106

340

Bernard

LES ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DU CORPS,

QUI COMPRENNENT LES ELEMENS d'Euclide & l'Analiſe ; les plus belles Propoſitions d'Archimede touchant le Cercle, la Sphere, le Cylindre & le Cone.

Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Seconde Edition revûë & augmentée.

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë ſaint Jacques, à l'Occaſion.

M. DC. XCV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

PREFACE.

OU L'ON FAIT VOIR L'UTILITE' de la Géometrie : ce qu'elle est ; & quels sont ses Principes.

APRES avoir consideré les proprietés de la Grandeur en général dans le Traité que j'en ai publié, je recherche celles du corps, qui est une des especes de la grandeur. Quoiqu'il ne s'agisse pas en particulier de la terre ; cependant parce que de tous les corps elle est la plus connuë, & que c'est la nécessité de la mesurer & de la partager, qui a porté les hommes à cultiver les Mathematiques ; la Science du corps en general que nous traitons ici, s'apelle Geométrie, *c'est à dire, la Science de la mesure de la terre. L'utilité de cette Science est évidente, puisqu'elle donne les Elemens de l'Astronomie, de la Gnomonique, de la Marine, de l'Optique, de l'Architecture, des Fortifications, des Mechaniques, & généralement de toutes les Sciences qui ont le corps pour objet, & par conséquent de la Physique,* *qui étant bien traitée, comme plusieurs Philosophes le prétendent, n'est qu'une Geometrie.*

Néanmoins ce n'est pas sur cela seul que je fonde l'estime qu'on doit faire de la Geometrie, mais sur ce qu'elle est propre pour former l'esprit, & le rendre exact, étendu & penétrant. Nous avons vû dans la Preface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'acoûtumer à considerer les choses abstraites, c'est à dire, séparées de toute matiére sensible; & que pour cette raison l'Etude de ce Traité étoit avantageuse, parce que les verités qu'on y proposoit étant expliquées sans figures, leurs idées se presentoient à l'esprit sans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui est corps; ceux donc qui ne font usage que de leur imagination, ne peuvent apercevoir les choses spirituelles. Ils ne croïent pas même qu'il y en ait, parce qu'ils n'en trouvent point d'image dans leur imagination: comme lorsque dans les tenebres on cherche quelque corps avec les mains, si l'on ne rencontre rien qui résiste, on croid qu'il n'y en a aucun.

Il est donc important de s'acoûtumer à voir sans images, & de se convaincre qu'il y a des verités qui se conçoivent autrement que les corps. Mais il ne faut pas pour cela negliger de cultiver son imagination. On en peut même tirer un grand secours pour concevoir les choses spirituelles; & c'est une nécessité dans l'état où nous nous trouvons, d'y avoir recours. En quitant Dieu nous sommes tombez dans les corps, il faut donc nous y apuïer pour nous relever, comme nous le faisons quand nous sommes tombez par terre. L'ame voit la verité qui lui est presente, & à laquelle elle est attentive: Mais les corps l'attirent vers eux par les impressions qu'ils font sur elle, & lui font perdre de vûë cette verité, à moins qu'elle n'y soit comme atachée par les corps mêmes, qui sont la cause de ses distractions. Ce qui arrive lorsque cette verité est exprimée par des signes sensibles, qui tournent l'ame vers eux, & l'obligent de voir la verité qu'ils marquent. Peu de personnes se peuvent passer de ce secours. Il y a d'habiles gens qui ne voïent rien dans un sujet lorsqu'ils le considerent par les seuls yeux de l'esprit, & qui aprés l'avoir exprimé sur le papier, aperçoivent tout ce qu'il faut voir pour en juger.

Ainsi aprés avoir lû le Traité de la Grandeur en general, & s'y être acoûtumé à concevoir les choses sans images, ce qui est trés-important pour la Religion, il est utile d'aprendre ici comme il faut se servir de son imagination; qui n'est point dangereuse à ceux qui sçavent distinguer ce que l'esprit pur conçoit d'avec ce qu'elle presente. Elle est une source de plusieurs erreurs lorsqu'on ne consulte point la raison; mais aussi il faut avoüer que ceux qui veulent trop s'élever sans s'apuier sur ce qui est sensible, sont fort sujets à l'illusion, & qu'ils s'égarent souvent dans de vaines pensées. L'ame qui est plus ocupée des corps que des autres choses spirituelles, n'aperçoit qu'à demi celles-ci. Si elle n'est donc réservée dans ses jugemens pour ne prononcer que sur ce qu'elle voit ; & si ce qu'elle considere n'est extrémement simple, comme sont les choses qui ont fait le sujet du Traité de la Grandeur, elle se trompe facilement. Dans les autres Sciences abstraites l'erreur y est toûjours à craindre. On est obligé de se contenter de vrai-semblances : ce qui n'arrive pas dans celles qui sont aidées de l'imagination, comme la Geometrie, dont les Theorêmes frapent l'esprit trop vivement pour s'y tromper, quand on les considere avec un peu d'atention. La verité ou la fausseté y paroissent trop évidemment, pour qu'on les confonde.

On trouve donc dans la Geometrie des modeles qui ne peuvent tromper, de demonstrations claires & convaincantes. Elle aprend la métode de conduire l'esprit de verité en veritez. On y voit des exemples comme dans la recherche des Sciences il faut se servir des premieres connoissances qu'on a aquises, ou qui nous sont naturelles, pour aller plus loin. L'art & le secret des Sciences ne consistent qu'à déduire des premieres veritez que Dieu a mises dans nôtre cœur, les conséquences dont elles

renferment les principes, c'est à dire, à ménager la Science naturelle ; ce que les Geometres font admirablement, comme nous l'alons faire voir, en découvrant en même tems les principes & les fondemens de la Geometrie, ce qui servira de disposition pour la comprendre avec plus de facilité.

La Geometrie est établie sur un tres-petit nombre de principes, qui se peuvent réduire à un petit nombre de veritez simples, claires, & qu'on connoit naturellement. Car par exemple de ce qu'une chose ne peut pas être, & n'être pas dans un même tems ; il s'ensuit que puisque le tout & ses parties prises ensemble ne sont qu'une même chose, il faut que le tout soit égal à ses parties : Autrement la même chose seroit & ne seroit pas. De ce principe on tire encore cette conséquence, qu'il faut que deux grandeurs égales à une même grandeur, soient égales entr'elles ; car ces trois grandeurs ne sont qu'une même chose ; ainsi si elles étoient inégales entr'elles, elles seroient & ne seroient pas.

Enfin on peut raporter à ce même principe qu'une chose ne peut pas être, & n'être pas, ces quatre Axiomes suivans.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les touts seront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les touts ſeront inégaux.

Tous ces Axiomes ne ſont fondez que ſur ce que les touts égaux ont des parties égales, & les inégaux ont des parties inégales. Or ſi les touts égaux n'avoient pas des parties égales, ils ſeroient & ne ſeroient pas.

De ces veritez ſuit une infinité d'autres veritez ; par exemple, que les moitiés de deux touts égaux ſont égales, *ou que* les doubles de ces touts ſont égaux, *&* les tiers de deux touts égaux ſont égaux ; *ou que* les triples de deux touts égaux ſont égaux, *ainſi des quarts & des quadruples & d'une infinité de ſemblables propoſitions.*

Ces veritez ſuivantes, bien qu'elles ſoient, pour ainſi dire, groſſieres, ſont des ſources tres-fecondes de pluſieurs demonſtrations, ſçavoir que le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties : *& que* ce qui eſt contenu, *ou* renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur. *Que* deux grandeurs qui conviennent en tout, lors qu'on les poſe l'une ſur l'autre, ou l'une dans l'autre, ſont égales.

