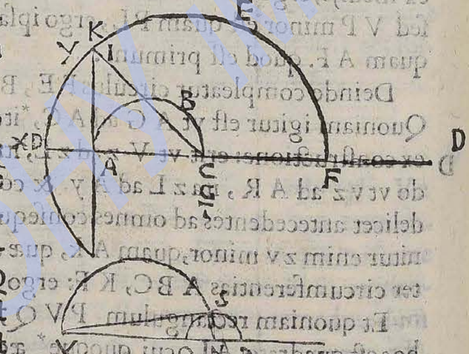
Denique cum vt V P maior quam A k, ipsaque A K maior quam V Z, erit
V P multo maior, quam V Z. atque adeo punctum Z erit in recta V P. quod
vltimo loco erat ostendendum.

## Lemma XXIII.

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrũ circuli D E F. Dico V P compositam ex V N, N S minorem esse, quam A F, maiorem quam a k, & punctum z existere in ipsa V P.




Connectantur enim G k, k D, eisque parallelæ agantur C y, y x, secantes a k, A D in punctis y X. erit
lem. 17 igitur vt a G ad A C,* ita F C ad C x: sed ita est quoque V Z ad Z L ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad C X. & permutando vt V Z ad F C, ita Z L ad C x.
12 quinti & ita * quoque V L ad F X, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V z ponitur
lem. 21. minor quam F C; est enim F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias A B C, X F interijciuntur; ergo & V L minor erit, quam F X.




Et quoniam æquales sunt V N, N L, & æquales quoque N P, N Q; ut semidiametri; ergo sunt quoque æquales V P, L Q. Quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L; sed rectangulum P V Q
36 tertij * æquale est quadrato V S, hoc est
lem. 17 quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A X, ergo rectangulũ V P L æquale erit rectangulo F A X:

quare



A quare proportionales erunt V P, F A, A X, P L; sed v L composita ex extremis ostensa est minor, quam F X composita ex medijs, ergo* altera me- The. 2. huius
diarum F A, a X maxima erit, altera minima. itaque A F maxima erit quippe quæ maior est, quam A X, & per consequens V P minor erit quam a F. quod est primum.

Deinde compleatur circulus F E D, quem K a producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita* a k ad a y. & ita quoque V Z ad z L lem. 17
ex constructione; erit vt V z ad z L, ita A K, hoc est A R ad a y. & permutando vt V z ad A R, ita z L ad a y, &* ita quoque V L ad R Y, omnes vi- 12 quinti
delicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V z maior est quam A R, ponitur enim V z maior quam A K, quæ est minima interceptarum inter cir- lem. 21
B cumferentias A B C, K F. ergo & V L maior erit quam R y.

Et quoniam rectangulum P V Q, vel v P L æquale est quadrato V S, seu 36 tertij
quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y a k, hoc est y a R, erunt lem. 17
æqualia rectangula V P L, y A R; & ideo proportionales v P, y A, a R, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est maior; quam y R composita ex medijs, ergo altera* extremarum v P, P L maxima erit, altera minima; sed v P The. 2 huius
maior est, quàm P L, ergo ipsa v P maxima erit, & per consequens maior quã A R, hoc est quam A K. quod est secundum.

Rursus quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita v Z ad Z L. vtrumque ex constructione, erit vt v Z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc est ad quadratum v S, vel ad* rectangulum 36 tertij
C P v Q, seu ad rectangulum v P L: sed vt v z ad z L, ita est quoque quadratum v z. ad rectangulum v z L, eandem enim habent altitudinem v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum A k ad rectangulum v P L. sed quadratum v z maius est quadrato A k, ponitur enim recta V z maior, quam A K, quæ est minima interceptarum, lem. 23
ergo & rectangulum v z L maius erit rectangulo v P L. quare punctum z propinquius erit ipsi N, quam punctum P, atque vtrumque existit in medietate N L. ergo punctum z erit in recta v P. quod vltimo loco erat ostendendum.

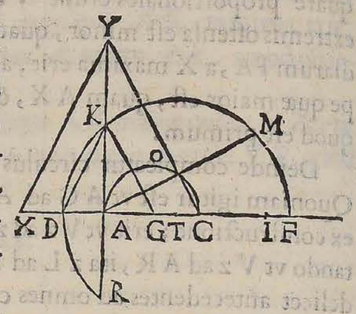
## Lemma XXIV.

D Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. sed semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, & data v Z non sit maior minore rectarum A K, F C. Dico neque differentiam rectarum v N, N S, neque compositam ex ipsis minorem esse quam A K, aut maiorem quam A F. & punctum z existere in ipsa differentia.

Sit V P differentia rectarum V N, N S, V Q vero aggregatum earundem, & compleatur circulus F E, D R, quem k a producta secet in R, & iungantur G k, K D, eisque parallelæ agantur C Y, Y X, secantes A K, A B productas in punctis Y X. erit igitur vt A G ad A C,

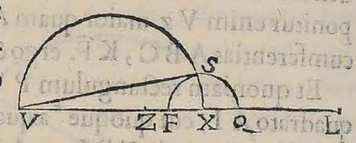
lem. 17. * ita AK ad Ay: sed ita est quoque VZ ad ZL ex constructione. ergo vt VZ ad ZL, ita erit AK, hoc est AR ad Ay. & permutando vt VZ ad AR, ita ZL ad Ay. & consequenter * ita VL ad Ry, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed VZ non est maior quam AR, ponitur enim VZ non maior minore rectarum ak, FC. ergo neque VL maior erit quam Ry. A

12. quinti




Et quoniam rectangulum PVQ, hoc est VPL (sunt enim æquales VQ, PL) æquale * est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque * æquale est rectangulum yAK, rectangulum VPL æquale erit rectangulo yak, vel yaR, & ideo proportionales erunt VP, ya, aR, PL. sed VL composita ex extremis ostensa est non maior, quam yR composita ex medijs. ergo si est minor, erit * altera mediarum ya, ak maxima, altera minima. sed ay maior est quam aR, ergo ipsa aR, hoc est ak, minima erit: & per consequens VP maior quam aK. Si vero VL composita ex extremis æqualis est yR compositæ ex medijs, * minor extremarum minori mediarum æqualis erit. hoc est VP æqualis aR, vel ak. B

36 tertij
lem. 17




the. 2. huius

the. 3 huius

Et quoniam VP minor est quam VS, hoc est quam aI, ipsaque aI minor quam aF, erit VP ipsa aF multo minor. Recta igitur VP differentia rectarum VN, NS non est minor quam ak, nec maior quam aF, quod est primum. C

lem 17

Simili ratione quoniam est vt aG ad aC, * ita FC ad CX, & ita VZ ad zL ex constructione. ergo vt Vz ad zL, ita erit FC ad CX. & permutando vt Vz ad FC, ita erit zL ad CX, & ita * quoque VL ad FX omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed Vz non est maior quam FC, ponitur enim Vz non maior minore rectarum ak, FC. ergo neque VL maior erit quam FX. Et quoniam rectangulum FaX * æquale est quadrato aI, & recta aI minor quam aF: D erit aX multo minor.

12 quinti

lem. 17

Rursus quoniam rectangulum QVP, hoc est VQL, sunt enim æquales VP, QL, * æquale est quadrato VS, hoc est quadrato aI, cui quoque * æquale est rectangulum FaX. ipsa rectangula VQL, FaX æqualia erunt, & ideo proportionales * VQ, Fa, aX, QL: sed VL composita ex extremis ostensa est non maior, quam Fx composita ex medijs. ergo si est minor erit altera * mediarū Fa, ax. Maxima, altera minima. sed ax ostensa est minor quam aF, ergo Fa maxima erit. quare VQ minor quam aF. Si vero VL composita ex extre-

36. tertij
lem. 17.

16. sexti

The. 2. huius





extremis æqualis est FX compositæ ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc est VQ æqualis AF. A

The. 3. huius

Et quoniam est vt AG ad AC, minor nempe ad maiorem, ita quadratum AK ad quadratum AI, ex constructione, quadratum Ak minus erit quadrato AI. vnde & recta Ak minor quam recta AI, hoc est quam recta VS; sed VQ maior est, quam VS, ergo multo maior erit quam AK. Recta igitur VQ composita ex VN, NS non est minor, quàm Ak, nec maior quam AF, quod est secundum.

Postremo quoniam est vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI. & ita Vz ad zL vtrumque ex constructione, erit vt Vz ad zL, ita quadratum AK ad quadratum AI, hoc est ad quadratum VS, seu ad rectangulum PVQ, vel vPL. sed vt vz ad zL ita * est quoque quadratum vz ad rectangulum vzL; sunt enim eiusdem altitudinis vz. ergo vt quadratum vz ad rectangulum vzL, ita erit quadratum Ak ad rectangulum vPL. sed quadratum vz non est maius quadrato AK: ponitur enim recta vz non maior minore rectarum AK, FC. ergo si est minus erit, & rectangulum vzL minus rectangulo vPL. quare puncti B * propinquius erit ipsi N, quam punctum Z, atque vterque existit in medietate vN. ergo punctum z erit in recta vP. Si vero quadratum vz æquale est quadrato Ak; erit & rectangulum vzL æquale rectangulo vPL. quare punctum Z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta vP. quod vltimo loco erat ostendendum. B

lem. 17

12 quinti

C Scholium.

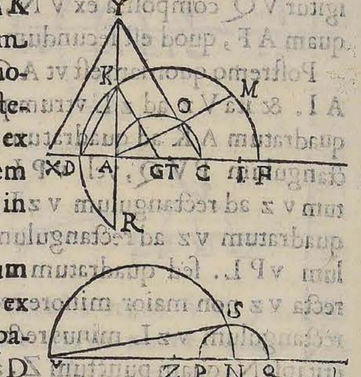
Ex demonstratis patet si AD ad AF minorem rationem habeat quam AG ad AC, & semicirculus ABC extendatur vltra centrum circuli DEF, atque data vz non sit maior minore rectarum Ak, FC, Problema duobus modis posse absolui. Nam si à puncto A ad circumferentiam KF ducatur recta AM æqualis AI, vel vS secans semicirculum ABC in O. erit MO * minima omnium, quæ inter circumferentias ABC, kF intercipiuntur, Et quoniam vP differentia rectarum vN, NS minor est, quàm vS, hoc est quam AM, non autem quam Ak, vt demonstrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam KM duci recta AE æqualis vP. D

lem. 29

Similiter quoniam recta vQ composita ex vN, NS maior est quam vS, hoc est quam AM, non autem quam AF, vt demonstrauimus; poterit à puncto A ad circumferentiam MF duci recta AE æqualis vQ. Itaque si recta AE ducatur æqualis vP, aptabitur recta æqualis datæ vz inter circumferentias KM, AO. si vero ducatur æqualis vQ, aptabitur inter circumferentias MF, OC. poterit igitur aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis absolui. quod in tertio præcepto monuimus.

## Lemma XXV.

Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F: sed data V Z sit maior minore rectarum A k, F C, & à puncto A ad circumferentiam k F ducatur A M æqualis A I: est enim A I, * minor quàm A F, maior quam A k. Dico si A K maior sit quam F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse quam A K, minorem autem quam A M, & punctum z existere in ipsa differentia. sin minor compositam ex V N, N S minorem esse quam A F, maiorem autem quam A M. & punctum z existere in ipsa composita.




Sit enim V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S; V Q vero æqualis compositæ ex ipsis, & connectantur G K, k D, eisque parallelæ agantur C y, y x secantes A k, A D productas in punctis y x, & compleatur circulus F E, D R, quem K A producta secet in R; & sit primum A k maior, quam F C. ergo ipsa A k maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, A O. non etiam inter circumferentias M F, O C cum sit V z maior quàm F C, ex positione; ipsa autem F C * maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.

lem. 19.

lem. 21.

Corol. le. 21

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita A K ad A y, & ita V z ad z L, ex constructione; erit vt V Z ad Z L, ita A k, hoc est A R, ad A Y. & permutando vt V Z ad A R, ita Z L ad A y. & ita * V L ad R Y; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z minor est quam A R. ponitur enim V Z minor maxima A k. ergo & V L minor erit quam R y.

lem. 13.

12. quinti

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L, * æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K, hoc est y A R, ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A R, & ideo * proportionales V P, y A, A R, P L. sed V L composita ex extremis ostensa est minor quam y R composita ex medijs. ergo * altera mediarum y A, A R maxima erit, altera minima, sed A R minor est quam A y. ergo ipsa A R minima erit, & consequenter V P maior quam A R hoc est quam A K. Ipsam autem V P minorem esse quam A M patet, cum ipsa V P minor sit quam V S, cui æquales sunt A I, A M, ex constructione.

36. tertij

lem. 17

16. sexti

the. 2. huius

Rursus quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratũ A I, & ita V z ad z L vtraque ex constructione erit vt V z ad z L, ita quadratum A k ad quadratum A I, hoc est ad quadratũ V S, seu ad * rectangulum P V Q, vel V P L. sed vt V z ad z L, ita est * quoq; quadratum V z ad rectangulum,

36 tertij

3 sexti

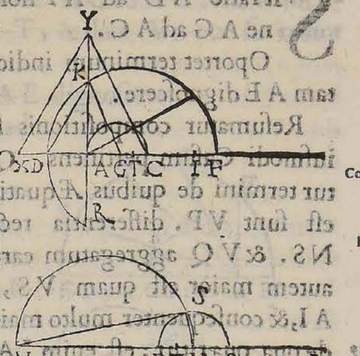
cum



A cum sint eiusdem altitudinis V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A K ad rectangulum V P L, sed quadratum V z minus est quadrato A K: ponitur enim recta V z minor maxima, quæ est A k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo V P L. quare punctum P * propinquius erit ipsi N, quam punctum z. itaq; punctum z erit in in recta V P. Existente igitur A K maiori, quam F, recta V P differentia rectarum V N, N S maior est, quam A L, minor autem quam A M, atq; punctum z existit in recta V P. quod est primum.

lem. 18

Deinde sit A k, minor quam F C. ergo F C * maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, A O, cum ponatur V z maior quam A K, quæ est * maxima omnium interceptarum inter circumferentias K M, A O.




lem. 21

Corol. le. 21

lem. 17

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & ita V z ad z L, ex constructione, erit vt V z ad z L ita F C ad c x, & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & consequenter * ita V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed V z minor est quam F C; ponitur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias A B C, k F, ergo & V L minor erit, quam F x. Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, & recta A I minor quam A F, erit A x multo minor.

B

C

12 quinti

lem 17

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est reganctulum F A x, rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V Q, F A, A x, Q L, sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam F x, composita ex medijs, ergo * altera mediarum F A, A X maxima erit, altera minima. sed A x ostensa est minor quam F A. ergo ipsa F A maxima erit. quare V Q minor quam A F. Ipsam autem V Q maiorem esse, quam A M manifestum est, cum ea maior sit; quam V S, cui æqualis est A I, vel A M ex constructione.

36 tertij

lem 17

the. 2 huius

D

Similiter punctum z existere in recta V Q constat. nam cum sit vt A G ad A C minor ad maiorem, ita V z ad z L ex constructione, erit & V z minor, quam z L vnde punctum z erit in recta V N, & consequenter in recta V Q. Existente igitur A k minori, quàm F C, recta V Q composita ex V N, N S minor est, quàm A F, maior autem quam A M. & punctum z existit in ipsa V Q. quod secundo loco erat ostendendum.

Resolutio prædicti Casus quemadmodum tertij, & quarti incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum non semper vterque indicat quæsitam A E, isque Casus parum distat à prædictis. idcirco eadem fere

ratione

ratione terminus ipsam quæsitam indicans dignoscitur; quo tamen constantior vndique cernatur methodus, hic quoque breuiter ostendam quomodo terminus quæsitam A E indicans à non indicante discernatur.

A

### Propos. I.

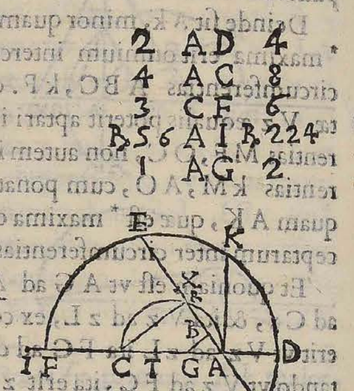
Terminum quæsitam A E indicantem, in semicirculis ad primum Præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C.

Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere.

Resumatur compositionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt V P. differentia rectarum V N, N S. & V Q aggregatum earundem. V Q autem maior est quam V S, hoc est quam A I, & consequenter multo maior quam A E, de qua quæritur; est enim * A I non maior quam A F. itaq; v Q non indicat ipsam A E. ergo eam indicat v P; Itaque existente ratione A D ad A F non minori, quàm A G ad A C, differentia rectarum v N, N S indicat A E quæsitam; agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum primum constitutum est.

B




lem 19

C

### Propos. II.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum Præceptum pertinentibus dignoscere.

vide fol. 224 Cas. 7

SIt ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. & semicirculus A B C non extendatur vltra T centrum circuli D E F.

Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur compositionis figura ad hunc Casum pertinens.

D

Termini de quibus æquatio explicabilis est sunt v P aggregatum rectarum v N, N S, & v Q differentia earundem. Et quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A L ad quadratum A I ex constructione. & A G in hac semicirculorum positione non minor quam A C: ergo neque quadratum minus erit, quadrato A I. quare nec recta A K minor, quam recta A I, sed A E quæsita maior est, quam A K; ergo maior etiam, quàm A I, hoc est quatu v S. & consequenter multo maior, quam v Q: recta igitur v Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat v P. Itaque existere ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & semicirculo A B C non extenso vltra centrum



A centrum circuli D E F. aggregatum rectarum V N, N S indicat quæsitam A E. Agnitus est igitur terminus ipsam quæsitam indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum secundum constitutum est.

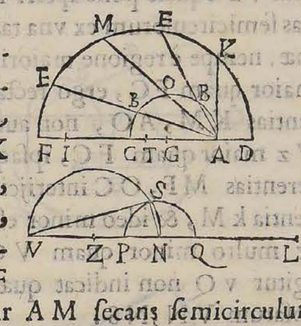
### Propos. III.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium Præceptum pertinentibus dignoscere.

RVrsus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. sed semicirculus A B extendatur vltra centrum T, & data V z non sit maior minore rectarum A K, F C.

B Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere.

Resumatur compositionis figura pertinens ad hunc Casum




ter 19.

Quoniam igitur est. vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione; & A G in hac semicirculorum positione minor est, quam A C; erit & quadratum A K minus quadrato a I. vnde & recta a k minor, quam recta a I, seu quod idem est a I maior, quam a k; sed ipsa * a I minor est quam a F, ergo poterit à puncto A ad circumferentiam K F

C duci recta A M æqualis A I; ducatur igitur A M secans semicirculum a B C in O. Aut igitur quæsita a F terminatur in circumferentia k M, vel in circumferentia M F: potest enim terminari in vtraque nam recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias semicirculorum ex vtraque parte minimæ M O, cum ipsa V z ponatur non maior minore rectarum a k, F C. si igitur a E desinit in circumferentia k M; ea minor est, quam a M, hoc est, quam a I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S, quod est vnus è duobus terminis de quibus Æquatio explicabilis est; alter vero est V P differentia rectarum V N, N S. Terminus igitur V Q non est idoneus ad indicandam a E quæsitam. ergo eam indicat V P.

D Si vero quæsita a E desinit in circumferentia M F. ea maior est, quam a I, seu quam V S, & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat ipsam quæsitam. ergo eam indicat V Q. Quando igitur ratio a D ad a F minor est ratione a G ad a C, & semicirculus a B C extenditur vltra centrum T, atque data V z non est maior minore rectarum a K, F C, indicat quæsitam a E, tum differentia tum aggregatum rectarum V N, N S. differentia quidem cum a E desinit in circumferentia k M; aggregatum vero cum desinit in circumferentia M F. Agnitus est igitur terminus quæsitam a E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum tertium constitutum est.

Propos.

## Propos. IV.

Terminum indicantem quæsitam a E in semicirculis ad Præceptum quartum pertinenibus dignoscere.

RVrsus sit ratio a D ad a F minor ratione a G ad a C, & semicirculus, a B C extendatur vltra T centrum circuli D E F, sed dat V z sit maior minore rectarum a K, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam a E dignoscere. Facta constructione vt in antecedenti Propositione, manifestum est rectam datæ V z æqualē posse aptari inter circumferentias semicirculorum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque sit primum A K maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias K M, A O, non autem inter circumferentias M F, O C, cum sit V z maior quam F C, ipsaque F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæsita definit in circumferentia k M, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S: terminus igitur v Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat V P differentia ipsarum V N, N S.

Sed sit F C maior quam A k. ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, A O, & A E quæsita definit in circumferentia M F, & ideo maior est quam A M hoc est quam A I, seu quam V S, & per consequens multo maior quam V P differentia rectarum V N, N S. ipsa igitur v P non indicat quæsitam A E. ergo V Q aggregatum rectarum v N, N S eam indicat. Cum igitur ratio A D ad A F minor est ratione A G ad A C, & semicirculus A B C extenditur vltra centrum T, atque data v z maior est minore rectarum A K, F C, existente A k maiore, quam F C differentia rectarum v N, N S indicat A E quæsitam: existente vero F C maiore quam A R, aggregatum. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum quartum constitutum est.

Corol. 1. 21

## Casus. VIII.

Rursus vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi. maior si compleretur minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi mino-



minoris: sed ab eo angulo semicirculus maior minus distet, quam à reliquo.

SInt igitur tales dati duo semicirculi a b c, d e f; data autem recta linea G, & à puncto à demittatur ipsi d f perpendicularis a k, vsque ad circumferentiam d e f.

Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat.

### Resolutio.

SIt iam posita recta linea e a b æqualis datæ G, & ex centro circuli d e f. quod sit t, ponatur t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h, quem e b producta secet in h, & ipsi e h ducatur perpendicularis g r, & ducatur b c. ea quoque eidem e h perpendicularis erit; cum sit rectus angulus a b c in semicirculo. quare æqualis erunt h r, e b.

Datarum autem a c, a g, b e, a k prima sit B. secunda D. tertia G. quarta K, vt designatura est in figuris ad resolutionem pertinentibus. & quæratur a e. esto illa A. ergo a b erit G -- A. & cum sint similia triangula a b c, a r g; erit vt a c ad a g, ita a b ad a r. quod in figuris ad resolutionem pertinentibus respondet: vt B ad D ita G - A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, cui addita r h æquali e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B} + G$. sed rectangulum e a h æquale est quadrato a k, ergo

G in A + $\frac{D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } A Q}{B}$ æquabitur K Q.

Ducantur omnia in B, ergo

B in G in A + D in G in A -- D in A Q æquabitur k Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis ex se subsistat, ergo:

$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ + G in A -- A Q æquabitur $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$

Sed

Sed vt Æquatio facilius explicetur transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in resolutionibus præcedentium Casuum factum est; hoc est fiat vt D ad B, ita k Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ sit F, eritq. F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$. & planum F in A idem, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur trasmutatione. A

F in A ✣ G in A -- A Q æquabitur Z Q.

Vel F ✣ G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata Æquatione. $F_{ij}^{i} \clubsuit G_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \clubsuit$ L.V. ($F_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \clubsuit G_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel $F_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \clubsuit G_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ -- L. V. ($F_{ij}^{i} \clubsuit G_{ij}^{i}$ Q -- Z Q) æquabitur A

In hac quoque Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed cum in omni Casu non possit sumi vterque ad indicandam a e quæsitam, inter sumendus sit suo dicetur loco. B

## Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod sit a i. & ita recta G ad aliam rectam quæ sit F, deinde dimidiæ compositæ ex F, & G addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ compositæ superat quadratum a i, fiet terminus maior.

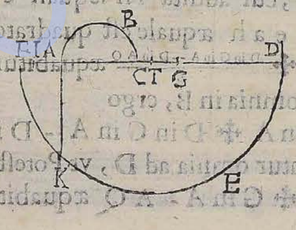
Vel eidem dimidiæ compositæ detracta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Sed antequam Problema componam, ostendendum est, quæ sit maxima, quæue minima rectarum, quæ per punctum a transeunt & inter circumferentias a b c, k f interijciuntur. id enim pertinet ad Determinationem, sed prius sequens Lemma demonstrabo. C

## Lemma XXVI.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & recta A k perpendicularis ipsi F D secet semicirculum D E F, in K, & ex centro circuli D E F, quod sit T sumatur T S æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F minor est ratione A G ad A C, & rectam A I minorem esse, quam A F, & si æqualis, æqualem; & si maior maiorem. D

PRimum sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. ergo minor erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I: est enim vt A G ad A C, ita quadratum a k ad aliud quadratum A I; sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium a D, a k, a F ad tertiam, ita est quadratum secundæ a K ad quadratum A F tertiæ. ergo ratio qua-




F A 4
A C 1½
C G 2
A D 9
A K 6
A I 5 3/7

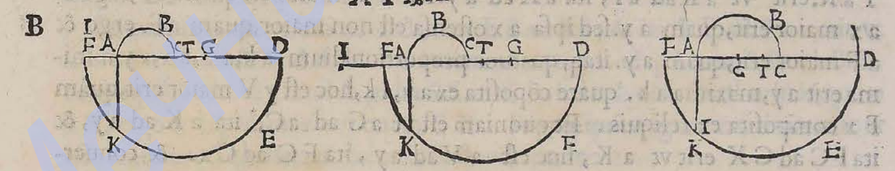


A quadrati A K ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I. quare quadratum a I minus erit quadrato A F. vnde & recta A I, minor, quàm recta A f. quod est primum.

Sit deinde ratio A D ad A f eadem, quæ A G ad A C. ergo eadem erit ratio & quadrati A k ad quadratum A I. sed vt A D ad A f, prima nempe ad tertiam, trium proportionalium A D, A k, A f; ita est quadra-

F A 2
A C 1
A D 6

F A 2
A C 4
A D 18
A G 12
A I 12



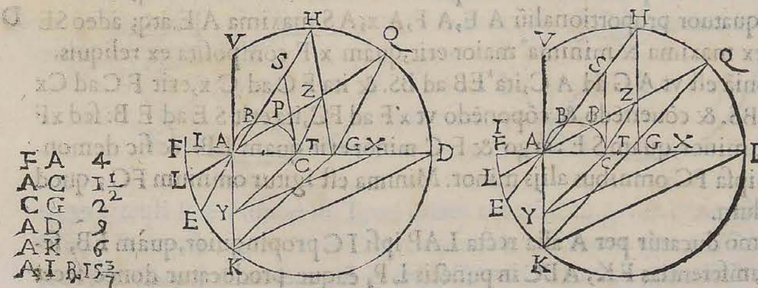

tum secundæ A k ad quadratum A f tertiæ. ergo quadratum A I quadrato A f æquale erit. vnde & recta A I æqualis rectæ A f. quod est secundum.

Sit tertiò ratio a D ad a f maior ratione a G ad a C. ergo maior erit & ratione quadrati a L ad quadratum a I, cum sit vt a G ad a C, ita quadratum a L ad quadratum a I, ex constructione. sed vt a D ad a f, ita est quadratum a k ad quadratum a f, vt demonstrauimus, ergo ratio quoque quadrati a K ad quadratum a f maior erit ratione quadrati a K ad quadratum a I, quare quadratum a I* maius erit quadrato a f. vnde & recta a I maior, quam recta a f quod est tertium. quare constat propositum. C

x. quinti

## Lemma XXVII.

IIsdem positis sit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. Dico a K maximam esse omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter




A F 2
A C 1
A D 6

F A 4
A C 1½
C G 2
A D 9
A K 6
A I 5 3/7

X cir-

circumferentias a B C, K f interijciuntur, minimam vero f C. Aliarum autem propinquiorem minimæ, remotiore minorem esse. A

Ducatur enim per a vtcunque recta linea E a B secans circumferentias k f, a B C in pũctis E B, & cõpleatur circulus f E, D H, quẽ E B, K a productæ secent in punctis H V, & connectantur G K, K D, G H, quibus parallelæ agãtur C y, y X, C S secantes a K, a D, a H in punctis y X S. erit igitur rectangulum
lem. 17 F a X* æquale quadrato a I, vnde proportionales erunt a F, a I, a X. sed a I, ex antecedente Lemmate, non est maior quam a F, eo quod ratio a D ad a F ponitur nõ maior ratione a G ad a C. ergo neque a x maior erit, quam a I, nec ideo
coro. l. lem. 17 & 6 sexti maior quam a F. Rursus quoniam rectangulum F a X * æquale est rectangulo Y a K, erit * vt a K ad a F, ita a X ad a y: sed a K maior est quam a F, ergo & a x maior erit, quam a y. sed ipsa a x ostensa est non maior, quàm a F. ergo & B
a F maior erit, quam a y. itaq; quatuor proportionalium a k, a F, a x, a y minima erit a y, maxima a k. quare cõposita ex a y, a k, hoc est y V maior erit, quàm
lem. 17 F x composita ex reliquis. Et quoniam est vt a G ad a C, * ita a K ad a y, & ita F C ad C X erit vt a K, hoc est a V ad a y, ita F C ad C x. & conuertendo vt y a ad a V, ita x C ad C F. & componendo vt y V ad V a, ita x F ad FC. sed y V ostẽsa est maior quã x F. ergo & V a, hoc est a k, maior erit quã FC.
coro. l. lem. 17 & 6 sexti tertij Similiter quoniã * æqualia sunt rectãgula y a K, E a S, erit vt * a k ad a E, ita a S ad a y: sed a K maior est, quam a E: ergo & a S maior erit, quã a y. est autem & a E maior quã a y, cum sit & a F maior, vt demõstrauimus. ergo quatuor
35 quinti proportionalium a k, a E, a S, a y minima erit a y, maxima a k. quare cõposita ex a y, a K, hoc est recta y v, * maior erit, quàm S E composita ex reliquis. C
lem. 17 Et quoniã est vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita a k ad a y. erit vt a k, hoc est a V ad a y, ita E B ad B S, & cõuertendo vt y a ad a V, ita S B ad B E, & cõponendo vt y V ad a V, ita erit S E ad E B. sed y V ostensa est maior, quam S E. ergo & A V, hoc est A K, maior erit, quàm E B. Eadem ratione ostendetur ipsa A k omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium A k. quod est primum.

coro. l. lem. 17 & 6 sexti Eadẽ ratione, quoniam * æqualia sunt rectangula F A x, E A S, * proportionales erunt A E, A F, A x, A S. sed A E maior est, quàm A F. ergo & A x maior erit, quam A S. sed cũ sit A x non maior, quàm A F, vt demõstrauimus. ergo & ipsa A F maior erit, quam A S: & cõsequenter A E multo maior. Itaq; A S minima erit quatuor proportionaliũ A E, A F, A x, A S. maxima A E. atq; adeo S E D
35 quinti cõposita ex maxima & minima * maior erit, quàm x F composita ex reliquis.
lem. 17 Et quoniã est vt A G ad A C, ita * E B ad B S. & ita F C ad C x, erit F C ad C x vt E B ad B S. & cõuertẽdo, & cõponẽdo vt x F ad F C, ita erit S E ad E B. sed x F ostensa est minor, quam S E: ergo & F C minor erit quam E B. & sic demonstrabitur ipsa F C omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium F C; quod est secundum.

Postremo ducatur per A alia recta L A P ipsi F C propinquior, quàm E B, secans circumferentias F K, A B C in punctis L P, eaque producatur donec secet cir-





A circulum F E D completum in Q; & iungatur G k, & ei parallela agatur C Z secans ipsam L Q in Z. rectangula igitur L A Z, E a S æqualia * erunt, coro. l. lem. 17 & ideo * proportionales a L, a E, a S, a Z. sed a L minor est, quam A E. 16 sexti ergo & a S minor erit, quàm a Z. Et quoniam rectangulum E a S * æquale lem. 17 est quadrato a I: proportionales erunt a E, a I, a S; sed a E maior est, quam a I cum ipsa a I non * sit maior quam a F. ergo & a I maior erit quam a S. 17 sexti itaque ipsa a S minor erit, quam a L, & multo minor, quam a E, atque est minor quam a Z, vt demonstrauimus. ergo ipsa a S minima erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, A Z; maxima ideo a E. vnde E S composita ex maxima, & minima * maior erit, quàm L Z composita ex reliquis, hoc est L z minor, quàm E S.

B Et quoniam est vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita L P ad P z. erit vt lem. 17 L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt z P ad p L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L p, ita S E ad E B. sed z L ostensa est minor, quàm S E, ergo & L p minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quod tertio loco erat ostendendum.

## Lemma XXVIII.

RVrsus ijsdem positis ratio autem A D ad A F sit maior ratione A G ad A C. Dico si semicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, aut ipsum centrum attingit, rectam F C maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertineat, & inter circumferentias A B C, k F
C interijciuntur, minimam A k. Si vero nec extenditur, nec centrum illud attingit; ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam A B C in O: est autem A I * maior, quàm a F, lem. 16 minor vero, quàm a K. cum sit vt a G ad a C maior nempe ad minorem, ita quadratum a k ad quadratum a I ex positione. Dico maiorem rectarum a K, F C maximam esse; M O minimam. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte minorem esse.

Ducatur enim per A vtcunque recta linea E a B secans circumferentias F K a B C in punctis E B, & primum semicirculus a B C, vel extendatur vltra cen-

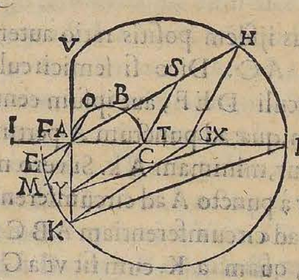



trum circuli D E F, quod sit T, vel ipsum centrũ attingat, & connectantur C K, C E, C B. angulus igitur E B C in semicirculo rectus erit, quare E C basis trianguli E B C, maior erit latere E B. sed F C non est minor, quam E C: ergo & F C maior erit quã E B, & sic ostẽdetur maior omnibus alijs Maxima est igitur F C.

Rursus quoniam C K non est maior quam C E. ideo nec quadratum C k A
47 primi maius erit quadrato C E; sed quadratum C k * æquale est quadratis A K, A C, & quadratum C E æquale quadratis E B, B C. ergo nec quadrata A K, A C maiora erunt quadratis E B, B C: sed quadratum A C maius est quadrato B C, ergo reliquum quadratum A K minus erit reliquo quadrato E B. vnde & recta A K minor, quàm recta E B. atque eadem ratione ostendetur minor omnibus alijs. Minima est igitur A k.

Ducatur autem alia recta L A P ipsi A K propinquior quam E B, secans circumferentias F k, A B C in punctis L P, & iungantur C P, C L. angulus igitur L P C in semicirculo rectus erit; Et quoniam C L non est maior quam C E, nec quadratum C L maius erit quadrato C E. idest nec quadrata L P, P C maiora erunt quadratis E B, B C: sed quadratum P C B
maius est quadrato B C. ergo reliquum quadratum L P minus erit reliquo quadrato E B. quare & recta L P minor, quam recta E B. idest propinquior minimæ minor remotiore.

Sed non extendatur semicirculus A B C vltra centrum T, nec ipsum centrum attingat. Producatur autem E B secans circulum completum in H, quem etiam k A producta secet in V, & iungantur G H, G k, K D, eisque parallelæ agantur C S, C y, y X secantes A H, A k, A D, in punctis S y X. & sit primum A k maior quam F C. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita F C ad C X, & ita A k ad A y. erit A K hoc est A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad F C, ita A y ad C x. & con-
33 quinti sequenter * ita V y ad F x omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed A V, cui æqualis est A K, ponitur maior quam F C: ergo & V y maior erit quam F x:



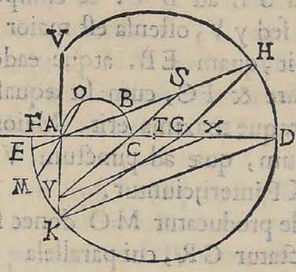

coroll. lem. 17 & sexti Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A k, F A x. erit * vt A y ad A F, ita A x ad a K, hoc est ad A V. sed y V composita ex extremis ostenTeor. 2 huius sa est maior, quam F x composita ex medijs. ergo * altera extremarum A y, D
A V, nempe ipsa A y minima erit, maxima vero A V. quare A y minor
coroll. lem. 17 erit, quam A F, & multo minor, quàm A E. Et quoniam * æqualia sunt
16 sexti rectangula y A k, E A S, * proportionales erunt A K, a E, a S, a y. sed a k maior est, quam a E. ergo & a S maior erit, quam a y, hoc est a y minor, quam a S. sed ipsa a y est quoque minor, quam A E, vt demonstrauimus; & minor, quam a K, ergo ipsa A y minima erit quatuor proportio-
Teor. 1. huius nalium a K, a E, a S, a y. * maxima vero a K. vnde composita ex y a, a K maxima videlicet, & minima, hoc est recta y V, maior erit quam E S composita ex reliquis.





A Et quoniam est vt a G ad A C, ita * E B ad B S, & ita a K ad a y; erit Lem. xvj.
a K, hoc est a V ad a Y vt E B ad B S, & conuertendo, vt y a ad a F, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V a, ita erit S E ad E B. sed Y V ostensa est maior, quam S E, ergo & V a, hoc est a K, maior erit quam E B. & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium a K.

Sed sit F C maior, quàm A k. eadem ratione quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad C X, & ita a k ad a y. erit F C ad C X, vt a k, hoc est a V ibid.
ad a y. & permutando vt F C ad a V, ita C X ad a Y. & consequenter ita F X ad V y; idest omnes an-
B tecedentes ad omnes consequentes. sed F C ponitur maior, quam a K, hoc est quam a V. ergo & F X maior erit, quam V y. sed F X composita est ex extremis quatuor proportionalium a F, a y, a V, a X. ipsa vero V y ex medijs, constat autem eas proportionales esse ex eo quod rectangulum F a X * æquale est re- Corol. xvij.
ctangulo y a K, hoc est y a V. ergo * altera extremarum a F, a X maxima Th. 2. huius
erit, altera minima. sed a F non est maxima, cum sit minor quam a V. ergo minima erit, & consequenter a X maxima itaque a X maior erit quam
C a V, & multo maior quam a E.




Et quoniam * æqualia sunt rectangula F a X: E a S, proportionales erunt Coroi. xvij
a F, a E, a S, a x. sed a F minor est, quam a E, ergo & a S minor erit, quam a X. est autem & a E minor quam a X, vt demonstrauimus. & consequenter a F multo minor itaque a X maxima erit quatuor proportionalium a F, a E, a S, a X. quare * a F minima, vnde E X composita ex maxima, & Teor. 1. huius
minima maior erit, quàm S E composita ex reliquis.

V Et quoniam est vt a G ad a C, ita F C ad C X, & ita E B ad B S. erit F C lem. xvij
ad C x vt E B ad B S. & conuertendo vt x C ad C F, ita S B ad B E, & componendo vt x F ad F C, ita S E ad E B. sed x F ostensa est maior quam S E, ergo & F C maior erit, quam E B. eademq. ratione ostendetur maior omni-
D bus alijs. quare maxima est omnium F C. quod est primum.

Sed sint æquales a k, F C. Quoniam igitur est vt a G ad a C, * ita F C ad ibidem
C x. & ita a k ad a Y. erit F C ad C X, vt a k ad a y: sed F C ponitur æqualis a k; ergo & C x æqualis erit a y. & additis æqualibus C F, a V, tota x F æqualis erit toti y V. sed x F composita ex extremis quatuor proportionalium F a, a y a V, a x; ipsa vero y V ex medijs. patet autem eas proportionales esse, quia rectangulum F a x * æquale est rectangulo y a K, hoc est Y a V. ergo Corol. lem. 17 Theor. 5 huius
maior extrema maiori mediæ, minor minori * æqualis erit. itaque a F altera ex extremis æqualis erit alteri ex medijs y a, a V. sed non est æqualis ipsi a V, quia minor est; ergo æqualis erit ipsi a y:

Et quoniam rectangulum y A K, hoc est y A V æquale est rectangulo A
E A S, proportionales erunt A y, A E, A S, A V. sed A y cum sit æqualis
A F, minor est quam A E. ergo & A S minor erit, quam A V. itaque
quatuor proportionalium A y, A E, A S, A V maxima erit A V, & * con-
sequenter minima A y. vnde y V composita ex maxima, & minima maior
quam S E composita ex reliquis.

Et quoniam est vt A G ad A C, ita * E B ad B S. & ita A k. hoc est
A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad
A V, ita S B ad B E. & componendo vt y V ad V A, ita erit S E
ad E B. sed y V, ostensa est maior quam S E. ergo & V A, hoc est A k
maior erit, quam E B. atque eadem ratione ostendetur maior omnibus
alijs. quare & F C, cum sit æqualis A k, erit quoque omnibus maior, B
itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima
est omnium, quæ ad punctum V A pertinent, & inter circumferentias
A B C, K F interijciuntur.

Deinde producatur M O donec secet circulum F E D completum in R,
& connectatur G R, cui parallela
agatur C N secans M R in N.
rectangulum igitur M A N * æ-
quale erit quadrato A I, hoc est
quadrato A M; sunt enim æquales
rectæ A I, A M, ex constructio-
ne. quare A M æqualis erit ipsi
A N, & cum sit rectangulũ F A X
* æquale quadrato A I, hoc est
quadrato A M; proportionales e-
runt a F, a M, a X: sunt autem
& inæquales, quia a F minor est quam a M. ergo F X composita ex extre-
mis maior erit quam dupla media, hoc est quam M N.

Et quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad C x. & ita M O ad O N
erit F C ad C X, vt M O ad O N.
& conuertendo vt X C ad C F, ita
N O ad O M. & componendo vt
X F ad F C, ita erit M N ad M O.
sed X F ostensa est maior, quam
N M. ergo & F C maior erit quam
M O. Eadem ratione quoniam
rectangulum y a K, hoc est y a V,
* æquale est quadrato a I, vel qua-
drato a M, * proportionales erunt
y A, A M, A V: sunt autem
& inæquales. ergo y V composita ex extremis maior erit, quam M N, me-
dia videlicet dupla. Et quoniam est vt A G ad A C, ita A K ad A y, &
ita



A ita M O ad O N: erit vt A K vel A V ad A Y, ita M O ad O N. & con-
uertendo vt y A ad A V, ita N O ad O M. & componendo vt y V ad
V A, ita erit N M ad M O. sed y V ostensa est maior, quam N M: ergo
& V A, vel A k, maior erit quam M O.

Æque quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est
quadrato A M; proportionales erunt A E A M A S; sunt autem & inæqua-
les. ergo E S composita ex extremis maior erit, quam dupla media, hoc
est quam M N. Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S: & ita
M O ad O N. erit vt E B ad B S, ita M O ad O N. & conuertendo vt
S B ad B E, ita N O ad O M. & componendo vt S E ad E B, ita
erit N M ad M O. sed S E maior est, quàm N M, vt demonstrauimus,
B ergo & E B maior erit, quam M O. Atque eadem ratione ostendemus
omnes alias maiores esse ipsa M O. minima est igitur M O. quod est se-
cundum.

Postremo ducatur per A alia recta L A P, ipsi M O propinquior, quam
E B secans circumferentias F k, A B C in punctis L P. & sint rectæ L P,
E B ex eadem parte minimæ M O, & producatur L P donec secet circu-
lum D E F completum in Q. & iungatur G Q, & ei parallela agatur
C Z secans ipsam L Q in Z. Rectangula igitur L A Z, E A S * æqualia
erunt, ac proinde proportionales A L, A E, A S, A Z. in prima quidem
figura vbi A L, A E existunt inter rectas A M, A k sic argumentor.
sed A L minor est quam A E, ergo & A S minor erit, quam A Z. Et
C quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato
A M; proportionales erunt A E, A M, a S. sed a E maior est quam a M,
ergo & a M maior erit quam a S atque adeo a S, minor erit quam a L;
& multo minor quam a E, atque est minor quam A Z, vt demonstra-
uimus; ergo ipsa a S minima erit quatuor proportionalium a L, a E, a S,
a Z, & * consequenter a E maxima. quare E S composita ex maxima &
minima * maior erit, quam L Z composita ex reliquis, hoc est L Z minor,
quàm E S.

In secunda vero figura vbi a L,
a E existunt inter rectas a M, a F
argumentor hoc modo. sed a L
D maior est quam a E, ergo & a S
maior erit quam a Z. Et quoniam
rectangulum E a S * æquale est qua-
drato a I, hoc est quadrato a M,
proportionales erunt a E, a M, a S.
sed a E minor est quam a M, er-
go & a M minor erit quam a S.
atque adeo a S maior erit quam a L,
& multo maior quam a E. est quoque maior quam a Z, vt demonstrauimus;
ergo ipsa a S maxima erit quatuor proportionalium a Z, a E, a S, a z, & con-
se-

Th. 1 huius

sequenter *a E minima. quare E S composita ex maxima, & minima maior erit, quàm L Z composita ex reliquis, hoc est L z minor quam E S. quod etiam demonstrauimus & supra. A

Lem. 17

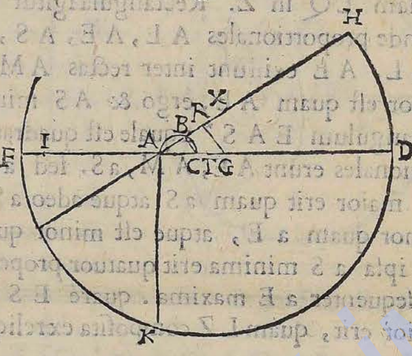
Et quoniam in vtroque casu est vt a G ad a C, ita E B ad B S, *& ita L P ad P z. erit vt L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B. sed Z L ostensa est minor, quàm S E. ergo & L P minor erit, quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore ex eadem parte. quod tertio loco erat ostendendum.

## Compositio octaui Casus.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti casu ponuntur. B data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertineat.




Oportebit autem ipsam V z non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur. neque minorem minima. quæ autem sit maxima, quæue minima iam est demonstratum.



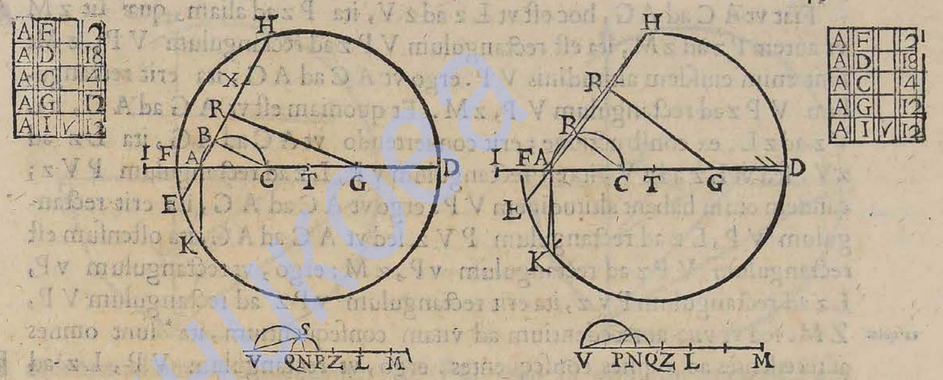

C

| | |
|---|---|
| A F | 4 |
| A C | 1 1/2 |
| C G | 2 1/9 |
| A D | 3 |
| A K | 6 |
| A I | 15 1/2 |

Ducatur a K ipsi F D perpendicularis secans semicirculum D E F in K, & si quidem data v z sit æqualis maximæ. factum iam erit, quod proponitur. etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum a K, F C. si vero sit æqualis minimæ, minimaque sit ea, quæ minor est ipsarum a K, F C. itidem factum erit quod proponitur; si vero neutra rectarum a k, F C sit minima. inuenta minima Problemati satisfiet, D inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 31. Si autem V z minor sit maxima, & maior minima. sumatur ex centro circuli D E F, quod sit T, recta T G æqualis T C, & *fiat vt A G ad A C, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod sit a I. Similiter fiat vt A G ad a C, ita V z ad aliam, quæ sit z L, & V L composita ex V z, z L secetur bifariam in N. cum igitur à quadrato V N auferendum sit quadratum A I, vt Porisma fieri præcipit: describatur in V N semicirculus, in quo accommodetur V S æqualis A I. infra ostendetur A I minor, quàm V N. Deinde connectatur S N. quadratum igitur V N superat quadratum V S quadrato S N; angulus enim

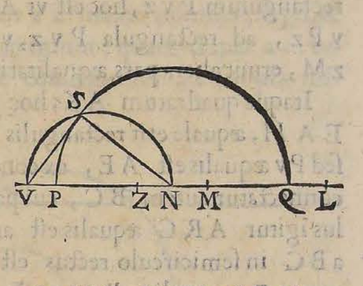
Probl. 1 huius










A enim V S N in semicirculo rectus est, itaque rectæ V N addenda est, vel auferenda recta æqualis N S. sic Porisma fieri iubet. addatur ergo, vel auferatur prout sequentia Præcepta docebunt, eaque acuta vel diminuta sit V P. ea non erit minor quam A F, nec maior quam A k, vt quatuor sequentia Lemmata ostendent. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci recta A E æqualis V P; ducatur igitur A E, & producatur donec secet semicirculum A B C in B. Dico rectam E B Problema effícere.

Compleatur enim circulus F E, D H, quem E B producta secet in H. & centro N interuallo N S, vel M P describatur circulus secans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S; quare quadratum V S æquale erit rectangulo P V Q, vel V P L, seu, quod idem est rectangulo V P, B Z L, plus rectangulo V P Z: punctum enim Z exi it in recta P L, vt eadem quatuor sequentia Lemmata ostenderet. Si igitur fiat vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. A t quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum A I, hoc est quadratum V S ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vtia pars æqualitatis. alteram vero sic inuenimus. Primo quoniam est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex constructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z O, vt autem L z ad z O, ita est rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z: eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z.

Fiat

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M A
vt autem P z ad z M, ita est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: sunt enim eiusdem altitudinis V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M. Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex constructione; erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V. sed vt L z ad z V, ita est rectangulum v P, L z ad rectangulum P V z; eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z. sed vt A C ad A G, ita ostensum est rectangulum V P z ad rectangulum v P, z M: ergo, vt rectangulum v P, L z ad rectangulum P v z, ita erit rectangulum v P z ad rectangulum V P, 12 quint. Z M. sed vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita * sunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. ergo, vt rectangulum V P, L z ad B rectangulum P v z, hoc est vt A C ad A G, ita erunt rectangula v P, L z, v P z, ad rectangula P v z, v P, z M. atque adeo rectangula P v z, v P, z M, erunt altera pars æqualitatis.

Itaque quadratum A K, hoc est rectangulum A k, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulis p v z, v p, z M, hoc est rectangulo P v M. sed P v æqualis est A E, ex constructione; ergo & v M æqualis erit A H. connectatur autem B C, cui parallela agatur G R secans E a in R. angulus igitur A R G æqualis est angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipse 1cm. 8. a B C in semicirculo rectus est, vnde * æquales sunt E B, H R. sumatur autem B x æqualis a R; tota E x æqualis erit toti a H. hoc est ipsi v M; sed E A æqualis est V I. ex constructione. ergo & reliqua a x æqualis erit re- C liquæ P M.

Et quoniam similia sunt triangula a B C, a R G; erit vt a C ad a G, ita a B ad a R. sed vt a C ad a G, ita est quoque p z ad z M, ex constructione; ergo vt a B ad a R, hoc est ad B X, ita erit p z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita p M ad M z. sed a x ostensa est æqualis p M. ergo & x B æqualis erit M z. sed tota E X ostensa est æqualis toti V M, ergo & reliqua E B reliquæ V z æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentias a B C, K F recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod faciendum.

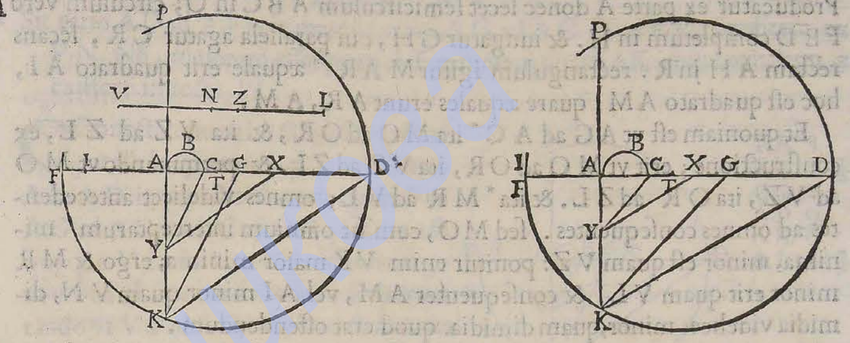
At vero rectam a I minorem esse, quàm V N, sic demonstrabimus.

Primum habeat a D ad a F non maiorem rationem, quam a G ad a C, D
1cm. 26. 1cm. 27 ergo a I non * erit maior quam a F. atque F C minima erit interceptarum inter circumferentias a B C, K F. connectantur autem G K, K D, eisque parallelæ agantur C Y, Y x secantes a k, a D in punctis Y, x. Rectangu-
1cm. 17 lum igitur F a X * æquale erit quadrato a I. quare proportionales erunt F a, a I, a x. vnde F x composita ex extremis non erit minor, quàm a I dupla.

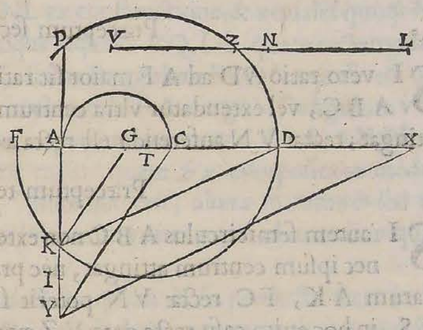
1cm. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, ita * F C ad C X, & ita V z ad z L ex constructione; erit vt F C ad C X, ita V z ad z L & permutando vt F C ad
12 quinti v z, ita erit C X ad z L & * ita quoque F X ad V L, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed F C, cum sit omnium interceptarum minima, minor est quam V z; ponitur enim V z maior minima; ergo & F x minor erit quam V L sed F x ostensa est non minor, quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam ipsa V z. & consequenter a I simpla minor, quam V N dimidia videlicet ipsius V L.



A




Sed habeat a D ad a F maiorem rationem, quàm a G ad a C. Aut igitur, semicirculus a B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod sit, T, aut non extenditur. primum extendatur, & producatur




C k a donec secet circulum F E D completum in P. & connectatur G k, cui parallela agitur C Y secans a k in Y. rectangulum igitur y a k * æquale erit quadrato a I. vnde proportionales erunt y a, a I, a k. quare composita ex extremis y A, A K, hoc est recta y P. non erit minor quam A I dupla. 1cm. 17

Et quoniam est vt A G ad A C * ita A K ad A y, & ita V z ad Z L, ex con- 1cm. 17
structione; erit vt A k hoc est A P ad A y, ita V z ad z L. & permutando vt A P ad V Z, ita erit A y ad z L. & * ita quoque P y ad V L; omnes videli- 12 quinti
D cet antecedentes ad omnes consequentes. sed A P, cui æqualis est * A K mini- 1cm. 28
ma interceptarum, minor est quam V z; ponitur enim V z maior minima. ergo & P y minor. erit quam V L; sed P y ostensa est non minor quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L, & consequenter a I simpla minor, quam V N dimidia videlicet ipsius V L.

Sed non extendatur semicirculus a B C vltra centrum T ergo a G maior erit, quàm a C, & per consequens a k maior quam a I; est enim vt a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum a I ex constructione. cum itaque a I minor sit, quàm a K; maior autem, quam a F. poterit a puncto a ad circumferentiam F K duci recta a M æqualis a I. ducatur igitur a M, eaque

pro-

Producatur ex parte A donec secet semicirculum A B C in O; circulum vero A
F E D completum in H. & iungatur G H, cui parallela agatur C R, secans
1.m. 17 rectam A H in R. rectangulum igitur M A R * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M. quare æquales erunt A R, A M.

ibid. Et quoniam est vt A G ad A C * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L, ex constructione; erit vt M O ad O R, ita V Z ad Z L. & permutando vt M O
12 quinti ad V Z, ita O R ad Z L. & ita * M R ad V L; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed M O, cum sit omnium interceptarum * mi-
lem. 28 nima, minor est quam V Z: ponitur enim V Z maior minima; ergo & M R minor erit quam V L. & consequenter A M, vel A I minor quam V N, dimidia videlicet minor, quam dimidia. quod erat ostendendum.

Quo autem casu rectæ V N addenda sit recta æqualis N S, quoue auferenda ratio his constat præceptis. B

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non sit maior ratione A G ad A C, rectæ V N addenda est recta æqualis N S.

Præceptum secundum.

SI vero ratio A D ad A F maior sit ratione A G ad A C, & semicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ipsum centrum attingat; rectæ V N auferenda est recta æqualis N S.

C

Præceptum tertium.

SI autem semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat, nec præterea V Z data maior sit minore rectarum A K, F C rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S, in hoc enim casu recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F K, A B C, ex vtraque parte minimæ. & ideo duobus modis Problema absolui, nam si auferatur, aptabitur ea recta è regione F C. si vero addatur aptabitur è regione A K.

Præceptum quartum.

SI vero V z data maior sit minore rectarum A k, F C, recta ipsi V Z æ- D
qualis poterit aptari inter circumferentias F k, A B C ex vna tantum parte minimæ, nempe, è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque existente A K maiore, quam F C, rectæ V N addenda est recta æqualis N S; existente minore, auferenda.

Nunc ostendendum est rectam V P sumptam prout præcepta docent non esse minorem, quam A F, nec maiorem quam A k. atque punctum Z existere in recta P L, quocirca quatuor Lemmata proponuntur.

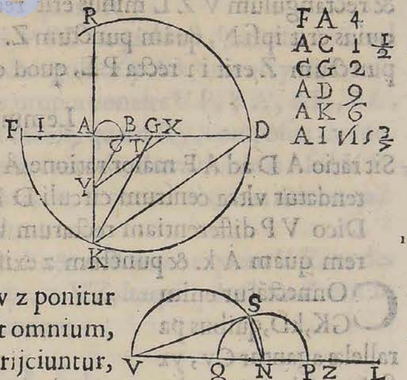
Lem.



Lemma XXIX.

A Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico V P cõpositam ex V N, N S, maiorem esse, quam A F, minorem quam A K. atque punctum z existere in recta P L.

COnnectantur enim G K, k D, quibus parallelæ agantur C y, y x secantes A k, A D in punctis Y x; erit igitur * vt A G ad A C, ita F C ad C X. sed ita est quoque V z ad z L, ex cõstructione: ergo vt V z ad z L, ita erit F C ad C x. Et permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x. & ita
B quoq; v L ad F x, * est enim vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita oẽs antecedentes ad omnes cõsequentes. sed v z ponitur maior, quàm F C cum ipsa F C * minima sit omnium, quæ inter circumferentias F k, A B C interijciuntur, ergo & V L maior erit quam F X.




12 quinti

lem. 27

Et quouiam æquales sunt V N, N L ex constructione, & æquales quoq; N Q N P, vt semidiametri. ergo fiunt quoque æquales V Q, L P. quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, sed rectangulum P V Q * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, seu * rectangulo F A x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F A x. quare proportionales erunt v P, F A, A X, P L. sed
C v L composita ex extremis ostensa est maior quam F x composita ex medijs, ergo altera extremarum v P, P L * maxima erit, altera minima. * sed v P maior est, quam P L. ergo ipsa v P maxima erit, atque adeo maior quam A F. quod est primum.

36 certi

lem. 17.

Th. 2 huius

Deinde compleatur circulus F E, D R, quem K A producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita A k ad a y. & ita quoque v z ad z L, ex constructione, erit vt v z ad z L, ita A k hoc est a R ad a Y, & permutãdo vt v z ad A R, ita z L ad A y. & consequenter ita v L ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed v z minor est, quam A R vel A k, quæ est maxima omnium interceptarum inter circumferentias F k, A B C; ponitur enim v z minor maxima, ergo & v L minor erit quàm R y.

lem. 17

D Et quoniam rectangulum P v Q, vel v P L * æquale est quadrato v S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K, hoc est y A R; æqualia erunt rectangula v P L, y A R; & ideo proportionales v P, y A, A R, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est minor, quam R y composita ex medijs. ergo altera mediarum y a, a R maxima erit, altera minima: sed a R, maior est quam a y; ergo ipsa a R maxima erit, & per consequens v P minor quã a R. hoc est quam a K. quod est secundum.

36 tertij

lem. 17

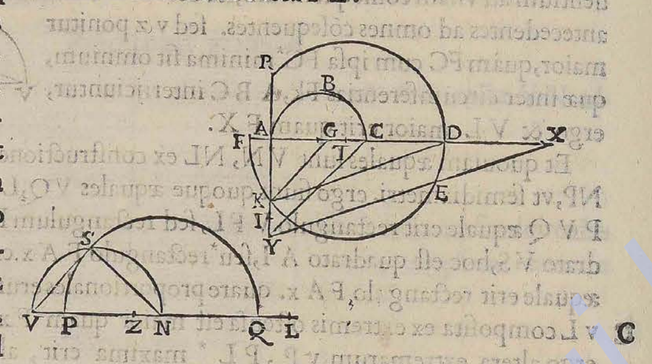
Rursus quoniam est, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratũ a I, & ita v z ad z L, vtrumq; ex constructione, erit vt v z ad z L, ita quadratum a k ad quadratũ A I, hoc est ad quadratũ v S, seu ad * rectangulũ P v Q, vel v P L.

36 tertij

sed vt V Z ad Z L, ita est quoq; quadratũ V Z ad rectãgulũ V z L; eandẽ enim habent altitudinẽ V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulũ v z L, ita erit quadratũ A K ad rectangulũ V P L; sed quadratum V z minus est quadrato A K; lem. 17 ponitur enim recta V z minor, quàm A k, quæ* est maxima interceptarũ. ergo lem. 18 & rectangulum V Z L minus erit rectãgulo v P L. quare punctum P* propinquius erit ipsi N, quàm punctum Z. atq; est vtrũque in medietate N L. ergo punctum Z erit in recta P L, quod est tertium. quare constat propositum. A

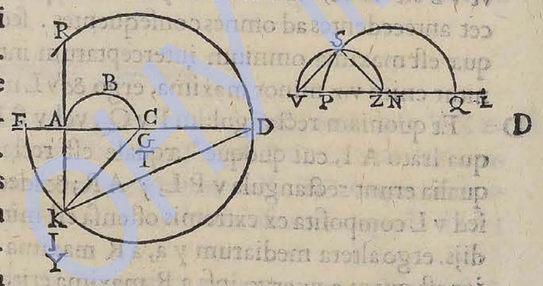
## Lemma XXX.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & semicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel saltem ipsum centrum attingat. Dico V P differentiam rectarum V N, N S maiorem esse, quam A F, minorem quam A k. & punctum z existere in recta P L. B




COnnectãtur enim GK, kD, quibus parallelæ agantur Cy, yx secãtes A k, AD productas in punctis y x. erit igitur vta G ad a C* ita Fc ad c x; sed ita est quo lem. 17 que V z ad zL, ex constructione. ergo vt v z ad z L, ita erit Fc ad cx. & permutãdo vt v z ad 12. quinti FC, ita z L ad C x.* & ita quoq; vL ad F x; oẽs videlicet antecedẽtes ad oẽs cõsequẽtes; sed v z ponitur minor, quã FC, cum sit ipsa FC* maxima omnium, quæ lem. 18 inter circũferentias F K, ABC interijciuntur. ergo & v L minor erit, quã F x.

Et quoniã æquales sunt VN, NL, & æquales quoq; NP, NQ. ergo fiunt quoque æquales VP, LQ, quare rectangulũ PvQ æquale erit rectangulo vPL; sed 36. tertii rectãgulũ P v Q* æquale est quadrato v s, hoc est quadrato a I, cui quoq; æquale est rectãgulũ F a x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F a x. quare proportionales erũt v P, F a, a x, PL. sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam F x com Th. 2 huius posita ex medijs. ergo* altera mediarũ F a, a x maxima erit, altera minima; itaq; aF, quippe quę minor est, quam a x, minima erit, & per consequens v P maior erit quam ipsa a X. quod est primum. D




Deinde compleatur circulus FE, DR, quem K a producta secet in R. Quo- lem. 17 niam igitur est, vt a G ad aC,* ita ak ad a y, & ita quoque v z ad z L ex constru-



A structione: erit vt v z ad z L, ita a k, vel a R ad a Y; & permutando vt v z ad a R, ita z L ad a y; &* ita quoque v L ad R y; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed v z maior est quam a R, ponitur enim v z maior, quam a k, quæ est* minima interceptarum inter circumferentias f k, a B C. ergo & v L maior erit, quàm R y. xii. quinti lem. 18

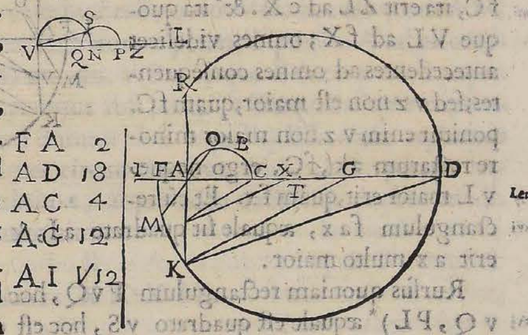
Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y A k, hoc est y A R; erũt æqualia rectãgula V P L, Y A R, & ideo proportionales V P, Y A, A R, P L. sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quam R y, composita ex medijs. ergo* altera extremarum V P, P L, maxima erit, altera minima. sed V P minor est quam P L; ergo ipsa V P minima erit, & per consequeus minor, quã 36. tertij lem. 17. Th. 2 huius
B A R, hoc est quam A K; quod est secundum.

Postremo cum sit V P minor quam A K, & A K minor quam V Z, vt demonstrauimus: erit V P multo minor, quam V Z, itaque punctum Z erit in recta P L, quod vltimo loco erat ostendendum.

## Lemma XXXI.

Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C. sed semicirculus A B non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat, nec præterea data V Z sit maior minore rectarum A K, F C. Dico rectam V P æqualem, siue aggregato, siue differentiæ rectarum V N, N S non esse maiorem, quam A K, nec minorem, quam A F, & punctum
C Z existere in recta P L.

COmpleatur enim circulus F E, D R, quem K A producta secet in R. & iungantur G k, k D. quibus parallelæ agantur C Y, Y X secantes A K, A D in punctis Y X, & sit primum V P, æqualis compositæ ex V N, N S.




| | | |
|---|---|---|
| F A | 2 | |
| A D | 18 | |
| A C | 4 | |
| A G | 12 | |
| A I | V12 | Lem. 17. |

Quoniam igitur est vt A G ad A C,* ita A k ad A y, & ita quoq; V Z ad Z L, ex cõstructione. erit vt V z ad z L, ita A k, hoc est A R
D ad A y. & permutando vt V z ad A R, ita z L ad A y. & consequenter,* ita V L ad R y omnes videlicet antecedentes ad omnes cõsequentes. sed V z 12 quinti non est maior, quàm A R; ponitur enim V z nõ maior minore rectarũ A k, F C. ergo neq; V L maior erit, quam R y. Et quoniam rectangulũ P V Q, vel V P L (sunt enim æquales V Q, P L)* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I; cui 16 tertii quoq;* æquale est rectãgulũ Y A K; rectangulũ V P L æquale erit rectãgulo y a k, lem. 17 hoc est y A R; quare* proportionales erunt V P, y A, A R, P L. sed v L composita ex 16 sexti extremis ostẽsa est nõ maior, quã R y cõposita ex medijs. ergo si est minor erit *altera mediarũ y A, A R maxima, altera minima. sed A R maior est, quàm A Y. Th. 2 huius

ergo ipsa AR, hoc est AK maxima erit, & per cõsequens V P minor quam A k. A

Theor. iij huius Si vero V L cõposita ex extremis æqualis est y R cõpositæ ex medijs, maior extremarum maiori mediarum * æqualis erit, hoc est V P æqualis A R, vel A K.

Rursus quoniam V P maior est, quàm V S, hoc est quam A I, ipsaque A I maior quam A F, erit V P multo maior ipsa A F, Recta igitur V P æqualis cõpositæ ex V N, N S, non est maior, quam a k, nec minor quàm a F.

Et quoniam est, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratum a I, & ita V z ad Z L: vtrumque ex constructione. erit vt v Z ad Z L, ita quadratum a K ad quadratum a I, vel ad quadratum V S, hoc est ad rectangulum P v Q, vel v P L; sed vt V z ad z L, * ita est quadratum V z ad rectangulum v z L; sunt enim eiusdem altitudinis V z; ergo vt quadratum v z ad rectangulum V z L; ita erit quadratum a K ad rectangulum v P L. sed quadratum v z nõ B est maius quadrato a k, ponitur enim recta v z non maior minore rectarum a k, F C, ergo si est minus, erit & rectangulum v z L minus, rectangulo v P L. quare punctum P propinquius erit ipsi N, quam punctum z. atque est vtrumque in medietate N L, ergo punctum z erit in recta P L. Si vero quadratum v z æquale est quadrato a K, erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta P L.

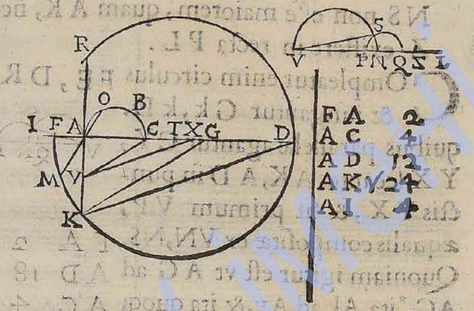
Sed sit v P æqualis differentiæ rectarum v N, N S. Quoniam igitur est, vt a G ad a C, * ita F C ad C X, & ita quoque v z ad z L, ex constructione; erit vt v z ad z L, ita F C ad C X. & permutando vt v z ad f C, ita erit Z L ad c X. & * ita quoque V L ad f X; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed v z non est maior, quam f C. ponitur enim v z non maior minore rectarum a k, f C. ergo neque v L maior erit, quàm f x. Et cũ rectangulum f a x, æquale sit quadrato a I, & recta a I * maior, quàm a f, erit a x multo maior.

lem. 17

3a quinti

lem. 17

lem. xxvi




C

Rursus quoniam rectangulum P v Q, hoc est v P L (sunt enim æquales v Q, P L) * æquale est quadrato v S, hoc est quadrato a I, cui quoque æquale * est rectangulum f a X; ipsa rectangula v P L, f a X æqualia erunt, & ideo proportionales v P, f a, a X, P L: sed v L composita ex extremis ostensa est non maior quam f X, composita ex medijs: ergo si est minor, erit altera * mediarum f a, a X maxima erit, altera minima. sed a X ostensa est maior quam a f; ergo ipsa f a minima erit. quare v P maior, quàm a f. Si vero v L composita ex extremis æqualis est f x compositæ ex medijs, minor * extremarum v P, P L, nempe ipsa v P, minori mediarum, id est ipsi a f, æqualis erit.

D

36 tertij

lem. 17

Th. ij huius

Th. 3. huius





A Item quoniam est, vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione; quadratum A K maius erit quadrato A I. vnde & recta A k maior quam recta A I; hoc est quam recta V S. sed V P minor est, quam V S. ergo multo minor erit, quàm A k. Recta igitur V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S non est maior quàm A K, nec minor, quàm A F.

Denique quoniam est, vt A G ad A C, maior ad minorem, ita V Z ad Z L, ex constructione, erit & V Z maior, quàm Z L. itaque punctum Z erit in medietate N L, & consequenter in recta P L. Recta igitur V P æqualis, siue compositæ ex V N, N S, siue differentiæ earundem non est maior, quam A K, nec minor, quàm A F. atque punctum Z existit in recta P L; quod B erat ostendendum.

Scholium.

Manifestum est igitur si A D ad A F maiorem rationem habeat, quam A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum attingat, nec præterea data V Z maior sit minore rectarum A k, F C. Problema duobus modis posse absolui. nam si à puncto A ad circumferentiam F K ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec fecet semicirculum A B C in O, erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias F K, A B C intercipiuntur. & sumpta V P æquali compositæ ex V N, N S. ea maior erit quam V S, hoc est quam A M; non autem C quam A K, vt demonstrauimus. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta A E æqualis V P. Similiter sumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S. ea minor erit, quam V S, hoc est quam A M, non autem quam A F, vt est demonstratum. poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis V P. Itaque si ducatur A E æqualis compositæ ex V N, N S; aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, A O. Si vero ducatur A E æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C. poterit itaque aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis absolui, vt in tertio præcepto monuimus.

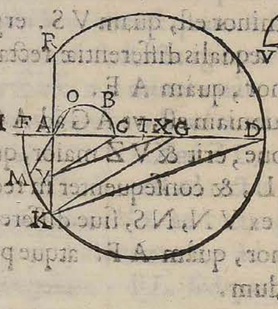
lem. 28

D Lemma XXXII.

Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & semicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat; sed data V Z sit maior minore rectarum a k, F C. & à puncto a ad circumferentiam k F ducatur a M æqualis a I: est enim a I maior, quam a F, minor autem, quàm a k. Dico si a k maior sit, quàm F C composita ex v N, N S, minorem esse, quàm a k, maiorem quam a M; sin minor differentiam ipsarum v N, N S maiorem esse, quam a F, minorem quam a M, atque punctum Z in vtroque Casu existere in recta P Z.

lem. 26

Connectantur enim GK, KD, quibus parallelæ agantur Cy, yX secantes a k, a D in punctis y X, & compleatur circulus FE, DR, quem Ka producta secet in R. & sit primum VP æqualis compositæ ex VN, NS, & Ak maior quam fC. ergo ipsa AK maxima erit omnium interceptarum inter circumferentiam fk, ABC; quare recta datæ Vz æqualis poterit aptari inter circumferentias KM, aO; non etiam inter circumferentias MF, OC; cum sit Vz maior, quam FC, ex positione, ipsa vero FC* maxima omnium interceptarum inter circumferentias MF, OC.




A

B

corol lem. 11

lem. 17 Quoniam igitur est, vt AG ad AC, * ita aK ad ay, & ita VZ ad zL, ex constructione; erit vt Vz ad zL, ita AK, hoc est AR ad ay; & permutando vt Vz ad AR, ita erit zL ad Ay. & ita * VL ad Ry. omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed Vz minor est quam aR; ponitur enim Vz minor maxima aK, cui æqualis est aR, ergo & VL minor erit quam Ry.

16 tertij lem. 17 26 sexti Et quoniam rectangulum PVQ * æquale est quadrato vS, vel quadrato AI, cui quoque * æquale est rectangulum yaK, hoc est yaR; ideo erunt æqualia rectangula vPL, yaR, & ideo * proportionales vP, ya, aR, PL. sed VL composita ex extremis ostensa est minor, quam Ry composita ex medijs. ergo altera * mediarum YA, aR maxima erit, altera minima. itaque aR, quippe quæ maior est quam ya, maxima erit, & consequenter vP minor quam ipsa aR, hoc est quam aK. Et cum ipsa VP maior sit quam vS, ea quoque maior erit quam aM; sunt enim æquales vS, aM, cum sit vtraque æqualis recta aI, ex constructione.

Th. 2. huius

C

Rursus quoniam est vt aG ad aC, ita quadratum aK ad quadratum aI, & ita vZ ad zL: vtrumque ex constructione, erit vt vZ, ad zL, ita quadratum aK ad quadratum aI, hoc est ad quadratum vS, seu ad * rectangulum PvQ, vel vPL, sed vt vz ad zL, ita est * quoque quadratum vz ad rectangulum vzL; eandem enim habent altitudinem vz. ergo vt quadratum vz ad rectangulum vzL, ita erit quadratum ak ad rectangulum vPL. sed quadratum vz minus est quadrato ak; ponitur enim recta vz minor maxima, quæ est ak. ergo & rectangulum vzL, minus erit rectangulo vPL. quare punctum P propinquius erit ipsi N, quàm punctum z. atque ipsa puncta Pz sunt in medietate NL. igitur punctum z erit in recta PL. existente igitur ak maiori, quàm FC, recta vP æqualis compositæ ex vN, NS, minor est, quàm Ak, maior quam aM; & punctum z existit in recta PL; quod est primum.

36 tertij 1 sexti

D

Dein-



A Deinde sit VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS, & Ak minor, quàm FC. ergo FC* maxima erit omnium, quæ inter circumferentias Fk, ABC intercipiuntur. quare recta datæ VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias FM, OC, non autem inter circumferentias Mk, AO; cum ponatur VZ maior, quàm Ak, quæ est * maxima omnium interceptarum inter circumferentias kM, AO. Et quoniam est, vt AG ad AC * ita FC ad Cx. & ita VZ ad ZL, ex constructione, erit vt VZ ad ZL, ita, FC ad Cx. & permutando vt Vz ad FC, ita erit zL ad Cx; & consequenter * ita quoque VL ad Fx, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed Vz minor est, quam FC; ponitur enim Vz minor maxima interceptarum inter circumferentias Fk, ABC. ergo & VL minor erit quam Fx.

corol. lem. 28

lem. 17

12 quinti

B Et quoniam rectangulum fax* æquale est quadrato aI, & recta aI maior quàm af erit ax multo maior.

lem. 17

lem. 26 Et quoniam rectangulum PVQ, vel VPL æquale est quadrato VS; hoc est quadrato AI, cui quoque æquale est rectangulum fax; rectangulum VPL, fax æqualia erunt; & ideo proportionales VP, FA, Ax. PL. sed VL composita ex extremis ostensa est minor, quam fx composita ex medijs. ergo altera mediarum FA, Ax* maxima erit, altera minima. sed ax ostensa est maior quàm af, ergo ipsa af minima erit, atque adeo VP maior, quam af. Ipsam autem VP minorem esse, quam af manifestum est. nam cum sit VP minor quam VS; ea quoque minor erit, quam aM,

Theor. 8. huius

G sunt enim æquales VS, aM; cum sit vtraque æqualis ipsi aI, ex constructione. Æque manifestum est punctum z existere in recta PL. nam cum sit vt aG ad aC, maior nempe ad minorem, ita xVz ad zL ex constructione, erit & Vz maior quam zL. quare punctum z erit in medietate NL, & consequenter in recta PL. existente igitur aK minore, quam fC; recta VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS, maior est, quam af, minor quam aM. & punctum z existit in recta PL, quod secundo loco erat ostendendum.

Quamuis in tertio & quarto, ac etiam septimo Casu satis dictum sit de dignoscendo termino quæsitam aE indicante è duobus de quibus Æquatio explicabilis est; tamen in hoc quoque Casu, cum resolutio incidat in Æquationem, de duplici termino explicabilem, non alienum videtur exempla ad huiusmodi cognitionem pertinentia subijcere.