*Les Geometres recourent ſouvent à ce premier principe, qu'*une choſe ne peut pas être, & n'être pas ; *en faiſant voir que ſi les choſes n'étoient pas telles qu'ils les propoſent, elles ſeroient & ne ſeroient pas. Ainſi ils réduiſent la choſe à l'impoſſible ; comme lorſqu'ils tirent leur preuve de la conſtruction ou de la ſupoſition qu'ils ont faite. C'eſt à dire, qu'après qu'ils ont fait une choſe en telle maniere, ils tirent une concluſion qui ne leur peut être conteſtée, à moins que de dire qu'une choſe peut être, & n'être pas en même tems, ce qui eſt abſurde. Car leur concluſion eſt une ſuite ſi naturelle de ce qui a été fait, que ſi cette concluſion ne ſuit pas, il faut que la choſe n'ait pas été faite comme on l'a ſupoſé.*

Voila tous les principes généraux de la Geometrie. C'eſt en examinant à leur lumiere les propriétés que l'idée du corps renferme clairement, qu'on a trouvé toutes les veritez de la Geometrie. Or l'idée du corps tel que les Mathematiciens le conſiderent dans ſon état naturel, c'eſt une choſe étenduë, qui a trois dimenſions, de la longueur, de la largeur, & de la profondeur ou ſolidité. Les Mathematiciens ne font point atention aux qualitez ſenſibles du corps, ils ne conſiderent que ſes dimenſions, dont la notion eſt tres-claire. Perſonne ne peut ignorer les propriétez générales de l'étenduë, non plus que ces principes généraux, dont nous venons de parler. On ſait ce que c'eſt que d'être étendu, long, large & profond.

C'eſt donc le ſeul uſage que les Geometres *ont fait de ces connoiſſances, qui leur a fait découvrir une infinité de veritez cachées au reſte des hommes : preuve évidente que ſi on uſoit bien des premieres connoiſſances naturelles, & ſi on aloit par ordre comme font les Geometres, on feroit d'admirables progrez dans les Sciences. On ne les aquiert que par ce moïen; c'eſt pourquoi les premieres études n'étant que pour aprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Geometrie.*

Les premiers Geometres n'avoient été occupez qu'à trouver les principaux Theorêmes, c'eſt à dire, les principales veritez de la Science. Ils ne s'étoient pas apliquez à donner à leurs découvertes un ordre qui fût naturel : Cela étoit réſervé à nôtre ſiecle, où toutes les veritez de Geometrie néceſſaires pour élever un bâtiment, s'il m'eſt permis de parler de la ſorte, ſe ſont trouvé ramaſſées. La Geometrie a été cultivée en ces derniers tems avec plus de ſuccez qu'en aucun autre. On y a fait de grandes découvertes, & ce qui eſt de plus conſidérable, on a trouvé le moïen d'éclaircir ce que les Anciens avoient écrit avec obſcurité & confuſion.

Ce n'eſt pas ici le lieu de faire l'Hiſtoire de ces découvertes, & de raporter en détail quels ſont les Grands Hommes qui ont enrichi cette Science par leurs inventions. Mais je ſuis

obligé de dire que l'Auteur des Elemens de Geometrie qui furent imprimez en François chez Savreux l'an 1667. eſt le premier qui a donné un ordre naturel aux Elemens de Mathematique. Si cet Auteur eût traité des ſolides je n'aurois peut-être jamais penſé à travailler à de nouveaux Elemens. Ce fut pour y ſupléer que j'en eu la premiere penſée.

J'ai traité ce qui regarde les ſolides d'une maniere beaucoup plus étenduë que ne fait Euclide ni tous ſes Commentateurs, car j'y comprens ce qu'Archimede a démontré de plus conſidérable touchant les Cylindres, les Cones & la Sphere. Je renferme auſſi dans ces Elemens ce que ce Geometre a écrit de la dimenſion du cercle. Outre ce que je dis des ſolides, on trouvera dans mes Elemens plus de brieveté, & en même tems plus de choſes que dans ces Elemens imprimez chez Savreux.

J'ai pris à tâche dans cette nouvelle impreſſion d'expliquer tout Euclide, à la réſerve du 7, du 8. & du 9. Livre, qui ne traitent que des nombres, ce qui n'apartient pas à la Geometrie. Je n'ay pas auſſi voulu groſſir mon Ouvrage de toutes les propoſitions du 10. Livre, parce qu'on ne le cite gueres; & que ce qui eſt d'uſage ſe peut expliquer en peu de pages comme je l'ay fait. Toutes les propoſitions d'Euclide qu'on cite ſe trouveront toutes ici, & il étoit néceſſaire de les expliquer;

les Elemens d'Euclide ſont comme la clef commune à preſque tous les livres des Mathematiques. On les cite par tout Ainſi c'eſt un Auteur qu'il faut ſçavoir. Nous n'avons de lui que les propoſitions qui ſont dans ſes Elemens. On croit que les demonſtrations de ces propoſitions ſont de Proclus. Ceux qui ont commenté Euclide dans ces derniers Siecles ont tourné ces demonſtrations comme il leur a plû. Ainſi pour donner un Euclide, il n'eſt queſtion que de raporter les propoſitions dont il a compoſé ſes Elemens. L'experience fera voir que le ſeul ordre que je donne à ces propoſitions en facilite la demonſtration; c'eſt pourquoi j'eſpere qu'on aprendra ici Euclide avec beaucoup plus de facilité qu'en aucun autre de ſes Commentateurs; outre que l'Ouvrage eſt plus court, quoiqu'il contienne plus de choſes.

Je diſtribuë mon Ouvrage ſelon les trois dimenſions, qui ſe diſtinguent dans le corps, ſçavoir la longueur, la largeur, & la profondeur ou la ſolidité. Dans le premier Livre je conſidere les proprietez de la premiere dimenſion du corps, me retranchant encore à la longueur qui eſt une ligne, ou droite ou circulaire. Ces lignes étans plus ſimples & plus faciles à connoître, l'ordre demande qu'on commence par elles, & qu'on réſerve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui ſont plus compoſées, & qui ont des propriétez plus cachées.

Dans le ſecond Livre je traite de la ſeconde dimenſion, & je n'y parle pour la même raiſon que des largeurs ou ſurfaces qui ſont les plus ſimples; c'eſt à dire des ſurfaces droites qu'on nomme plans, qui ſont bornées par des lignes droites ou par des cercles. Dans le troiſiéme Livre j'aplique aux lignes les propriétez de la grandeur en général, qui leur conviennent. Ainſi cette nouvelle Edition ne ſupoſe point abſolument qu'on ait vû les Elemens des Mathematiques, ou Traité de la Grandeur en général. Par conſéquent on poura commencer l'étude des Mathematiques par ces Elemens de Geometrie, ſi on eſpere y trouver plus de facilité. Dans le quatriéme Livre, j'explique ce qui regarde les raiſons & les proportions des lignes droites, & des cercles, & des ſurfaces droites, ou des plans. Dans le cinquiéme, je traite de la ſolidité.

Je n'y ai pû parler que des ſolides compris ſous des ſurfaces planes ou ſpheriques, qui ſe font par le mouvement d'une ligne droite ou d'un cercle. Je m'étois engagé d'expliquer les différentes eſpeces de lignes & de ſurfaces courbes, & les ſolides qu'elles compoſent. J'avois promis un troiſiéme Volume, qui eût contenu les Elemens de ces lignes, de ces ſurfaces & de ces ſolides. Mais il ſeroit inutile que je l'entrepriſſe. On ne poura rien voir de plus clair ni de plus ſavant que ce que Monſieur le Marquis de l'Hôpital nous va donner sur cette matiere.

Je me suis apliqué à rendre ces Elemens faciles & courts ; non en retranchant des propositions necessaires. Il y a plus de choses que dans Euclide ; mais en me servant de démonstrations courtes, & prenant des voïes abregées par où je mene tout d'un coup à la verité. Je tire ordinairement mes demonstrations des notions des choses mêmes dont je parle ; de sorte qu'avec un peu d'atention à ce que ces notions presentent, on découvrira aisément la demonstration. Outre cela il n'y a qu'un tres-petit nombre de Theorêmes fondamentaux dont les demonstrations servent de lumiere pour la suite, c'est à dire que ces demonstrations bien connuës, tout le reste est presque connu. Outre cela je réduis les matieres sous certains chefs, qui contribuë à faire retenir ce que l'on a apris.

Comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit exact & penetrant, à quoi la Métode, que les Geometres apellent Analyse, est particulierement utile, je tâche de donner une idée de cette Métode, apliquant à la Geometrie ce que j'en ai dit ailleurs par raport à la Grandeur en général. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premieres connoissances de la Geometrie, & en même tems je propose des essais de cette métode sur quelques Problêmes.