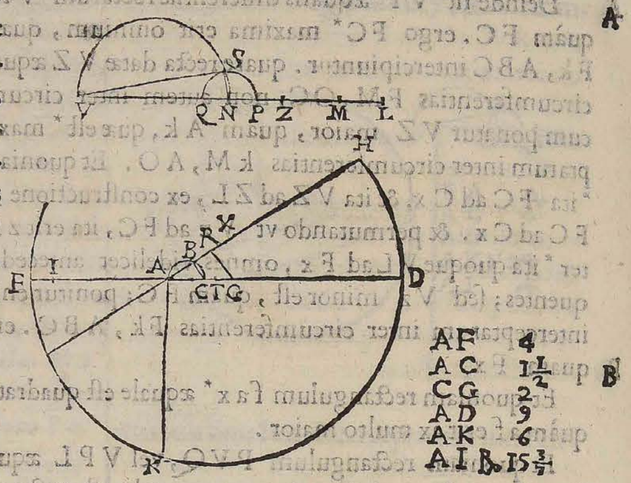
D

## Propositio prima.

Terminum indicantem quæsitam aE in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio aD ad af non maior ratione aG ad aC. & oporteat iussum facere. Resumatur constructionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt, VP maior, VQ mi-

minor, quorum VQ minor est, quam VS, hoc est quam aI, & consequenter multo minor, quam aE de qua quæritur, cum sit aI non maior quam AE terminus igitur VQ non indicat ipsam AE; per consequens eam indicat VP, aggregatum rectarum VN, NS. Itaque existente ratione AD ad AF non maiori ratione AG ad AC, agnitus est terminus quæsitam AE indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est;




| | |
|---|---|
| AF | 4 |
| AC | 1½ |
| CG | 2 |
| AD | 9 |
| AK | 6 |
| AI | 5⅓ |

B

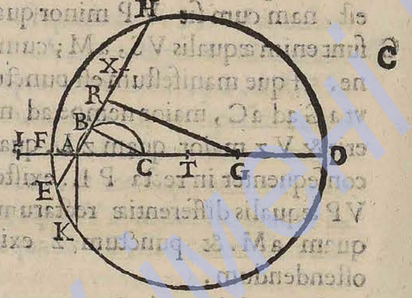
## Propositio Secunda.

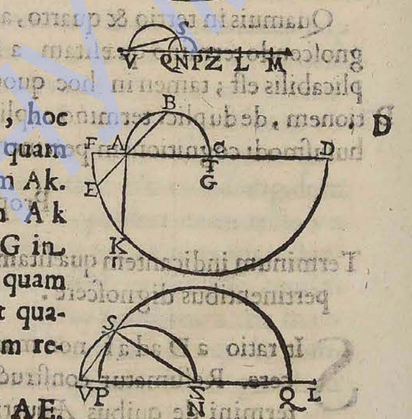
Terminum indicantem quæsitam AE in semicirculis ad secundum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC, & semicirculus ABC, vel extendatur vltra centrum circuli DEF, vel saltem ipsum centrum attingat. Oportet terminum indicantem quæsitam AE dignoscere. Resumatur constructionis figura ad hunc Casum pertinens. Termini de quibus æquatio explicabilis est sunt, VP minor, VQ maior quorum VQ maior est quam VS, hoc est quam AI, & consequenter multo maior quam AE quæsita, est enim AI non minor quam Ak. Nam cum sit vt AG ad AC, ita quadratum Ak ad quadratum AI, ex constructione, & AG in hac semicirculorum positione non maior, quam AC. ergo neque quadratum AK maius erit quadrato AI, quare nec recta Ak maior quam recta AI. hoc est nec AI minor quam Ak.

| | |
|---|---|
| AF | 2 |
| AD | 18 |
| AC | 4 |
| AG | 12 |
| AI | √12 |

C




D

Terminus igitur VQ non indicat ipsam AE.





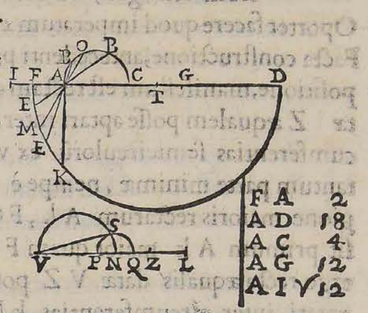
A ergo eam indicat VP differentia rectarum VN, NS. Agnitus est igitur terminus quæsitam AE indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum secundum constitutum est.

## Propositio tertia.

Terminum indicantem quæsitam AE in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

Rvrsus sit ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC; sed semicirculus ABC non extendatur vltra centrum circuli DEF, nec ipsum centrum attingat, nec præterea data VZ sit maior minore rectarum AK, FC. Oportet terminum indicantem quæsitam AE dignoscere. Resumatur cõstructionis figura ad hunc Casum pertinens. Quoniam igitur est vt AG ad AC, ita quadratum Ak ad quadratum AI, ex constructione, & AG maior quam AC, erit & quadratum Ak maius quadrato AI Vnde & recta Ak maior, quam recta AI, seu quod idem est AI minor quam Ak; sed ipsa AI* maior est, quàm AF, ergo poterit à puncto A ad circumferentiam FK duci recta aM æqualis aI; ducatur igitur aM, & producatur donec secet circulum aBC in O. Aut igitur aE quæsita terminatur in circumferentia FM aut in circumferentia Mk; potest enim terminari in vtraque; nam recta datæ VZ æqualis potest aptari inter circumferentias semicirculorum ex vtraque parte minimæ, quæ* est MO; cum ipsa VZ ponatur non maior minore rectarum ak, FC. Si igitur aE terminatur in circumferentia FM. ea minor est, quam aM hoc est quam aI, seu quam VS, & multo minor quam VQ aggregatum rectarum VN, NS. quod est vnus è duobus terminis, de quibus Æquatio explicabilis est. alter vero terminus est VP differentia rectarum VN, NS. Terminus igitur VQ non indicat quæsitam aE. ergo eam indicat VP.

B




| | |
|---|---|
| FA | 2 |
| AD | 18 |
| AC | 4 |
| AG | 12 |
| AI | √12 |

1cm. 26

1cm. 18

D Si vero ipsa aE terminatur in circumferentia MK. ea maior est, quam aM, hoc est quam aI, seu quam VS. & multo maior quam VP. recta igitur VP non indicat aE quæsitam, ergo eam indicat VQ. Cum igitur ratio aD ad aF maior est ratione aG ad aC, & semicirculus aBC non extenditur vltra centrum circuli DEF, nec ipsum centrum attingit, nec præterea data VZ maior est minore rectarum aK, FC, indicat quæsitam aE tum differentia tum aggregatum rectarum VN, NS; differentia quidem cum aE desinit in circumferentia FM, aggregatum vero cum desinit in circumferentia Mk. Agnitus est igitur terminus quæsitam aE indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium constitutum est.

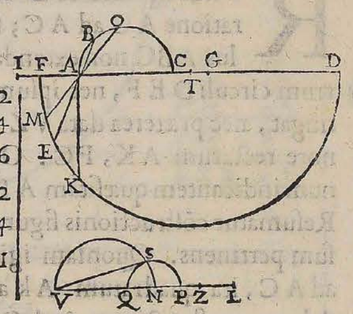
A

## Propositio quarta.

**Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad præceptum quartum pertinentibus dignoscere.**

RVrsus sit ratio a D, ad a F maior ratione a G ad a C, & semicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat; sed data V Z sit maior minore rectarum a k, F C. Oportet facere quod imperatum est.

Facta constructione, antecedenti propositione, manifestum est rectam datæ V Z æqualem posse aptari inter circumferentias semicirculorũ ex vna tantum parte minimæ. nempe è regione maioris rectarum A k, F C. sit primum A k maior quam F C. ergo recta æqualis datæ V Z potest aptari inter circumferentias k M. A O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior,




FA 2
AC 4
AG 16
AD 22
AK V44
AI V11

B

Corol. lem. 2 quam F C vt ponitur. ipsaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæsita desinit in circumferentia K M. vnde maior est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S. & C
multo maior quam V Q differentia rectarum V N, N S. terminus igitur V Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat terminus V P, aggregatum videlicet rectarum V N, N S.

Sed sit F C maior, quam A k. ergo recta æqualis datæ V Z potest aptari inter circumferentias M f, O C, non etiam inter circumferentias k M, A O, atque A E quæsita desinit in circumferentias M F, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & consequenter multo minor quam V P, aggregatum rectarum V N, N S. terminus igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo V Q differentia ipsarum V N, N S eam indicat. Itaque cum ratio A D ad A F maior est ratione A G ad A C, & semicirculus A B C nec extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingit, sed data V Z maior est minore rectarum A k, F C. existente A K maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæsitam, existente vero F C maiore, quam A K differentia. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Atque hinc præceptum quartum constitutum est. D

Magna est inter grauissimos omnium ætatum viros de circuitu terræ discrepantia. Aristoteles in secundo libro de cælo asserit ex Mathematicorum illius temporis authoritate terræ circuitum esse stadiorum 400000. hoc est milliariorum 50000. Archimedes vero in libro de arenæ numero videtur



A tur assensisse ijs, qui opinabantur ipsum circuitum esse stadiorum 300000. siue milliariorum 37500. At Hypparcus referente Plinio lib. 2. cap. 108. tribuit circuitui terræ stadia 277000. quæ sunt milliaria 34625. Eratosthenes vero stadia 252000. vel milliaria 31500. Dionysiodorus autem nobilis Geometra scribens ex centro terræ ad superos, vt Plinius refert eodem libro cap. vltimo affirmat se à sepulchro ad infimam terram peruenisse, esseque id spatium, hoc est semidiametrum terræ stadiorum 42000. hoc est milliariorum 5250. ex quo secundum Archimedis computationem fit circuitus eius milliariorum 33000. At Ptolæmeus, quem recentiores sequuntur affirmat circuitum terræ continere stadia 180000. siue milliaria 22500. Alphraganus, ac Tebitius tribuunt circuitui terræ stadia 563200. siue milliaB ria 20400.

Hæc tanta opinionum diuersitas me impulit vt cogitarem quomodo circuitus terræ inueniri possit, & quidem duos inueni modos, quibus id assequi poterimus, eosque Geometrica ratione demonstrabo, quorum alter ita se habet.

Sumantur in crepidine lacus, silentibus ventis, duo loca distantia inter se spatio minimum trium milliariorum, in quorum altero erigatur ad perpendiculum supra a quam lamina habens foramen in latitudinem ductum, à tergo autem laminæ iuxta ipsum foramen ponatur lumen, & sit interuallum inter sumitatem foraminis, & superficiem aquæ, vtpote vnius pedis; in altero autem loco sit mensor attollens sese, vel deprimens donec visu perueniat ad C lumen per lineam tangentem superficiem aquæ. ita vt si oculus, vel modicum deprimeretur, lumen illud ob rotunditatem aquæ, quæ tunc inter oculum, & lumen interponeretur videri non posset; superficies enim aquæ consistentis, atque manentis sphærica est, cuius sferæ centrum idem est quod centrum terræ, vt demonstrauit Archimedes. & notetur diligenter interuallum, quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquæ, quemadmodum notatum est interuallum inter sumitatem foraminis laminæ, & superficiem aquæ; datis enim his duobus interuallis, & distantia duorũ locorũ in crepidine lacus sumptorum; dabitur diameter terræ, vt postea demonstrabimus, & consequenter per calculum Archimedæum, dabitur & circuitus eius. Dixi huiusmodi operationem debere fieri in aliquo lacu, non autem in mari; nam propter D fluxum, & refluxum maris fallax euaderet operatio. cum ad hoc negotium requiratur aqua consistens, & manens, quapropter fieri hæc debere dixi silentibus etiam ventis, ne superficies aquæ turbaretur; Quin etiam magis oportunus esset riuus, vel canalis in aliqua planitie in directum extensus qualis in Germania inferiori, & præcipuè in Battauia vidi, cum in ijs tranquilla omnino, & immobilis maneat aqua. Alter autem modus inueniendi circuitum terræ, & quidem facilior atque exactior priore ita se habet.

Eligantur duo montes, ex quibus maris prospectus pateat, ita vt ab aliquo loco altioris montis per apicem montis depressioris visus noster extendi possit vsque ad circulum orizontalem, marisque contractum; deinde exquiratur

de-

depressionis montis altitudo, nempe perpendiculum ab eius vertice vsque ad superficiem maris. A

Similiter exquiratur altitudo loci, à quo per apicem montis ad orizontem visus extenditur, hoc est perpendiculum ab eo loco vsque ad maris superficiem; denique inueniatur distantia, quæ est inter dictum locum, & dictum apicem montis; quibus diligenter peractis, dabitur diameter terræ, vt perspicuum fiet, atque adeo & circuitus. Vnico igitur Problemate duos Casus habente omnia quæ dixi præstabo.

Lemma ad id quod sequitur.

Si recta linea per centrum circuli ducta alteram rectam in circulo bifariam non ad rectos angulos secuerit centrum circuli in earum sectione erit. B

REcta linea a B per centrum circuli ducta secet alteram rectam C D bifariam non autem ad rectos angulos in E. Dico punctum E esse centrum circuli. Ducatur enim per punctum E recta linea F E G
Corol. prop. 1 tertij ipsi C D ad rectos angulos, ergo cum sint æquales C E, E D centrum* circuli erit in recta F G, sed idem centrum est quoque in recta a E B, ergo centrum illud erit in puncto E, quod erat ostendendum.

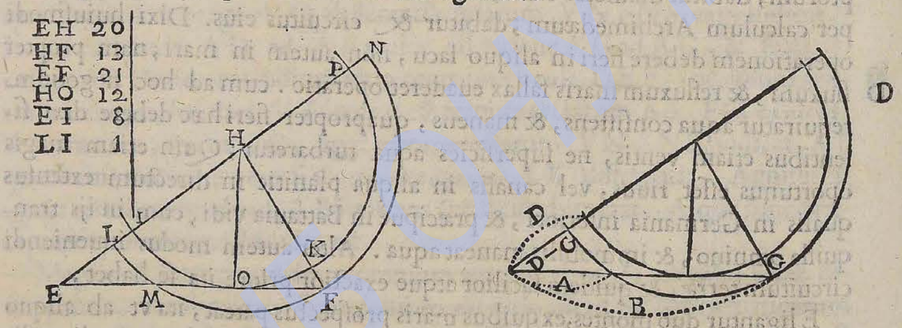
Problema III.

DAta basi trianguli, & excessibus, quibus crura superant eius altitudinem. inuenire triangulum.

Hoc Problema duos Casus habet, vel enim altitudo trianguli, hoc est perpendicularis è vertice demissa intra triangulum cadit, vel extra. Primo Casu oportebit compositam ex excessibus minorem esse basi, secundo vero differentiam excessuum minorem esse basi. C

Resolutio primi Casus.

SIt data basis trianguli B, excessus vero, quo crus maius superat altitudinem D, excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum.



D

Factum iam sit, & sit illud triangulum H E F, in cuius basim cadat perpen-



A pendicularis H O, & centro H interuallo H O describatur circulus I O P secans crura H e, H f in punctis I K. productum vero crus maius e H in P. erunt igitur I c, K f excessus, quibus crura H e, H f superant perpendicularem H O. Quoniam igitur dantur basis E F, excessus maior I E excessus minor k F. sit basis B excessus vero maior D, excessus autem minor G, vt in figura resolutionis designatum est. Rursus centro H, interuallo autem H F alius circulus describatur, secans basim E F in M, crus vero E H in L. ipsumque productum in N, differentia igitur segmentorum E O, O F erit E M cum sint* æquales M O, O F, differentia autem crurum H E, H F erit E L, 36 tertij ea ipsa quæ est excessuum I E. k F; eaque in figura resolutionis erit D — G. Quæratur E M differentia segmentorum E O, O F. ea estò A. ergo B ✣ A
B erit duplum segmentum E O. vnde simplum erit B $\frac{1}{2}$ ✣ A $\frac{1}{2}$. co. 1 prob. 2 lib. prim. 36 tertij

Et quoniam rectangulum L E N* æquale est rectangulo M E F, erit vt L e ad E M. ita E f ad E N, hoc est in figura ad resolutionem pertinente erit vt D — G ad A, ita B ad $\frac{b\text{ in }a}{d\text{-}g}$. itaque $\frac{b\text{ in }a}{d\text{-}g}$ erit ipsa E N, à qua si auferatur P N hoc est G; reliqua E P erit $\frac{b\text{ in }a}{d\text{-}g}$ — G.

Et quoniam rectangulum I E P* æquale est quadrato E O, hoc est rectangulum sub D, & $\frac{b\text{ in }a}{d\text{-}g}$ — G æquale quadrato ex B $\frac{1}{2}$ ✣ A $\frac{1}{2}$. ibid.

$\frac{d\text{ in }b\text{ in }a}{d\text{-}g}$ — B in G æquabitur B Q $\frac{1}{4}$ ✣ A Q $\frac{1}{4}$ ✣ B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{d\text{ in }b\text{ in }a\,4}{d\text{-}g}$ — D in G 4 æquabitur B Q ✣ A Q ✣ B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q. addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo
C

$\frac{d\text{ in }b\text{ in }a\,4}{d\text{-}g}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q ✣ D in G 4.

Vt autē æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{d\text{ in }b}{d\text{-}g}$ in integrā magnitudinē; ea esto F. nam si fiat vt D — G ad D, ita B ad aliā, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{d\text{ in }b}{d\text{-}g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planū $\frac{d\text{ in }b\text{ in }a^4}{d\text{-}g}$. transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 -- A Q, æquabitur B Q ✣ D in G 4.

Seu quod idem est F 4 -- B 2 in A -- A Q æquabitur B Q ✣ D in G 4.

Et explicata secundum tertium Canonem Æquatione.

P 2 - B - L. V. ( F 2 - B Q - B Q - D in G 4 ) æquabitur A.

Vel F 2 - B ✣ L. V. ( - F 2 B Q - B Q - D in G 4 ) æquabitur A.

D In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum minor tantum indicat quæsitam E M differentiam segmentorum basis. nam terminus maior manifesto se ostendit maiorem ipsa differentia. immo etiam tota basi, vt in opere constructionis perspicuum fiet.

Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum

sub excesibus: reliqua erit terminus minor.

Vel eidem differentiæ addatur eadem recta, & fiet terminus maior.

## Compositio primi Casus.

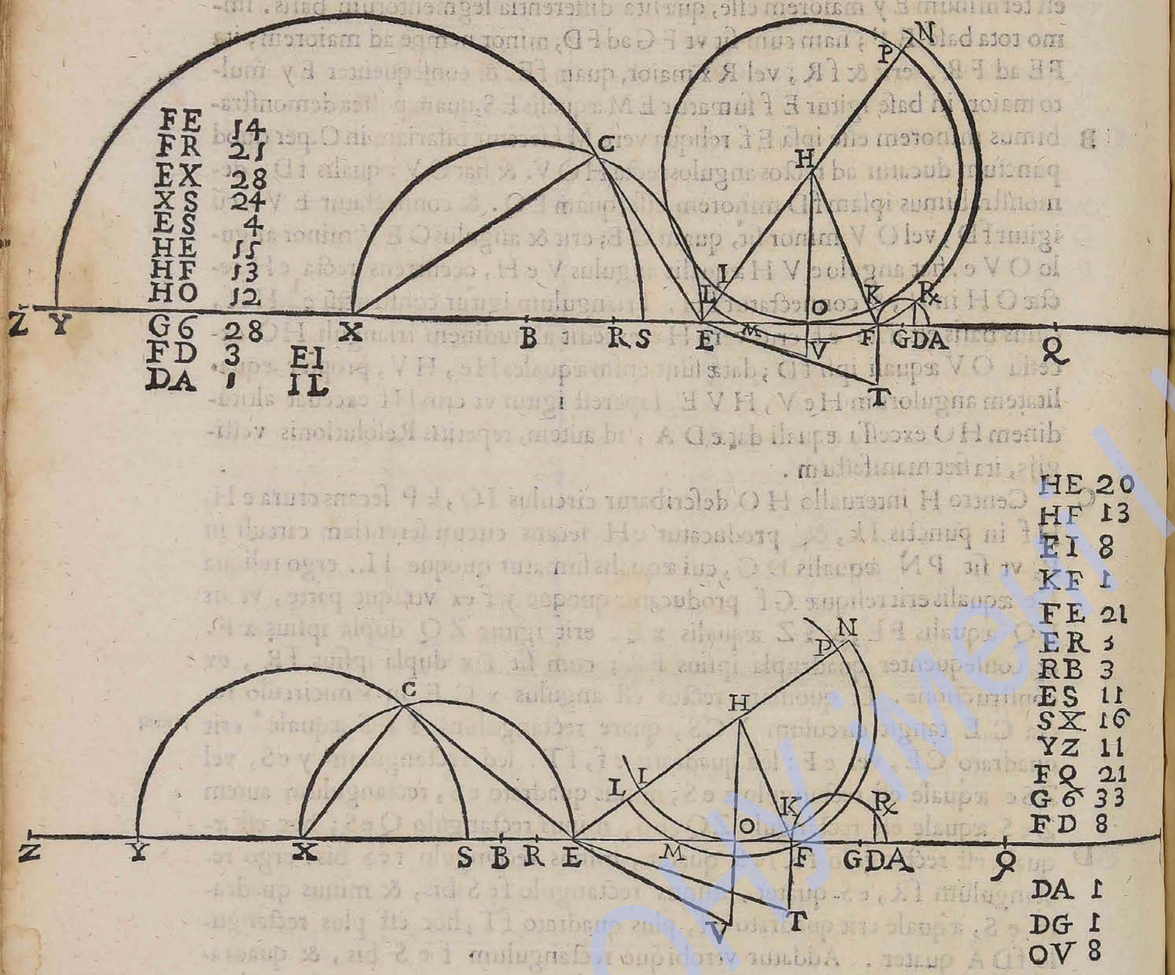
SIt data basis trianguli E F: excessus autem quo crus maius superat altitudinem trianguli F D, excessus vero, quo crus minus eandem altitudinem superat D A, ex quibus excesibus composita F A sit minor base E F. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D χ, quam semicirculus in F A descriptus secet in χ. ex puncto autem F. demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D χ. & connectatur F T. quadratum igitur F T quadruplum est quadrati D χ, vel rectanguli F D A. Deinde in F D sumatur D G æqualis D A. & fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam. quæ sit F R, eaque duplicetur in X, & in E x describatur semicirculus x C E. in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrabimus minorem esse diametro E x & connectatur x C. & centro x interuallo x C describatur circulus secans diametrum E x in S, eademque producta in y. Termini igitur de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt; E S minor; E y maior. & manifestum est terminum E y maiorem esse, quæsita differentia segmentorum basis. immo tota base E F; nam cum sit vt F G ad F D, minor nempe ad maiorem; ita F E ad F R, erit & f R, vel R x maior, quam f E. & consequenter E y multo maior. in base igitur E f sumatur E M æqualis E S, quam postea demonstrabimus minorem esse ipsa E f. reliqua vero M f secetur bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V. & fiat O V æqualis f D, demonstrabimus ipsam f D minorem esse, quam E O. & connectatur E V. cũ igitur f D, vel O V minor sit, quam O E; erit & angulus O E V minor angulo O V e. fiat angulo e V H æqualis angulus V e H, occurrens recta e H rectæ O H in H, & connectatur f H. Triangulum igitur constructũ est H e f, cuius basis est data e f, crus vero H e excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi f D; datæ sunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatem angulorum H e V, H V E. superest igitur vt crus H f excedat altitudinem H O excessu æquali datæ D A; id autem, repetitis Resolutionis vestigijs, ita fiet manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus I O, k P secans crura e H, H f in punctis I k, & producatur e H secans circumferentiam circuli in P, vt sit P N æqualis D G, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G f. producatur quoque y f ex vtraque parte, vt sit F Q æqualis F E, & x Z æqualis x E. erit igitur Z Q dupla ipsius x F. & consequenter quadrupla ipsius F R; cum sit F x dupla ipsius f R, ex constructione. Et quoniam rectus est angulus x C E in semicirculo recta C E tangit circulum Y C S, quare rectangulum Y E S æquale * erit quadrato C E, vel e F: seu quadratis e f, f T: sed rectangulum y e S, vel Z S e æquale est rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem Z e S æquale est rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S; hoc est æquale est rectangulo f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis, & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo f D A quater. Addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S; auferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater, æquale erit quadratis e f, e S, & rectangulo f e S bis, hoc est * æquale erit quadrato f S, vel quadrato e O quater. recta enim f S dupla est ipsius e O, cum sint æquales S E, e M, & æquales quoque M O, O f, vtræque ex constructione. cum igitur quadruplum sit æquale quadruplo, erit & simplum æquale simplo,

* 36 tertij

* 4 secundi

hoc est rectangulum F R, E S, vel F R, E M, minus rectangulo f D A;
36 tertij æquale erit quadrato E O. sed quadrato e O* æquale est rectangulum I E P, hoc est rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L, ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L, addito communi rectangulo e I L rectangulum F R, e M, æquale




erit rectangulo I e N, vt igitur e M ad e N, ita erit e I ad F R. sed cum sit vt f G ad f D, hoc est vt e L ad e I, ita F e ad F R, ex constructione. est quoque permutando vt e L ad e F, ita e I ad f R. ergo vt e M ad E N, ita erit e L ad e F. quare rectangulum F e M sub extremis æquale erit rectangulo L e N sub medijs. ac proinde puncta L M, f N in circulo



A lo erunt, cuius quidem circuli, & centrum* est in recta H V secante rectam M f bifariam, & ad rectos angulos in O, atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H; cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate præmisso punctum H erit centrum circuli L M, F N. atque adeo idem, quod centrum circuli I K P, vnde æquales erunt H F, H L. sunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua K F, idest excessus, quo crus H f superat H O altitudinem trianguli. reliquæ I L, hoc est D A datæ æqualis erit. Ad datam igitur basim E f constitutum est triangulum H E f, cuius crura H E, H f superant altitudinem H O excessibus I E, K f, æqualibus datis f D, D A. quod facere oportebat. coro. 1 prop. tertij

B At vero rectam e T minorem esse diametro e X sic demonstrabimus.

Quoniam enim est, vt f G ad f D, ita f e ad f R, ex constructione: erit per diuisionem rationis, vt f G ad G D, ita f e ad e R. sed f G minor est, quàm f e: ergo & G D minor erit quam e R; atque adeo tota f D minor, quam tota f R; quare & rectangulum f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R e. & consequenter rectangulum f D A quater minus erit rectangulo f R e quater, atque addito communi quadrato e f rectangulum f D A quater, hoc est quadratum f T, vnà cum quadrato f e, seu quod idem est quadratum e T minus erit rectangulo f R e quater, vna cum quadrato f e. hoc est minus erit quadrato compositæ ex f R, R e, seu quod idem est quadrato X e. sunt enim æquales f R, R X, ex constructione. quare & re-

C cta e T minor erit, quam recta X e, quod erat ostendendum.

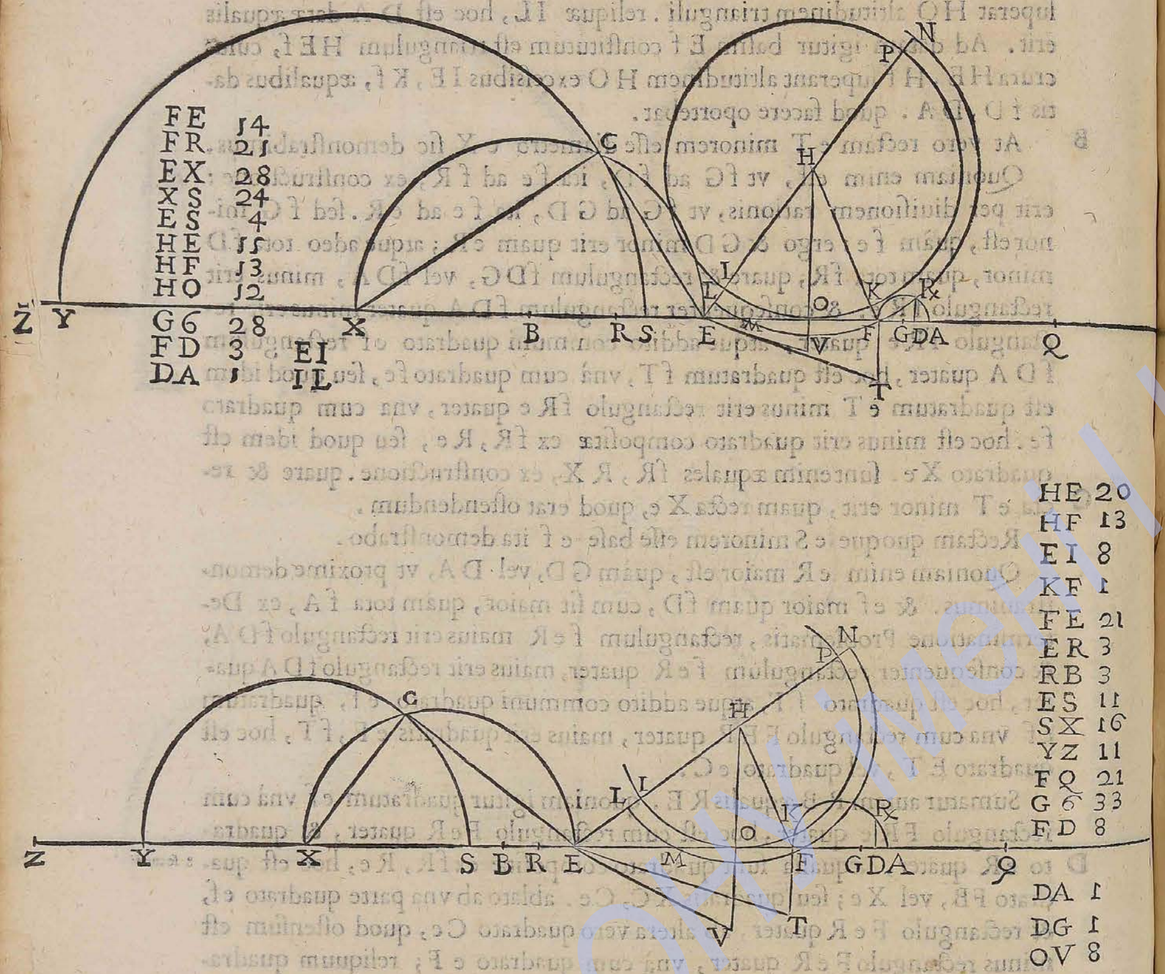
Rectam quoque e S minorem esse basi e f ita demonstrabo.

Quoniam enim e R maior est, quàm G D, vel D A, vt proxime demonstrauimus. & e f maior quam f D, cum sit maior, quàm tota f A, ex Determinatione Problematis, rectangulum f e R maius erit rectangulo f D A, & consequenter rectangulum f e R quater, maius erit rectangulo f D A quater, hoc est quadrato f T, atque addito communi quadrato e f, quadratum e f vna cum rectangulo F E R quater, maius erit quadratis e F, f T, hoc est quadrato E T, vel quadrato e C.

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f vnà cum rectangulo F R e quater, hoc est cum rectangulo F e R quater, & quadra-

D to e R quater,* æqualia sunt quadrato compositæ ex f R, R e, hoc est quadrato F B, vel X e; seu quadratis X C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo F e R quater, ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est minus rectangulo F e R quater, vnà cum quadrato e F; reliquum quadratum e R quater, hoc est quadratum e B reliquo quadrato X C minus erit, quare & recta e B minus erit, quàm recta X C, vel X S. atque addita, vel abtata vtrinque B S fiet e S minor, quàm X B, hoc est quam e F; sunt enim æquales X B, e F, cum sint æquales R X, R F, & æquales R B, R e ex constructione. quare constat propositum. Denique rectam F D minorem esse quam e O demonstrabimus in hunc modum. 2 secundi

Quoniam enim est, vt FG ad FD, ita FE ad FR, ex constructione. erit permutando vt FG ad FE, ita FD ad FR: fiat autem vt FG ad FE, ita EM ad aliam, quæ sit Gb. ergo vt fD ad FR, ita erit EM ad Gb. quare rectangulum sub extremis fD, Gb, æquale erit rectangulo sub medijs FR, EM. sed rectangulum fR, EM, minus rectangulo FDA, vel fDG, ostensum est in Demonstratione Problematis æquale quadrato EO. ergo &




rectangulum FD, GB, minus rectangulo fDG, hoc est rectangulum fDB, æquale erit quadrato EO; vnde proportionales erunt fD, EO, DB. sunt autem & inæquales, vt postea demonstrabimus ergo fB composita ex extremis maior erit, quàm dupla media EO, hoc est quam recta SF, quæ dupla est ipsius EO, nam composita ex tota fE, & EM, vel ES, differentia par-



A partium EO, OF, æqualis est duplæ EO.

Et quoniam est vt fG ad FE, ita EM, vel ES ad GB, ex quarum extremis compósita Fb ostensa est maior, quàm Sf, composita ex medijs; erit altera extremarum EG, Gb minima, altera maxima. sed fG non est maxima cum sit minor, quàm FE. ergo minima erit, & per consequens minor, quàm ES; sed & FA minor est, quàm EE, ex Determinatione; ergo composita ex FG, & FA hoc est FD dupla minor erit, quàm Sf composita ex SE, & Ef, hoc est quam dupla EO. quare & simpla fD minor erit, quàm simpla EO. quod erat ostendendum.

coro. 1 prob. 1 lib. primi

th. 2 huius

imitor th. 2 huius

corol. ibid.

At vero rectas proportionales fD, EO, Db inæquales esse sic demonstrabitur.

B Si enim non sunt inæquales. sint si fieri potest æquales. ergo fb composita ex extremis æqualis erit duplæ EO, hoc est rectæ Sf. & cum sit vt bG ad fE, ita EM, vel ES ad Gb. atque Fb composita ex extremis æqualis Sf compositæ ex medijs, minor extremarum fG, GB, minori mediarum fE, ES æqualis erit, maior autem maiori. quare fG, quippe quæ minor est quam fE æqualis erit ipsi ES, vel EM; sed & fD ponitur æqualis EO. ergo & reliqua GA erit æqualis reliquæ MO. & per consequens etiam DA æqualis erit Of, atque adeo tota fA æqualis erit toti fE, quod est absurdum, ponitur enim fA minor quam fE, ex determinatione Problematis. Inæquales sunt igitur fD, EO, Db, quod ostendisse oportuit.

Ex hoc Problematis constructione diametrum terræ inueniemus hac ratione.

C

Distantia duorum locorum, quæ in crepidine lacus sumpsimus. idest recta linea tangens superficiem aquæ interiecta inter oculum mensoris, & foramen laminæ. intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terræ, altitudinem vero semidiametrum terræ. nam ipsa altitudo siue perpendicularis è vertice trianguli ducta ad basim secat ipsam basim in puncto contactus, in quo scilicet basis trianguli tangit superficiem aquæ, quam sphæricam esse demonstratum est interuallum vero, quod est inter sumitatem foraminis laminæ, & superficiem aquæ intelligatur excessus quo crus vnum trianguli superat eius altitudinem, interuallum autem quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquæ intelligatur excessus, quo crus alterum trianguli superat eius altitudinem. atque ex data base, & illis excessibus dabitur triangulum. quare & eius altitudo hoc est semidiameter terræ.

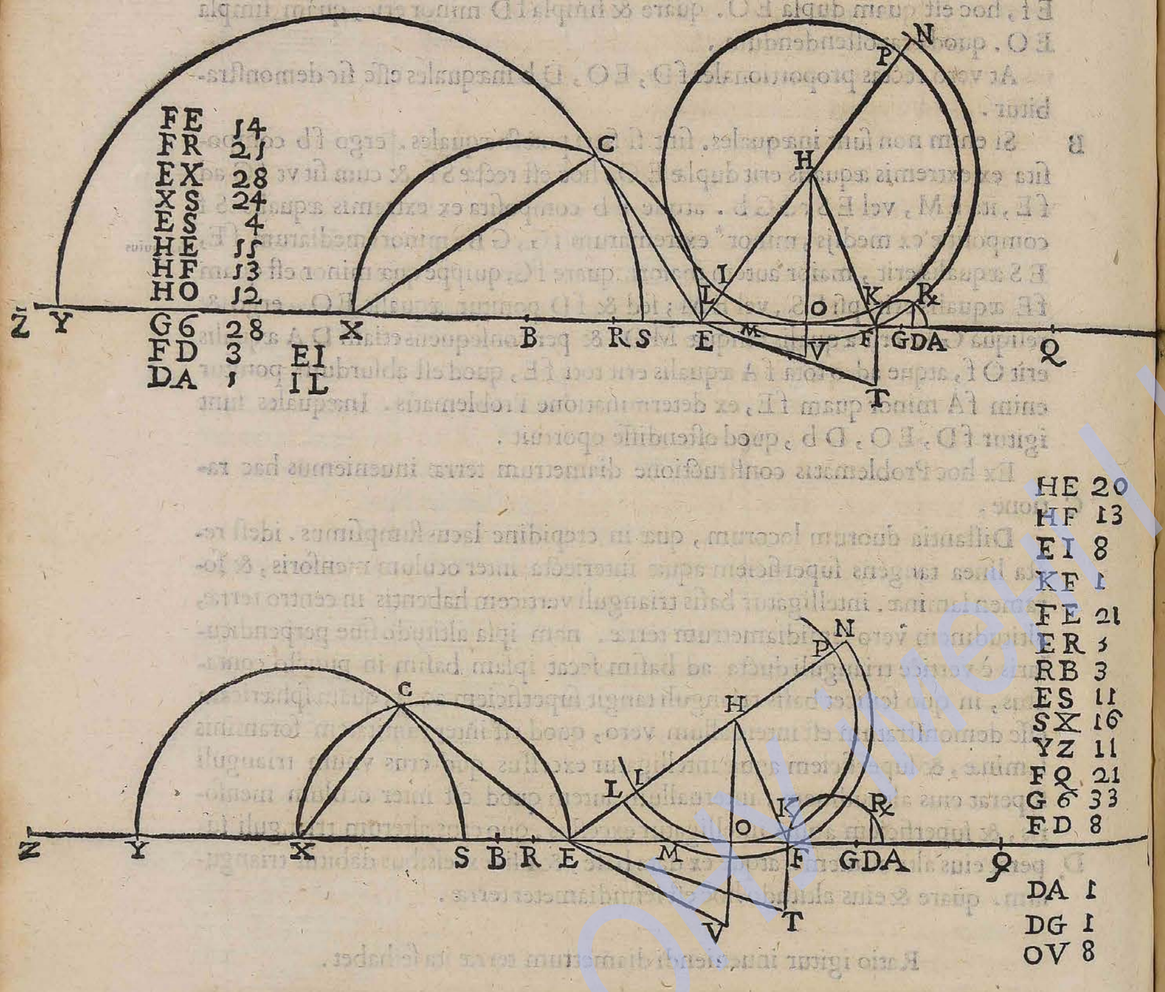
D

Ratio igitur inueniendi diametrum terræ ita se habet.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam, differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus, reliqua vero ponatur prorertia quatuor proportionalium, quarum prima

ma est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excesibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

Est enim ex constructione vt F G ad F D, hoc est vt E L ad E I, ita F E ad f R, cuius dupla est f X, differentia autem, qua ipsa X f superat basim E f, est X E, cuius quadratum excedit quadratum C E, quadrato X C; quadratū
47 primi autem C E, vel E T* æquale est quadratis E f, f T, hoc est quadrato E f, &




quadruplo rectangulo fD A, vel E I L. itaque quadratum X C est excessus, quo quadratum X E superat quadratum E f, & quadruplū rectangulum E I L. a recta autem X E dempta est X S æqualis X C. reliquæ vero S E facta est æqualis E M, differentia segmentorum E O, O F; quam quidem E M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est E L dif-



A differentia excessuum E I, K f: secunda verò basis E f, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excesibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est, nam vt E L ad E F, ita est E M ad E N compositam ex excesibus E I, P N, & diametro I P.