Mais enfin je n'envisage la justesse de l'esprit que par raport à la Religion. C'est Dieu même que je regarde dans l'étude de la Geometrie. L'on n'y parle que du Corps : on y trouve cependant de grands sujets de penser à Dieu. L'harmonie du Monde n'est bien connuë que par ceux qui sçavent la Geometrie. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raisons & leurs proportions, se remarque ensuite dans les Ouvrages de la Nature ; ce qui donne lieu d'admirer celui qui en est l'Ouvrier. Il n'y a point de petit corps qui ne soit capable de toutes les figures de Mathematique, selon qu'on concevra que sa matiere sera disposée. Ces figures ont toutes leurs propriétez. L'esprit peut par conséquent découvrir en chaque Corps un nombre infini de veritez surprenantes, lorsqu'il le considére avec ordre ; c'est à dire, s'il fait les considerations que peut faire un habile Geometre, & s'il aplique à ce Corps tout ce que la Geometrie enseigne.

Combien d'admirables veritez verrions nous donc en Dieu, si nous l'étudîons autant que nous faisons les corps ? Nous n'y voïons presque rien, parce que nôtre esprit ne peut s'apliquer autant de tems à lui, qu'il fait à la matiere. Mais combien de choses les Saints découvrent-ils en sa Divine Essence, qui est la cause de la fecondité de la matiere ? Et si *la connoissance des veritez que la Geometrie nous enseigne donne tant de contentement, quel est le plaisir des Bien-heureux qui voïent des veritez d'autant plus excellentes, que Dieu surpasse infiniment les Corps.*

Ainsi outre que le plaisir spirituel que donne la Geometrie, peut insinüer du mépris pour les voluptez, & par là nous rendre plus propres pour la Morale de l'Evangile, qui est ennemie de ces voluptez: Outre, dis-je, qu'elle dispose l'esprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui sont élevées au dessus de la matiere, dont elle le rend capable; elle nous fait encore connoître quelle est la vaste étenduë de la Science que possedent ceux qui voïent Dieu, & de quel plaisir ils joüissent en découvrant tant de veritez dans la Divine Essence. Par conséquent la Geometrie pouroit donner un plus ardent desir de posseder Dieu, que de devenir Geometre, si on l'étudioit avec l'esprit, que je le prie lui-même de donner à ceux qui se serviront de mon Ouvrage.

PASSAGE DE PLATON DU LIVRE *septiéme de sa République, touchant l'excellence & l'utilité de la Géométrie.*

VOUS voiez donc cher Ami, que les Mathematiques sont nécessaires, puisqu'elles nous obligent *par cette exactitude, dont elles donnent l'habitude*, de faire usage de nôtre esprit. C'est certainement ce qu'elles font; & c'est une chose remarquable que tous les hommes étans capables par leur nature de raisonner, & de comprendre toutes les Sciences; ceux qui ont moins d'ouverture, s'ils étudient cette Science, quand elle leur seroit inutile pour toute autre chose, ils en retirent cét avantage, que leur esprit devient plus ouvert; car il n'y a point d'étude qui l'exerce plus, & qui le rende *autant capable d'attention*; aussi c'est à cette étude qu'il faut apliquer ceux en qui on remarque un esprit, qui merite d'être cultivé.

Passage de Plutarque du huitiéme Livre des Questions sympostiaques, Question seconde.

PLATON loüe la Geométrie, parce qu'elle détache des sens, ausquels nous

nous donnons entierement, & qu'elle nous tourne vers ce qui est intelligible & éternel; dont la connoissance est la fin de la Philosophie, comme la vûë claire des Misteres est la fin de ceux qui s'y font initier. La volupté & la douleur sont comme un clou, qui atache si fortement l'Ame au Corps, qu'elle en devient dépendante : les choses corporelles lui deviennent ainsi plus claires, parce qu'elle en est plus touchée. Elle ne juge donc point des choses par la lumiere de la raison, mais par les impressions qu'elle reçoit de son corps. La force de la douleur ou des plaisirs, fait qu'elle ne devient sensible qu'à ces perpetuels & divers changemens des choses corporelles qui agissent sur elle; ainsi elle s'aveugle; & perd cette lumiere infiniment plus précieuse que les yeux du corps, étant seule capable de nous faire apercevoir la nature Divine. La Geométrie est comme un miroir poli, où l'on void des vestiges & des images des choses intellectuelles, vers lesquelles elle tourne l'esprit, aprés l'avoir comme purifié & dégagé de la servitude des sens.

TABLE
DES LIVRES, SECTIONS ET CHAPITRES.

LIVRE II.

De la seconde dimension du Corps.

LIVRE III.

LIVRE IV.

Des raisons & proportions des lignes & des surfaces.

LIVRE V.

De la troisiéme dimension du Corps, ou des Solides.

LIVRE VI.

De la Métode.

ECLAIRCISSEMENS

JESUS MARIA.

Permission du R. P. Superieur Général de la Congregation de l'Oratoire de JESUS.

NOUS ABEL LOÜIS DE SAINTE MARTHE, Prêtre, Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de Nôtre Seigneur JESUS CHRIST, suivant le Privilege à Nous donné par Lettres Patentes du Roi, en datte du 22. Decembre 1672. Signées Noblet, par lesquelles sont faites défenses à tous Imprimeurs, Libraires & à tous autres, d'Imprimer & mettre au jours aucuns des Livres composez par ceux de nôtre Congregation sans nôtre expresse licence par écrit, sous peine de confiscation des Exemplaires, & de mille livres d'amande. Permettons au Sieur ANDRE' PRALARD, Marchand Libraire à Paris, de faire imprimer & exposer en vente un Livre intitulé, *Les Elemens de Geometrie, ou de la Mesure du Corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné: Les plus belles Propositions d'Archimede & l'Analyse*, Composé par le P. BERNARD LAMY, Prêtre de nôtre Congregation. Fait à S. Paul aux Bois le 24. Juin 1684. A. L. SAINTE MARTHE.

Extrait du Privilege du Roy.

PAR Lettres Patentes données à Versailles le premier jour de Février 1685. Signées par le Roi en son Conseil JUNQUIERES. Il est permis à nôtre bien amé ANDRE' PRALARD, Imprimeur & Libraire à Paris, d'imprimer ou faire imprimer par tel Imprimeur qu'il lui plaira choisir, un Livre intitulé, *Les Elements de Geometrie ou de la Mesure du Corps; Qui comprennent tout ce que Euclide a enseigné: Les plus belles Propositions d'Archimede, & l'Analise*, en tant de Volumes & en telles marges & caracteres & autant de fois qu'il voudra: Et ce, pendant le tems & espace de dix années entieres & consecutives; à commencer du jour que ledit Livre sera achevé d'imprimer la premiere fois; avec défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'ils soient, d'imprimer ou debiter mêmes les Editions Etrangeres, à peine de trois mille livres d'amende, comme il est plus au long porté par lesdites Lettres.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires à Paris, le 5. Février 1685. Signé, ANGOT, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le 1. May 1685.

Les Exemplaires ont été fournis.

PAR d'autres Lettres Patentes données à Fontainebleau le 22. Octobre 1691. Signées par le Roy en son Conseil BOUCHER: Il est permis à nôtre bien amé ANDRE' PRALARD de réimprimer *La Geometrie du Pere Lamy, augmentée*, dont cette continuation de Privilege commencera quand celle cy-dessus expirera, pendant le tems de dix années; à peine de confiscation des Exemplaires, de trois mille livres d'amande, & de tous dépens, dommages & interests, comme il est plus au long porté par lesdites Lettres Patentes.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris le 21. Juillet 1692.

Signé, P. AUBOUYN, Syndic.

EXPLICATION DES TERMES & des Notes dont on se doit servir.

Axiome.

ON apelle *Axiome* une verité claire & constante qu'on connoît sans étude: dont tout le monde convient.

Demande ou Proposition évidente.

C'est une proposition qui n'est pas connuë avant qu'on l'étudie, mais qui le devient aussitôt qu'on y fait atention; qu'on a ainsi droit de demander qu'on reçoive comme incontestable. J'apelle plus volontiers *Proposition évidente*, ce qu'on nomme ordinairement, *Demande*; parce que ce mot n'est guéres François dans le sens que lui donnent les Geométres.