In numeris, sit data basis trianguli E F 21, excessus vero I E 8, excessus autem K F I, fiat vt 7 differentia videlicet excessuum ad 8 excessum maiorem, ita 21, idest basis ad aliam rectam, ea erit 24 eius dupla 48, differentia autem inter 48 & 21 est 27. ab hac auferatur 16 nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 27 superat quadratum ex 21, & quadruplum eius quod fit ex 8 & 1, hoc est ex excesibus, remanebunt 11 pro E M differentia segmentorum E N, N F.

B hæc differentia ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 7, nempe differentia excessuum, secunda vero 21, hoc est basis; quarta erit 33 composita ex excesibus, & diametro quæsita, à qua composita si auferantur excessus nempe 8 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Vel sit data basis 14, excessus maior 3, excessus minor 1. Fiat vt 2 differentia excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 14 ad aliam rectam. ea erit 21, eius dupla 42. differentia autem inter 42, & 14 est 28. ab hac auferatur 24, nempe recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 28 superat quadratum ex 14, & quadruplum eius, quod fit ex 3 & 1, hoc est ex excesibus. remanebunt 4 pro E M differentia

C segmentorum E N, N F. hæc differentia ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2 differentia excessuum, secunda vero 14 hoc est basis, quarta erit 28 composita ex excesibus, & diametro quæsita, auferantur excessus, nempe 3 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Aliam quoque rationem inueniendi diametrum terræ exponemus, & quidem faciliorem quia per numeros minores procedet.

Fiat vt differentia excessum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam. differentiæ autem, qua dupla ea recta inuenta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & differentia ipsius inuenntæ, & basis superat quadru-

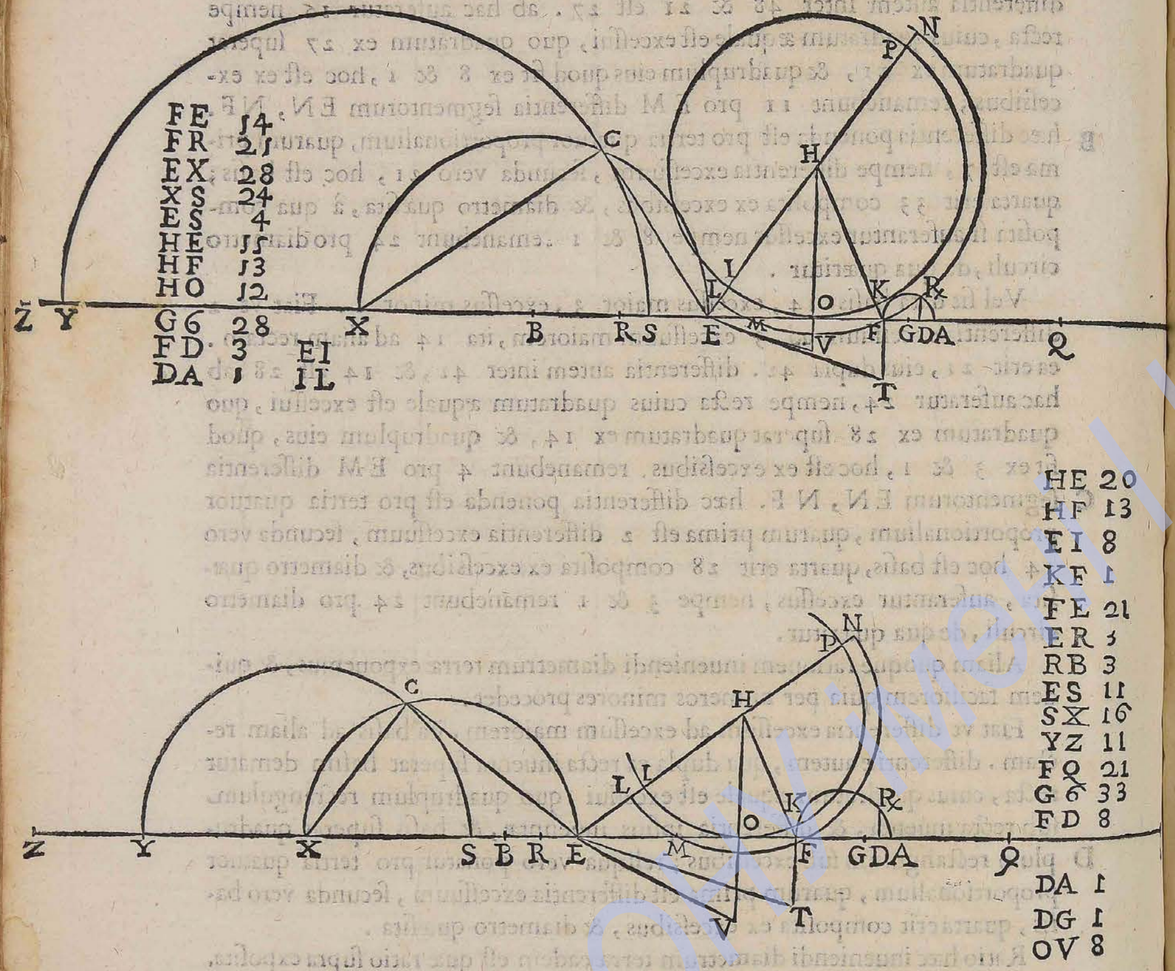
D plum rectangulum sub excesibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit composita ex excesibus, & diametro quæsita.

Ratio hæc inueniendi diametrum terræ eadem est quæ ratio supra exposita. licet operatione differant. nam quadruplum rectangulum F R E sub recta inuenta F R & R E; differentia ipsius F R, & basis E F superat quadruplum rectangulum E I L sub excesibus, eodem excessu, quo quadratum x E superat quadratum basis E F, & quadruplum rectangulum E I L. idque sic demonstrabitur.

Quoniam enim quadratum x E superat quadratum C E, vel E T, seu qua-

quadrata E F, F T. quadrato x C; quadratum autem F T æquale est quadruplo rectangulo F D A, vel E I L. ergo ipsum quadratum x E superabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L quadrato x C.

Et quoniam quadruplum rectangulum f R e, vna cum quadrato e f æ-
8 secundi quale* est quadrato compositæ ex f R, R e, hoc est quadrato x e; quod quidem quadratū superat quadratū e f, & quadruplum rectangulum e I L quadra-




to x C, vt demonstrauimus. ergo & quadruplum rectangulum f R e, vnà cum quadrato e f, superabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L eodem quadrato X C. auferatur commune quadratum E F, ergo quadruplum rectangulum F R E itidem superabit quadruplum rectangulum E I L, quadrato X C. sed & quadratum X E superat quadratum E F, & qua-



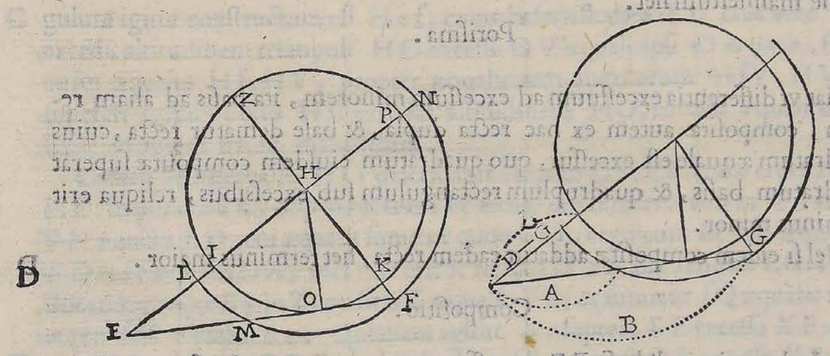
A quadruplum rectangulum E I L quadrato X C. ergo quadruplum rectangulum F R E superat quadruplum rectangulum E I L eodem excessu, quo quadratum X E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L; quod erat ostendendum.

Sit data basis trianguli 21 excessus maior 8, excessus minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum, ad 8 excessum maiorem, ita 21 hoc est basis, ad aliam rectam. ea erit 24. eius dupla 48 differentia autem inter 48, & 21, est 27. ab hac auferatur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 3, & 24; hoc est, sub recta inuenta, & differentia eiusdem inuentæ; & basis, superat rectangulum ex 8 & 1. hoc est ex excessibus; remanebunt 11 pro E M differentia segB mentorum E N, N F. hæc differentia ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 7 differentia excessuum, secunda vero 21. idest basis, quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro quæsita, demptis excessibus nempe 8, & 1, remanebit diameter, eaque erit 24.

Eundem Casum Problematis alia via & resoluam, & componam quamuis in hac quoque, quæ sequitur Resolutione idem quæsitum erit.

## Alia Resolutio primi Casus.

C SIt data basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione B, excessus vero quo crus maius superat altitudinem trianguli D. excessus autem, quo crus minus eamdem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum. Factum iam sit, & resumantur antecedentis Resolutionis figuræ, & quæ-




ratur, vt prius E M differentia segmentorum E O, O F. esto illa A. ergo $B - A$ erit M F, & consequenter F O erit $B - \frac{1}{2}A$.

Et quoniam rectangulum L E N æquale est rectangulo M E F; erit vt L E ad E M, ita E F ad E N. hoc est in figura resolutionis, vt $D - G$ ad A, ita B ad $\frac{B \text{ in } A}{D-G}$. itaque $\frac{B \text{ in } A}{D-G}$ erit ipsa E N à qua si auferatur I E, hoc est D; reliqua I N erit $\frac{B \text{ in } A}{D-G} - D$.

Pro-

Producatur autem F H vsque ad circumferentiam O I P in Z; erit F Z æ- A
qualis I N; atque adeo & ipsa F Z erit $\frac{B \text{ in } A}{D-G} - D$.

35 tertij Et quoniam rectangulum K F Z, æquale est quadrato O F, hoc est rectangulum sub G, & $\frac{B \text{ in } A}{D-G} - D$ æquale quadrato ex $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$

$\frac{G \text{ in } B \text{ in } A}{D-G} - G \text{ in } D$, æquabitur $B Q\frac{1}{1} \div A Q\frac{1}{4} - B \text{ in } A\frac{1}{2}$

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{g \text{ in } B \text{ in } A\ 4}{d-g} - G \text{ in } D\ 4$ æquabitur $B Q \dagger A Q - B \text{ in } A\ 2$.

Addatur vtrique parti B in A 2, & G in D 4. auferatur autem A Q, vt cognita ab incognitis separentur; ergo

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\ 4}{d-g} \div B \text{ in } A\ 2 - A Q$, æquabitur $B Q \div G \text{ in } D\ 4$

Vt autem æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{g \text{ in } b}{d-g}$ in integram magnitudinem, ea esto F. nam si fiat vt D — G ad G, ita B ad aliam, quæ B
fit f; erit f eadem quæ $\frac{g \text{ in } b}{d-g}$. atque adeo planum f in A 4 idem erit, quod planum $\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\ 4}{d-g}$. transmutata igitur in magnitudinem integram fractione.

E in A 4 ÷ B in A 2 — A Q æquabitur B Q ÷ G in D 4

Vel quod idem est f 4 † B 2 in A — A Q æquabitur B Q † G in D 4.

ET explicata Æquatione.

F 2 † B — L. V. F 2 ✝ B Q — B Q — G in D 4, æquabitur A

Vel F 2 ÷ B ÷ L. V, F 2 ÷ B Q — B Q — G in D 4 æquabitur A.

In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum mi- C
nor tantum indicat quæsitam E M differentiam segmentorum basis, maior enim terminus maior est ipsa differentia, immo etiam tota base, vt in constructione manifestum fiet.

Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam, compositæ autem ex hac recta dupla, & base dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excesibus, reliqua erit terminus minor.

Vel si eidem compositæ addatur eadem recta, fiet terminus maior. D

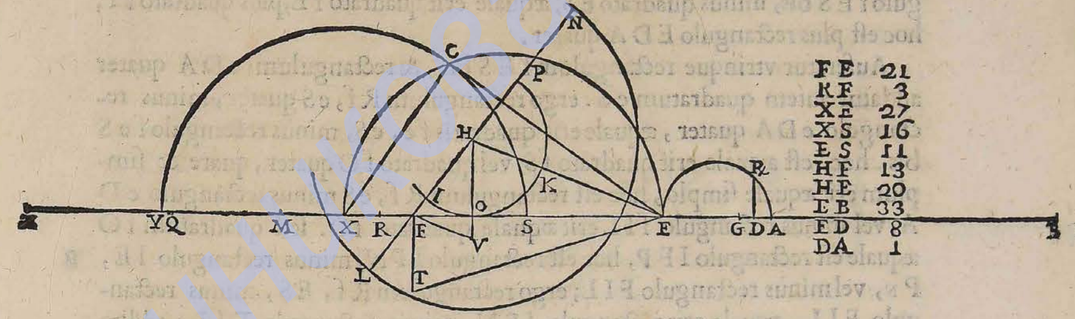
Compositio.

SIt data trianguli basis E F; excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli e D: excessus autem, quo crus minus eamdem altitudinem superat D A. ex quibus excesibus composita e A sit minor base e f. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam semicirculus in e A descriptus secet in ℞. ex puncto autem f demittatur perpendicularis f T, dupla ipsius D ℞, & connectatur e T. quadratum igitur f T quadruplum erit quadrati D ℞, vel rectanguli e D A.

Dein-



A Deinde e D sumatur D G æqualis D A, & fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ sit F R. eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus




B XCE, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrauimus minorem esse diametro E X; & connectatur X C, & centro X interuallo X C describatur circulus secans diametrum E X productam in y. is circulus secabit quoque rectam F E, quia x C maior est, quam x F. vt infra ostendetur, secet ergo in S, termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt S E minor, E y maior. & manifestum est terminum E y maiorem esse quæsita differentia segmentorum basis; immo tota base. secetur ergo F S bifariam, & ad rectos angulos in O à recta H O V, & fiat O V æqualis D A, quam demonstrabimus minorem esse recta, O F. & connectatur f V. angulus igitur O V f maior erit angulo O f V: fiat angulo o V f æqualis angulus V f H occurrens recta f H, rectæ O H in H, & connectatur E H. Trian-
C gulum igitur constructum est H e f, cuius basis est data E f, crus vero H f excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi D A datæ. sunt enim æquales H f, H V, propter æqualitatem angulorum H f V, H V f. superest igitur vt crus H E excedat altitudinem H O, excessu æquali datæ E D: id autem ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O I, P k secans crura H f, H E in punctis I K, & producatur f H secans circumferentiam in P, vt sit P N æqualis E D, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo cum sit I L æqualis E D & I f æqualis D A, vel D G: erit & reliqua f L æqualis reliquæ E G. Pro-
D ducatur quoque E y in Z, vt sit x Z æqualis X E, & sumatur f Q æqualis f E. atque f M æqualis S E. Quoniam igitur X e superat F E excessu X F dupla X E, hoc est Z E superabit duplam f E, quæ est Q E excessu X F duplo. sed Z E superat Q E excessu Z Q. ergo Z Q dupla erit ipsius X F, & consequenter quadrupla rectæ R f.

Et quoniam rectus est angulus x C e in semicirculo: recta C e tangit circulum Y C S. quare rectangulum Y e S æquale erit quadrato C e, vel e T, seu quadratis e F, F T. sed rectangulum y e S, vel Z S E æquale est rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem z e S æquale est re-

ctangulis Z Q, E S, Q E S, hoc est rectangulo R F, E S quater, & rectangulo f E S bis; Z Q enim ostensa est quadrupla ipsius f. ipsa autem Q E dupla est ipsius f E, ex constructione. ergo rectangulum f R, E S quater, plus rectangulo f E S bis, minus quadrato E S, æquale erit quadrato f E, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo E D A quater. A

Auferatur vtrinque rectangulum f E S bis, & rectangulum e D A quater addatur autem quadratum e S. ergo rectangulum R f, e S quater, minus rectangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, minus rectangulo f e S bis. hoc * est æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O quater, quare & simplum erit æquale simplo, hoc est rectangulum R f, e S minus rectangulo e D A, vel minus rectangulo f I L erit æquale quadrato f O. sed quadratum f O æquale est rectangulo I F P, hoc est rectangulo I F N, minus rectangulo I E, P N, vel minus rectangulo F I L; ergo rectangulum R f, E S, minus rectangulo F I L, æquale erit rectangulo I F N, minus rectangulo F I L; addito communi rectangulo F I L; rectangulum R F, E S, hoc est R F M rectangulo I F N æquale erit. vt igitur F M ad F N, ita erit f I, ad f R; sed cum sit vt E G ad G D, hoc est vt L f ad f I, ita e f ad f R; est quoq; permutando vt L f ad f E, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N, ita erit f L ad f E. vnde rectangulum M f E sub extremis æquale erit rectangulo N f L sub medijs. quare puncta M N, E L in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum est B

Coroll. prop 1 tertij * in recta H V secante rectam M E bifariam, & ad rectos angulos in O; cum sint æquales M f, f O ipsis E S, S O, vtraque vtrique, ex constructione; atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate, quod huic Problemati præmissum est, punctum H; erit centrum circuli M N, E L, idemque quod centrum circuli P k I, atque adeo æquales erunt H E, H L: sunt autem æquales & H K, H I; ergo & reliqua k E, reliquæ I L, hoc est E D, æqualis erit. quod erat ostendendum. ad datam igitur basim e f constitutum est triangulum H e f, cuius crura H e, H f superant altitudinem H O, excessibus k e, I f æqualibus datis e D, D A. quod erat faciendum. C

Rectam autem e T minorem esse diametro e X. ita ostendam.

Quoniam enim est vt e G ad G D, ita e f ad f R; ex constructione; & e S minor quam e f, erit & G D minor, quàm f R; atque tota e D minor, quam tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit rectangulo e R f, & consequenter quadruplum rectangulum e D A, hoc est quadratum f T, minus erit quadruplo rectangulo e R f. atque addito vtrique parti quadrato f e, quadrata f T, f e, hoc * est quadratum e T, minus erit quadruplo rectangulo e R f, vnà cum quadrato e f; hoc * est minus erit quadrato compositæ ex e R, R f, ideſt quadrato e X; quare & recta e T minor erit, quam recta e X. quod erat ostendendum. D

47 primi 8 secundi

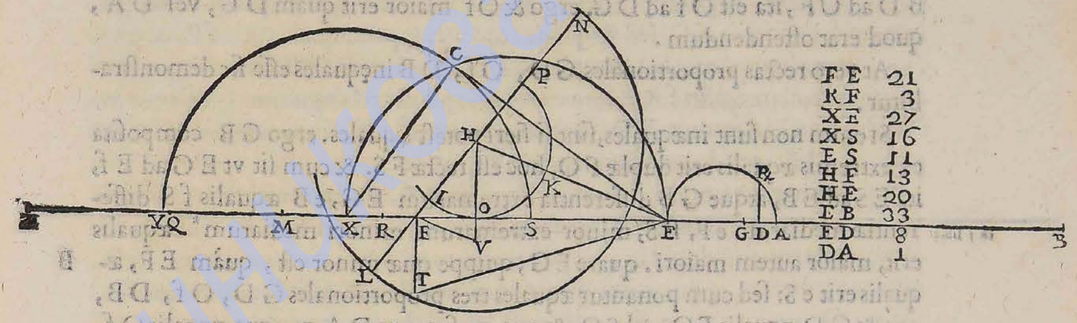
Rectam vero X C maiorem esse quam X f. ita fiet manifestum.

Quoniam enim f R ostensa est maior, quam G D, & f e maior est quá e D;

tota



A tota enim e A minor est quàm f e ex Determinatione Problematis; rectangulum e f R maius erit rectangulo e D G, vel e D A. & consequenter quadruplum E F R, maius quadruplo E D A, hoc est quadrato F T. atque addito vtrique parti quadrato F e, quadruplum rectangulum e f R vnà cũ quadrato f E maius erit quadratis f T, f e, hoc est quadrato e T, vel quadrato E C.




B

Et quoniam quadratum E f, vnà cum rectangulo e R f quater, vel cum rectangulo e f R quater, & quadrato f R quater * æqualia sunt quadrato compositæ ex e R, R f; hoc est quadrato e X, seu quadratis X C, C e; ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo e f R, quater; ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est minus rectangulo e f R quater, vna cum quadrato e f; reliquum quadratum f R quater, hoc est quadratum X F, reliquo quadrato X C minus erit. quare & recta X F minor quam recta X C. quod erat ostendendum. 8 secundi

C Rectam denique D A minorem esse recta O F. sic demonstrabitur.

Quoniam enim est vt E G ad G D, ita E F ad F R ex constructione, erit permutando vt E G ad E F, ita G D ad F R. fiat autem vt E g ad E F, ita E S ad aliam, quæ sit E B. ergo vt G D ad F R, ita erit E S ad E B. quare rectangulum sub extremis G D, E B æquale erit rectangulo sub medijs F R, E S; sed rectangulum F R, E S, minus rectangulo E D A, vel e D G ostensum est in demonstratione Problematis æquale quadrato F O. ergo & rectangulum G D, e B, minus rectangulo E D G, hoc est rectangulum G D B, æquale erit quadrato F O. vnde proportionales erunt G D, F O, D B; sunt autẽ & inæquales, vt postea demonstrabimus, ergo G B composita ex extremis maior erit quam dupla media F O, hoc est quam recta F S.

D Et quoniã est vt e G ad e f, ita e S ad e B, G B autem differentia extremarũ e G, e B ostensa est maior, quàm F S, differentia mediarum e f, e S. ergo altera extremarum e G, e B minima erit, altera maxima. sed e G non est maxima, cum sit minor, quàm E f. ergo minima erit, & per consequens minor quam e S. sed & e A minor est quam e F, ex determinatione. ergo cõpositæ ex e A, & e G, hoc * est dupla e D minor erit quàm cõpositæ ex e f, & e S. hoc est quam dupla e O. quare & simpla e D minor erit, quàm simpla

theo. 2. li. 4

Corol. 1 Prob. 6 lib. primi

EO: & cum sit EG minima, & extrema quatuor proportionalium EG, Ef, A
eS, eB; erit altera extrema EB maxima. vnde maior quam eF. sed eD ostensa est maior, quam eO. ergo reliqua DB maior erit, quam reliqua Of. sed vt BD ad OF, ita est Of ad DG. ergo & Of maior erit quam DG, vel DA, quod erat ostendendum.

At vero rectas proportionales GD, Of, DB inæquales esse sic demonstrabitur.

Si enim non sunt inæquales, sint si fieri potest æquales. ergo GB composita ex extremis æqualis erit duplæ FO, hoc est rectæ FS. & cum sit vt EG ad Ef, ita ES ad EB, atque GB differentia extremarum EG, eB æqualis fS differentiæ mediarum eF, ES, minor extremarum minori mediarum* æqualis 14. lib. 4 S
erit, maior autem maiori. quare EG, quippe quæ minor est, quàm EF, æ- B
qualis erit eS: sed cum ponantur æquales tres proportionales GD, Of, DB, erit & GD æqualis FO, vel SO, & per consequens DA quoque æqualis Of. ergo tota eA æqualis erit toti ef, quod est absurdum; ponitur enim eA C
minor quam ef, ex determinatione Problematis. inæquales igitur sunt GD, OF, DB, quod erat ostendendum.

Ex hac constructione Problematis, inuenitur diameter terræ hoc modo.

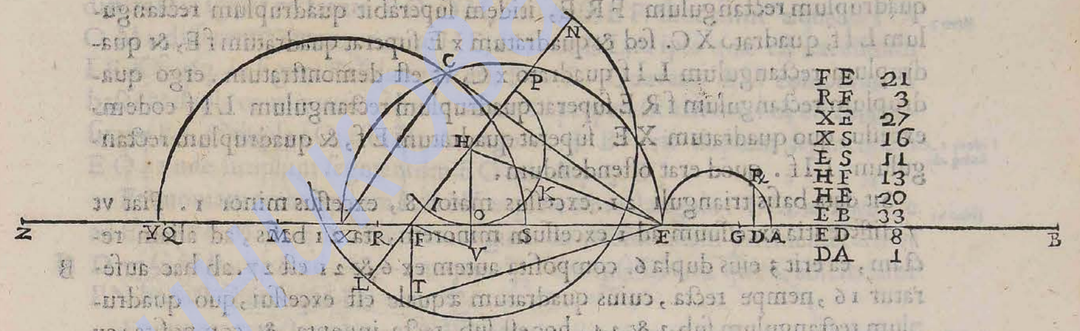
Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam, compositæ autem ex hac recta dupla, & base, dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & dia- C
metro circuli, de qua quæritur.

Est enim ex constructione, vt eG ad GD, hoc est, vt Lf ad fI, ita ef ad C
RR, cuius dupla est fX composita autem ex Xf, & fe est Xe. eius quadratum superat quadratum Ce quadrato XC. quadratum autem Ce, vel
47 primj eT* æquale est quadrato ef, vna cum quadrato fI, hoc est vna cum rectangulo BDA quater, vel LIf quater. itaque quadratum xC erit excessus, quo quadratum xe superat quadratum ef, & quadruplum rectangulum LIf; à recta autem xe dempta est xS æqualis xC, reliqua vero Se facta est differentia segmentorum eO, Of, quam quidem seu ipsi æqualem fM ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima D
est Lf differentia excessuum ke, If secunda vero basis fe, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus. & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est, nam vt Lf ad fe, ita est fM ad D
fN compositam ex excessibus fI, PN, & diametro IP.

In numeris sit data basis trianguli 21. excessus vero maior 8. excessus autem minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum ad 1 excessum minorem, ita 21, hoc est basis, ad aliam rectam. ea erit 3. eius dupla 6 composita autem ex 6, & 21 est 27. ab hac auferatur 16 recta videlicet, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 27 superat qua-



A quadratum ex 21, & quadruplum eius, quod fit ex 8 & 1, hoc est ex excessibus remanebunt 11. pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum




FE 21
RF 3
XE 27
XS 16
ES 11
HF 13
HE 20
EE 33
ED 8
DA 1

B primus est 7 differentia excessuum, secundus vero 21 basis, quartus erit 33, hoc est composita ex excessibus, & diametro quæsita. & ablatis excessibus 8 & 1, remanebit diameter 24.

Et hic quoque exponam rationem inueniendi diametrum terræ faciliorem nimirum per numeros minores progredientem.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam. compositæ autem ex hac recta dupla, & base, demptur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & composita ex eadem inuenta, & base superat quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua verò ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis; quarC ta erit composita ex excessibus, & diametro de qua quæritur.

Hæc ratio inueniendi diametrum terræ non est dissimilis ab ea, quæ supra exposita est ratione. nam recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum FRE sub recta inuenta FR, & RE composita ex ipsa FR, & base FE superat quadruplum rectangulum EDA sub excessibus, vel LIF: eadem est, quæ recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum XE superat quadratum FE, & quadruplum rectangulum LIF. Quadruplum enim rectangulum FRE superat quadruplum rectangulum LIF eodem excessu, nempe quadrato XC, quo etiam quadratum XE superat quadratum EF, & quadruplum rectangulum LIF. vt mox demonstrabimus.

D Quoniam enim quadratum XE superat quadratum CE, vel ET, seu quadrata EF, FT, quadrato XC; quadratum autem FT æquale est quadruplo rectangulo EDA, vel LIF. ergo ipsum quadratum XE superabit quadratum EF, & quadruplum rectangulum LIF, quadrato XC.

Et quoniam quadruplum rectangulum FRE vna cum quadrato FE* æqua- 8 secundi
le est quadrato compositæ ex fR, RE, hoc est quadrato xE, quod quidem quadratum superat quadratum fE, & quadruplum rectangulum LIf qua-

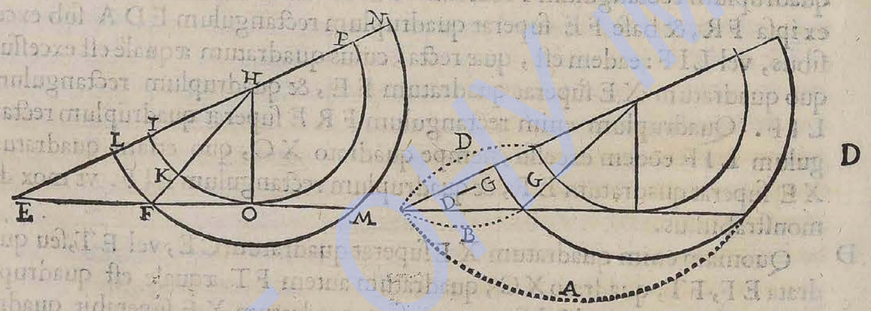
drato X C ; vt demonstrauimus . ergo & quadruplum rectangulum F R E A
vna cum quadrato f E superabit quadratum f E , & quadruplum rectãgulum L I f eodem quadrato X C. & ablato vtrinque quadrato f E, reliquum, hoc est quadruplum rectangulum F R E, itidem superabit quadruplum rectangulum L I f, quadrato X C. sed & quadratum x E superat quadratum f E, & quadruplum rectangulum L I f quadrato x C, vt est demonstratum . ergo quadruplum rectangulum f R E superat quadruplum rectangulum L I f eodem excessu, quo quadratum X E superat quadratum E f, & quadruplum rectangulum L I f . quod erat ostendendum .

Sit data basis trianguli 21. excessus maior 8 , excessus minor 1 . Fiat vt 7 differentia excessuum ad 1 excessum minorem, ita 21 basis , ad aliam rectam , ea erit 3 eius dupla 6. composita autem ex 6 & 21 est 27. ab hac auferatur 16 , nempe recta , cuius quadratum æquale est excessui , quo quadruplum rectangulum sub 3 & 24, hoc est sub recta inuenta , & composita ; ex eadem inuenta & base superat quadruplum rectangulum ex 8 & 1, hoc est ex excessibus. remanebunt 11 pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum primus est 7 differentia excessuum , secundus vero 21, idem basis, quarta erit 33 composita ex excessibus , & diametro , de qua quæritur , atque adeo ablatis excessibus 8. & 1 remanebit ipsa diameter 24. B

## Resolutio secundi casus .

SEd cadat perpendicularis trianguli extra triangulum , & sit data basis B ; excessus vero , quo crus maius superat altitudinem D, excessus autem , quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum . C

Factum iam sit , & sit illud triangulum H E f , in cuius basim productam cadat perpendicularis H O ; & centro H interuallo H O describatur circulus I O P secans crura H E , H f in puuctis I K. productum vero crus maius




D

E H in P, erunt igitur I E , k F excessus , quibus crura H E , H f superant perpendicularem H O . quoniam igitur dantur basis E f ; excessus maior I E, & excessus minor k f. sit basis B , excessus vero maior D , excessus autem



A Item minor G, vt in figura ad resolutionem pertinente designatum est .

Rursus centro H interuallo autem H f, alius circulus describatur secans productam basim E F in M; crus vero E H in L, ipsumque productum in N. differentia igitur rectarum E O, O M, erit basis E F. sunt enim * æquales f O, O M ; differentia autem crurum H E, H f erit E L; ea ipsa quæ est excessuum I E, K f. eaq. in figura Resolutionis erit D -- G. Quæratur E M composita ex base, & dupla continuatione basis, vsque ad perpendicularem, hoc est composita ex E f, & dupla f O; esto illa A, ergo A ✣ B * erit duplum segmentum E O. vnde simplum segmentum E O erit A $\frac{1}{2}$ ✣ B $\frac{1}{2}$ . * 3 tertij * co. 1 prob. 1 lib. primi

Et quoniam rectangulum L E N * æquale est rectangulo F E M. erit vt L e ad E f. ita E M ad E N , hoc est in figura ad resolutionem pertinente, erit vt * 5 tertij
B D — G ad B , ita A ad $\frac{\text{bin a}}{\text{d-g}}$ . itaque $\frac{\text{bin a}}{\text{d-g}}$ erit ipsa EN, ex qua si abscindatur P N hoc est G ; reliqua P E erit $\frac{\text{bin a}}{\text{d-g}}$ — G .

Et quoniam rectangulum I E P * æquale est quadrato E O , hoc est rectangulum sub D , & $\frac{\text{bin a}}{\text{d-g}}$ — G æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ ✣ B $\frac{1}{2}$ . * ibid.

$\frac{\text{d in b in a}}{\text{d-g}}$ — D in G æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ ✣ B Q $\frac{1}{4}$ ✣ B in A $\frac{1}{2}$ .

Quadruplicentur omnia , vt Potestas æquationis integra fiat , ergo

$\frac{\text{d in b in a 4}}{\text{d-g}}$ — D in G 4 æquabitur A Q ✣ B Q ✣ B in A 2 .

Auferantur vtrinque B in A 2 , & A Q : addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis distinguantur , ergo

$\frac{\text{d in b in a 4}}{\text{d-g}}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q ✣ D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{\text{d in b}}{\text{d-g}}$ in integrã
C magnitudinẽ; ea esto F. si enim fiat vt D — G ad D, ita B ad aliã, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{\text{d in b}}{\text{d-g}}$ . atq; adeo planum F in A 4 idem erit , quod planũ $\frac{\text{d in b in a 4}}{\text{d-g}}$ . transmutata igitur fractione in magnitudinem integram .

F in A 4 — B in A 2 -- A Q , æquabitur B Q † D in G 4 .

Seu quod idem est F 4 -- B 2 in A -- A Q æquabitur B Q † D in G 4 .

Et explicata Æquatione .

F 2 - B ✣ L. V. ( F 2 - B Q - B Q - D in G 4 ) æquabitur A.

Vel F 2 - B - L. V. ( F 2 B Q - B Q - D in G 4 ) æquabitur A.

## Porisma .

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem , ita basis ad aliam
D rectam ; differentiæ autem , qua dupla ea recta superat basim addita recta, cuius quadratum æquale est excessui , quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis , & quadruplum rectangulum sub excesibus, fiet terminus maior .

Vel si eidem compositæ addatur eadem recta, fiet terminus minor .

In hac quoque Æquatione A explicabilis est de duobus terminis , sed maior tantum indicat quæsitam E M .

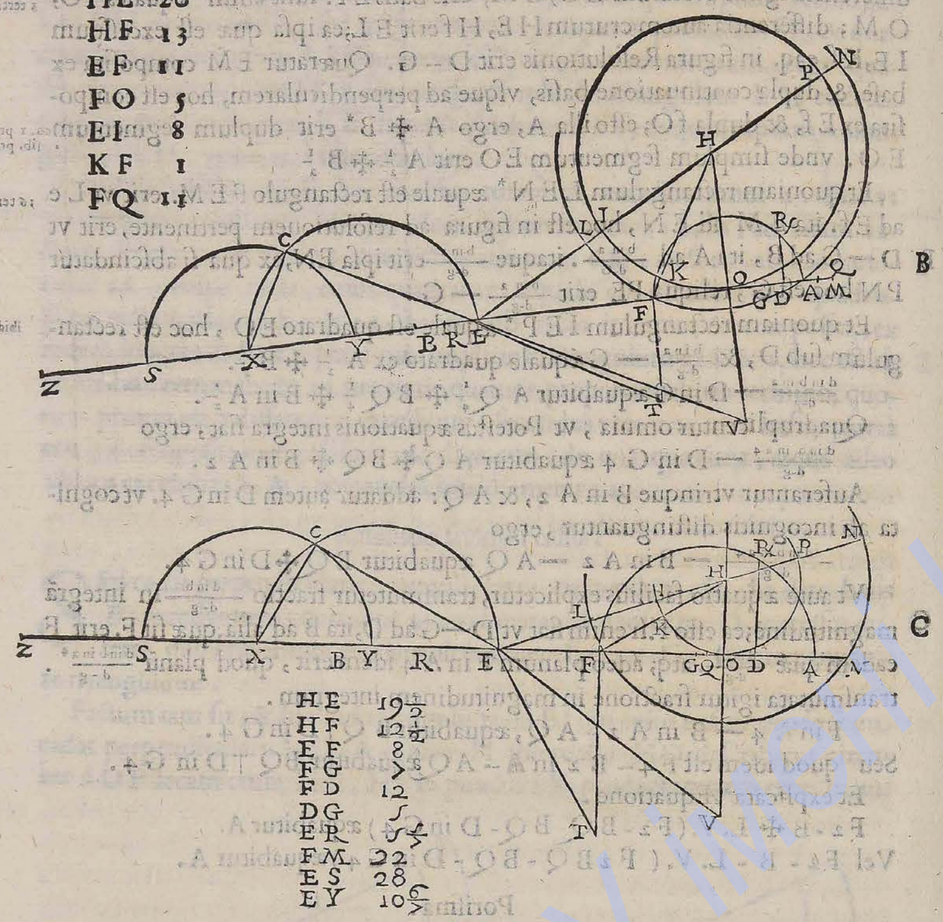
hic deest aliquid .

Com-

## Compositio secundi Casus.

Sit data trianguli basis E F. excessus vero, quo crus maius superat altitudi-

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11




HE 19½
HF 12½
EF 8
FG 3
FD 12
DG 5
ER 5½
FM 22
ES 28
EY 10⅔

nem trianguli F D: excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat D G, quorum excessuum differentia F G sit minor base E F. Oportet inuenire triangulum. Producatur F D, in A, vt sit D A æqualis D G, & in ipsa F A describatur semicirculus quem ducta ex D perpendicularis D R secet in R. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D R; & connectatur E T; quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D R vel rectanguli F D A. Deinde fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam, quæ sit F R. eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrabimus minorem esse diametro E X, & connectatur X C, & centro X inter-



A terualllo X C describatur circulus secans diametrum E X in Y; productam vero in S. termini igitur de quibus in Æquatione explicabilis est A sunt E S maior, E Y minor.

Deest aliquid non ad demonstrationem Problematis, sed ad Resolutionem; quia vnus ex terminis Resolutionis assignatis in Porisme debet assumi, non alius. vel cur vnus debeat assumi, & non alius.

Producatur autem E F in M, vt sit E M æqualis E S, & secetur F M bifariam, & ad rectos angulos à recta H O V, & fiat O V æqualis F D, quam ostendam minorem esse recta E O. ergo angulus O V E maior erit angulo O E V. fiat igitur angulo O V E æqualis angulus V E H, & recta E H secet rectam O H in H, & connectatur F H; triangulum igitur constructum est
B H e f, cuius basis est data e F; crus vero H e superat perpendicularem H O excessu O V, æquali ipsi F D datæ; sunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatē angulorū H e V, H V e. supereſt igitur vt crus H F excedat perpendicularem H O excessu æquali datæ D G. id autem repetitis resolutionis vestigijs ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O k, I P secans crura H F, H e in punctis k I, & producatur e H vltra circumferentiam circuli K I P secans eam in P, & fiat P N æqualis G D, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G F. sumatur quoque F Q æqualis F e, & x Z æqualis x e. erit igitur Z Q dupla ipsius x f, & consequenter quadrupla ipsius f R cum sit f x dupla ipsius f R, ex constructione.