Définition.

C'est une proposition qui détermine l'idée d'un mot; ou qui donne une notion distincte de la chose qu'on veut que ce mot signifie.

Teorême.

On nomme ainsi une proposition dont il faut démontrer la verité.

Problême.

C'est aussi une proposition qu'il faut démontrer; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire.

Lemme.

C'est une proposition qui n'est au lieu où elle est que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Corolaire.

C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente.

Cette marque + ſignifie *plus*. A+B, c'eſt A *plus* B.

Celle-ci – ſignifie *moins*. A–B, c'eſt A *moins* B.

ꝏ C'eſt la marque de l'*égalité*. C ꝏ D ſignifie que C'eſt *égal* à D.

s̃. *Supra* ou *ci-deſſus*.

l. Livre.

n. Nombre. On met des nombres dans les marges de cét Ouvrage, qui ſervent à trouver les propoſitions qu'on alégue. l. 2. n. 6. C'eſt à dire: *Livre ſecond*, *nombre ſix*. Si l'endroit où l'on renvoie eſt du même livre, on cite le nombre precedent qui eſt à la marge avec cette note s̃. Ainſi s̃ *n. 5.* Ceſt à dire : *Ci-deſſus nombre cinquiéme.*

Prop. Propoſition. Lorſque la propoſition qu'on fait ſe trouve dans Euclide, on marque l'endroit de cette maniere : *Eucl.* I. *prop.* 7. C'eſt à dire: *Euclide livre premier*, *propoſition ſétiéme.*

Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir.

AXIOMES OU VERITEZ claires & connuës.

Premier Axiome.

Le tout eſt plus grand que ſa partie.

Ainſi ſi A & B ſont les parties d'une ligne que je nomme X ou de toute autre grandeur, ce tout X eſt plus grand que A & que B pris ſéparément.

Seconde Axiome.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

Si A & B ſont toutes les parties de X, il eſt évident que A+B, c'eſt à dire A avec B eſt égal à X : Ce qui s'exprime ainſi A+B ꝏ X.

Troiſiéme Axiome.

Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles.

Supoſé que A ꝏ Z & B ꝏ Z; c'eſt à dire que A ſoit égal à Z & que B ſoit auſſi égal à Z, alors A & B ſont deux grandeurs égales. On exprime ainſi ce raiſonnement: Si A ꝏ Z & B ꝏ Z; ou ce qui eſt la même choſe, ſi A ꝏ Z ꝏ B : donc A ꝏ B; je me ſervirai ſouvent de cette expreſſion : qu'on y faſſe donc atention. On peut joindre à cét Axiome celui-ci qui n'eſt pas moins évident : Si A eſt égal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, ſera plus grande ou plus petite que A.

Quatriéme Axiome.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, elles demeurent égales, ou les ſommes ſont égales.

Si A ꝏ B, ajoûtant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux A + X ꝏ B + X.

Cinquiéme Axiome.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si A ꝏ B, donc A–X ꝏ B–X; c'eſt à dire, que ſi A & B ſont deux grandeurs égales, A moins X eſt égal à B moins X.

Sixiéme Axiome.

Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, elles reſteront inégales, l'une plus grande ſi *elle étoit plus grande, ou plus petite ſi elle étoit plus petite.*

Si X & Z ſont des grandeurs inégales, & que A & B ſoient des grandeurs égales, $X + A$ & $Z + B$ ſeront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, ſelon ce qu'ils étoient auparavant.

Sétiéme Axiome.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux, l'un plus grand ſi la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit ſi la grandeur étoit plus petite.

C'eſt à dire, que ſi X & Z ſont des grandeurs inégales $X - A$ & $Z - B$ ſeront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, ſelon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitiéme Axiome

Les grandeurs qui conviennent étant poſées les unes ſur les autres ſont égales.

Si deux lignes poſées l'une ſur l'autre conviennent, elles ſont égales.

Neuviéme Axiome.

Une grandeur qui a le ſigne +, étant jointe avec elle-même ou avec ſon égale qui a le ſigne −, eſt égale à rien.

C'eſt à dire $+ A - A$ n'eſt rien. On ſçait qu'un zéro n'a point de valeur. On exprime donc ainſi cét Axiome. $+ A - A \propto O$; ôtant ce qu'on a mis, il ne reſte rien.

Dixiéme Axiome.

Les choſes qui ſont moitié ou tiers d'une même grandeur ou de grandeurs égales, ſont égales; inégales, ſi les grandeurs entieres ſont inégales; plus grandes, ſi les grandeurs entieres ſont plus grandes; plus petites, ſi les grandeurs entieres ſont plus petites.

On pourroit propoſer pluſieurs autres ſem-

blables Axiomes; c'eſt à dire, pluſieurs autres verités qu'on ne peut ignorer, & dont on ne diſpute point.

Onziéme Axiome.

Une choſe eſt vraie par ſa conſtruction quand elle eſt faite ſelon une régle certaine & dont on convient.

On verra par exemple ce qu'il faut faire pour couper une ligne que je nomme X, en deux parties égales A & A. Aiant donc fait ce qu'il faloit faire, A par *la conſtruction* ſera la moitié de X.

Douziéme Axiome.

Une propoſition eſt inconteſtable lorſqu'on ne la peut nier ſans dire une choſe abſurde, c'eſt à dire qui eſt manifeſtement fauſſe.

Une démonſtration fondée ſur cét Axiome, montre ſeulement ce qu'une choſe ne peut pas être; mais elle ne fait pas voir ce qu'elle eſt; ainſi elle convainc l'eſprit, mais elle ne l'éclaire pas. Auſſi je ne m'en ſers que dans les commencemens pour démontrer des propoſitions, où la ſeule notion des choſes dont on parle, éclairant l'eſprit ſuffiſamment, je n'ay pas crû devoir renverſer l'ordre & prendre d'autres voies plus longues, pour éviter cette maniere de démontrer, qui conſiſte comme on l'a dit à faire voir, qu'on ne peut nier ce qu'on propoſe, ſans dire une abſurdité.

AVERTISSEMENT.

On réduit toutes les démonſtrations dont on ſe ſert à ce petit nombre d'axiomes qu'on vient de propoſer, & aux notions claires & diſtinctes des choſes dont on doit parler. C'eſt dans la notion ou l'idée d'une choſe qu'on découvre ſes proprietés, & qu'on aperçoit ce qu'elle eſt veritable-

ment ; ainsi toute l'habileté d'un Auteur ne consiste que dans l'art, avec lequel il fait faire atention à l'idée de la chose qui fait le sujet de son livre ; ne proposant d'abord que ce qu'il y a de plus simple & de plus aisé à connoitre dans ce sujet, faisant toûjours précéder ce qui est necessaire pour entendre la suite, & sans rien oublier dont la connoissance soit necessaire pour entendre ce qu'il propose. Mais comme l'atention est une chose pénible ; & que les démonstrations longues, quoique d'ailleurs claires, sont toûjours dificiles, il doit s'acommoder à la foiblesse de l'esprit, & ménager sa capacité. On l'acable lorsqu'on lui presente plusieurs choses à la fois ; il les faut donc partager en toutes leurs parties naturelles, desorte qu'on les puisse considerer les unes aprés les autres séparément & avec ordre, ce qui fait qu'on les conçoit & qu'on s'en souvient aisément. C'est ce qu'on a tâché de faire. Les Maitres le doivent faire remarquer à ceux à qui ils enseigneront ces Elemens. Ils doivent en premier lieu leur en faire considerer le sujet, la distribution de tout l'Ouvrage, le soin qu'on prend de donner des idées nettes des choses qu'on veut faire connoitre ; & comme c'est de ces idées qu'ordinairement on tire les démonstrations dont on se sert. L'étude de ces Elemens faite avec ces reflexions poura contribuer à former l'esprit, & servira de modéle de la maniere qu'ils faut étudier & traiter les Sciences ; vûë principale qu'on a ici, comme on l'a dit dans la Préface.

ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE PREMIER.

De la premiere dimension du Corps.

SECTION PREMIERE.

Des diferentes mesures ou dimensions du Corps.

PREMIERE DEFINITION.