C Et quoniam rectus est angulus x C e in semicirculo, recta C e tangit circulum y C S; quare rectangulum y e S* æquale erit quadrato C e, vel e T seu quadratis e F, f T. sed rectangulum y e S; vel Z S e æquale est rectangulo y e S, Z S e, æquale est rectangulo Z e S minus quadrato e S; ipsum autem rectangulum Z e S, æquale est rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S. hoc est æquale est rectangulo f R, e S quater minus rectangulo f e S bis, ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo f D A quater. addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S. anferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater; æquale erit quadratis e f,
D e S, & rectangulo f e S bis. hoc est* æquale erit quadrato f S, vel quadrato e O quater; recta enim f S dupla est rectæ e O, cum sit ipsa f S æqualis compositæ ex M e, & f. sunt enim æquales e S, e M, ex constructione. Cum igitur quadruplum æquale sit quadruplo, erit & simplum æquale simplo hoc est rectangulum f R, e S, vel f R, e M, minus rectangulo f D A, æquale erit quadrato e O, sed quadrato e O æquale est rectangulum I e P, hoc est rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L, ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L, æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L, addito communi rectangulo e I L, rectangulum f R, e M, æquale

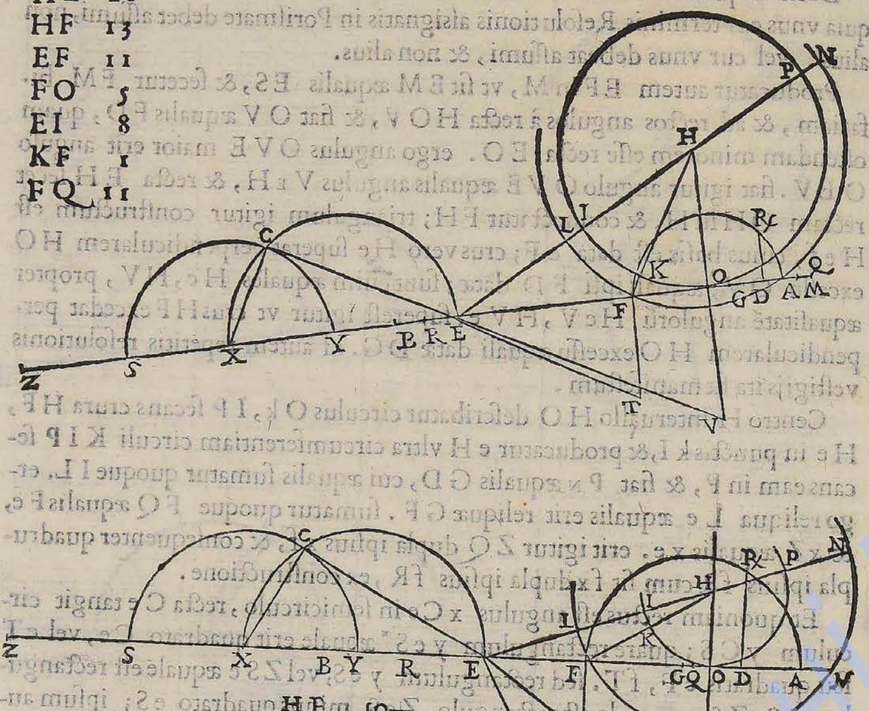
* 36 tertii

* 4 secundi

erit

16 sexti erit rectangulo I e N. vt *igitur e M ad e N, ita erit e L ad f R. sed cum sit A
vt F G ad F D: hoc est vt E L ad E I, ita F E ad F R; est quoque permutando, vt E L ad E F, ita E I ad F R; ergo vt E M ad E N, ita erit E L ad e F

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11




HE 19½
HF 12½
EF 8
FG 5½
FD 12
DG 5½
ER 11½
FM 22
ES 28
EY 10½

quare rectangulum F E N sub extremis æquale erit rectangulo L e N sub B
medijs. puncta igitur L F, M N in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum est in recta H V, secante rectam F M bifariam, & ad rectos angulos in O atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos; ergo ex præmisso Lemmate punctum H erit centrum circuli L F, M N, atque adeo idem, quod centrum circuli I O P. vnde æquales erunt H F, N L. sunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua k F, ideſt excessus, quo crus H F superat H O altitudinem trianguli; reliquæ I L, hoc est D G datæ, æquales erit. Ad datam igitur basim E F con-

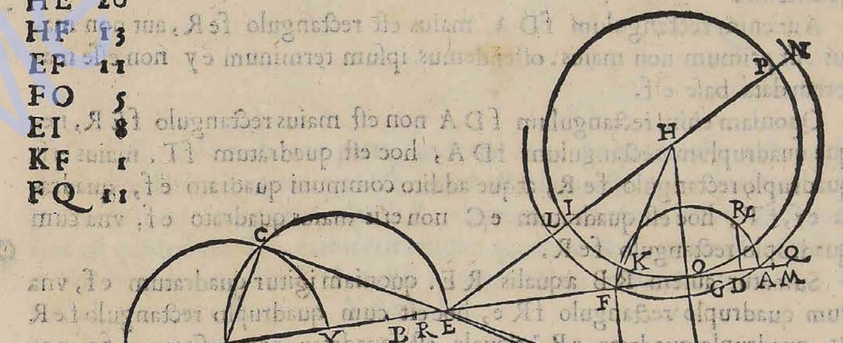


A constitutum est triangulum H E F, cuius crura H E, H F superant altitudinem H O excessibus æqualibus datis f D, D G. quod facere oportebat.

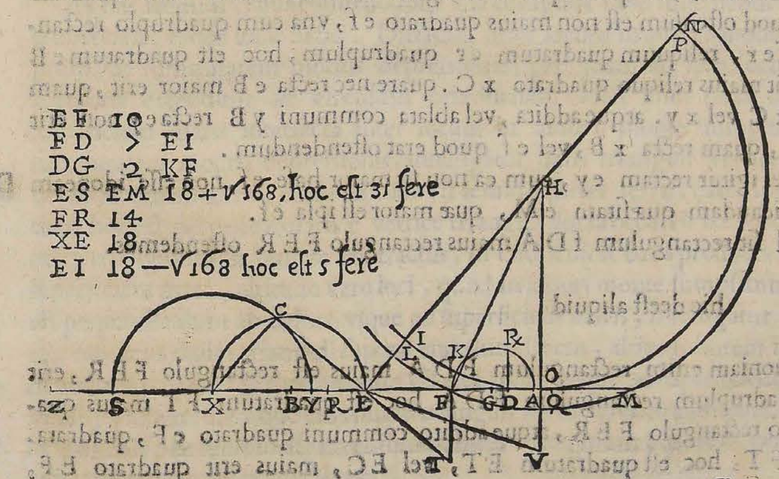
At vero rectam E T minorem esse diametro E x. sic demonstrabimus.

Quoniá enim est vt f G ad f D, ita f E ad f R, ex constructione, erit per diuisionem rationis vt f G ad G D, ita fe ad E R: sed f G minor est quam f E, ex dererminatione ergo & G D minor erit, quam E R. atque adeo tota f D minor quam tota f R. quare & rectangulũ f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R E, & consequenter rectangulum F D A quater minus erit rectangulo F R E quater, atque addito communi quadrato E F, quadratum E F, vna cum rectaugulo F D A quater, hoc est cum quadrato F T, seu quod idem est quadratum e T minus erit quadrato F E, vna cum rectangulo F R E quater, hoc est minus, erit quadrato compositæ ex f R, R E, hoc est quadrato x e; 8 secundi
B sunt enim æquales F R, R x ex constructione; quare & recta E T minor erit, quam recta x E, quod erat ostendendum.

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11




EE 10
FD > EI
DG 2 KF
ES EM 18+√168, hoc est 31 fere
FR 14
XE 18
EI 18—√168 hoc est 5 fere




Æque

Æque rectam fD minorem esse recta E O, hoc modo ostendemus. A

Quoniam enim rectangulum fD A quater, æquale est quadrato F T, vt demonstrauimus, quadratum autem fG minus est quadrato E f, cum recta fG minor sit, quam recta e f ex determinatione. ergo rectangulum fD A quater, vnà cum quadrato fG, hoc est quadratum fA minus erit quadratis fT, fe, hoc est quadrato eT. quare & recta fA minor erit quam recta eT, vel eC. & consequenter multo minor, quam Ex. atque multo minor quã e S, vel e M. sed & fG minor est quam e f ex determinatione. ergo composita ex A f, fG minor erit, quam composita ex M e, e f sed composita ex A f, fG dupla * est ipsius fD; composita vero ex M e, e f dupla ipsius e O. ergo dupla fD minor erit, quam dupla eO. & simpla fD, minor quam simpla eO. quod erat ostendendum. B

9 secundi

Coro. 1. prob. 1. lib. 1

Nunc ostendemus e y terminum minorem è duobus e y, e S, de quibus in Æquatione est explicabilis, non esse idoneum ad indicandam eM quæsitam.

Aut enim rectangulum fD A maius est rectangulo fe R, aut non maius. sit primum non maius. ostendemus ipsum terminum e y non esse maiorem data basi e f.

Quoniam enim rectangulum fD A non est maius rectangulo fE R, neque quadruplum rectangulum fD A, hoc est quadratum fT. maius erit quadruplo rectangulo fe R, atque addito communi quadrato e f, quadrata ef, fT, hoc est quadratum eC non erit maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo fe R. C

Sumatur autem RB æqualis RE. quoniam igitur quadratum e f, vna cum quadruplo rectangulo fR e, hoc est cum quadruplo rectangulo fe R & quadruplo quadrato eR * æquale est quadrato compositæ ex fr, re. hoc est quadrato fB, vel xe, seu quadratis xC, Ce. ablato ab vna parte quadrato ef, & quadruplo rectangulo feR: ab altera vero quadrato Ce, quod ostensum est non maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo fer, reliquum quadratum er quadruplum, hoc est quadratum eB non erit maius reliquo quadrato xC. quare nec recta eB maior erit, quam recta xC vel xy. atque addita, vel ablata communi yB recta e y non erit maior, quam recta xB, vel e f quod erat ostendendum.

9 secundi

Patet igitur rectam e y, cum ea non sit maior basi e f, non esse idoneam ad indicandam quæsitam eM, quæ maior est ipsa e f. D

Sed sit rectangulum fD A maius rectangulo FE R ostendemus.

hic deest aliquid

Quoniam enim rectangulum FD A maius est rectangulo FE R, erit & quadruplum rectangulum FD A hoc est quadratum FT maius quadruplo rectangulo FE R, atque addito communi quadrato eF, quadrata FF, FT, hoc est quadratum ET, vel EC, maius erit quadrato EF,

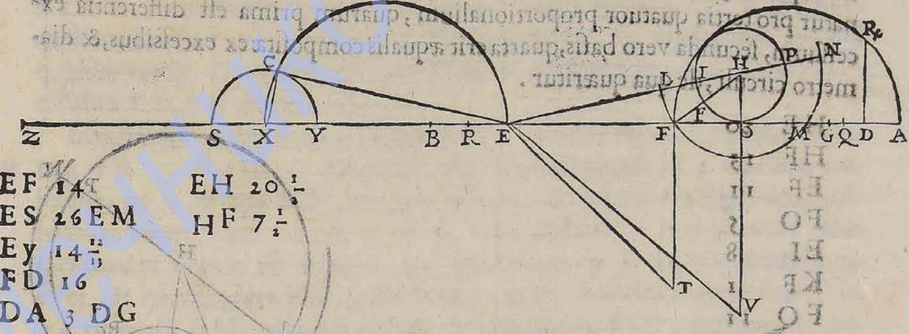
vna



A vna cum quadruplo rectangulo FE R.

Et quoniam quadratum EF vna cum quadruplo rectangulo FE R, hoc est cum quadruplo rectangulo FE R, & quadruplo quadrato ER, æquale est quadrato compositæ ex fR, RE, hoc est quadrato XE, seu quadratis

8 secundi




EF 14 EH 20 1/2
ES 26 EM HF 7 1/2
Ey 14 11/13
FD 16
DA 3 DG

XC, CE, ablato ab vna parte quadrato Ef, & quadruplo rectangulo fE R, ab altera vero quadrato CE, quod ostensum est maius quadrato Ef, vna cum quadruplo rectangulo fE R, reliquum quadratum E R quadruplum hoc est quadratum EB, maius erit reliquo quadrato XC. quare & recta EB maior erit, quam recta XC, vel Xy. atque ablata vel addita communi yB recta Ey maior erit, quam XB vel Ef. B

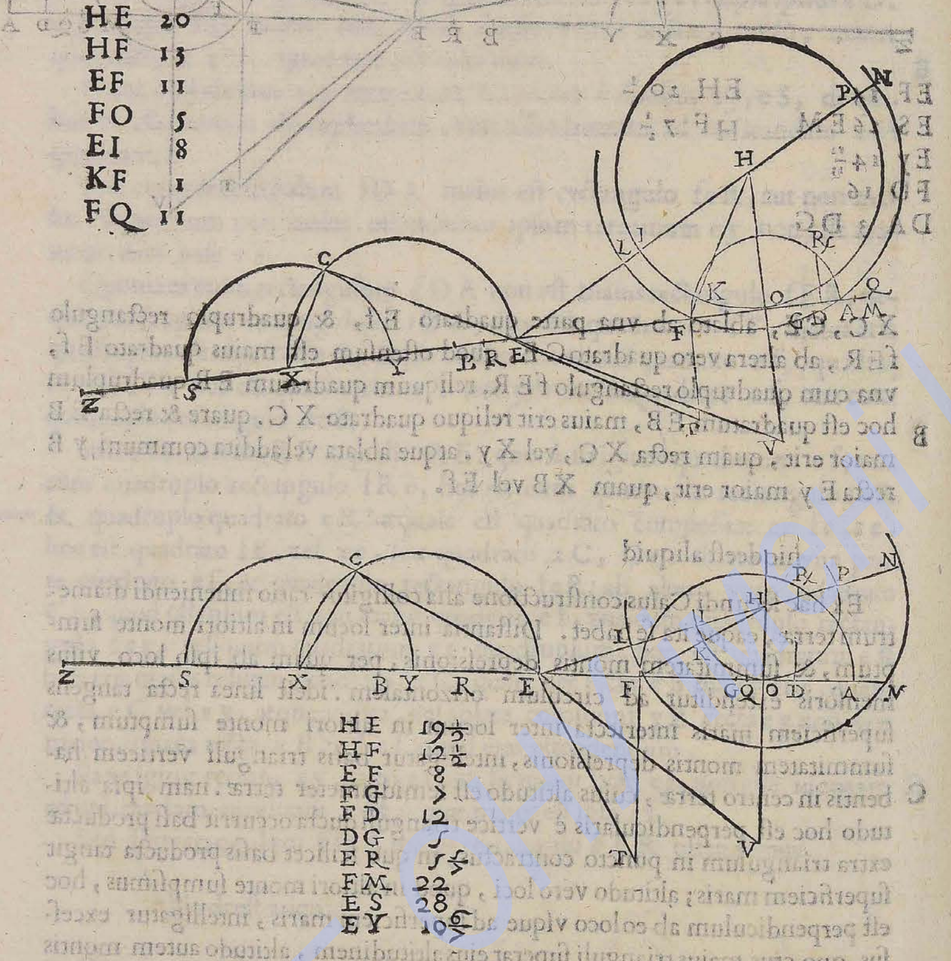
hic deest aliquid

Ex hac secundi Casus constructione alia colligitur ratio inueniendi diametrum terræ, eaque ita se habet. Distantia inter locum in altiori monte sumptum, & summitatem montis depressionis, per quam ab ipso loco visus mensoris extenditur ad circulum orizontalem. idest linea recta tangens superficiem maris interiecta inter locum in altiori monte sumptum, & summitatem montis depressionis, intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terræ, cuius altitudo est semidiameter terræ. nam ipsa altitudo hoc est perpendicularis è vertice trianguli ducta occurrit basi productæ extra triangulum in puncto contractus, in quo scilicet basis producta tangit superficiem maris; altitudo vero loci, quod in altiori monte sumpsimus, hoc est perpendiculum ab eo loco vsque ad superficiem maris, intelligatur excessus, quo crus maius trianguli superat eius altitudinem, altitudo autem montis depressionis nempe perpendiculum ab eius apice, vsque ad superficiem maris intelligatur excessus, quo crus minus trianguli superat eius altitudinem, & sic ex data basi, & huiusmodi excessibus dabitur triangulum; quare & eius altitudo, hoc est semidiameter terræ. C

Ratio igitur inueniendi diametrum terræ hæc erit. A

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentia autem qua dupla ea recta superat basim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excesibus; ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excesibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11




HE 19½
HF 12½
EF 8
FG 3
FD 12
DG 5
ER 5½
FM 22
ES 28
EY 10⅝

Est enim ex cõstructione vt F G ad F D; hoc est vt E L ad E I, ita F e ad f R, B
cuius dupla est f X: differentia autem qua ipsa x F superat basim E F est X E:
huius quadratum excedit quadratum C E quadrato X C: quadratum autẽ C E,
vel E T æquale est quadrato E F, E T; hoc est quadrato e F, & quadruplo rectan
gulo



A gulo F D G, vel E I L. itaque quadratum X C est excessus, quo quadratum X E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L; recta autem E S compositæ ex E X, & X S æquali X C, facta est æqualis E M compositæ ex E F, & dupla F O, hoc est ex basi, & dupla continuatione basis, vsque ad perpendicularem; quam quidem E M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est E L differentia excessuum E I, F k. secunda vero basis E F, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excesibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est. nam vt E L ad E F, ita est E M ad E N compositam ex excesibus E I, P N, & diametro I P.

In numeris sit data basis trianguli E F 4; excessus vero E I 3; excessus autem F K 1. Fiat vt 2 differentia videlicet excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 4 nempe basis, ad aliam rectam. ea erit 6, eius dupla 12, differentia autem inter 12, & 4 est 8. huic addatur 6. nempe recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 8 superat quadratum ex 4, & quadruplum eius, quod fit ex 3, & 1. hoc est ex excesibus, fiet 14. pro recta E M composita ex basi E F, & dupla F O continuatione basis, vsque ad perpendicularem O H. hæc composita ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2 nempe differentia excessuum 3, & 1, secunda vero 4, idest basis, quarta erit 28 composita ex excesibus, & diametro quæsita, à qua composita si auferantur excessus. nempe 3, & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur. B

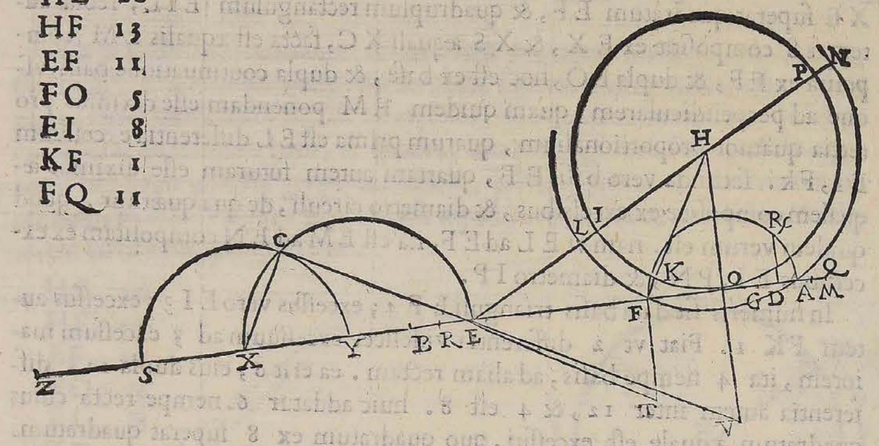
C Aliter eandem diametrum terræ inueniemus in hunc modum.

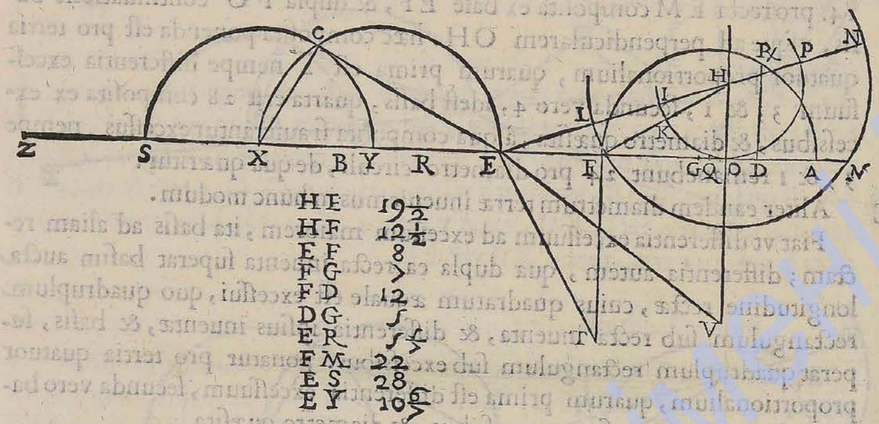
Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentia autem, qua dupla ea recta inuenta superat basim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & differentia ipsius inuentæ, & basis, superat quadruplum rectangulum sub excesibus, ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit composita ex excesibus, & diametro quæsita.

Neque hæc ratio conueniendi diametrum terræ dissimilis est ab ea, quæ supra exposita est ratione. Nam recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum f R E sub recta inuenta f R, & R E
D differentia ipsius f R, & basis E f, superat quadruplum rectangulum E I L sub excesibus, eadem est, quæ recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum X e superat quadratum basis e F, & quadruplum rectangulum e I L. Quadruplum enim rectangulum f R e superat quadruplum rectangulum e I L eodem excessu, nempe quadrato X C, quo etiam quadratum X e superat quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L, idque sic demonstrabitur.

Quoniam enim quadratum X e superat quadratum C e, vel e T, seu
E quadrata e f, f T quadrato X C, quadratum autem f T, æquale est quadruplo rectangulo f D G; vel e I L. ergo ipsum quadratum x e superabit

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11




HE 19½
HF 12½
EF 8
FG 7
FD 12
DG 5
ER 5
FM 22
ES 28
EY 10

bit quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L quadrato x C: A

Et quoniam quadruplum rectangulum F R E vna cum quadrato E F, æquale est quadrato compositæ ex F R, R E, hoc est quadrato x E, quod quidem quadratum, superat quadratum E F, & quadruplum rectangulũ E I L, quadrato x C vt demonstraui. ergo & quadruplum rectangulũ f R E, vna cũ quadrato E F superabit quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L eodem quadrato x C. auferatur commune quadratum E F. ergo quadruplũ rectangulum F R E itidem superabit quadruplum rectangulum E I L quadrato x C. sed & quadratum x E superat quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L quadrato x C, vt demonstratum est; ergo quadruplum rectangulum F R E superat quadruplum rectangulum E I L eodem excessu, quo quadratum x E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum e I L. quod erat ostendendum. B

Sit



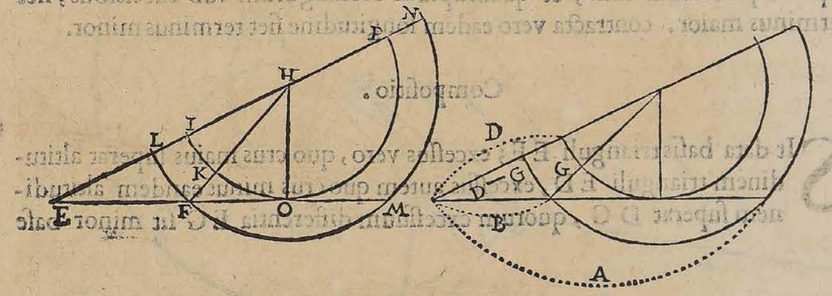
A Sit vt prius data trianguli basis 4, excessus vero maior 3. excessus autem minor 1 fiat vt 2 differentia excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 4 nempe basis ad aliam rectam. ea erit 6. eius dupla 12 differentia autem inter 12, & 4 est 8. huic addatur 6 nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 6, & 2, hoc est sub recta inuenta, & differentia eiusdem inuentæ, & basis superat quadruplum rectangulum sub 3 & 1, hoc est sub excesibus. & fiet 14 pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2, secunda vero 4, quarta erit 28 composita ex excesibus, & diametro quæsita, ablatis igitur excesibus 3 & 1, remanebit ipsa diameter 24.

Alia via eundem Casum Problematis & resoluam, & componam.

B

## Alia Resolutio secundi Casus.

SIt data basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione B. excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli D, excessus autem, quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulũ.




Factum iam sit, & resumantur antecedentis Resolutionis figuræ, & quæratur vt prius E M composita ex base E F, & dupla F O continuatione basis. esto illa A, ergo A -- B erit ipsa F M, & per consequens ipsa F O erit A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$.

D Et quoniam rectangulum L E N æquale est rectangulo F E M; erit vt L e ad E f, ita E M ad E N. hoc est in figura ad resolutionis, vt D — G ad B, ita A ad $\frac{b \text{ in } a}{d-G}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$ -- D.

Producatur autem F H vsque ad circumferentiam I O P in Z: erit F Z æqualis I N, atque adeo ipsa F z erit $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$ -- D.

Et quoniam rectangulum K F L * æquale est quadrato F O, hoc est rectangulum sub G, & $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$ — D æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$.

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a}{d-g}$ — G in D æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ -- B in A $\frac{1}{1}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{4 \text{ g in b in a } 4}{d-g}$ — G in D 4 æquabitur A Q + B Q — B in A 2.

C

Addatur vtrique parti G in D 4. & B in A 2; auferatur autem A Q: vt cognita ab incognitis separentur, ergo A

$\frac{g\text{ in }b\text{ in }a\,4}{d-g}$ ✣ B in A 2 — A Q æquabitur B Q ✣ G in D 4.

Et vt æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{g\text{ in }b}{d-g}$ in integrâ magnitudine; ea esto F. nam si fiat vt D — G ad G, ita B ad aliâ, quæ sit F: erit F eadem quæ $\frac{g\text{ in }b}{d\text{ in }g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{g\text{ in }b\text{ in }a\,4}{d-g}$, transmutata igitur fractione in magnitudinem integram:

F in A 4 ✣ B in A 2 -- A Q, æquabitur B Q † G in D 4.

Seu quod idem est F 4 † B 2 in A -- A Q æquabitur B Q † G in D 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 † B ✣ L. V. ( F 2 † B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A.

Vel F 2 † B - L. V. ( F 2 ✣ B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A. B

In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed maior.

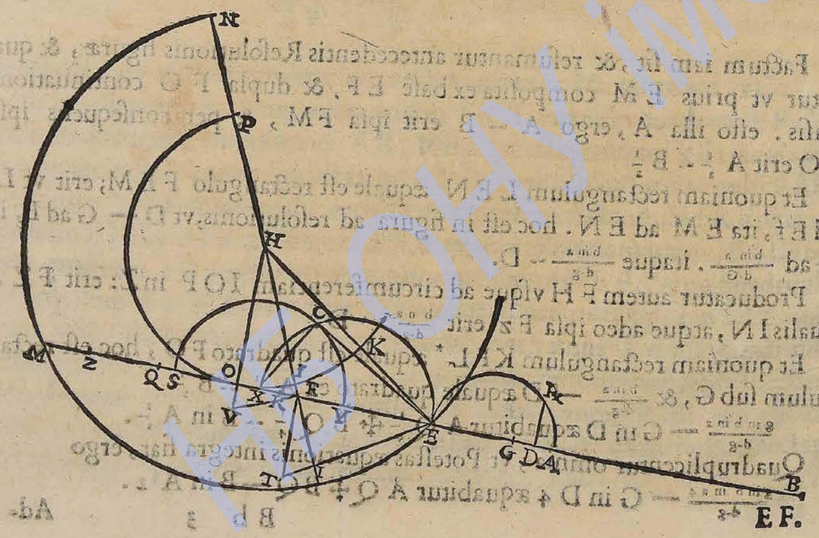
## Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam; composita autem ex dupla ea recta, & base, aucta longitudine rectæ cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excesibus, fiet terminus maior. contracta vero eadem longitudine fiet terminus minor.

## Compositio.

C

SIt data basis trianguli E F; excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli E D, excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat D G, quorum excessuum differentia E G sit minor base

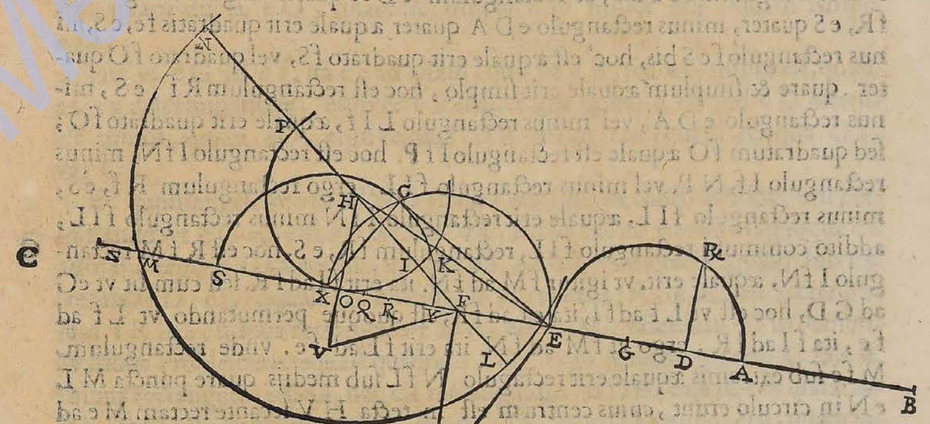



E F.



A E F. Oportet inuenire triangulum. Producatur E D in A, vt sit D A æqualis D G, & in ipsa E A describatur semicirculus, quem ducta ex D perpendicularis D ϰ secet in ϰ. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D ϰ, & connectatur E T, quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D ϰ, vel rectanguli E D A. Deinde fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ sit F R, eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrabimus minorem esse diametro E X, & connectatur X C. & centro X interuallo X C, describatur circulus secans diametrum E X in y; productam vero in S. Termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt E S maior, E y minor.

B Secetur S F bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V, & fiat O V æqualis D G, quam demonstrabimus mi-




norem esse recta O F, & connectatur V F, angulus igitur O V F maior erit angulo O F V, fiat angulo O V F æqualis angulus V F H occurrens recta F H rectæ O H in H, & connectatur E H. Triangulum igitur constructum est H E F, cuius basis est data E F; crus vero H F excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi D G datæ; sunt enim æquales H F, H V propter æqualitatem triangulorum H F V, H V f. supereſt igitur, vt crus H E excedat altitudinem H O excessu æquali datæ ε D. id autem ita fit manifestum.

D Centro H interuallo H O describatur circulus O I, k P, secans crura H F, H E in punctis I K, & producatur F k secans circumferentiam in P, vt sit P N æqualis E D, cui æqualis sumatur quoque I L; ergo cum sit I L æqualis E D, & I f æqualis D G, erit & reliqua f L æqualis reliquæ E G.

EG. Producatur quoque ES in Z, vt sit XZ æqualis XE, & sumatur FQ æqualis FE. atque FM æqualis SE. Quoniam igitur XE superat FE excessu XF, dupla XE, hoc est ZE superabit duplam FE, quæ est QE duplo excessu XF; sed ZE superat QE excessu ZQ, ergo ZQ dupla erit ipsius xF, & consequenter quadrupla rectæ RF. A

Et quoniam rectus est angulus XCE in semicirculo, recta CE tangit circulum YCS. quare rectangulum YES, æquale erit quadrato CE, vel ET, seu quadratis EF, FT. sed rectangulum YES, vel ZSE æquale est rectangulo ZES, minus quadrato eS; rectangulum autem ZeS, æquale est rectangulis ZQ, eS, & QeS, hoc est rectangulo RF, eS quater, & rectangulo feS bis: ZQ enim ostensa est quadrupla ipsius Rf; Qe autem dupla est ipsius fe, ex constructione. ergo rectangulum fR, eS quater, plus rectangulo feS bis, minus quadrato eS, æquale erit quadrato fe, plus quadrato fT, hoc est plus rectangulo eDA quater; addatur vtrobique quadratum eS, auferatur autem rectangulum feS bis, & rectangulum eDA quater. ergo rectangulum fR, eS quater, minus rectangulo eDA quater, æquale erit quadratis fe, eS, minus rectangulo feS bis, hoc* est æquale erit quadrato fS, vel quadrato fO quater. quare & simplum æquale erit simplo, hoc est rectangulum Rf, eS, minus rectangulo eDA, vel minus rectangulo LIf, æquale erit quadrato fO; sed quadratum fO æquale est rectangulo IfP. hoc est rectangulo IfN, minus rectangulo If, NP, vel minus rectangulo fIL. ergo rectangulum Rf, eS, minus rectangulo fIL, æquale erit rectangulo IfN minus rectangulo fIL, addito communi rectangulo fIL, rectangulum fR, eS, hoc est RfM rectangulo IfN, æquale erit. vt igitur fM ad fN. ita erit fI ad fR. sed cum sit vt eG ad GD, hoc est vt Lf ad fI, ita ef ad fR; est quoque permutando vt Lf ad fe, ita fI ad fR. ergo vt fM ad fN. ita erit fL ad fe. vnde rectangulum Mfe sub extremis æquale erit rectangulo NfL sub medijs. quare puncta ML eN in circulo erunt, cuius centrum est in recta HV secante rectam Me ad rectos angulos in O, atque bifariam. nam cum sint æquales Mf, Se ablatis æqualibus Of, OS, fiunt æquales & reliquæ MO, Oe. sed ipsa VH secat quoque rectam NL bifariam in H, cum sint æquales NP, IL, ex constructione, & æquales PH, HI, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate huic Problemati præmisso punctum H erit centrum circuli ML, eN, idemque quod centrum circuli OI, KP, atque adeo æquales erunt He, HL; sunt autem æquales & Hk, HI. ergo & reliqua Ke reliquæ IL, hoc est eD æqualis erit, quod erat ostendendum. Ad datam igitur basim ef constitutum est triangulum Hef, cuius crura He Hf superant altitudinem HO excessibus Ke, If æqualibus datis eD, DG. quod erat faciendum. B C D

At vero rectam eI minorem esse diametro X, ita ostendemus.

Quoniam enim est, vt eG ad GD, ita ef ad fR, ex constructione, & eG minor, quàm ef ex determinatione erit, & GD minor, quàm fR. atq; tota eD minor quam tota eR. vnde & rectangulum eDG, vel eDA minus erit re-



A rectangulo ERf, & consequenter quadruplum rectangulum EDA, hoc est quadratum fT, minus erit quadruplo rectangulo ERf. atque addito vtrique parti quadrato fE, quadrata fT, fE, hoc* est quadratum ET, minus erit quadruplo rectangulo ERf, vnà cum quadrato Ef, hoc* est, minus erit quadrato compositæ ex eR, Rf, ideſt quadrato EX. quare & recta ET minor erit, quam recta EX, quod erat ostendendum. * 47 primi, * 8 secundi

Item rectam DG minorem esse, quam Of. sic demonstrabitur.

Quoniam enim rectangulum EDA quater, æquale est quadrato fT; quadratum autem EG, minus est quadrato ef, cum recta eG minor sit, quam recta ef, ex determinatione. ergo rectangulum eDA quater, vnà cum quadrato eG, hoc* est quadratum eA minus erit quadratis fT, fe. hoc est quadrato eT. quare & recta eA minor erit, quàm recta eT, vel eC, & consequenter multo minor, quàm eX. atque multo minor quam eS. sed & eG minor erit quam ef ex determinatione, ergo composita ex eA, eG, * hoc est dupla eD, minor erit, quàm composita ex eS, ef, hoc est, quàm dupla eO, quare & simpla eD minor erit, quam simpla eO. B * ibid. * Corol. 1. probl. 1. lib. 1.

Fiat vt eG ad ef, ita eS ad aliam, quæ sit eB, sed eG minor est, quàm ef ex determinatione. ergo & eS minor erit quam eB, sed eD ostensa est minor, quàm eO, ergo reliqua DB maior erit, quam reliqua OS, vel Of.

Et quoniam est vt eG ad GD, ita ef ad fR, ex constructione, erit permutando vt eG ad ef, ita GD ad fR, sed vt eG ad ef, ita est quoque eS ad eB. ergo vt GD ad fR, ita erit eS ad eB, vnde rectangulum sub extremis GD, eB æquale erit rectangulo sub medijs fR, eS, sed rectangulum fR, eS, minus rectangulo eDA, vel eDG ostensum est in demonstratione Problematis æquale quadrato fO. ergo & rectangulum GD, eB, minus rectangulo eDG, hoc est rectangulum GDB, æquale erit quadrato fO. sed DB ostensa est maior, quam fO. ergo GD minor erit, quam ipsa fO, quod erat ostendendum. C

Finis Libri Quarti.

# MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

## LIBER QVINTVS.

HIC liber in quatuor capita diuiditur, quorum primo continentur Problemata, quæ constructione operaria non egent, sed solum postulant, vt quæsitum numero explicetur. Secundo vero continentur Problemata impossibilia, ex quorum Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas. Tertio autem continentur Problemata vana, seu nugatoria, quorum Resolutiones indicant talia esse Problemata. Quarto denique continentur Problemata, quæ sub Algebram non cadunt, eaque resoluuntur, & componuntur Methodo, qua antiqui vtebantur. A

### De Problematibus quæ constructione operaria non egent, sed solum postulant vt quæsitum numero explicetur. B

### Caput primum.

PRoblemata quæ constructione operaria non egent, sed postulant quæsitum numero exhiberi, resoluuntur eadem ratione, qua Problemata constructionem operariam requirentia; verum Porismata ex eorum Resolutionibus deducta in formam Theorematis proponuntur, eorumque demonstratio procedit per vestigia Resolutionis, directo tamen ordine, vt in fine libri primi monuimus, quæ quidem Theoremata suggerunt rationem construendi ipsa Problemata, hoc est explicandi numero id quod quæritur.

Pro-



A

### Problema primum.

### Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ coronæ permixtam inuenerit.

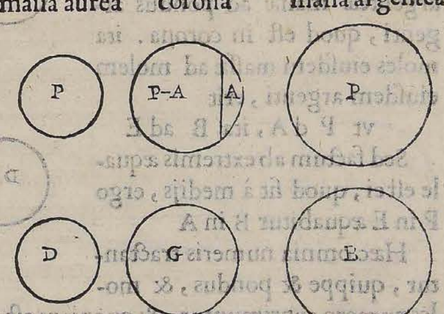
REfert Vitruuius lib. 9. cap. 3 his verbis. Archimedem duas fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vna ex auro alteram ex argento. cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam, cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit. ita exempta massa quanto minus factum fuerat refudit sextario mensus, vt eodem modo quo prius fuerat ad labra æquaretur. ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset. tum auream massam similiter pleno vase demisit, & ea exempta, eadem ratione mensura addita inuenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tanto minus, quanto minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quam argenti. Postea vero repleto vase in eadem aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quam in auream eodem pondere massam & ita ex eo quod plus defluxerat aquæ in corona quam in massa ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptionis. B

Sed qua ratiocinatione Archimedes id furtum deprehenderit Resolutio docebit.

C

### Resolutio.

COronæ, quæ constat ex auro, & argento sit pondus P, pondus autem argenti quod est in ea esto A. ergo P - A erit pondus auri.