L*E Corps est un être étendu, dans lequel on distingue trois dimensions ; savoir, la longueur, la largeur & la profondeur.*

On peut conſiderer une de ces trois choſes ſans faire atention à l'autre, la longueur ſans conſiderer la largeur, & la largeur ſans conſiderer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins ſans faire reflexion ſur leur largeur, & leur largeur ſans penſer à la profondeur de la terre. La notion de la longueur exclut celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclut celle de la profondeur; & ces notions ne ſont point fauſſes, quoiqu'éfectivement ces trois choſes ſoient inſéparables; parce que dans la maniere dont elles ſont conçûës, elles ſont diſtinguées en ce que l'une eſt conſidérée ſans l'autre. Ainſi les Geométres peuvent ſupoſer en cette maniere des êtres qui ſoient longs ſans être larges, & qui ſoient larges ſans être profons ou épais; & quand on voudroit ſoûtenir que ces ſupoſitions ſont entierement fauſſes, les conſéquences qu'on en tire ne pouroient être rejetées comme fauſſes. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il eſt évident que ſelon qu'on ſupoſe que le cercle eſt une figure dont la circonference eſt en toutes ſes parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes tirées du centre du cercle à la circonference ſoient égales.

Seconde Definition.

2. *Le point, c'eſt ce qui n'a aucune partie, & qui par conſéquent eſt indiviſible.*

C'eſt à dire, que c'eſt une grandeur dont on ne conſidére point les parties dans leſquelles elle peut être diviſée.

Troisie'me Definition.

3. *Ligne, c'eſt une longueur ſans largeur.*

C'eſt à dire, une longueur dont on ne conſidére point la largeur, ou qu'on ſupoſe n'avoir point de largeur. On peut concevoir que la ligne eſt la trace d'un point qui ſe meut, ou qui change de place.

Quatrie'me Definition.

La ligne ou la longueur qui eſt la plus courte entre deux points, s'apelle ligne droite. 4.

On peut dire que c'eſt la trace que laiſſe un point qui ſe meut par le plus court chemin.

Cinquie'me Definition.

La ligne qui n'eſt pas plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points, eſt ou courbe ou compoſée de deux ou de pluſieurs diferentes lignes droites. 5.

La ligne A faite de deux lignes, & la ligne B faite de pluſieurs lignes qui ſe joignent dans un point, ne peuvent être conſidérées comme une ſeule ligne droite.

Sixie'me Definition.

Surface, c'eſt une grandeur longue & large, ſans profondeur. 6.

C'eſt à dire, une longueur & largeur dont on ne conſidére point la profondeur.

Se'tie'me Definition. 7.

Surface droite ou plane, eſt celle qui eſt la plus courte entre deux lignes droites.

On peut concevoir qu'une ſurface droite eſt faite par le mouvement d'une ligne droite.

Huitie'me Definition. 8.

Surface courbe, eſt celle qui eſt plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une ſurface droite ou plane.

Neuvie'me Definition.

Solide, c'eſt une grandeur de trois dimenſions, qui s'apelle corps. 9.

SECTION II.

De la longueur, qui eſt la premiere & la plus ſimple dimenſion du Corps.

Des lignes droites.

Propoſitions évidentes touchant les lignes droites.

AVERTISSEMENT.

Ces propoſitions ſont renfermées dans l'idée de la ligne droite ; c'eſt à dire qu'on ne peut concevoir une ligne droite qu'en même tems on n'aperçoive qu'elle ne ſeroit pas ce qu'on ſupoſe qu'elle eſt, ſi ce qu'on va dire n'eſt pas vrai. Les Geométres ſupoſent toutes ces propoſitions ſans le dire. Je les exprime, parce qu'elles feront que les notions de la ligne droite, d'où l'on doit tirer la démonſtration de ſes proprietés ſeront plus claires. Cét avis eſt pour toutes les propoſitions évidentes que je propoſerai ſur chaque ſujet avant les Teorêmes. Il n'y a rien de plus important que d'avoir des notions claires & exactes des choſes dont on recherche les proprietés.

PREMIERE PROPOSITION.

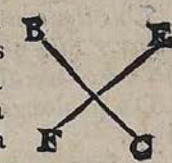
10. *LEs extrémités d'une ligne ſont deux points.*

Les extrêmités de la ligne X ſont A & B qui ſont indiviſibles, premierement, quant à leur longueur ; car ſi A avoit deux parties, par exemple E & F, ce ſeroit F qui ſeroit l'extrêmité. En ſecond lieu, puiſque cette ligne X n'a ni largeur ni profondeur, les deux extrêmités A & B, n'ont ni largeur ni profondeur, étant donc indiviſibles en tout ſens, ce ſont deux points ſ n. 2.

SECONDE PROPOSITION.

Lorſque deux diferentes lignes ſe coupent, leur ſection eſt un point indiviſible. 11.

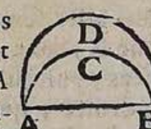
La ligne E F coupe B C, ſi elle la coupe en deux diferens points, cette ligne E F a de la largeur, ce qui eſt contre la définition de la ligne droite ; la ſection de B C & d'E F eſt donc un point.

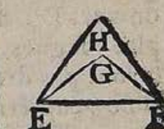


TROISIE'ME PROPOSITION.

Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, eſt plus grande que cette ligne droite. 12.

Les lignes courbes A C B & A D B ſont plus grandes que A B, & les lignes creuſes A G F & A H F ſont plus grandes que E F. C'eſt une ſuite de la notion de la ligne droite qui eſt la plus courte qu'on puiſſe mener entre deux points.





QUATRIE'ME PROPOSITION.

Deux points étant donnez, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre. 13.

L'inſtrument dont on ſe ſert pour mener une ligne droite eſt une régle. Pour connoître ſi une régle eſt bonne, on tire avec elle une ligne ; à laquelle on l'aplique en diferens ſens ; & ſi aprés cela on trouve qu'elle convient toûjours avec cette ligne, on juge qu'elle eſt juſte. Un moïen ſûr pour mener une ligne droite eſt de ſe ſervir d'un filet fort ſubtil, comme pouroit être un cheveu ; car aprés l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut ſans le rompre, ſelon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points.

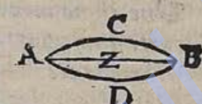
CINQUIE'ME PROPOSITION.

14. *Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut pas être prolongée du même côté vers deux diferens points.*

On prolonge une ligne par le moïen d'une régle.

SIXIE'ME PROPOSITION.

15. *Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite.*



Si on peut mener pluſieurs lignes droites entre A & B autres que la ligne Z, il faut qu'elles s'écartent ou vers C ou vers D : ainſi elles ſeront plus longues que Z, par conſéquent elles ne ſeront pas droites, puiſqu'une ligne entre A & B ne peut être droite, qu'elle ne ſoit la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener entre ces deux points. On ne peut donc mener qu'une ſeule ligne droite entre A & B. On pouroit concevoir pluſieurs lignes entre deux points couchées les unes ſur les autres, mais elles ne ſeroient qu'une même ligne. Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de diferentes lignes courbes, C'eſt pourquoi lorſqu'il s'agit de meſurer la diſtance d'un point à un autre point, on ne prend pas pour meſure une ligne courbe, mais une ligne droite.

SE'TIE'ME PROPOSITION.

Deux lignes droites qui ont deux points communs ne ſont qu'une même ligne. 16.

La ligne B C & la ligne A D ont deux points communs, ſavoir A & B, entre leſquels on ne peut concevoir qu'une ligne droite. Ainſi A B & B A ne ſont point deux diférentes lignes. La ligne B A étant prolongée ne peut aler ailleurs qu'au même point C, ni A B ailleurs que vers D, lorſqu'on la prolonge ; partant A D avec B C ne ſont qu'une même ligne droite ; car entre C & D il n'y a qu'une ſeule ligne droite.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Donc, la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points. 17.

Car ſi par les deux points donnez A & B l'on méne une ligne droite, elle ſera celle que l'on cherche, puiſqu'on ne peut pas mener par deux points pluſieurs diferentes lignes droites, toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne par la propoſition précedente.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Deux lignes droites qui croiſent, ou qui ſe coupent, ne ſe peuvent rencontrer que dans ce ſeul point où elles ſe coupent. 18.

Car ſi elles ſe rencontroient en deux points, elles ne ſeroient qu'une même ligne par la ſétiéme propoſition, ainſi elles ne ſeroient pas diferentes l'une de l'autre, comme le ſont deux lignes qui croiſent & qui ſe coupent.

DIXIE'ME PROPOSITION.

La partie d'une ligne droite, eſt une ligne droite. 19.

Qui dit partie d'une ligne droite ne dit pas seulement un point.

SECTION III.

De la ligne qui est circulaire.

Avertissement.

Le nombre des diferentes especes de lignes courbes étant infini, je ne considere ici que la ligne courbe qui est circulaire, laquelle aprés la ligne droite, est la plus simple & la plus aisée à connoitre.

Premiere Definition.

20. *Une ligne, laquelle sur un plan n'a ni commencement ni fin, & dont toutes les parties sont également éloignées d'un même point, est un cercle. Ce point dont toutes les parties de cette ligne sont éloignées, s'apelle le centre du cercle.*

Concevons que dans la ligne A B l'extrémité A est immobile, pendant que B l'autre extrémité tourne; si B laisse une trace, ce sera un cercle dont toutes les parties sont éloignées du point A d'un intervale égal; savoir, A B. Ainsi A est le centre. Cette maniere dont un cercle se fait, est si uniforme, qu'on ne peut concevoir aucune diference entre toutes ses parties.

Seconde Definition.

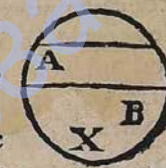
21. *Les lignes menées du centre à la circonference s'apellent raions ou demi-diamétres.*

A B est un raïon du cercle X.

Troisieme Definition.

Les lignes menées d'un point de la circonference à un autre point, s'apellent cordes. 22.

A est une corde du cercle X.



Quatrieme Definition.

Les cordes qui passent par le centre s'apellent diamétres. 23.

La corde B qui passe par le centre du cercle X, est le diametre de ce cercle.

Cinquiéme Definition.

La partie de la circonference qui se trouve entre les extrémités d'une corde s'apelle arc. 24.

Lorsqu'une corde comme est A dans le cercle X, ne passe pas par le centre, il y a deux portions de circonference, qui se terminent aux extrémités de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, si l'on n'ajoute autre chose, on entend l'arc qui n'est pas le plus grand.

Sixiéme Definition.

Toute circonference se conçoit divisée en trois cent soixante parties égales, qui se nomment degrés. 25.

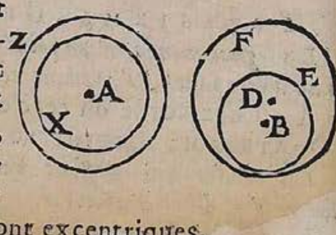
Setiéme Definition.

Chaque degré se divise en soixante minutes, ou petites parties, qu'on apelle premieres. Chaque minute ou premiere, en soixante secondes; & chaque seconde en soixante troisiémes: ainsi à l'infini. 26.

Huitiéme Definition.

Cercles concentriques, sont ceux qui sont décrits d'un même centre. Excentriques, qui n'ont pas même centre. 27.

Z & X qui ont pour centre le même point A, sont concentriques, & les cercles E & F, qui ont pour centres D & B deux points diferens, sont excentriques.



Propositions évidentes touchant la ligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces propositions sont des consequences claires de la définition du cercle.

PREMIERE PROPOSITION.

28. *Un intervale étant donné, on peut décrire une circonference.*

L'instrument dont on se sert ordinairement pour décrire un cercle, est un compas; avec lequel on peut, comme il est évident, prendre une ligne égale à une autre ligne donnée; & de deux lignes inégales retrancher de la plus grande une ligne égale à la plus petite. Ce qui fait la deuxiéme & la troisiéme proposition du premier d'Euclide, & la prémiere du quatriéme.

SECONDE PROPOSITION.

29. *Dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales sont les cordes d'arcs égaux.* Eucl. 3. Pr. 24.

C'est une suite de la simplicité & uniformité du cercle, toutes ses parties étant faites de même maniere, on ne peut concevoir aucune diférence entr'elles.

30. TROISIE'ME PROPOSITION.

Les arcs d'un pareil nombre de degrés sont plus grans dans les plus grans cercles, & plus petits dans les plus petits cercles.

Cela est évident, car les parties d'un plus grand tout doivent être plus grandes. La centiéme partie d'une toise est plus grande que la centiéme partie d'un pié.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Les arcs d'un pareil nombre de degrés ont de plus grandes cordes dans les plus grans cercles, & de plus petites dans les plus petits cercles. 31.

C'est encore une suite de la simplicité & de l'uniformité du cercle. Tout doit être plus grand dans un plus grand cercle, le diamétre, le raion & la corde de tel & tel degré.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Une corde ou diamétre qui passe par le centre, coupe le cercle en deux parties égales, qui s'apelent demie circonference. 32.

On ne pouroit pas concevoir que le cercle fût uniforme en toutes ses parties si cela n'étoit vrai.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Toutes lignes tirées du centre à la circonference sont égales, c'est à dire que tous les raions sont égaux: celles qui sont plus petites que les raions, ont leur extrémité au dedans du cercle: si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors: si égales, dans la circonference même. 33.

Cela est évident puisque la circonference est en toutes ses parties également éloignée du centre de l'intervale du raion.

SE'TIE'ME PROPOSITION.

Les cercles sont égaux dont les raions sont égaux. 34.

C'est la longueur du raion qui fait que le cercle est plus grand ou plus petit.

HUITIE'ME PROPOSITION.

35\. *Deux cercles qui ont un même centre & un même raïon ne sont pas diferens.*

Comme deux lignes entre deux mêmes points ne sont qu'une ligne.

SECTION IV.

De la diferente position de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.

AVERTISSEMENT.

Deux lignes droites ne peuvent être disposées qu'en ces trois manieres ; ou elles se rencontrent & se coupent, ou elles ne se rencontrent point. Quand elles se rencontrent, elles le peuvent faire de sorte, que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre ou qu'elle ne panche pas plus. On considere ici ces trois positions.

Des lignes perpendiculaires.

DEFINITION.

36\. *Une ligne qui tombe sur une autre ligne, ou qui la coupe de sorte, qu'elle ne panche pas plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'apelle perpendiculaire.*

Propositions évidentes touchant les lignes perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Je ne fais ces propositions que pour rendre plus

distincte la notion, que la définition précédente vient de donner de la ligne perpendiculaire.

PREMIERE PROPOSITION.

La ligne A E tombe sur E milieu de B D. Si son sommet A est également éloigné des extrémitez B & D de la ligne B D, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainsi elle est perpendiculaire sur B D. 37.

C'est une suite de la notion que la définition précédente donne de la ligne perpendiculaire.

SECONDE PROPOSITION.

Si deux points de la ligne A E sont également distans de B & de D, chaque point de la ligne A E sera également distant de B & de D. 38.

C'est une suite de ce que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On ne peut point concevoir que quelque point dans la ligne A E soit plus prés de B que de D qu'on ne conçoive que A E se courbe en ce point du côté de B ; & qu'ainsi elle n'est pas une ligne droite, comme on le supose.

TROISIE'ME PROPOSITION.

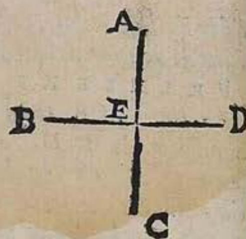
Si A E est perpendiculaire sur B D, & que l'un de ses points A ou E soit également distant de B & de D, l'autre sera également éloigné des mêmes poins B & D. 39.

Car si A est également distant de B & D, & que E ne le soit pas, alors A E panchera plus d'un côté que d'autre ; ainsi elle ne sera pas perpendiculaire, contre la suposition qu'on fait qu'elle l'est.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Pour démontrer donc que la ligne A E est per- 40.

pendiculaire sur B D, il suffit de faire voir que deux de ses points sont chacun en égale distance des points B & D.



41. V. PROPOSITION.

Si la ligne A E est perpendiculaire sur B D, la ligne E C, qui est son prolongement, sera pareillement perpendiculaire sur B D.

Ce n'est qu'une même ligne droite, on ne peut pas concevoir la chose autrement, à moins que A C ne se courbe vers B ou vers D.