D

Deinde sumantur duæ massæ eiusdem ponderis cum corona, vna ex auro altera ex argento, & demittatur in aliquod vas aqua plenum aurea massa. ea eijciet è vase tantum aquæ, quanta est eius moles, sit igitur mensura aquæ eiectæ, seu moles aureæ massæ D, similiter demittatur, & massa argentea eijciens tantum aquæ, quãta est moles ipsius massæ, cuius quidem aquæ mensura seu moles massæ argentea sit B. atque eodem modo, demissa corona, effluet tantum aquæ quanta est moles ipsius coronæ, sit igitur mensura ipsius aquæ seu moles coronæ G. Quoniam igitur est vt P ad A, ita B ad $\frac{b \text{ in } a}{p}$, hoc est vt Pondus massæ argenteæ, ad pondus argenti, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ

sæ ad molem eiusdem argenti, corpora enim eiusdem generis eamdem ratio- A
nem habent in pondere quam in mole, vt demonstrauimus in nostro Archimede promoto, ergo $\frac{b\ in\ a}{p}$ erit moles argenti, quod est in corona, seu mensura aquæ mole æqualis ipsi argento.

Æque quoniam est vt P ad P — A, ita D ad $\frac{d\ in\ p - d\ in\ a}{p}$ hoc est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri, erit $\frac{d\ in\ p - d\ in\ a}{p}$ moles auri, quod est in corona, seu mensura aquæ, mole æqualis ipsi auro, sed moles argenti est $\frac{b\ in\ a}{p}$. ergo $\frac{d\ in\ p - d\ in\ a}{p}$ ✣ $\frac{b\ in\ a}{p}$ erit moles totius coronæ, sed moles coronæ est quoque G, ergo.

$\frac{d\ in\ p - d\ in\ A}{p}$ ✣ $\frac{b\ in\ a}{p}$ æquabitur G

Ducantur omnia in P. ergo

D in P — D in A ✣ B in A æquabitur G in P B

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis distinguantur ergo.

B in A -- D in A, æquabitur G in P -- D in P

Seu quod idem est B -- D in A æquabitur G -- D in P

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B -- D G -- D P A

Idem Problema aliter resoluam

## Resolutio secunda.

ISdem positis, mensura autem aquæ, mole æqualis argento quod est in corona esto E. ergo G -- E erit C




mensura aquæ mole æqualis auro; ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus argenteæ massæ ad pondus argenti, quod est in corona. ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem argenti, erit

vt P d A, ita B ad E

Sed factum ab extremis æquale est ei, quod fit à medijs, ergo

P in E æquabitur B in A

Hæc omnia numeris tractantur, quippe & pondus, & moles numero exprimuntur. & quoniam est vt pondus aureæ massæ ad pondus auri, quod est in corona ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri erit.

vt P ad P -- A, ita D ad G -- E

Quod autem fit ab extremis, æquale est ei quod fit à medijs ergo

G in P -- E in P æquabitur D in P -- D in A.

Sed ostensum est P in E æquari B in A. ergo per additionem æqualium æqualibus.





A G in P — D in P æquabitur D in P — D in A

Sed ostensum est P in E æquari B in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in A ✣ D in P -- D in A

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

G in P - D in P æquabitur B in A - D in A

Seu quod idem est G - D in P æquabitur B - D in A.

Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

B - D G - D P A

Ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur.

B

## Porisma.

Vt differentia inter mensuram aquæ defluxæ in massa argentea, & mensuram aquæ defluxæ in massa aurea, ad differentiam mensuræ aquæ defluxæ in corona & aquæ defluxæ in massa aurea, ita est pondus coronę ad pondus argenti. quod est in corona.

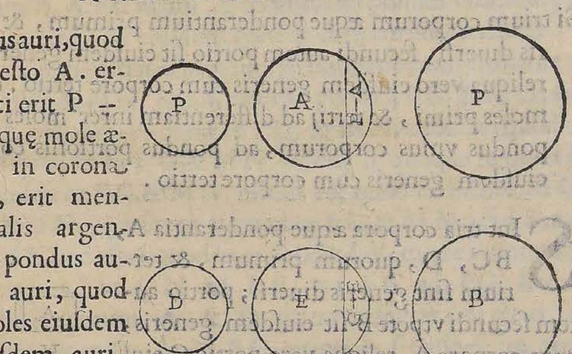
Vel sic. vt differentia inter moles massæ argenteæ, & massæ aureæ, ad differentiam inter moles coronæ, & massæ aureæ, ita est pondus coronæ, ad pondus argenti. quod est in corona.

Porisma hoc postea in formam Theorematis vniuersalius propositum demonstrabimus.

C

## Resolutio tertia.

SEd quæratur pondus auri, quod est in corona; id esto A. ergo pondus argenti erit P -- A. similiter mensura aquę mole æqualis auro, quod est in corona esto E. ergo G — E, erit mensura aquę mole æqualis argento. Et quoniam est vt pondus aureę massę ad pondus auri, quod D est in corona, ita moles eiusdem massę ad molem eiusdem auri, erit.




vt P ad A ita D ad E.

Et factum sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs, hoc est

P in E æquabitur D in A

Æquę quoniam est vt pondus massę argenteę ad pondus argenti, quod est in corona, ita moles eiusdem massę ad molem eiusdem argenti, erit

vt P ad P -- A, ita B ad G -- E

Et factum sub extremis æquabitur facto sub medijs, hoc est

Et factum sub extremis æquabitur facto sub medijs, hoc est A

G in P -- E in P æquabitur B in P -- in A

Sed ostensum est E in P æquari D in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in P ✣ D in A -- B in A.

Hic non potest auferri vtrimque B in P. nam cum B maior sit, quam G erit & B in P maius, quam G in P, ergo addatur vtrobique B in A & auferatur D in A. itaque

G in P † B in A -- D in A æquabitur B in P.

Auferatur quoque vtrinque G in P. ergo

B in A -- D in A æquabitur B in P -- G in P

Seu quod idem est B -- D in A æquabitur B -- G in P B

Et reuocata ad proportionem æqualitate erit

vt B -- D ad B -- G, ita P ad A

## Porisma.

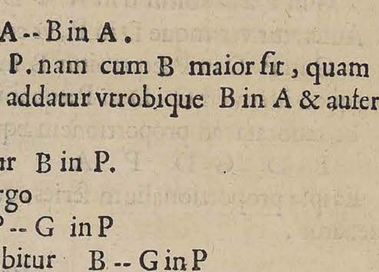
Vt differentia inter moles massæ argenteæ, & massæ aureæ ad differentiam inter moles massæ argenteæ, & coronæ, ita est pondus coronæ ad pondus auri, quod est in corona.

Ex hoc Porismate, & ex præcedenti proponam Theorema vniuersale quod est huiusmodi.

## Theorema. C

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerint generis diuersi, secundi autem portio sit eiusdem generis cum corpore primo, reliqua vero eiusdem generis cum corpore tertio. erit vt differentia inter moles primi, & tertij ad differentiam inrer moles primi, & secundi, ita pondus vnius corporum, ad pondus portionis corporis secundi, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio.

SInt tria corpora æque ponderantia A, BC, D, quorum primum, & tertium sint generis diuersi; portio autem secundi vtpote B sit eiusdem generis, cum corpore A, reliqua vero portio C eiusdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter moles corporum A, & D, ad differentiam inter moles corporum A, & BC, ita esse pondus vnius corporum ad pondus portionis C.



D

Sit enim portionis B pondus EF; portionis autem C pondus FG; ergo totius corporis BC, vel ipsius A, aut D pondus erit EG. Deinde corporis A, sit moles H, portionis vero B moles

IK



A Ik, portionis autem C moles KL, corporis vero D moles MO.

Quoniam igitur est vt pondus corporis D ad pondus portionis C, hoc est vt EG ad FG, ita moles ipsius D ad molem ipsius C hoc est ita MO ad KL, corpora enim eiusdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam in mole, vt est demonstratum in nostro Archimede promoto; quare quod fit ab extremis EG, & kL, æquale erit ei quod fit à medijs FG, & MO.

Sumantur autem MN, IP. vtraque æqualis ipsi H. Quoniam igitur est vt pondus corporis A, ad pondus portionis B, hoc est vt EG ad EF, ita moles H ad molem IK, factum ab extremis EG, & IK æquale erit facto à medijs EF, & H. vel & MN. sed ostensum est id quod fit ex EG, & KL æquale esse ei quod fit ex FG, & MO. ergo per additionem æqualium
B æqualibus, quod fit ex EG, & IK, vna cum eo quod ex EG, & kL. hoc est id quod fit ex EG, & IL, æquale erit ei, quod fit ex EF, & MN, vna cum eo quod ex FG, & MO. sed quod fit ex EF, & MN, æquale est ei, quod ex EG, & MN, minus eo quod ex FG, & MN. ergo quod fit ex EG, & IL, æquale erit ei, quod fit ex FG, & MO, vna cum eo, quod ex EG, & MN, minus eo quod fit ex FG, & MN. In prima quidem figura demonstratio sic procedet. Auferatur vtrinque id quod fit ex EG, & MN ergo quod fit ex EG, & IL, minus eo, quod ex EG, & MN, vel & IP, hoc est id quod fit ex EG, & PL, æquale erit, quod ex FG, & MO, minus eo, quod fit, ex FG, & MN. hoc est ei quod fit ex FG, & NO; quare æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt NO ad PL, ita EG ad FG, hoc est vt dif-
C ferentia inter moles corporum A, & D primi videlicet, & tertij ad differentia inter moles corporum A, & BC primi, & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quę est eiusdem generis cum corpore tertio D.

In secunda vero figura demonstratio procedet in hunc modum. Addatur vtrobique id quod fit ex FC, & MN, & auferatur id quod ex FG, & MO; fiet id quod fit ex EG, & IL, vna cum eo quod ex FG, & MN, minus eo quod ex FG, & MO, æquale ei quod fit ex EG, & MN. auferatur quoque id quod fit ex EG, & IL: ergo quod fit ex FG, & MN, minus eo, quod ex FG, & MO, hoc est id quod ex FG, & ON, ęquale erit ei, quod ex EG, & MN, vel IP, minus eo, quod ex EG, & IL, hoc est ei, quod fit ex EG, & LP. quare reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt ON ad LP, ita EG ad FG. hoc est
D vt differentia inter moles corporum A & D primi videlicet, & tertij, ad differentiam inter moles corporum A & BG primi & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio D, quod erat ostendendum.

Sit corona mixta ex auro, & argento 50. librarum, & oporteat inuenire quãnum sit in ea argenti, & quantum auri. Sumantur duæ massę eiusdem ponderis, atque corona. vna ex auro; altera ex argento. & ponatur in aliquod vas aqua plenum; massa aurea, quę ejiciat 6. sextarios aquę. Similiter ponatur & corona: eaque ejiciat septem sextarios, eodem modo posita & massa argętea ejiciat 11. sextarios; massa igitur aurea æqualis erit mole sex sextarijs: aquæ corona vero 7.

sextarijs; massa autem argentea 11. sextarijs. Fiat igitur vt differentia mo- A
lis massæ aureæ, & molis massæ argenteæ, hoc est vt S ad differentiam
ex antec. theor. molium massæ aureæ, & coronæ, hoc est ad 1, ita pondus coronæ quod est 50. ad 10, erunt* igitur 10. lib. argenti in corona, auri vero 40.

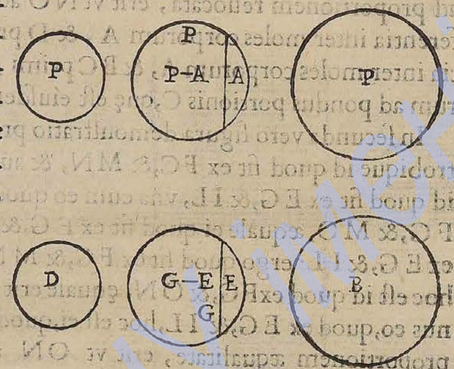
Sed ponantur conuerso ordine prædictæ massæ nimirum prima in ordine sit massa argentea, tertia vero aurea. & fiat vt differentia molium massæ argenteæ, & massæ aureæ. hoc est vt S ad differentiam molium massæ argenteæ & coronæ, hoc est ad 4: ita pondus coronæ quod est 50. lib. ad 40. erit igitur pondus auri, quod est in corona 40. lib. pondus vero argenti 10. lib.

Eodem modo inuenietur pondus argenti, vel auri, quæ sunt in corona, si
aquæ eiectæ è vase sumantur ad rationem ponderis, quemdmodum eas sum- B
psimus ad rationem mensuræ. corpora enim eiusdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam in mole. eijciat enim massa aurea è vase tres libras aquæ; corona vero $3\frac{1}{2}$. massa autem argentea $5\frac{1}{2}$. Fiat igitur vt differentia inter 3, & $5\frac{1}{2}$ quæ est $2\frac{1}{2}$ ad differentiam inter 3 & $3\frac{1}{2}$, quæ est $\frac{1}{2}$; ita 50. lib. ad 10. libras, hoc est ad pondus argenti, quod est in corona. illud ipsum pondus quod supra inueniebatur.

Aliter & Problema resoluam, & Theorema demonstrabo.

Resolutio quarta.

ISdem positis quæratur pondus massa aurea corona massa argentea argenti, quod est in corona. illud esto A. ergo P - A erit pondus auri, mensura autem aquæ mole æqualis argento, quod est in corona esto E. ergo mensura aquæ mole æqualis auro erit G - E. ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad moles eiusdem auri, erit




C

vt P ad P -- A ita D ad G -- E D

Nunc studium adhibendum est vt deueniamus ad aliquam proportionem cuius tres termini sint cogniti. id autem tali fiet argumentatione.

ergo per conuersionem rationis erit vt P ad A ita D ad D -- G ✣ E
sed est vt P ad A ita B ad E
hoc est vt pondus massæ argenteæ ad pondus argenti quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem argenti; ergo erit
vt B, ad E, ita D, ad D -- G ✣ E
& per mutando erit vt B, ad D, ita E ad D -- G ✣ E
& diuidendo vt B -- D, ad D, ita G -- D ad D -- G ✣ E

&



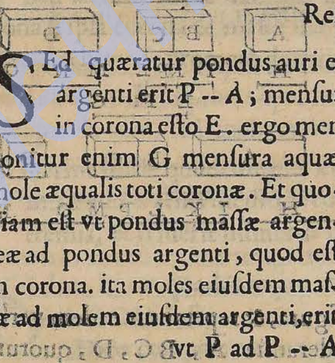
A & rursus permutando vt B -- D ad G -- D ita D ad D -- G ✣ E
sed ostensum est supra esse vt P ad A ita D ad D -- G ✣ E
ergo erit vt B -- D ad G -- D ita P ad A

In hac igitur proportione cogniti sunt tres termini, atque est ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentes Resolutiones inuenta est, cum de pondere argenti, quod est in corona, quærebatur atque adeo idem Porisma deducitur.

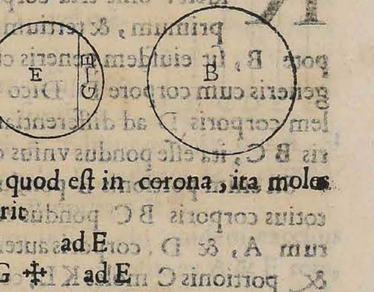
Porisma.

Vt differentia molis massæ argenteæ, & molis massæ aureæ ad differentiam molis coronæ, & molis massæ aureæ, ita est pondus coronæ ad pondus ar-
B genti; quod est in corona.

Resolutio quinta.




SEd quæratur pondus auri existentis in corona. id esto A. ergo pondus argenti erit P -- A; mensura autem aquæ mole æqualis auro, quod est in corona esto E. ergo mensura aquæ mole æqualis argento erit G -- E. ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus massæ argenteæ ad pondus argenti, quod est in corona. ita moles eiusdem mas-
C sæ ad molem eiusdem argenti, erit




vt P ad P -- A ita B ad G -- E

Et per conuersionem rationis
vt P ad A ita B ad B -- G ✣ E
sed est vt P ad A ita D ad E
hoc est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri, ergo erit
vt B ad B -- G ✣ E ita D ad E
et permutando vt B ad D ita B -- G ✣ ad E
D & diuidendo vt B -- D ad D ita B -- G ad E
& rursus permutando vt B -- D ad B -- G ita D ad E
sed est vt D ad E ita P ad A
cum sit vt moles massæ aureæ ad molem auri, quod est in corona; ita pondus eiusdem massæ ad pondus eiusdem auri. ergo erit
vt B -- D ad B -- G ita P ad A

Dantur igitur tres proportionis termini, atque est ea ipsa proportionalium series, quæ per alias resolutiones inuenta est, cum de pondere auri, quod est in corona quærebatur. atque adeo idem porisma deducetur.

A

## Porisma.

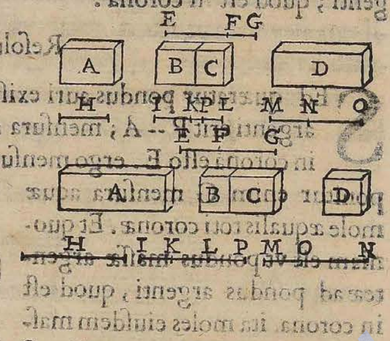
Vt differentia molium massæ, argenteæ, & massæ aureæ, ad differentiam molium massæ argenteæ, & coronæ; ita est pondus coronæ ad pondus auri, quod est in corona.

Ex hoc, & antecedentes Porismate proponemus vnum Theorema vniuersale illud ipsum, quod supra proposuimus, sed alia via demonstratio procedet, cum & Resolutio alia via processerit.

## Theorema.

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerit diuersi generis, secundi autem portio sit eiusdem generis cum corpore primo; reliqua vero eiusdem generis cum corpore tertio; erit vt differentia molium primi & tertij ad differentiam molium primi, & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis corporis secundi, quæ est eiusdem generis, cum corpore tertio.

B




C

Resumantur superioris Theorematis figura, & repetantur eadem verba ideſt. Sint tria corpora æque ponderantia A, BC, D, quorum primum, & tertium sint generis diuersi; portio autem secundi, vtpote B, sit eiusdem generis cum corpore A: reliqua vero portio eiusdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter molem corporis A, & molem corporis D ad differentiam inter molem corporis A, & molem corporis BC, ita esse pondus vnius corporum ad pondus portionis C.

Sit enim portionis B pondus EF portionis autem C pondus FG. ergo totius corporis BC pondus erit EG, quod quidem pondus erit & corporum A, & D. corporis autem A sit moles H: portionis vero B moles IK, & portionis C moles KL; corporis vero D moles MO. & sumantur MN, IP æquales ipsi H. Quoniam igitur est vt pondus corporis A ad pondus D portionis B, hoc est vt EG ad EF, ita moles ipsius A ad molem ipsius B, hoc est, ita H, vel IP ad IK: erit per conuersionem rationis vt EG ad GF, ita IP ad Pk. sed vt EG, ad GF, ita est quoque MO ad kL, est enim vt pondus corporis D ad pondus portionis C, ita moles ipsius D ad molem ipsius C. in prima quidem figura sic concludo. ergo vt MO ad KL, ita erit IP ad Pk. & permutando vt MO ad IP, hoc est, ad MN, ita KL ad PK & diuidendo vt ON ad NM, ita LP ad PK. & rursus permutando erit ON ad LP, vt NM, vel IP ad Pk; sed ostensum est supra esse & EG ad GF vt IP ad PK, ergo & ON ad LP, ita erit EG ad GF, hoc est vt differentia inter moles corporum AD ad differentiam inter moles corporum A & BC, ita pondus vnius corporum, aut pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio.





In secunda vero figura concludo in hunc modum. ergo vt IP ad PK, ita erit MO ad kL, & permutando vt IP vel NM ad MO, ita Pk ad KL, & diuidendo vt NO ad OM, ita PL ad Lk, & rursus permutando erit vt NO ad PL, ita OM ad Lk. sed vt OM ad Lk, ita est EG ad GF, hoc est vt moles corporis D ad molem corporis C, ita pondus eiusdem corporis G ad pondus eiusdem corporis C. ergo vt NO ad PL, ita erit EG ad GF. hoc est vt differentia inter moles corporum AD ad differentiam inter moles corporum A & BC, ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio. quod erat ostendendum.

B

Sed facilius atque exactius deprehendetur portio argenti quod, est in corona si ipsa corona & massæ illæ ponderentur in aqua; quemadmodum in nostro Archimede promoto docuimus.

## Lemma I.

Si fuerint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes. Composita ex extremis æqualis erit vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis, & si fuerit numerus linearum impar; mediæ duplæ æqualis erit.

C

Sint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes A B C D E F.




Dico compositam ex extremis AF æqualem esse vnicuique compositarum ex BE, vel ex CD, vel mediæ duplæ; si numerus linearum est impar.

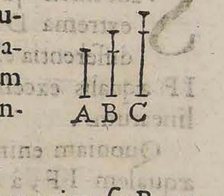
Quoniam enim si ab extrema F auferatur, excessus quo superat, proximam E, reliqua æqualis erit E. similiter à secunda B, ablato excessu, quo superat primam A, reliqua æqualis erit A. Si igitur æqualibus A, & B multatæ addantur æquales F, multata & E composita ex A & F multata; æqualis erit compositæ ex B multata & E.

Restituantur excessus ablati tum ipsi B, tum ipsi F, qui quidem excessus sunt equales, nam æqualiter lineæ sese excedunt. ergo composita ex A & F tota,

D

æqualis erit compositæ ex B tota & E. Eadem ratione ostendemus compositam ex CD, æqualem esse compositæ ex BE. quare & compositæ ex AF.

Sed sit numerus linearum ABC impar. eadé ratione ostendemus compositam ex extremis AC æqualé esse mediæ duplæ. nam C contracta excessu, quo superat mediã B, æqualis est ipsi B; A vero protracta eodé excessu æqualis erit eidem B. quare composita ex AC æqualis erit B duplæ. quare constat propositum.




Idem aliter breuius ostendemus.

Sint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes, quarum prima sit B. excess-

cessus autem, quo sese excedunt A. ergo secunda erit B ✣ A. tertia vero B A
✣ A 2, & sic deinceps. exponatur igitur series huiusmodi linearum. eæ erunt:

B  B✣A  B✣A 2  B†A 3  B†A 4  B†A 5

Manifestum est composita ex extremis æquale esse vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis. nam composita ex extremis B, & B† A 5, est B 2 ✣ A 5. quanta etiam est composita ex secunda B ✣ A & B ✣ A 4, ac etiam quanta est composita ex tertia B ✣ A 2 & B † A 3. Æque manifestum est si numerus linearum fuerit impar compositam ex extremis æqualem esse mediæ duplæ.

## Lemma II.

B Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Dupla composita ex omnibus, multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum.

NVmerus enim linearum erit par aut impar. sit par. Quoniam igitur composita ex extremis æqualis est vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis per antecedens Lemma, & æqualis quoque sibi ipsi: ideo composita ex omnibus, totuplex erit compositæ ex extremis, quot sunt binæ lineæ, & consequenter dupla composita ex omnibus, totuplex compositæ ex extremis; quot sunt lineæ.

Sed sit numerus linearum impar. Quoniam igitur composita ex extremis æqualis est vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis, & æqualis quoque sibi ipsi, ideo composita ex omnibus, excepta media, to- C
tuplex erit compositę ex extremis, quo sunt binę lineę, excepta media, & per
lem. i consequens dupla composita ex omnibus, excepta media, totuplex erit compositæ ex extremis, quot sunt lineę, excepta media; sed dupla media * æqualis est compositę ex extremis. ergo dupla composita ex omnibus, totuplex erit compositę ex extremis, quot sunt lineæ. Itaque dupla composita ex omnibus multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. quod erat demonstrandum.

## Lemma III.

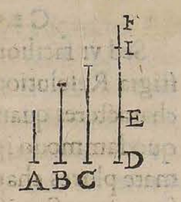
D Si fuerit lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Differentia extremarum continuata excessu, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum.

SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D I, & ab extrema D I, quæsit maxima auferatur D E æqualis minimæ A ergo differentia extremarum erit E I. producatur autem E I in F, vt sit I F æqualis excessui. Dico E F multiplicem esse ipsius I F per numerum linearum.

Quoniam enim A prima differt à secunda quidem B, per excessum æqualem I F, à tertia vero C per duplum excessum I F, à quarta autem D I per triplum excessum, ac denique ab extrema seu maxima per ex-



A cessum multiplicem, per numerum linearum, dempta vna, hoc est differentia extremarum, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum dempta vna, & consequenter differentia extremarum continuata excessu, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum. quod erat ostendendum.




## Lemma IV.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Est vt dupla composita ex omnibus, ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum continuata excessu ad excessum.

B

QVoniam enim dupla composita ex omnibus * multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum, per quem numerum etiam differentia extremarum continuata excessu, * multiplex est ipsius excessus. ergo quotuplex est dupla composita ex omnibus, compositæ ex extremis, totuplex, erit differentia extremarum continuata excessu, ipsius excessus; quare vt dupla composita ex omnibus ad compositam ex extremis, ita erit differentia extremarum, continuata excessu ad excessum. quod erat ostendendum.

lem. ii
ex antec.

## Problema II.

C Data minima & maxima linearum æqualiter sese excedentium & composita ex omnibus; inuenire singulas. Oportet autem duplam compositam ex omnibus multiplicem esse compositæ ex extremis per numerum binario maiorem.

### Resolutio.

SIt data minima B, maxima vero D, composita autem ex omnibus G. Oportet inuenire singulas.

Quæratur excessus, is esto A. Quoniam igitur est vt dupla composita ex omnibus, ad compositam ex extremis; ita differentia extremarum continuata excessu, ad excessum; erunt proportionales.

D  G 2 D ✣ B  D -- B ✣ A. ita A,

Sed factum sub extremis æquale est ei, quod fit sub medijs, ergo

G 2 in A æquabitur ( D Q -- D in B ✣ D in A
                   ( ✣ D in B -- B Q ✣ B in A

Hoc est G 2 in A æquabitur D Q ✣ D in A -- B Q ✣ B in A

Auferantur vtrinque D in A, & B in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

G 2 in A -- D in A -- B in A æquabitur D Q -- B Q

Seu quod idem est G 2 -- D — B in A æquabitur D Q — B Q

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

G 2 — D — B  D ✣ B  D — B  A  A

Sed vt facilior reddatur via ad Theorematis demonstrationem, quę per vestigia Resolutionis progredi debet, curandum est, vt datarum magnitudinum characteres quam pauciſsimi existant; multitudo enim characterum obruit quodammodo ipsa vestigia, & inuoluit. Itaque cum in resoluendo Problemate plures characteris, (siue aggregatum datarum magnitudinum, siue differentiam significantes) simul semper, vel in vna æqualitatis parte, vel in vtraque existant; tunc ipsum aggregatum, vel differentia poterit vno tantum charactere designari. Igitur in superiori Resolutione quoniam characteris D ✣ B vel D — B semper simul existunt; poterit pro D ✣ B substitui F, & pro D — B substitui H. Substituantur & procedat Resolutio, vt supra. Quoniam igitur* proportionales sunt B

lem. 4

G 2  F  H ✣ A  A

factum sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs; nempe

G 2 in A æquabitur F in H ✣ F in A.

Auferatur vtrinque F in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

G 2 in A — F in A æquabitur F in H.

Seu quod idem est  G 2 — F in A æquabitur F in H

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

G 2 -- F  F  H  A

ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur.

Porisma. C

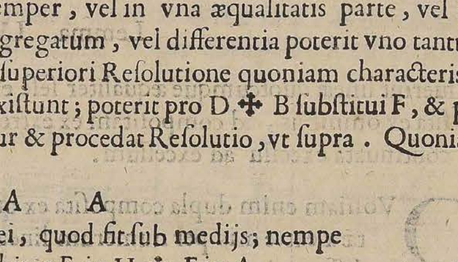
Vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis; ita est differentia extremarum ad excessum.

Hoc Porisma in formam Theorematis ita proponetur.

Theorema.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes, est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum.

D SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, DE, sitque GI æqualis compositæ ex omnibus, & producatur maxima ED in k, vt sit Dk æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat DH. erit igitur EH differentia extremarum; Ek vero composita ex extremis. Rursus producatur HE in F, vt sit EF æqualis ex-






A cessui, quo lineæ sese excedunt. Dico differentiam duplæ GI, & rectæ Ek ad ipsam EK esse, vt HE ad EF. Duplicetur enim GI in L. & ab ipsa auferatur LM æqualis kE. Quoniam igitur est* vt GL ad kE, ita HF ad FE, rectangulum sub GL, & FE* æquale erit rectangulo sub KE, & HF, hoc est rectangulis kEH, kEF; auferatur vtrinque rectangulum KEF. ergo rectangulum sub GL, & EF minus rectangulo KEF, hoc est minus rectangulo sub LM, & EF, æquale erit rectangulo kEH; sed rectangulum sub GL, & EF minus rectangulo sub LM, & EF æquale est rectangulo sub GM, & EF: ergo rectangulum sub GM, & EF, æquale erit rectangulo KEH; quare* vt GM ad KE ita erit HE ad EF. quod erat ostendendum. 16 sexti

lem. 4

16 sexti

Alia breuiori, ac faciliori via & Problema resoluam, & Theorema demonstrabo. B

Ijsdem datis. quæratur excessus vt in antecedenti.

Resolutione. is esto A. Et quoniam* proportionales sunt. lem. 4

G 2  D ✣ B.  D -- B ✣ A  A

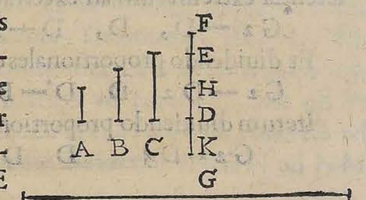
Et diuidendo proportionales erunt

G 2 -- D -- B  D ✣ B  D — B  A

Ea ipsa proportionalium series, quæ per priorem resolutionem inuenta est. itaque proponetur idem Theorema; sed alia ratione demonstrabitur.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. est vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis; ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum.

C Sint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, DE; sitque G æqualis compositæ ex omnibus, & producatur maxima ED in k, vt sit DK æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat DH. erit igitur EH differentia extremarum; EK vero composita ex extremis. Rursus producatur HE in F, vt sit EF æqualis excessui, quo lineæ sese excedunt. Dico differentiam inter duplam G, & rectam EK ad ipsam Ek esse, vt HE ad EF. Quoniam enim est* vt dupla G ad EK, ita HF ad EF; erit diuidendo vt differentia, lem. 4




D qua G dupla superat EK ad Ek, ita HE ad EF; quod erat ostendendum.

Sint numeri æqualiter sese excedentes, quorum minimus, idemque primus est 3; maximus vero 13; summa autem omnium 48, & oportet inuenire singulos. Fiet vt differentia summæ omnium duplæ, & summæ extremorum, ad summam extremorum, ita differentia extremorum, ad excessum, hoc est vt 80 ad 16, ita 10 ad 2. itaque 2 erit excessus; atque adeo progressio numerorum 3. 5. 7. 9. 11. 13. quorum summa est 48.

Pro-

## Problema III.

Data secunda linearum æqualiter sese excedentium, & composita ex extremis, item que composita ex omnibus. inuenire singulas. Oportet autem duplam compositam ex omnibus multiplicem esse compositæ ex extremis, per numerum binario maiorem.

HOc Problema in duos Casus diuidam, primus erit cum dupla cõposita ex omnibus multiplex est compositæ ex extremis per numerũ maiorem ternario, secundus autem cum ea multiplex est per ipsum ternarium.

### Resolutio primi Casus.

SIt data secunda B; composita vero ex extremis D; composita autem ex omnibus G. sitque dupla G multiplex ipsius D per numerum maiorem ternario, ergo numerus linearum æqualiter sese excedentium ternario maior erit. quoniam dupla composita ex omnibus* multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. lem. 2

Excessus igitur, de quo quæratur esto A, ergo B — A erit minima, quæ si auferatur à D composita ex extremis; reliqua D -- B ✣ A erit maxima; à qua si auferatur minima, quæ est B -- A, reliqua D — B 2 ✣ A 2 erit differentia maxmæ, & minimæ, hoc est extremarum.

Et quoniam ex antecedente Theoremate est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compoxtæ ex extremis ad compositam ex eztremis, ita differentia extremarum ad excessum; ideo proportionales erunt. C

G 2 — D, D, D — B 2 ✣ A 2; A

Et diuidendo proportionales erunt

G 2 — D 2 D D — B 2 ✣ A A

Iterum diuidendo proportionales erunt

G 2 -- D 3 D D -- B 2 A

### Porisma.

Vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis; ita est differentia compositę ex extremis, & duplæ secundæ, ad excessum.

Ex hoc Porismate proponetur Theorema huiusmodi. D

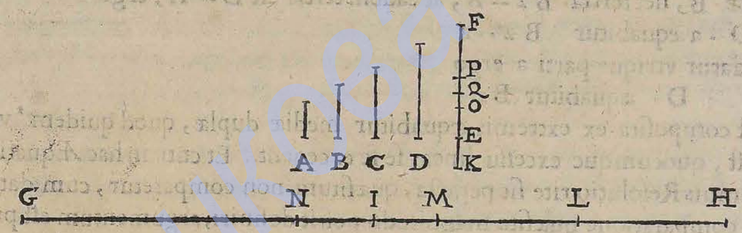
### Theorema.

Si numerus linearum æqualiter sese excedentium fuerit ternario maior, erit vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ co mpositæ exextremis ad compositam ex extremis; ita differentia compositæ ez extremis, & duplæ secundæ ad excessum.

SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D, E F, quarum numerus sit ternario maior, & ponatur G I æqualis compositæ ex om-



A omnibus, eaque duplicetur in H. ergo G H multiplex est compositæ ex extremis, per numerum ternario maiorem. quoniam dupla composita ex omni-




B bus* multiplex est compositæ ex extremis, per numerum linearum. itaque ipsa G H maior est, quam tripla composita ex extremis. sumatur igitur in G H recta H L æqualis compositæ ex extremis, cui quoque æqualis sumatur L M, similiter eidem æqualis, sumatur M N reliqua igitur G N erit differentia duplæ compositæ ex omnibus & compositæ ex extremis. Deinde sumatur E O æqualis primæ A vel E K, & fiat K P dupla secundæ B. cum igitur P K dupla secundæ superet O K duplam primam, excessu P O; simpla secunda superabit simplam primam dimidio excessu P O. Secetur ergo P O bifariam in Q. erit P Q, vel Q O excessus, quo lineæ sese excedunt. Dico igitur G H ad N M esse vt F P ad P Q, hoc est differentiã duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ compositæ ex extremis ad compositam ex extremis, esse vt differentia compositæ ex extremis, & duplæ secundæ ad excessum. Quoniam enim ex antecedente Theoremate est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum, hoc est vt G L ad L M; ita F O ad O Q. erit diuidendo vt G M ad M L, hoc est ad M N, ita F Q ad Q O, hoc est ad Q P, & rursus diuidendo erit G N ad N M ita F P ad P O. quod erat ostendendum. C lem. 2

Sint numeri æqualiter sese excedentes, quorum secundus sit 5; summa autem extremorum 14. summa vero omnium 35. & oporteat inuenire singulos. Fiet vt differentia summæ omnium duplæ, & triplæ summæ extremorum ad summam extremorum; ita differentia summæ extremorum & duplæ secundæ ad excessum. hoc est vt 28 ad 14, ita 4 ad 2. itaque 2 erit excessus, atque adeo progressio numerorum 3 5 7 9 11, quorum secundus est 5 summa vero extremorum 14. summa autem omnium 35. D

### Resolutio secundi Casus.

SIt data secunda B composita ex extremis D: composita ex omnibus G, cuius dupla sit multiplex ipsius D per ternarium, hoc est sit tripla ipsius D. ergo tres erunt lineæ æqualiter sese excedentes. oportet inuenire primam, & tertiam.

Prima esto A, ergo D -- A erit tertia, composita autem ex prima, & ter-

tia ponitur D. rursus quoniam prima quidem est A. secunda vero B, ex- A
cessus, quo secunda B superat A primam, erit B -- A. is excessus addatur
secundæ B, fiet tertia B 2 -- A, at eadem tertia est D -- A, ergo

D -- a æquabitur B 2 -- a
Addatur vtrique parti a ergo
D æquabitur B 2

lem. 9 hoc est composita ex extremis æquabitur mediæ duplæ, quod quidem * ve-
rum est, quocumque excessu lineæ se se excedant. Et cum in hac Æquatio-
ne quamuis Resolutio rite sit peracta, quæsitum non comparetur, cum dato,
vt tali comparatione quæsita magnitudo possit definiri; argumentum est pri-
mam linearum de qua quæritur cuiuscumque longitudinis exhibitam;
modo ea minor sit, quam data secunda, Problemati satisfacere. idque B
ita fit manifestum.

Sit data secunda, hoc est media trium linearum æqua-
liter sese excedentium B; composita autem ex extre-
lem. 8 mis C D ea * erit dupla ipsius B, Oportet inuenire ex-
tremas. secetur C D vtcumque in F, & sit C F minor, B
quam F D. Dico lineas æqualiter sese excedentes esse
lem. 1 C F B F D. Quoniam enim C D * æqualis est duplæ C F E D
B, secta C D bifariam in E, erit vtraque ipsarum
C E, E D æqualis ipsi B; sed C E superat C F pri-
mam excessu F E, quo etiam tertia F superat ipsam
E D. ergo & secunda B superabit primam C F excessu F E, atque tertia C
F D B secundam. Itaque lineæ C F B F D æqualiter sese excedunt, at-
que earum media est ipsa B data, & composita ex extremis data C D. fa-
ctum est igitur quod oportuit.

In numeris sit secundus numerus, hoc est medius 5. summa extremorum
erit. 10. ponatur pro primo numero quilibet nnmerus quinario minor, vt-
pote 1 tertius erit 9, & numeri 1, 5, 9, æqualiter sese excedentes Proble-
mati satisfaciunt.

Sed ponatur pro primo numero 2. tertius erit 8, & numeri 2 5 8 æqua-
liter sese excedentes problemati satisfaciunt.

Item ponatur pro primo numero $2\frac{1}{2}$, tertius erit $7\frac{1}{2}$, atque numeri $2\frac{1}{2}$
$5$ $7\frac{1}{2}$ æqualiter sese excedentes Problemati satisfaciunt. D

## Quomodo Problemata impossibilia cognoscantur.

## Caput II.

INterdum contingit, vt Problema propositum sit impossibile. Istam impossibilitatem Resolutio arguit exhibens impossibilem Aequatio-nem. Nam quotiescumque Resolutio Problematis incidit in Aequatio-nem impossibilem; argumentum est Problema impossibile esse. Aequationem autē impossibilem voco cū inea minor magnitudo proponitur æquari maiori,

quod



A quod quidem absurdum, vel aperte cernitur, vel arguitur ex eo; quod ipsa æquatio tunc inexplicabilis redditur; nam cum Æquatio explicari nequit, causa est ipsa Æquationis inæqualitas. idque sic demonstrabo.

Proponatur B in A -- A Q æquari B Q. hæc Æquatio non potest explicari; nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ coefficientis B, quod est B Q $\frac{1}{4}$ auferre B Q, quod fieri non potest; cum sit B Q maius, quam B Q $\frac{1}{4}$.

Dico igitur B in A -- A Q, minus esse B Q, hoc est in proposita Æquatione æqualitatem non esse. Quoniam enim ponitur A Q auferri a B in A, & id quod remanet æquari B Q; erit A Q minus quam B in A. quare & A minor erit quam B. atque adeo B in A minus, quam B Q, & per con-
B sequens B in A -- A Q multo minus. In proposita igitur Æquatione non est æqualitas. quod erat ostendendum.

### Problema I.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus vna cum quadra-to differentiæ partium æquale sit quadratis partium.