SIXIE'ME PROPOSITION.

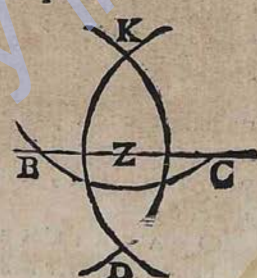
42. *Si A C est perpendiculaire sur B D, la ligne B D est perpendiculaire sur A C.*

On ne peut concevoir que B panche plus vers A que vers C, qu'en même tems on ne conçoive que D panche plus vers C; & cela étant, A panchera plus vers B que vers D, car cela est réciproque. Ainsi A E ne seroit pas perpendiculaire sur B D, contre la suposition. B D est donc perpendiculaire sur A C, comme A C est perpendiculaire sur B D.

PROBLEME PREMIER.

43. *Du point K hors de la ligne Z tirer une perpendiculaire sur Z.* Eucl. 1. Prop. 12.

1° De K comme centre, je décris l'arc B C, ainsi B & C qui sont dans la circonference de ce cercle & dans la ligne Z, sont également éloignez de K. 2° de C comme centre, & de l'intervale C K je décris un cercle, & du

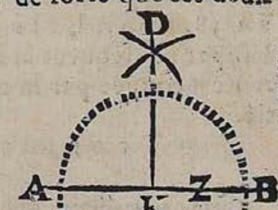


point B un second du même intervale. Ces deux cercles se coupent aux points K & D qui sont ainsi également distans de B & de C. 3° Par K & D je méne une ligne droite, dans laquelle les deux points K & D étant par la construction également éloignez de B & de C, il faut comme on l'a dit § n. 40. que cette ligne K D soit perpendiculaire sur Z, ce qu'il faloit faire.

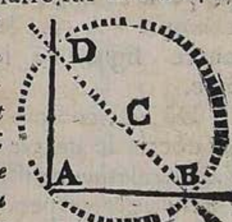
PROBLEME SECOND.

Sur le point K de la ligne Z, élever une perpendiculaire. Eucl. 1. Prop. 11. 44.

1° De K comme centre je décris un cercle qui coupe Z en deux points, qui sont ici A & B. 2° De ces deux points A & B comme centres, je décris deux autres cercles d'un même intervale pris à discretion, de sorte que ces deux cercles se coupent. Je supose que ce soit au point D. 3° Je méne de ce point D une ligne au point K, qui est la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la construction, D est également éloigné de A & de B, dont le point K est aussi également éloigné par la construction; ainsi cette ligne aïant deux de ses points également éloignez de A & de B, elle est perpendiculaire sur Z. § n. 40.



Lorsque le point donné est sur l'extrémité de la ligne donnée, comme est A, je prens à discretion le point C, & ouvrant le compas de l'intervale A C je décris un cercle, & je méne le diamétre B D, & du point de section D, je tire une

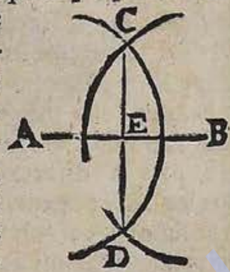


autre ligne au point A, qui ſera la perpendiculaire qu'on vouloit élever ; ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.

COROLLAIRE.

45. *De-là nous aprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales.* Eucl. 1. Prop. 10.

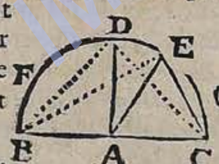
Soit A B une ligne droite ; de A & de B comme centres, je fais d'un même intervale pris à diſcretion deux cercles qui ſe coupent en C & D, par où je méne une ligne qui eſt perpendiculaire ſur A B, s̃ *n.* 40. puiſque D & C ſont également éloignez de A & de B. Or le point E commun aux deux lignes D C & A B, eſt également éloigné de A & de B, s̃ *n.* 38. ainſi A E eſt égal à EB ; par conſéquent la ligne A B eſt coupée par la moitié.



TEOREME PREMIER.

46. *On ne peut élever ſur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.*

A D eſt perpendiculaire ſur la ligne BC. Il faut démontrer qu'on ne peut pas élever ſur le point A une autre ligne qui ſoit perpendiculaire : que par exemple A E & toute autre ligne ne le peut être.

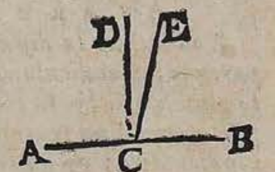


De A comme centre, je décris le cercle B F D E G C. Ainſi B & C ſont également diſtans de A. Et D où ce cercle coupe la perpendiculaire eſt également éloigné de B & de C. s̃ *n.* 37. Donc D B ∝ D C, ainſi les deux arcs B F D & C G D ſont égaux s̃ *n.* 29. par conſéquent D eſt le milieu de l'arc B F D E G C. Si E A eſt perpendiculaire, par les mêmes raiſons B E ∝ C E & B F D E ∝ C G E ; par conſéquent E eſt auſſi le milieu de B F D E G C, ainſi B F D ∝ B F D E ce qui eſt abſurde.

TEOREME SECOND.

Si la ligne C D tombe perpendiculairement ſur le milieu de la ligne A B, elle paſſe par tous les points qui ſont également éloignez de A & de B, extrémités de la ligne A B. 47.

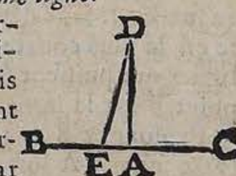
Si on le conteſte & qu'on veüille dire que le point E par où C D ne paſſe pas, eſt également éloigné de A & de B, de ce point ſoit mené une ligne droite au point C, qui ſera perpendiculaire ſur A B, puiſqu'en deux de ces points C & E elle eſt également éloignée de A & de B. Or il ne ſe peut pas faire par le Teorême précédent que ſur C il y ait deux perpendiculaires, il n'eſt donc pas vrai que le point E ſoit également éloigné de A & de B.



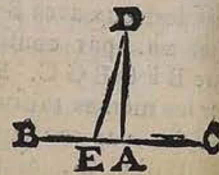
TEOREME TROISIE'ME.

On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point ſur une même ligne. 48.

La ligne A D tombe perpendiculairement ſur le milieu de la ligne BC, je dis qu'on ne peut du même point D mener d'autres lignes perpendiculaires ſur BC ; car ces lignes tomberont de part ou d'autre de A,



que ce ſoit en E. Alors le point E eſt également diſtant de B & de C s̄ *n.* 39. donc B E eſt moitié de cette ligne. Mais A B en eſt auſſi la moitié, ainſi B A ⊃ B E, ce qui eſt abſurde. Partant on ne peut pas dire qu'on puiſſe mener plus d'une perpendiculaire d'un point ſur une ligne.



TEOREME QUATRIE'ME.

49. *Dans un plan deux lignes qui ſont perpendiculaires ſur une troiſiéme, ne ſe peuvent rencontrer.*

Car ſi elles ſe rencontroient ou ſe coupoient, du point de cette rencontre ou ſection il y auroit deux perpendiculaires ſur la même ligne; ce qu'on vient de démontrer impoſſible.

AVERTISSEMENT.

L'on meſure la diſtance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'eſt la meſure la plus ſimple & la plus conſtante, puiſqu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une ſeule perpendiculaire; & qu'outre cela elle eſt plus courte que toute autre ligne qu'on puiſſe tirer du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Teorême ſuivant.

TEOREME CINQUIE'ME.

50. *La perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener d'un point à une ligne.*

La ligne B A eſt perpendiculaire ſur Z, il faut démontrer qu'elle eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent être menées du point B ſur la ligne Z.

Prolongez B A juſqu'en C, en ſorte que B A ſoit égale à A C; la ligne D A eſt perpendiculaire

ſur

ſur B C comme B C l'eſt ſur A D. s̄ *n.* 42. Le point D eſt donc également éloigné de B & de C, ainſi B D eſt égal à D C; mais la ligne droite B C eſt plus courte que la ligne BD+DC. s̄ *n.* 12. par conſéquent A B, moitié de B C eſt plus courte que B D moitié de B+DC, ce qu'il faloit démontrer.