### Resolutio.

SIt data recta linea B 2, quam oportet secare, ita vt rectangulum sub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadratis partium.

C Factum iam sit, & dimidia differentia partium esto a. ergo pars * maior erit B ✣ A; pars autem minor B — a. Et quoniam rectangulum sub B ✣ a & B -- a vna cum quadrato ex a 2 æquale est quadratis ex B ✣ a, & B — a; sic enim ponitur secta data recta linea B 2, ideo

co. 2. probl. 1 lib. 1

B 2
B A B-A

B Q -- a Q ✣ a Q 4 æquabitur B Q
2 ✣ a Q 2
hoc est B Q ✣ a Q 3 æquabitur B Q 2 ✣ a Q 2
auferatur vtrinque B Q, & a Q 2, ergo
A Q æquabitur B q.

D vnde & A æquabitur B, pars toti, quod est absurdum. Cum igitur Resolutio incidat in Æquationem impossibilem, argumentum est Problema impossibile esse; quæ quidem impossibilitas repetendo Resolutionis ve-stigia ita ostendetur.

Sit enim si fieri potest recta a B secta in C, ita vt rectangulum sub partibus A C, C b vna cum quadrato differentiæ earun-dem æquale sit quadratis a C, C b, & sumatur A E æqualis C b. ergo differentia partium

A F D C B

a c, C B erit E C. secetur autem A B bifariam in D. Quoniam igitur rectangulum A C b, vnà cum quadrato E C, hoc est cum quadrato D C quater. æquale est quadratis A C, C B, sic ponitur secta A b; ipsum autem rectangulum A C b, vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A D, vel quod idem est rectangulum A C B æquale est quadrato a D, minus quadrato D L; ideo quadratum a D minus quadrato D C, plus quadrato D C quater, hoc est quadratum a D, vnà cum quadrato D C ter, æquale erit quadratis a C c b, hoc est* duplo quadratorum a D, D c. auferatur vtrinque quadratum a D, & duplum quadrati D c; ergo reliquum quadratum D c reliquo quadrato a D æquale erit. vnde & recta D c æqualis rectæ a D, vel D b pars toti, quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale sit quadratis partium. Itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

5 secundi

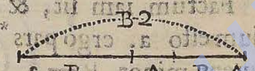
9 secundi

## Problema II.

Datum rectam lineam secare, vt triplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadrato totius rectæ.

### Resolutio.

Sit data recta linea b 2 secunda vt petitur: Factum iam sit, & dimidia differentia partium esto A. ergo b + a erit pars maior b — a pars minor. Et quoniam triplum rectangulum sub b + a, & b — a vnà cum quadrato ex a 2 æquale est quadrato ex b 2, ergo.




B Q 3 — a Q 3 + a Q 4 æquabitur b Q 4

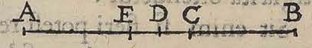
hoc est b Q 3 + a Q æquabitur b Q 4

auferatur vtrinque b Q 3; ergo

A Q æquabitur b Q.

vnde & A æquabitur b pars toti, quod est absurdum. Cum igitur æquatio impossibilis sit; Problema quoque impossibile est. Idque sic demonstrabimus.

Sit si fieri potest recta a b secta in c; ita vt triplum rectangulum a c b, vnà cum quadrato differentiæ partium a c, c b æquale sit quadrato totius a b, & sumatur a E æqualis C B. ergo differentia inter A C, C B erit E C, deinde secetur A B bifariam in D.




ergo rectangulum A C B, vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A D, vel D B. seu quod idem est rectangulum A C B, æquale erit quadrato D B, mi-



A minus quadrato D C. & consequenter triplum rectanguli A C B æquale triplo quadrati D B, minus triplo quadrati D C. sed ponitur triplum rectanguli A C B vna cum quadrato E C, hoc est cum quadruplo quadrati D C æquari quadrato A B, ergo triplum quadrati D B, minus triplo quadrati D C, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc est triplum quadrati D B, vna cum quadrato D C, æquabitur quadrato A B, hoc est quadruplo quadrati D B. auferatur vtrinque triplum quadrati D B. ergo reliquum quadratum D C reliquo quadrato D B æquale erit. quare & recta D C æqualis rectæ D B. quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt triplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadrato totius lineæ. Itaque Problema impossibile est. quod erat

B ostendendum.

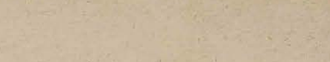
## Problema III.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale sit rectangulo sub tota, & parte maiore.

### Resolutio.

Sit data recta linea B, quam oportet secare. vt dictum est: Factum iam sit & pars maior esto A. ergo pars minor erit B - A. atq; differentia partiũ erit A 2 - B. Et quoniã rectangulum sub B, & A 2 - B vnà cum quadrato ex B - A æquale est rectangulo sub B, & A.

C

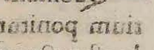



B in A 2 B Q + B Q + A Q æquabitur B in A 2, æquabitur B in A, hoc est A Q æquabitur B in A pars toti. quod est absurdum.

Problema igitur impossibile est, idque demonstrabimus hac ratione.

Sit si fieri potest recta A B secta in C, vt rectangulum sub tota A B & differentia partium A C, C B, vna cum quadrato partis minoris C B sit æquale rectangulo sub ipsa A B, & parte maiore A C, & sumatur C D æqualis C B. Quoniam igitur secta est A B in C, vt rectangulum B A D (hoc est sub tota & differentia partium) vna cum quadrato C B A æquale sit rectangulo B A C, ipsum autem rectangulum B A D, vna cum quadrato C B, æquale est quadrato A C, hoc demonstratum est sub Theoremate primo libri primi, ideo quadratum A C æquale erit rectangulo B A C pars toti, quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub tota & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale sit rectangulo sub tota & parte maiore, atque adeo Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

D



## Problema IV.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato partis maioris.

### Resolutio.

SIt data recta linea B secanda in duas partes, quemadmodum Problema iubet. Factum iam sit, & pars maior esto A, ergo minor pars erit B -- A atque differentia partium erit A 2 -- B. Et quoniam rectangulum sub tota, & differentia partium æquale est quadrato partis maioris.




B in A 2 - B Q æquabitur A Q.

Addatur vtrique parti B Q, & auferatur A Q, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

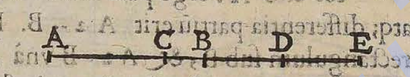
B in A 2 -- A Q æquabitur B Q

Et explicata æquatione.

B æquabitur A. totum videlicet parti, quod est absurdum.

Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est, idque sic demonstrabimus.

Sit si fieri potest recta A B secta in C, ita vt rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato rectæ A C partis maioris. & fiat C D æqualis A C. ergo differentia partium A C, C B erit B D. Fiat quoque B E æqualis A B.




Quoniam igitur rectangulum A B D, quod fit sub tota, & differentia partium ponitur æquale quadrato A C; ipsum autem rectangulum A B D, æquale est rectangulo D A B, minus quadrato A B; ideo rectangulum D A B, minus quadrato A B æquale erit quadrato A C. addatur vtrique parti quadratum A B. ergo rectangulum D A B, hoc est C A B bis (recta enim D A dupla est ipsius A C) seu quod idem est rectangulum C A E (est enim A E dupla ipsius A B) æquale erit quadratis A C, A B. deinde, auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum C A E, minus quadrato A C, hoc est rectangulum A C E æquale erit quadrato A B. quod est absurdum; quadratum enim A B æquale est rectangulo A C E, vna cum quadrato C B. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato partis maioris. Itaque Problema impossibile est, quod erat ostendendum.



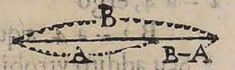


## Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota & dupla parte maiore æquale sit quadratis, quæ fiunt à tota, & à parte maiore.

### Resolutio.

SIt data recta linea B secanda, vt petitur. Factum iam sit, & pars maior esto A. ergo minor pars erit B -- A, & quoniam rectangulum sub B, & A dupla, æquale est quadratis ex B & A.



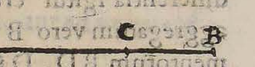

B in A 2 æquabitur B Q + A Q

Auferatur vtrinque A Q, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

B in A 2 - A æquabitur B Q

Et explicata Æquatione B æquabitur A, totum parti, quod est absurdum. Problema igitur propositum impossibile est, idque, ita ostendetur.

Sit si fieri potest recta linea A B secta in partes A C, C B, quarum maior sit A C, ita vt rectangulum sub A B, & A C dupla, hoc est vt rectangulum B A C bis, æquale. sit quadratis A B, A C, & auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum B A C bis, minus quadrato A C. æquale erit quadrato A B. sed rectangulum B A C bis, æquale est rectangulo B C A bis, vna cum quadrato A C bis, & consequenter rectangulum B A C bis minus quadrato A C æquale rectangulo B C A bis vna cum quadrato A C. ergo rectangulum B C A bis vna cum quadrato A C, æquale erit quadrato a B quod est absurdum. quadratum enim A B 4 secundi æquale est rectangulo B C a bis, vna cum quadratis a C, C B. Non potest igitur secari recta, vt rectangulum sub tota & dupla parte maiore æquale sit quadratis totius, & partis maioris. atque adeo Problema propositum impossibile est, quod erat ostendendum.




## Problema VI.

Super data basi triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum. atque differentia crurum sit dupla excessus, quo crus maius superatur à basi.

### Resolutio.

SIt data basis trianguli, de quo quæritur B, & oporteat inuenire triangulum. Factum iam sit, & excessus, quo basis superat crus maius esto a. ergo differentia crurum erit a 2, & consequenter differentiam segmentorum basis a 4. Et quoniã basis b superat crus maius excessu a; erit ipsum crus B -- a, sed crus maius superat crus minus excessu a 2. ergo crus minus erit B -- a 3; atque adeo aggregatum crurum erit B 2 -- a 4.

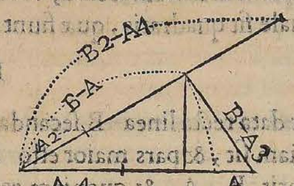
theor. 8 secundi

Et quoniam est * vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, hoc est vt a 2 ad a 4, ita B ad B 2; erit B 2 aggregatum crurum; sed idem aggregatum crurum inuentum est esse B 2 -- a 4, ergo

B 2 -- a 4 æquabitur B 2

Seu addito vtrobique a 4 B 2, æquabitur B 2 ✣ a 4. quod est absurdum.

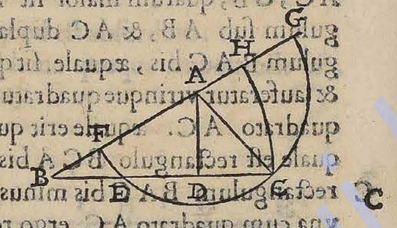
A




Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est, idque ostenditur hac ratione.

B

Sit triangulum a B C, in cuius basim B C, quæ sit maior crure maiore a B cadat perpendicularis a D. ex centro A, interuallo a C describatur circulus secans basim B C in E, crus vero a B in F, ipsumque productum in G. differentia igitur crurum a B, a C est B F: aggregatum vero B G, differentia autem segmentorum B D, D C est B E. Rursus centro B interuallo b C alius circulus describatur secans ipsam b G in H. excessus igitur, quo b G superat crus a b, erit a H. & sit si fieri potest b E dupla ipsius b F, itemque b F dupla ipsius a H. Quoniam igitur b C æqualis est compositæ ex b a, a H; ipsa vero a b æqualis compositæ ex a C, & b F, hoc est & a H dupla erit b C æqualis compositæ ex a C, & a H tripla; sed cum ipsa b C æqualis sit compositæ ex b a, & a H, dupla b E æqualis erit compositæ ex b a, bis, & quadruplæ a H, hoc est ex b G & quadruplæ a H, sed quoniam est, vt b F ad b E, ita b C ad b G, ipsa autem b E ponitur dupla ipsius b F, erit & b G dupla erit ipsius b C hoc est erit b G æqualis duplæ b C; sed dupla b C ostensa est æqualis compositæ ex b G, & quadruplæ a H. ergo b G æqualis erit compositæ ex eadem b G, & quadruplæ a H. quod est absurdum. Non potest igitur inueniri triangulum, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum. atque differentia crurum dupla excessus, quo basis superat crus maius. itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum.




C

D

## Problema VII.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota & dimidia differentia partium, vna cum rectangulo sub partibus æquale sit quadrato





A

## Resolutio.

Sit data recta linea B 2, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit, & dimidia differentia esto A. ergo B ✣ A erit pars maior, B -- A pars minor. Et quoniam rectangulum sub B 2, & A vna cum rectangulo sub B ✣ A, & B -- A æquale est quadratis ex B ✣ A, & B -- A.

B

B 2 in A -- B Q -- A Q, æquabitur B Q 2 ✣ A Q 2

Demantur vtrinque A Q 2, & B Q. ergo

B 2 in A -- A Q 3 æquabitur B Q

& omnibus per 3 diuisis vt numerus quadratorum reducatur ad vnitatem

B ½ in A -- A Q æquabitur B Q ½.

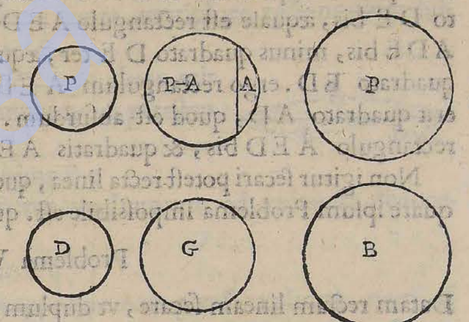
Hæc Æquatio impossibilis est quoniam explicari non potest nam ad eam explicandam deberet B Q ½ auferri ex B Q ½ quod fieri non potest, maius enim est B Q ½ quam B Q ½. Cum igitur Resolutio incidat in Æquationem impossibilem, Problema quoque impossibile est. idque sic demonstrabimus.

C

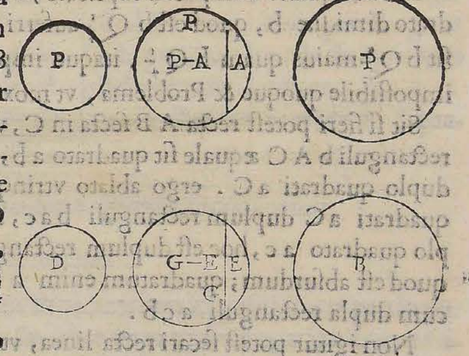
Sit si fieri potest recta A B secta in C, ita vt rectangulum sub tota A B & dimidia differentia partium A C, C B, vna cum rectangulo A C B sub partibus æquale sit quadratis partium A C, C B; & sumatur A E æqualis C B, ergo differentia partium A C, C B erit E C. quare secta E C bifariam in D, erit E D dimidia differentia partium A C, C B. Et quoniam rectangulum

D

A C B, vna cum quadrato D C, * æquale est quadrato A D, dempto communi quadrato D C, rectangulum A C B æquale erit quadrato A D, minus quadrato D C, sed cum rectangulum sub A B, E D, vna cum rectangulo A C B, æquale sit quadratis A C, C B; sic enim ponitur A B secta, ideo si loco rectanguli A C B sumatur quadratum A D, minus quadrato D C, rectangulum sub A B, D E vna cum quadrato A D, minus quadrato D C, æquale erit quadratis A C, C B, hoc est * duplo quadratorum A D, D C. auferatur vtrinque duplum quadrati D C, & quadratum A D, ergo rectangulum A B, D E, minus




Corol. 2 Probl. 1




5 secundi

9 secundi

nus quadrato D C, ter hoc est rectangulum A D E bis, minus quadrato D E A
ter æquale erit quadrato A D. sed rectangulum A D E bis, minus quadrato D E bis, æquale est rectangulo A E D bis, & consequenter rectangulum A D E bis, minus quadrato D E ter, æquale rectangulo A E D bis, minus quadrato E D. ergo rectangulum A E D bis, minus quadrato E D, æquale erit quadrato A D, quod est absurdum. quadratum enim A D* æquale est rectangulo A E D bis, & quadratis A E, E D. 4 secundi

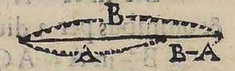
Non igitur secari potest recta linea, quemadmodum Problema fieri iubet. quare ipsum Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

## Problema VIII.

Datam rectam lineam secare, vt duplum rectangulum sub tota, & parte ma- B
iore; æquale sit quadrato totius, & duplo quadrato partis maioris.

### Resolutio.

SIt data recta linea B secanda vt petitur. Factum iam sit & pars maior. esto A. ergo pars minor erit B -- A. Et quoniam duplum rectangulum sub B, & A æquale est quadrato ex b, & duplo quadrati ex A.




B in A 2 æquabitur b Q + A Q 2

Et ablato vtrinque A Q 2, vt cognita ab incognitis separentur.

B in A 2 -- A Q 2 æquabitur B Q

& consequenter b in A -- Q æquabitur b Q $\frac{1}{2}$ C

Hæc Æquatio non potest explicari; nam ad eam explicandam debet à quadrato dimidiæ b, quod est b Q $\frac{1}{4}$ auferri B Q $\frac{1}{2}$. quod fieri non potest cum sit b Q $\frac{1}{2}$ maius quam b Q $\frac{1}{4}$, itaque impossibilis est hæc æquatio, atque adeo impossibile quoque & Problema, vt mox demonstrabo.

Sit si fieri potest recta A B secta in C, vt duplum rectanguli b A C æquale sit quadrato a b, vnà cum duplo quadrati a C. ergo ablato vtrinque duplo quadrati a C duplum rectanguli b a c, minus duplo quadrato a c, hoc est duplum rectanguli a c b; æquale erit quadrato a b. quod est absurdum; quadratum enim a b* æquale est quadratis a c, c b, vna cum dupla rectanguli a c b. 4 secundi D




Non igitur potest secari recta linea, vt Problema iubet. itaque ipsum Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

## Problema IX.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum triplum sub partibus æquale sit totius lineæ quadrato.

Re-



A

### Resolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet secare, vt triplum rectangulum sub partibus æquale sit quadrato totius B.

Factum iam sit, & vna pars esto A. ergo altera erit B -- A. Et quoniam triplum rectangulum sub partibus æquale est quadrato totius B



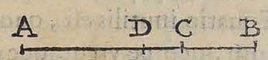

B in A 3 -- A q 3 æquabitur B q

Et omnibus per 3 diuisis, vt numerus quadratorum ad vnitatem deducatur. ergo

B in A -- A q æquabitur B q $\frac{1}{3}$

B Impossibilis est hæc Æquatio, quippe quæ non potest explicari. nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ B quod est B q $\frac{1}{4}$ auferre B q $\frac{1}{3}$; quod quidem fieri non potest; maius enim non potest auferri a minore. Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est; idque sic demonstrabitur.

Sit si fieri potest recta A B secta in C, ita vt triplum rectangulum A C B sub partibus æquale sit quadrato totius A B. ergo simplum rectangulum A C B subæquale erit tertiæ parti quadrati A B, & ideo maius erit quarta parte eiusdem quadrati A B; hoc est maius erit quadrato dimidiæ




C A B, quæ sit A D. sed quadratum A B* æquale est rectangulo A C B, vna cum quadrato D C, ergo rectangulum A C B maius erit eodem rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt triplum rectangulum sub partibus æquale sit quadrato totius. itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum. 5 secundi

Simili ratione ostendetur omne Problema cuius Resolutio incidit in Æquationem impossibilem, impossibile esse.

## Quomodo Problemata vana, seu negatoria cognoscantur.

### Caput tertium.

D EXpositis quæ ad cognitionem Problematum impossibilium pertinent: sequitur vt dicam quomodo Problemata vana, seu nugatoria cognoscãtur. ea enim Problematibus impossibilibus ex diametro opponuntur. nam Problema impossibile dicitur, cum id quod Problema iubet nulla ratione fieri potest. Problema autem vanum, seu nugatorium appellatur, cum id quod Problema fieri iubet quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest.

Quotiescumque igitur Resolutio Problematis rite peracta incidit in Æquationem inutilem, argumentum est Problema vanum esse, ac nugatorium. Æquationem autem inutilem voco, cum in ea eadem magnitudines ijsdem

ma-

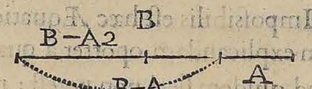
magnitudinibus adæquantur, vel etiam cum datæ magnitudines, datis tantum magnitudinibus expulso quæsito adæquantur; quia tunc nulla fit comparatio dati & quæsiti propter quem finem instituta est Æquatio. A

## Problema I.

Datam recta lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium, vnà cum quadrato partis minoris, æquale sit quadrato partis maioris.

### Resolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit & pars minor esto A, ergo maior erit B -- A, atque differentia partium erit B -- A 2. & quoniam rectangulum sub tota, & differentia partium, vna cum quadrato partis minoris, æquale sit quadrato partis maioris. B

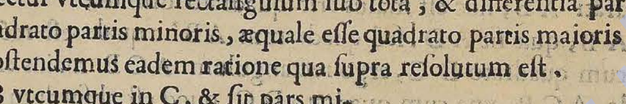



B Q - B in A 2 + A Q æquabitur B Q + A Q -- B in A 2

In hac Æquatione sunt ex vtraque parte eædem magnitudines. ergo ipsa Æquatio inutilis est, quod argumentum est Problema vanum esse, ac nugatorium. nempe vtcumque data recta linea secetur Problemati satisfieri; quod quidem verum est: demonstrauimus enim sub Theoremate primo libri primi. si recta linea secetur vtcumque rectangulum sub tota, & differentia partium, vna cum quadrato partis minoris, æquale esse quadrato partis maioris. C

Sed illud ipsum ostendemus eadem ratione qua supra resolutum est.

Secetur recta A B vtcumque in C, & sit pars minor C B, cui æqualis sumatur C D, ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico rectangulum B A D vna cum quadrato C B æquale esse quadrato A C. Quoniam enim rectangulum B A D æquale est quadrato A B, minus rectangulo A B D, hoc minus rectangulo A B C bis, cum sit B D. dupla ipsius B C. Addatur vtrobique quadratum B C. ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis; sed & quadratum A C (cum recta A C sit differentia inter A B, B C) * æquale est quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C D bis, ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadrato A C. quod erat ostendendum.




* 6. huius libri primi

## Problema II.

Datam rectam lineam secare, vt quadrata partium æqualia sint quadrato differentiæ partium vna cum duplo sub partibus rectangulo.

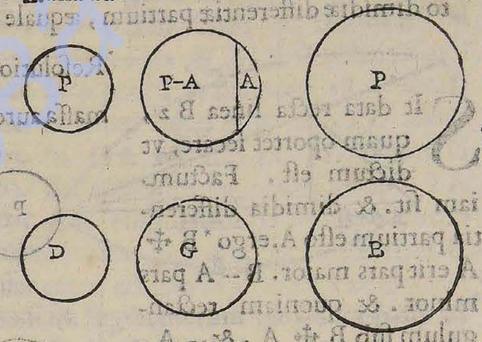
Re-



A

### Resolutio.

SIt data recta linea B 2. quá oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit & dimidia differentia partium esto A ergo pars maior * erit B + A. pars vero minor B -- A.



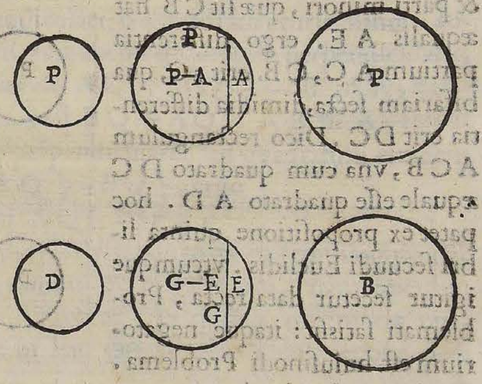

* 2. prob. libri primi

Et quoniam quadrata ex B + A & B -- A æqualia sunt quadrato ex A dupla, vna cum duplo rectanguli sub B +, & B -- A B

B Q 2 + A Q 2 æquabitur A Q 4 + B Q 2. a Q 2 hoc est B Q 2 + A Q 2 æquabitur A Q 2 + B Q 2

Hæc Æquatio inutilis est, cum in ea eædem magnitudines ijsdem magnitudinibus adæquentur. quod argumentum est Problema vanum esse, ac negatorium. idest vtcumque data recta secetur Problemati satisfieri, idque verum est. nam secta recta linea vtcumque, quadrata partium æqualia sunt quadrato differentiæ, partium, vna cum duplo rectangulo sub partibus. Hoc licet ostensum sit sub Theoremate secundo lib. primi, tamen hic quoque ex ipsa Resolutione demonstrationem eliciam.

C Secetur recta linea A B vtcumque in C. & parti minori, quæ sit C B fiat æqualis A E. ergo differentia partium A C, C B erit E C, quæ si secetur bifariam in D, erit dimidia differentia D C. Dico quadrata A C, C B æqualia esse quadrato E C, vna cum duplo rectanguli A C B. Quoniam enim A B secta est in partes æquales in D, & in partes inæquales in C D quadratum A D * æquale rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. & consequenter duplum quadrati A D æquale duplo rectanguli A C B, vna cum duplo rectanguli A C B, vna cum duplo quadrati A C, addito communi duplo quadrati D C, duplum quadratorum A D, D C æquale erit duplo rectanguli A C B, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc est vna cum quadrato E C. sed duplum quadratorum A D, D C * æquale est quadratis A C, C B, ergo quadrata A C, C B æqualia erunt duplo rectanguli A C B vna cum quadrato E C. quod erat ostendendum.




5 secundi

9 secundi

Re-

## Problema III.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus vna cum quadrato dimidiæ differentiæ partium, æquale sit quadrato semissis datæ.

Resolutio.

SIt data recta linea B 2, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit. & dimidia differentia partium esto A. ergo * B ✣ A erit pars maior. B -- A pars minor. & quoniam rectangulum sub B ✣ A, & -- A, vna cum quadrato ex A æquale est quadrato ex B

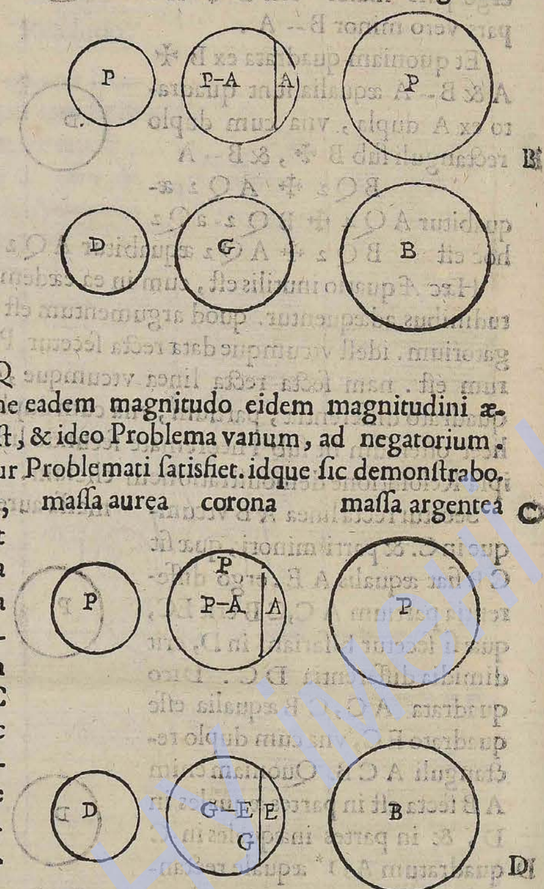
co. 2. probl. 1 lib. primi

BQ - AQ ✣ AQ æquabitur BQ

hoc est BQ æquabitur BQ

Cum igitur in hac Æquatione eadem magnitudo eidem magnitudini æquetur, ipsa Æquatio inutilis est, & ideo Problema vanum, ad negatorium. vtcumque enim data recta secetur Problemati satisfiet. idque sic demonstrabo.

Secetur A B vtcumque in C, & parti minori, quæ sit C B fiat æqualis A E. ergo differentia partium A C, C B. erit 2 C, qua bifariam secta, dimidia differentia erit D C. Dico rectangulum A C B, vna cum quadrato D C æquale esse quadrato A D. hoc patet ex propositione quinta libri secundi Euclidis. vtcumque igitur secetur data recta, Problemati satisfit: itaque negatorium est huiusmodi Problema. quod erat ostendendum.




## Problema IV.

Super data base triangulum constituere, quod habeat differentiam crurum dimidiæ basi æqualem.

Re-



Resolutio.

SIt data basis B 2, super qua oportet triangulum constituere, cuius crurum differentia sit æqualis dimidiæ basi. Factum iam sit. ergo differentia crurum erit B. è vertice autem trianguli cadat perpendicularis. in basim secans ipsam basim in duo segmenta, quorum differentia esto A. ergo segmentum maius erit B ✣ A ½, segmentum vero minus B -- A ½. & quoniam est, vt * differentia crurum trianguli ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, hoc est vt B ad A, ita B 2 ad A 2, ergo A 2 erit aggregatum crurum, sed differentia eorundem crurum est B, ergo crus maius erit * A ✣ B ½ crus autem minus A -- B ½. & quoniam quadratum cruris maioris * æquale est quadratis, quæ fiunt à segmento maiori, & à perpendiculari. si à quadrato cruris maioris auferatur quadratum segmenti maioris, remanebit quadratum perpendicularis. à quadrato igitur ex A ✣ B ½ quod est AQ ✣ BQ ¼ ✣ B in A, auferatur quadratum ex B ✣ A ½ quod est BQ ✣ AQ ¼ ✣ B in A. remanebit AQ ¼ BQ ¼ pro quadrato perpendicularis.

Corol. ij prob. 1 lib. 1

ibid.

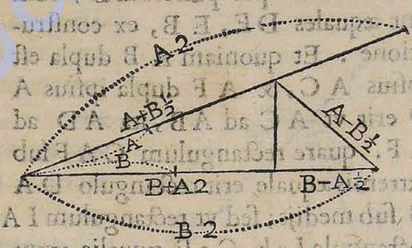
xlvij primi

Æque quoniam quadratum cruris minoris * æquale est quadratis, quæ fiunt à segmento minori, & à perpendiculari, si à quadrato cruris minoris auferatur quadratum segmenti minoris, remanebit quadratum perpendicularis, à quadrato igitur ex A -- B ½, quod est AQ ✣ BQ ¼ -- B in A, auferatur quadratum ex B -- A ½, quod est BQ ✣ AQ ¼ -- B in A, remanebit AQ ¾ -- BQ ¼ pro quadrato perpendicularis, sed quadratum eiusdem perpendicularis inuentum est esse AQ ¾ -- BQ ¾. ergo

ibid.

AQ ¾ -- BQ ¾ æquabitur AQ ¾ -- BQ ¾.

Inutilis est igitur hæc Æquatio, dum ex vtraque parte eædem magnitudines existant, atque adeo Problema vanum, ac nugatorium. nam super eadem base innumera triangula constituentur, in quibus differentia crurum æqualis erit dimidiæ basi, vt in hac quæ sequitur compositione perspicuum erit.

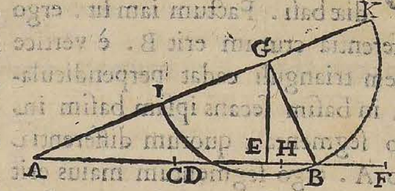



Compositio.

SIt data basis A B, super qua constituere oportet triangulum, vt differentia eius crurum sit æqualis dimidiæ basi. Secetur A B bifariam in C, & sumatur A D maior, quam A C, & reliqua D B secetur bifariam, & ad rectos angulos in E à recta G E, & duplicetur A D in F, & secetur C F bifariam in H, & centro A interuallo A H describatur arcus secans rectam E G in G, & connectantur G A, G B. Dico triangulum

G A B, esse de quo quæritur.

Centro enim G interuallo G D describatur circulus secans crus A G in I, productum vero in K. is circu-
3 tertij lus* transibit per punctum D; cum sint æquales D E., E B, ex constructione. Et quoniam A B dupla est ipsius A C, & A F dupla ipsius A D erit vt A C ad A B, ita A D ad A F. quare rectangulum C A F sub extremis æquale erit rectangulo D A
eo. 3 6 sexti B sub medijs; sed vt rectangulum I A K* æquale est rectangulo D A B. ergo rectangula I a k, C a F æqualia erunt, sed rectangulum quidem I a k æquale est quadrato a I, & rectangulo a I K, hoc est & rectangulo a I G bis; rectangulum vero C a F æquale est quadrato a C, & rectangulo a C F, hoc est & rectangulo A C H bis. ergo quadratum a I, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadrato a C, & rectangulo a C H bis.




Et quoniam æquales sunt a G, a H, ex constructione, erunt æqualia & eorum quadrata; sed quadrato a G æqualia sunt quadrata a I, I G, & rectangulū a I G bis; quadrato autem a H, æqualia sunt quadrata a C, C H, & rectangulū a C H bis. ergo quadrata a I, I G, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadratis a C, C H. & rectangulo a C H bis, sed quadratum a I, & rectangulum a I G bis, ostensa sunt æqualia quadrato a C, & rectangulo a C H bis. ergo & reliquum quadratum I G reliquo quadrato C H æquale erit. vnde & recta I G æqualis rectæ C H; quare cum sint æquales a G, a H, erit & reliqua a I æqualis reliquæ a C. hoc est dimidiæ a B. Ad datam igitur basim a B constitutum est triangulum G a b, cuius crurum differentia æqualis est dimidiæ basi; quod erat faciendum.

## Scholium.

In compositione Problematis sumpta est in base A B, recta a D pro differentia segmentorum a E, E b ad libitum solummodo maior est, quam a C dimidia basis, quoniam differentia segmentorum basis trianguli maior est, quam differentia crurum, vt demonstrauimus in libro secundo Lem. primo ante Compositionem Problematis tertij. differentia autem crurum debet esse æqualis dimidiæ basi, ex iussu Problematis, & ita constitutum est triangulū, quale Problema postulat. Itaque innumera triangula super eadem base A b possunt constitui, vt habeant eamdem conditionem, quare huiusmodi Problema vanum est ac nugatorium.

## Problema V.

Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum, ipsaq. differentia crurum sit dupla excessus, quo crus maius superat basim.

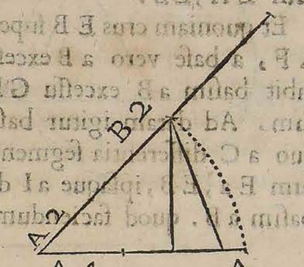




A

## Resolutio.

Sit data basis trianguli B, & oporteat iussum facere. Ponatur constitutum esse triangulum; & differentia qua crus maius superat basim esto A. ergo differentia crurum erit A 2; differentia vero segmentorum basis A 4. Et quoniam crus maius superat basim B excessu A, erit crus maius B + A, & consequenter crus minus B - A; differunt enim crura per A 2, atque adeo aggregatum crurum erit B 2. sed re-
B ctangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, * æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ergo




Th. 6 secundi

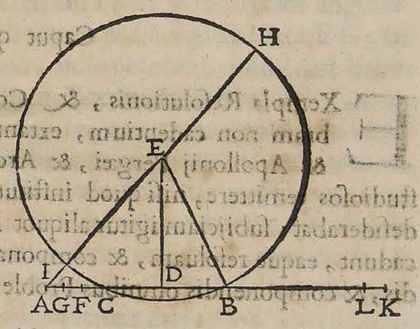
B in A 4 æquabitur B in A 4

Inutilis est hæc Æquatio cum in ea eædem magnitudines, ijsdem magnitudinibus æquentur. quare pronunciabimus Problema propositum esse nugatorium, quod quidem verum est. nam super eadem base innumera triangula possunt constitui habentia conditiones, quas Problema præscribit, vt in compositione quæ sequitur manifestum fiet.

C

## Compositio.

Sit data basis A B, super qua constituendum est triangulum habens differentiam segmentorum basis duplam differentiæ crurum, atque differentiam crurum duplam excessus, quo crus maius superat basim. Abscindatur à data base A B quæcumq; portio A C, reliqua vero C b secetur bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis indefinita D E, rursus secetur A C bifariam in F, similiter & a f
D secetur bifariam in G, & centro b interuallo b G describatur arcus secans perpendicularem D E in E, & connectantur E A, E b. Dico in triangulo E A b differentiam segmentorum A D, D b duplam esse differentiæ crurum E A, E b, atque differentiam crurum duplam excessus, quo crus maius E A superat basim A b. Centro enim E interuallo E b describatur circulus secans crus A E in I, ipsumq. productū in H, & duplicetur a b in K, & sumatur k L æqualis a G, ergo reliqua b L æqualis erit b G, vel b E, atque adeo tota G L æqualis diametro I H, sed ipsa G L æqualis est F k; cum sint G E, L K æquales. ergo & F K æqualis erit I H, est autem



& rectangulum I A H * æquale rectangulo C A B, hoc est duplo rectanguli co. 36 certij
F a B, seu quod idem est rectangulo F a k, quare A I * æqualis erit a F. ita- A
que A C differentia segmentorum A D, D B, dupla erit A I differentiæ cru- the. 3 lib. 2
rum E A, E B.

Et quoniam crus E B superatur à crure quidem E A excessu A I, hoc est A F, à base vero a B excessu a G ex constructione. ideo crus E a superabit basim a B excessu G F, cuius dupla est a F, vel a I differentia crurum. Ad datam igitur basim a B constitutum est triangulum E a B, in quo a C differentia segmentorum a D, D B dupla est a I differentiæ crurum E a, E B, ipsaque a I dupla est excessus, quo crus maius E a superat basim a B. quod faciendum erat.

B

Scholium.

In hac Problematis Compositione sumpta est in base a B recta a C pro differentia segmentorum a D, D B quanta libuit, & constitutum est triangulum conditiones habens, quas Problema exigit; itaque innumera triangula possunt super eadem base constitui, cum in data base a B sumpto puncto C vbicumque, cæterisque, vt supra peractis, Problematis satisfiat; quare Problema huiusmodi vanum est, ac nugatorium. Atque simili ratione ostendemus omne Problema, cuius resolutio rite peracta incidit in Æquationem inutilem vanum esse, ac nugatorium.

C

De Resolutione, & Compositione Problematum, quæ sub Algebram non cadunt.

Caput quartum.

EXempla Resolutionis, & Compositionis Problematum sub Algebram non cadentium, extant multa in libris Pappi Alexandrini, & Apollonij Pergæi, & Archimedis; quare potui ad ea exempla studiosos remittere, nisi quod institutio mei operis hanc quoque sui partem desiderabat; subijciam igitur aliquot Problemata, quæ sub Algebram non cadunt, eaque resoluam, & componam, Methodo, qua veteres in resoluendis, & componendis omnibus Problematibus vtebantur.

D

Problema I.

Rombo dato, & vno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

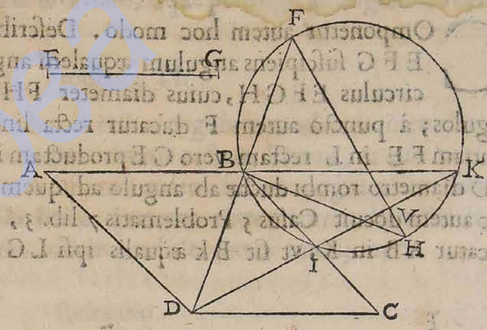
Resolutio.

SIt datus rombus A B C D; data autem recta linea E G, & producatur A B indefinite in k. Oportet sub angulo C b K aptare rectam lineam ipsi E G æqualem, ita vt ad oppositum angulum A D C pertingat.

Sit



A Sit iam factum ducta nimirum recta D I k sit I K æqualis E G, & circa triangulum B I K describatur circulus quem D B diameter rombi producta secet in F. deinde secetur angulus C B k bifariam à recta B H secante circulum in H, & connectatur F H.




Quoniam igitur B D diameter rombi secat angulum A B C bifariam, angulus D
B B C æqualis erit angulo A B D; sed & angulus F B k, æqualis est angulo A B D; sunt enim ad verticem, ergo angulus D B C æqualis erit angulo F B k; sed & anguli C B H, k B H sunt æquales, ex constructione. ergo per additionem æqualium æqualibus anguli F B H, D B H, æquales erunt, ac proinde recti; quare semicirculus erit F B, I H, atque adeo recta F H diameter circuli, & cum sint æquales anguli I B H, K B H, ex constructione; erunt æquales & circumferentiæ I H, H K quibus ipsi anguli insistunt, & consequenter æquales erunt & reliquæ circumferentiæ I F, k F, ac proinde æquales & anguli F H I, F H k æqualibus circumferentijs insistentes. est autem
C & recta I H æqualis rectæ H K, cum sint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis vtrique triangulo I V H, K V H. ergo erunt * æquales, in figura sunt intelligendæ I H H k iungæ ducta
& I V, V k. quare diameter F H secat rectam I K in V ad rectos angulos. & quoniam recta I k data est magnitudine, cum sit æqualis datæ E G; intelligatur ipsa I K, positione quoque data, nulla positionis rombi dati habita ratione, tanquam non esset positione datus; hoc modo liberum est datæ rectæ lineæ E G æqualem alteram I K. positione & magnitudine datam exponere. Quoniam igitur data est I k positione, & magnitudine, & datus angulus I B K magnitudine, cum sit angulus externus dati rombi; portio circuli I B k erit * positione, & magnitudine data. quare & totus circulus, sed & diameter F H * datur positione. ea enim secat rectam I k positione, & def. 8. dat. 29 dat.
D magnitudine datam bifariam, & ad angulos rectos, ergo * dabitur & punctum F. cum sit in circumferentia circuli positione dati. 25 dat.

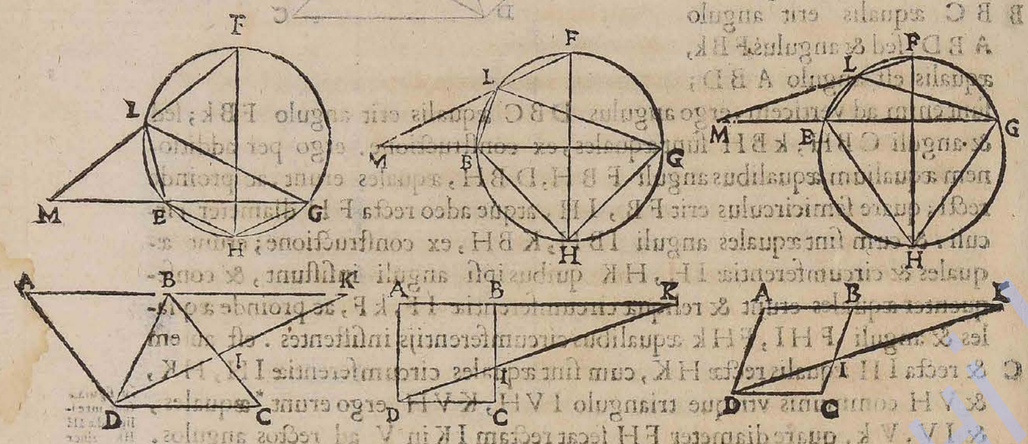
Ducatur autem à puncto f recta f B D secans circumferentiam f B I in B; rectam vero k I productam in D, ita vt B D sit æqualis diametro rombi ductæ ab angulo, ad quem aptata pertingit. hoc autem fieri posse demonstrauimus lib. 3. Probl. 7. casu 5. ergo ipsa f D positione data erit atque * dabitur, & punctum B cum sit in circumferentia circuli positione dati, sed datur & punctum K, cum sit extremitas rectæ I k positione, & magnitudine datæ, ergo dabitur & recta B K. 25 dat.

Com-

A

## Compositio.

COmponetur autem hoc modo. Describatur in E G portio circuli E F G suscipiens angulum æqualem angulo C B K, & compleatur circulus E F G H, cuius diameter F H secet ipsam E G ad rectos angulos; à puncto autem F ducatur recta linea F L M secans circumferentiam F E in L rectam vero G E productam in M, ita vt L M sit æqualis B D diametro rombi ductæ ab angulo ad quem aptanda pertingere debet; hoc autem docuit Casus 5 Problematis 7 lib. 3, & connectatur L G, & producatur A B in K, vt sit B k æqualis ipsi L G. & connectatur D k secans




latus B C in I. Dico rectam I K æqualem esse datæ E G. Connectantur enim L E, E H, H G. Quoniam igitur portio circuli E F G suscipit angulum æqualem angulo C B K, angulus E L G æqualis erit angulo C B K. B

Et quoniam quadrilateri L E, H G in circulo anguli E H G, E L G oppositi æquales sunt duobus rectis, & æquales quoq; duobus rectis anguli A b C, C b K, erunt anguli A b C, C b K angulis E H G, E L G æquales, & ablatis æqualibus angulis C b K, E L G, reliqui A b C, E H G æquales erunt. sed angulum A b C secat b D diameter rombi bifariam; similiter & angulũ E H G secat bifariam diameter circuli F H, cum sint æquales anguli E H G, F H G æqualibus circumferentijs E F, F G insistentes. ergo anguli D b C, E H F æquales erunt. sed angulus E H F quadrilateri E H, F L in circulo æqualis est angulus M L E externo, & opposito. ergo & angulus D b C æqualis erit angulo M L E. quare additis æqualibus angulis C b K, E L G, totus angulus D b k toti angulo M L G æqualis erit; sed & latera D b, b k lateribus M L, L G æqualia sunt, alterum alteri, ex constructione, triangula igitur D b k, M L G æqualium erunt laterum, & angulorum. atque adeo angulus K, æqualis erit angulo L G M. sed & angulus I b k trianguli I b K æqualis est angulo E L G trianguli, E L G, vt demonstrauimus, & latus b k æquale lateri C



A teri L G, ex constructione; erit & basis I k basi E G æqualis. Sub angulo igitur C B k aptata est I k æqualis E G datæ, atque pertingit ad angulum A D C, quod erat faciendum. 26 primi

## Problema II.

Rombo dato, & productis duobus lateribus angulum rombi continentibus inter ipsa latera aptare magnitudine datam rectam lineam, & quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem ipsam magnitudine datam non esse minorem ea recta linea, quæ per extremitatem diametri rombi ad rectos angulos ducta, inter producta latera interijcitur.

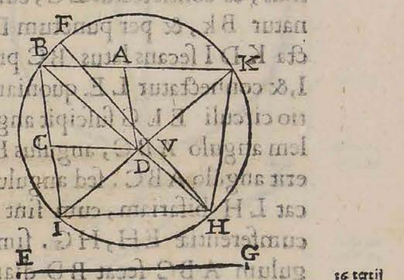
B

## Resolutio.

SIt datus rombus A B, C D, data autem recta linea E G. Oportet inter producta latera B A, b C aptare rectam lineam æqualem ipsi E G, ita vt per punctum D transeat.

Sit iam aptata recta I D K æqualis E G, & circa triangulum I B K describatur circulus, quem B D diameter rombi producta secet in H; erunt igitur æquales anguli I B H, H B K. diameter enim rombi b D secat angulum C B A bifariam. quare æquales erunt & circumferentiæ I H, H k, quibus ipsi anguli insistunt, & æquales rectæ I H, H K. agatur autem diameter circuli H F secans rectam I K in V. cum

C igitur æquales sint circumferentiæ I H, H K erunt æquales & reliquæ circumferentiæ I F, K F. quare & anguli F H I, F H K ipsis circumferentijs insistentes æquales erunt. est autem & I H æqualis H K, cum sint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis est vtrique triangulo I V H, k V H, ergo erunt æquales & I V, V H: quare diameter F H* secat rectam I K ad rectos angulos. Et quoniam I k data est magnitu-




3 6 tertij

D dine, cum sit æqualis datæ E G intelligatur ipsa I K positione quoque data, nulla positionis rombi dati habita ratione, ac si non esset positione datus.

Quoniam igitur data est I k positione, & magnitudine, & datus angulus I B k magnitudine. cum sit angulus dati rombi portio circuli I B k; erit* positione, & magnitudine data. quare & totus circulus, sed* datur positione, & diameter F H secans bifariam, & ad rectos angulos rectam I K positione, & magnitudine datam, ergo* dabitur & punctum H, cum sit & circũferentia circuli positione data. Ducatur autẽ à puncto H recta H D B secans rectã V I in D, circũferentiam vero I F in B, ita vt D b sit æqualis diametro rombi ductę, ab

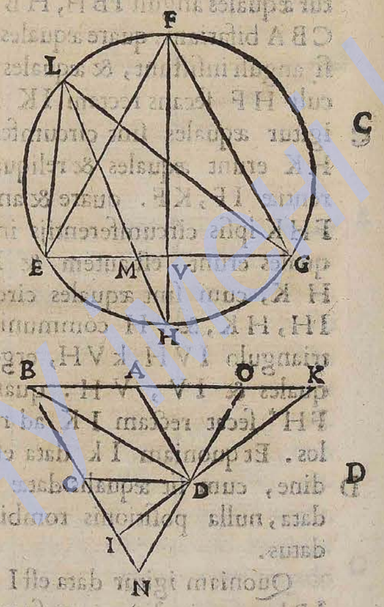
def. 8 dat. 29 dat. xxv dat.

angulo ad quem aptata pertingit, quemadmodum docet Casus quartus Problematis 7 lib. 3. ergo ipsa H B positione data erit. quare* dabitur & punctum B, cum sit in circumferentia circuli positione. & magnitudine dati, sed datur & punctum k, cum sit extremitas rectæ I k positione & magnitudine datæ. ergo & recta B k positione & magnitudine data erit. A

* 35 dat.

Compositio.

COmponetur autem hoc modo, ducatur rombi diameter B D, cui ad rectos angulos per punctum D ducatur recta N D O secans producta rombi latera in punctis N O. & si quidem O N sit æqualis E G, factum iam erit, quod proponebatur. si vero E G sit maior, quam O N, B minor autem esse non potest sic determinatum est. describatur in E G portio circuli E L G susciens angulum æqualem angulo A B C, & compleatur circulus E L, G H, cuius circumferentia E k G secetur bifariam in H, à quo puncto ducatur diameter H F secans rectam E G in V. eam secabit bifariam, & ad rectos angulos. ab eodem puncto H ducatur recta H M L, secans E V in M, circumferentiam vero E F in L, ita vt M L sit æqualis B D diametro rombi, quemadmodum docuit Casus 4 Probl. 7. lib. 3. ipsa autem D B minor est quam V F, vt infra demonstrabimus, & connectatur L G, cui æqualis ponatur B k, & per punctum D ducatur recta K D I secans latus B C productum in I, & connectatur L E. quoniam igitur portio circuli E L G suscipit angulum æqualem angulo A B C, angulus E L G æqualis erit angulo A B C. sed angulum E L G secat L H bifariam, cum sint æquales circumferentiæ E H, H G. similiter & angulum A B C secat B D diameter rombi bifariam. ergo angulus H L G trianguli M L G, æquales erit angulo D B K triãguli B D k. est autem & latus L G lateri B K æquale, atque latus L M lateri B D ex constructione. ergo triangula M L G, D B k æqualium erunt laterum, & angulorum, itaque angulus L G M æqualis erit angulo B k D. Cum igitur trianguli L G E angulus L G E æqualis sit angulo b k I trianguli b k I, & angulus E L G æqualis angulo I b K, vt est demonstratum, atque latus L G æquale lateri b K, ex constructione; erit & E G ipsi I K æquale. Itaque inter producta rombi latera b A, b C aptata




C

D

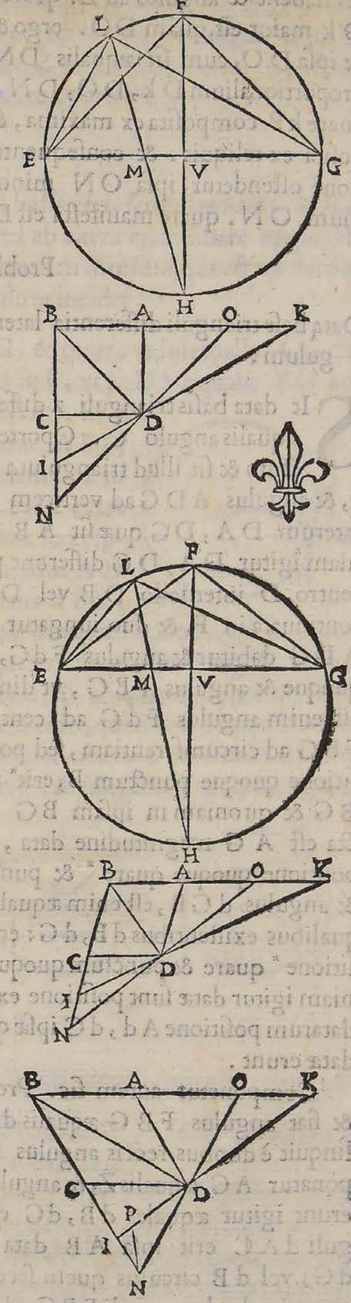


A ta est recta linea k I æqualis datæ E G, eaque transit per punctum D. quod erat faciendum.

At vero B D minorem esse quam V f sic demonstrabimus. Connectantur E F, F G. Quoniam igitur portio circuli E L G suscipit angulum æqualem angulo N B A angulus E F G, æqualis erit angulo N B O; quare & dimidius dimidio, nempe angulus V F G angulo D B O, angulos enim E F G, N B O secant re- B ctæ F V, B D bifariam, sed & angulus F V G æqualis est angulo B D O, cum sit vterque rectus. ergo & reliquus reliquo æqualis erit, quare similia erunt triangula B D O, F V G. vt igitur O D ad E B, ita erit G V ad V F; sed O D minor est, quam G V, cum O N dupla ipsius O D minor sit, quam G E dupla rectæ G V, ergo & D B minor erit, quam V F. quod erat ostendendum.

Determinauimus oportere rectam E C G non esse minorem quam O N; ipsa enim O N minima est omnium, quæ per punctum E ductæ inter producta latera B A, B C interijciuntur, idque ita fit manifestum.

Ducatur per punctum D aliâ vtcumque recta linea I D k. Quoniam igitur æquales sunt anguli D B N, D B O, & æquales quoque B D N, B D O, quia recti; erit & reliquus D N B, reliquo D O B æqualis. quare similia erunt trian- D gula B D N, B D O, & æqualia quoque, cum latus B D commune sit vtrique. vnde N D æqualis erit ipsi D O, & quoniam angulus D N B ostensus est æqualis angulo D O B, qui maior est angulo K videliter interno, & opposito; erit & angulus D N B maior angulo k, ab angulo igitur D N B abscindatur angulus D N B æqualis angulo k æquiangula erunt triangula D P N, D O K, quoniam æqua-



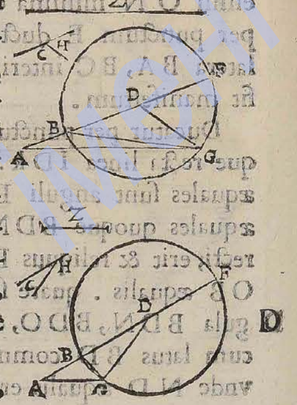

les

les habent & angulos ad D. quare vt D K ad D O, ita erit D N ad D P, sed A
D k maior est, quàm D O. ergo & D N maior erit, quàm D P. atque adeo & ipsa D O, cum sit æqualis D N, maior erit, quàm D P. itaque quatuor proportionalium D k, D O, D N, D P minima est D P, maxima vero D k. quare k P composita ex maxima, & minima maior erit. quam O N composita ex reliquis. & consequenter K I multo maior. Atque eadem ratione ostendetur ipsa O N minor omnibus alijs. Minima est igitur omnium O N. quare manifesta est Determinatio.

## Problema III.

Data base trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum. B

SIt data basis trianguli z differentia laterum A B angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum & sit illud triangulum D A G cuius basis A G esto æqualis ipsi z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum D A, D G quæsit A B esto positione, ac magnitudine data. Quoniam igitur D A, D G differunt per A B erunt D B, D G æquales, itaque centro D interuallo D B vel D G describatur circulus quem secet A D continuata in F, & duo iungatur D G. Quoniam igitur datus est angulus A D G dabitur & angulus F d G, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus F B G, vt dimidius anguli F d G C
est enim angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, sed positione est B d, & po-
29 dat. sitione quoque punctum B, erit* igitur positione & B G & quoniam in ipsam B G à dato puncto A du-
31 dat. 25 dat. cta est A G magnitudine data, dabitur* ipsa A G positione quoque quare* & punctum G, sed datur A & angulus d G B, est enim æqualis angulo d G B, æ-
29 dat. 25 dat. qualibus existentibus d B, d G: ergo dabitur* G d positione* quare & punctum quoque d dabitur. Quoniam igitur datæ sunt positione extremitates A, d, G, D
datarum positione A d, d G ipsæ quoque* magnitudine datæ erunt.



Componetur autem sic. Producatur A B in F, & fiat angulus F B G æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C: hoc est dimidio anguli H & in B G ponatur A G æqualis Z, & angulo G B d æqualis constituatur angulus B G d erunt igitur æquales d B, d G quare differentia laterum d A, D G trianguli d A C erit ipsa A B data. Describatur ex d centro ad interuallum d G, vel d B circulus quem secet A F in F, erit igitur angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, sed eiusdem anguli F B G



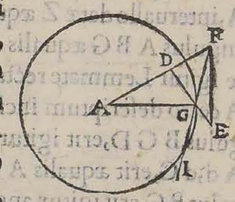


A duplus est quoque & angulus H ex constructione, ergo angulus F D G angulo H æqualis erit, vnde & angulus A D G ad verticem trianguli æqualis angulo C: est autem & basis a G æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum d a G, quod facere oportebat.

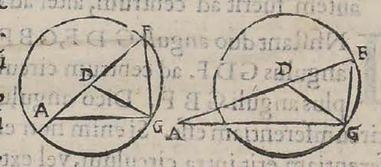
### Lemma.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, basis vero semidiameter, & ducatur linea recta; non ex centro circuli, sed ab altera extremitate aggregati laterum, constituens cum eo angulum æqualem dimidio, qui est ad verticē trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

B SIt triangulum D A G, cuius basis A G, & centro A interuallo A G describatur circulus, & producatur A D in F, vt sit D F æqualis B G aggregatum igitur laterum A D, D G erit A F: à puncto autem F ducatur F I, faciens angulum A F I, æqualem dimidio anguli A D G; Dico ipsam F I in circulum incidere, si enim non incidit, cadit extra qualis est F E. itaque continuetur D G, donec secet ipsam F E in E. Quoniam igitur externus angulus A D E trianguli d E F æqualis est duobus internis d F E, d E F, quorum vnus nempe D F E, ponitur dimidius ipsius A d E erit & reliquus d E F ipsius A d E dimidius æquales igitur erunt anguli d F E,
C d E F, & ideo æquales rectæ d F, d E quod est absurdum, ponitur enim d F æqualis d G. Recta igitur F I in circulum incidet, quod erat demonstrandū.



Aliter sit triangulum d A G, cuius basis A G, & centro d interuallo d G, describatur circulus, secans A d productam in F, & iungatur F G, erit angulus A F g æqualis dimidio anguli A D G: hic enim est ad centrum ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallū A G circulus describatur ipsum tanget, vel secabit recta linea F G, ideoq. in ipsū circulum incidet, quod erat demōstrādū.



D

## Problema IV.

Data base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulū. Probl. 15 lib. ij

SIt data basis trianguli Z aggregatum laterum A B, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

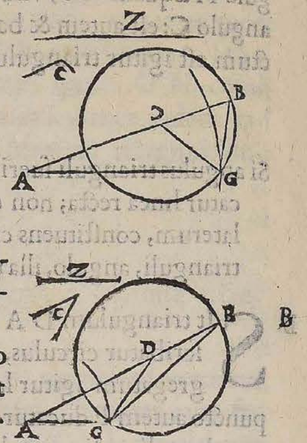
Factum iam sit, & sit illud triangulum d A G, cuius basis A G esto æqualis ipsi Z, aggregatum vero laterum A d, d G æquale ipsi A B, magnitudine, ac positione datæ, & angulus A d G ad verticē æqualis angulo C, iūgatur autē B g. Quoniam igitur composita ex A d, d G æqualis est ipsi A B ablata cōmuni A d, reliqua d G, reliquæ d B æqualis erit, & ideo circulus ex d centro descri-

ptus ad interuallū D g, transibit per B; describatur erit igitur angulus A d g ad A centrum. duplus anguli B ad circumferētiam, sed datur angulus A D G, ergo dabitur & angulus B, & est

29 dat. positione A B, ergo* & B G positione erit, sed in ipsam B G à dato puncto A ducta est A G magnitudi-

xxxi dat. ne data, ergo dabitur* ipsa A G positione quoque, &

25 dat. xxix dat. datum* erit punctum G, & data* quoque positione G D, datur enim angulus D g B, quia æqualis est dato D B G æqualibus existentibus D B, D G, quare & pūctum D dabitur. Quoniam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione A D, D G, ipsæ quoque magnitudine datæ erunt.







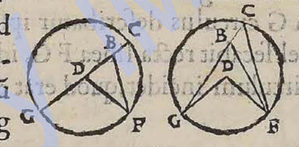
B

Componetur autem Problema hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali describatur circulus, & fiat angulus A B G æqualis dimidio anguli C ex antecedēte igitur Lemmate recta B G incidet in circulum sub A cētro descriptum incidat in G, & iungatur A G, & fiat angulo B æqualis angulus B G D, erit igitur D G æqualis D B addita communi A D composita ex A d, d G, erit æqualis A B. Centro autē D interuallo d B, vel d G describatur circulus B G erit igitur angulus A d g ad centrū duplus anguli B ad circūferentiā, sed & angulus C duplus est anguli B ex constructione, ergo angulus A d E angulo C æqualis erit, est autem & basis A G æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum D A G, quale construendū proponebatur. C

## Lemma.

Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli insisterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.

INsistant duo anguli G D F, G B F eidem circuli circumferentiæ G F, & si angulus G D F. ad centrum circuli, atque duplus anguli G B F. Dico angulum G B F ad circumferentiam esse. Si enim non est ad circumferentiam erit intra circulum, vel extra. Sit primū si fieri potest intra circulum, & producatur B g vsque ad circumferentiam in C, & iungatur F C, erit igitur angulus G D F ad cētrum duplus anguli g C F ad circumferentiam, sed duplus est & anguli g B F ex hypotesi, ergo angulus g B F angulo g C F æqualis erit externus interno, quod est absurdum, angulus igitur g B F non est intra circulum.



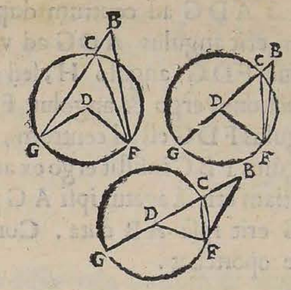

D




Deinde sit angulus g B F extra circulum ipsum igitur circulum secabit, vel vtraque rectarum G B, F B, vel saltem vna secet ipsa g B in puncto C, & iungatur F C erit igitur angulus g D F ad centrum duplus anguli G C F ad circumferentiam, sed duplus est & anguli B ex hypotesi, er-



A go angulus G C F angulo B æqualis erit externus interno, quod est absurdum. angulus igitur D B F non est extra circulum, sed neque intra circulum, vt est ostensum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonstrandum.




## Problema V.

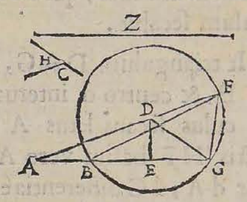
Data differentia segmentorum basis trianguli aggregato laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

B SIt data differentia segmentorum basis trianguli A B aggregatum laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Inuentum iam sit, & sit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E, & centro D interuallo D G quod sit minus latus describatur circulus secans latus A D productumin F, basim vero A G in B erunt* igitur B E, E G æquales, vnde differentia segmentorum A E, E G erit A b esto igitur ipsa A b positione, ac magnitudine data, composita vero ex lateribus A D, D G, hoc est ipsa A F esto

C æqualis Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & iungantur B F, F G. Quoniam igitur datur angulus A D G dabitur angulus F D G, vt reliquus è duobus rectis dabitur quoq; angulus F B G, vt dimidius anguli F D g angulus enim F D G ad centrum duplus est anguli F B G ad circumferentiam positione igitur* erit B F, quia positione est & A B, & quoniam datum est punctum A, à quo in B F ducta est A f magnitudine data dabitur* ipsa A f positione quoq; vnde dabitur* & punctum F, & quoniam datus est angulus A D g ad centrum datus erit & angulus A f G circumferentiam, vt eius dimidius, atque data* erit positione f G, vnde datum* erit & punctum G, & data* quoq; positione G D, quia datus est angulus D G f etenim æqualis est dato angulo D f g ratione æqualium laterum D G, D f, quare datum* erit & punctum D. Quo-

D niam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione A D, D G, A G, ipsæ quoque magnitudine erunt.




3 tertij

Componetur autem hoc modo. Producatur A B in G, & fiat angulus G B F æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C, hoc est dimidio anguli h, & in B F ponatur A F æqualis Z, & fiat angulus A F G, æqualis dimidio anguli C, angulus vero F G D æqualis angulo A f G erunt igitur æquales d G, d F, addita communi A d composita ex lateribus A d, d G, trianguli d A G æqualis erit ipsi A f, hoc est Z datæ.

Deinde centro D interuallo D G, vel D f describatur circulus F E. Quoniā igitur angulus C duplus est anguli A F G ex constructione similiter & an-

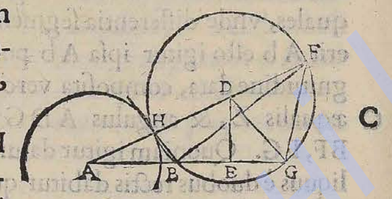
xxix dat. 31 dat. xxv dat. xxix dat. 25 dat. 29 dat. 25 dat.

gulus A D G ad centrum duplus eiusdem anguli A F G ad circumferen. A
tiam erit angulus A D G ad verticem dato angulo C æqualis, quare & angulus F D G angulo H, sed angulus H duplus est anguli F B G ex constructione, ergo & angulus F D G eiusdem anguli F B G duplus erit, sed angulus F D G est ad centrum, & insistit circumferentiæ F G, cui etiam & angulus F B G insistit ergo ex antecedente Lemmate angulus F B G ad circũfe-
3 tertij rentiam erit iã agatur ipsi A G perpendicularis D E erunt igitur* æquales B E, E G erit ipsa A B data. Constructum est igitur triangulum D A G, vt facere oportebat.

## Lemma I.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia vero laterum semi- B
diameter, & ducatur recta linea non ex centro circuli, sed ab altera extremitate differentiæ segmentorum basis constituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui est ad verticem trianguli angulo, illa recta linea circulum secabit.

SIt triangulum D A G, in quo perpendicularis d E secet basim A G in E, & centro d interuallo d G, quod sit minus latus describatur circulus secans latus A d productum in punctis H F basim vero A G in B; laterum igitur d A, d G differentia erit A H, differentia vero segmentorum A E, E G erit A B, iungantur autem B H, F G.




Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H est in circulo anguli H B G, H F G ex aduerso duobus rectis sunt æquales, sed & anguli H B G, H B A æquales sunt duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt, dempto communi angulo H B G reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, sed angulus H F G ad circumferentiam dimidius est anguli H D G ad centrum ergo & angulus H B A eiusdem anguli A D G dimidius erit. Dico igitur circulum sub A centro interuallo A H descriptum secari à B H: manifestum est autem ipsam B H in eum incideret. Quoniam punctum H est in circumferentia, si igitur eum non secat tangit, tangat si fieri potest contactus erit in H. D
18 tertij & iungatur B F ergo* rectus erit angulus A H B, & ideo æqualis recto
29 primi H B F qui est in semicirculo; quare parallelæ* erunt A F, B F, quod est absurdum. conueniunt enim in F. Non igitur B H tangit circulum, cuius centrum A sed secat, quod erat demonstrandum.

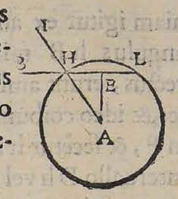
## Lemma II.

Secet circulus sub A centro recta linea B H L in punctis H L, & per punctus H quod sit propius ad B ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem esse recto.

Di-



A DIuidatur enim H L bifariam in E, & iungatur A E rectus igitur erit angulus A E H, ac proinde angulus E H A recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis sunt æquales, sed angulus E H A æqualis est angulo I H B: sunt enim ad verticem, ergo & angulus I H B erit recto minor quod erat demonstrandum.

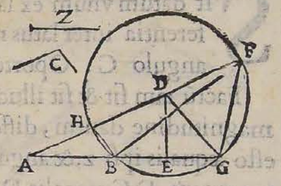



## Problema VI.

Data differentia segmentorum basis trianguli differentia laterum & angulo Prob. 20 lib. 2
verticis inuenire triangulum.

B SIt data differentia segmentorum basis trianguli A B differentia laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit & sit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E & centro D interuallo D G, quod sit minus latus describatur circulus secans latus D A in H, basim vero A G in B differentia igitur segmentorum A E, E G erit erit A B, differentia vero laterum D A, D G erit A H. Esto igitur A B positione, atque magnitudine data ipsa vero A H esto æqualis datæ Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & producatur A D vsque ad circumferentiam in F, & iungantur H B, B F, F G. Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H est in circulo, anguli H B G, H F G ex
C aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli H B G duobus rectis sunt æquales, ergo anguli H B G, H F g angulis H B g, H B A æquales erunt, auferatur vtrinque angulus H B g, reliquus igitur H F g reliquo H b A æqualis erit, sed angulus A d g ad centrum duplus est anguli A F g ad circumferentiam, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed datur angulus A D G, dabitur ergo & H B A, quare dabitur

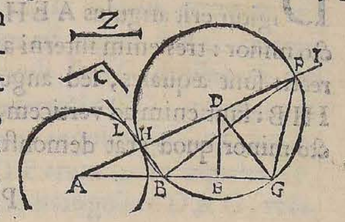



* B H positione, & quoniam à dato puncto A in- 29 dat.
ipsam B H ducta est A H magnitudine data da- 31 dat.
bitur* A H positione quoque & propter datum 29 dat.
angulum H B F est enim, rectus in semicirculo 25 dat.
data* erit B F positione & datum * quoque pun- 26 dat.
D ctum F & ideo data * magnitudine H F & quo- ibid.
niam æquales sunt H D, D F dabitur punctum D, sed datur & punctum G, ergo dabitur D G* ibid.
positione & magnitudine, sed datur & punctum A, ergo & A D, A E positione* & magnitudine datæ erunt.

Componetur autem sic. centro A interuallo rectæ Z æquali describatur circulus, & fiat angulus A B H æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur quod primo loco præmissum est Lemmate, B H secabit ipsum circulum secet in punctis H L, & per punctum H, quod sit proprius ad B ducatur recta linea A h I, ipsi autem B h ducatur perpendicularis B F. Quo-

niam

niam igitur ex antecedente quod secundo loco præmissum est Lemmate; A
angulus h B minor est recto & angulus F B h rectus, erunt ambo simul duobus rectis minores,& ideo coibunt rectæ lineæ A I, B F, coeant in F, & secetur h F bifariam in d, & centro D, interuallo D h vel D F, describatur circulus eius circumferentia transibit per B propter angulum h B F rectum. Deinde producatur A B donec secet circulum F B h in G,& iungantur D G, F G & ipsi A G ducatur perpendicularis D E erunt igitur æquales B E, E G, & ideo differentia segmentorum A E, E G erit ipsa A B data. Similiter quoniam æquales sunt D h, D G vt semidiametri differentiæ laterum A D, D G B erit A h, cui æqualis est Z data ex constructione. Superest igitur vt angulus A D G ad verticem trianguli D A G æquetur angulo C, id autem ita fit manifestum. Quoniam enim quadrilaterum F G, B h est in circulo anguli h B G, h F G ex aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli h B G, h B A sunt æquales duobus rectis, ergo anguli h B G, h F G angulis h B G, H B A, æquales erunt: dempto communi angulo H B G, reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, sed anguli H F G ad circumferentiam duplus est angulus H D G ad centrum ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed & angulus C duplus est anguli H b A ex constructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum D a G quale construendum proponebatur. C




## Problema VII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & basim, inuenire triangulum.

SIt datum vnum ex lateribus triangulum verticis ambientibus, a b: differentia inter latus reliquum & basim z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

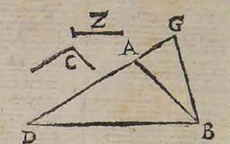
Factū iam sit & sit illud triangulū a b D, cuius latus A b esto positione, ad magnitudine datum, differentia vero inter reliquum latus a D & basim D b esto æqualis ipsi z,& angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Ponatur autem D G æqualis D B, differentia igitur ipsarum A D, D B erit A G & iungatur G B. Quoniam igitur datus est angulus D a B datus erit & angulus G a B, vt reliquus è duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum Casum partinens, in secunda vero figura quæ ad secundum Casum pertinet angulus D A B idem est quod angulus G a b, quocumque igitur Casu datur angulus G a B est autem positione a B ergo * positione est & a g, sed & magnitudine ponitur enim æqualis ipsi z, ergo * punctum g datum erit sed datum est & B, ergo * g B positione erit & magnitudine, atque adeo dabitur angulus a g B quia datur * triangulum a g B specie & in secunda figura da- D

29 dat.
27 dat.
xxvi dat.
39 dat.

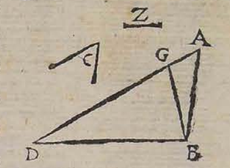


A dabitur quoq; & D g B vt reliquus è duobus rectis, itaque in vtraque figura dabitur angulus D B g. est enim æqualis ipsi D g B æqualibus existentibus D g, D B quare * B D positione erit & ideo * positione quoq; & punctū D, ac propterea * ipsæ B D, a D magnitudine quoque datæ erunt.

Componetur autem hoc modo. Constituatur angulo C æqualis angulus B a D, & ponatur ipsi z æqualis a g,& iungatur g B, & angulo D g B æqualis constituatur angulus G B D,& B D occurrat ipsi A D in D, erunt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter latus a D, & basim d B trianguli a b d erit a g hoc est z data: est autem & angulus d a b ad verticem æqualis angulo c ex constructione, & latus a b ipsum datum Constructum est igitur triangulum a b d, vt facere oportebat. B




29 dat.
25 dat.
26 dat.



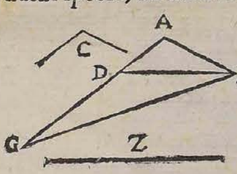

## Problema VIII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, datoque aggregato reliqui lateris, & basis, inuenire triangulum.

SIt datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus a b composita vero ex reliquo latere & base z & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet iuuenire triangulum. C

Ponatur iam factum & sit illud triangulum a b d, cuius latus a b esto positione, ac magnitudine datum, composita vero ex reliquo latere a d,& base d b esto æqualis ipsi z,& angulus ad verticem a æqualis angulo C. Producatur autem a d in G. vt sit d G æqualis d b erit igitur a G æqualis compositæ ex a d, d b & iungatur G b. Quoniam igitur positione est a b & datus est angulus A erit A G * positione data, sed data est & magnitudine ergo & * punctum G datum erit datur autem & B dabitur * ergo G B positione & magnitudine atq; adeo dabitur & angulus g, quia triangulum * A B G datur specie; est autem angulo, G æqualis angulus G B D ratione æqualium D B, D g quare & ipse G B D datus erit, positione igitur * erit B D quare & * punctum D. Quoniam igitur positione datarū d b, d a, dati sūt termini A, D, B, ipsæ magnitudine quoque datæ erunt. Componetur autē sic angulo C constituatur æqualis angulus B A G,& ponatur A G æqualis ipsi z,& iuncta G B, constituatur quoque angulus F B D æqualis angulo G erunt igitur D B, D G æquales addita cōmuni D A composita ex latere A D,& base D B trianguli A B D æqualis erit ipsi a g hoc est z datæ: est autem & angulus ad verticem A æqualis angulo C ex constructioue & latus A B ipsum datum. Constructum est igitur triangulum A B D quod facere oportebat. D

29 dat.
27 dat.
26 dat.
39 dat.




29 dat.
25 dat.

FINIS.

МАТЕМАТИЧНИЙ КАБІНЕТ Ін. Фіз. Хем. Мат. ін-т Інв. № 777





A dabitur quod, & D g B vt reliquus ad duobus rectis itaque in vtraque figura dabitur angulus D B g. Est enim æqualis ipſi D g B æqualibus exiſtentibus D g, D B quare * B D poſitione erit & ideo * poſitione quoque & punctũ D, ac propterea * ipſa B D, a D magnitudine quoque data erunt.

Componetur autem hoc modo. Conſtituatur angulo C æqualis angulus B a D, & ponatur ipſi z æqualis a g, & iungatur g B, & angulo G g B æqualis conſtituatur angulus G B D, & B D occurrat ipſi A D in D, erunt ſigura D G, D B æquales, & ideo differentia inter lineas a D, & datam d B triangulo a b d erit a g hoc eſt a data: eſt autem & angulus d a b ad verticem æqualis angulo c ex conſtructione, & latus a b ipſum datum. Conſtructum eſt igitur triangulum a b d, vt fieri oportebat.

## Problema VIII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, datoque aggregato reliqui lateris, & baſis, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus a b comprehendens vero ex reliquo latere & baſi z & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & ſit illud triangulum a b d, cuius latus a b eſto poſitione, ac magnitudine datum, comprehendens vero ex reliquo latere a d, & baſe d b æquales ipſi z, & angulus ad verticem a æqualis angulo C. Producatur autem a d in G vt ſit d G æqualis d b erit igitur a G æqualis comprehensis a d, d b & iungatur G b. Quoniam igitur poſitione eſt a b & datus eſt angulus A erit A G * poſitione data, ſed data eſt & magnitudine ergo & * punctum G datum erit, datur autem & b & ducitur * ergo G B poſitione & magnitudine atq; adeo dabitur & angulus B G d, quia triangulum * A B G datum ſpecies eſt autem angulo, C æqualis angulus G B D ratione æqualium D B, D g quare & ipſe G B D datus erit, poſitione igitur * erit B D quare & * punctum D. Quoniam igitur poſitione datarũ b, d a, dati ſũt termini A, D, B, ipſe magnitudine quoque datæ erunt. Componatur autẽ ad angulo C conſtituatur æqualis angulus B A C, & ponatur A C æqualis ipſi z, & iungatur C B, conſtituatur quoque angulus B B D æqualis angulo G eruntq; ſigura D B, D G æquales addita communi D A comprehensa ex latere A D, & baſe D B triangulo A B D æquale erit ipſi a g hoc eſt a datæ eſt autem & angulus ad verticem A æqualis angulo C ex conſtructione & latus A B ipſum datum. Conſtructum eſt igitur triangulum A B D quod facere oportebat.

FINIS.

HBOMMEH.ru Мечникова

133

НБ ОНУ імені І.І.Мечникова