C'eſt une ſuite de la nature de la perpendiculaire qui ne s'écartant point, & s'éloignant également des extrémités de la ligne ſur le milieu de laquelle elle tombe, elle va par le chemin le plus droit, & par conſéquent le plus court.

Des lignes obliques.

PREMIERE DEFINITION.

Les lignes qui panchent plus vers un côté que vers l'autre de la ligne qu'elles rencontrent, s'apellent obliques. 51.

SECONDE DEFINITION.

B C eſt une ligne oblique ſur Z; aiant mené de B ſon extrémité, la perpendiculaire B A, la ligne 52. *A C entre A pié de la perpendiculaire, & C le pié de l'oblique, eſt l'éloignement du perpendicule, & cét éloignement eſt la meſure de l'obliquité de B C. Ainſi une ligne eſt plus oblique lorſque ſon éloignement du perpendicule eſt plus grand.*

AVERTISSEMENT.

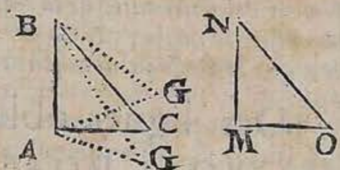
L'on compare dans les propoſitions ſuivantes deux lignes obliques. La choſe ſeroit aiſée ſi ces deux obliques étoient ſur une même ligne, & qu'elles euſſent la même hauteur. On démontre ces propoſitions, ſoit que cela ſoit ou que cela ne ſoit pas.

B

TEOREME PREMIER.

53\. *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule les lignes obliques sont égales.*

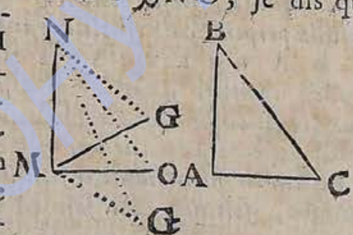
Si A B ∝ N M & A C ∝ M O, je dis que B C ∝ N O; que cela ne soit. Concevons que M N soit posé sur A B, ces deux lignes étant égales, elles conviendront. Si M O ne convient pas avec A C, & qu'elle convienne avec A G; alors puisque O M est perpendiculaire sur M N, il faut que A G soit perpendiculaire sur A B qui est la même que M N; ainsi sur A il y a deux perpendiculaires, ce qui est impossible. s̃ *n.* 46. il faut donc que M O convienne avec A C, & partant O avec C, comme N avec B; ainsi les deux lignes O N & B C sont égales, se trouvant entre deux mêmes points.



TEOREME SECOND.

54\. *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.*

Si A B ∝ M N & B C ∝ N O, je dis que A C ∝ M O; posez A B sur M N, ces deux lignes étant égales, elles conviendront. Si on dit que B C ne convient pas avec N O qui lui est égale, mais avec N G, je dis qu'il s'ensuit une absurdité.



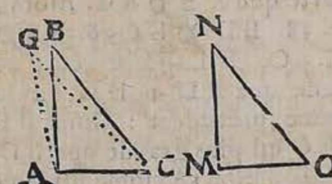
Car puisque dans cette suposition B C convient avec N G, il faut que A C convienne avec M G; ainsi M G sera perpendiculaire, sur M N, qui est la même ligne que A B, sur laquelle C A est perpendiculaire, par conséquent sur M N au point M il y a deux perpendiculaires, savoir M O & M G, ce qui est absurde. s̃ *n.* 46. B C conviendra donc avec N O, partant A avec M & C avec O; ainsi les lignes C A & M O étant entre mêmes points, sont égales; ainsi les éloignemens du perpendicule sont égaux, ce qu'il faloit démontrer.

TEOREME TROISIE'ME.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendicule, les perpendiculaires sont égales. 55.

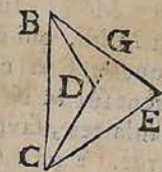
Si B C ∝ N O, & A C ∝ M O, je dis que A B ∝ M N, cela se démontre par la même voïe que le précédent Teorême. Il faut concevoir que O M est posée sur A C, qui doivent convenir.

Si N O ne convient pas avec C B, mais avec C G, & par consequent que M N convienne avec A G, il s'ensuivroit que les deux lignes A G, & A B, seroient perpendiculaires sur A C, ce qui est impossible. s̃ *n.* 46. Il faut donc que O N convienne avec C B, le point A avec M, & B avec N, ainsi que les lignes A B, & M N, étant entre mêmes points, soient égales, ce qu'il faloit démontrer.



56. LEMME.

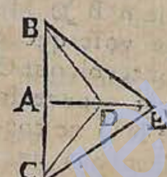
B E + E C est plus grand que B D + D C. Eucl. 1. Prop. 21.



1° C E + E G est plus grand que C D + D G & B G + G D plus que B D s̄ *n.* 12. Donc par *l'axiome* 10. C E + E G + B G + D G est plus grand que C D + D G + B D; ôtant de part & d'autre D G, selon l'axiome septiéme, le reste C E + E G + B G ou C E + B E sera plus grand que B D + C D, ce qu'il faloit prouver.

*TEOREME QUATRIE'ME.

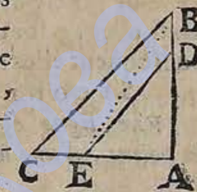
57. *Les lignes obliques menées du même point à une même ligne, sont plus longues, si elles sont plus éloignées de la perpendiculaire.*



Il faut prouver que B E est plus longue que B D. Pour cela soit prolongé B A jusqu'à C; desorte que A B $\propto$ A C. Alors, s̄ *n.* 38. B D $\propto$ D C, & E B $\propto$ E C. Or B E + E C est plus grande que B D + D C par le Lemme précédent: Donc B E moitié de B E + E C est plus grande que B D moitié de B D + D C, selon l'Axiome dixiéme.

*TEOREME CINQUIE'ME.

58. *Une ligne oblique est plus grande, donc le perpendicule & l'éloignement du perpendicule est plus grand: & si l'éloignement de la perpendiculaire est le même & l'oblique plus grande, la perpendiculaire est plus grande.*



Soient 1° B C & D E deux lignes obliques, la perpendiculaire A B est plus grande que A D; & A C l'éloignement du perpendicule de B D est plus grand que A E, celui de D E, je dis que l'oblique B C est plus grande que l'oblique D E. Car par le Teoréme précédent B C est plus grande que B E; & puisque A C est perpendiculaire sur A B, par le même Teoréme B E est plus grande que D E: par conséquent D E plus petite que B C, plus grande que B E qui est encore plus grande que D E.

2° A E est le même éloignement, je dis que si B E est plus grande que D E, la perpendiculaire A B est plus grande que la perpendiculaire A D. Car si A D étoit plus grand que A B, alors par le précédent Teoréme B E seroit plus petit que D E, contre la suposition qu'on fait que B E est plus grande.

Des lignes paralleles.

DEFINITION.

Deux lignes droites qui sont également distantes 59.
l'une de l'autre dans toutes leurs parties, sont dites paralleles.

On peut dire qu'une ligne parallele, c'est une même ligne qui se meut gardant toûjours la même situation ou position.

Propositions évidentes touchant les lignes paralleles.

PREMIERE PROPOSITION.

Deux lignes paralleles ne se rencontrent ja- 60.
mais.

Car si elles se rencontrent, elles s'aprochent l'une de l'autre du côté où elles se rencontrent, ainsi elles ne sont pas en même distance, & par conséquent elles ne sont pas paralleles.

SECONDE PROPOSITION.

61. *Une ligne également éloignée en deux de ses points, d'une autre ligne, est parallele à cette ligne*

Car puisque la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points; toute ligne qui a deux de ses points également éloignez d'une ligne, est également éloignée de cette ligne en tous ses autres points.

TROISIE'ME PROPOSITION.

62. *Deux lignes droites qui s'aprochent par un côté l'une de l'autre, se coupent enfin.*

Les lignes droites qui ne sont pas paralleles se rencontrent necessairement; car, par exemple, si A F & B D s'aprochent d'un côté, & qu'au point D la ligne B D soit plus proche de A F, de la valeur de la moitié de B F savoir de la ligne D E; si A E est moitié de A F, & qu'on prolonge B D, comme elle s'aprochera uniformément selon la nature des lignes droites, vis-à-vis de A, elle sera aprochée de la ligne A F de la valeur de D E, ainsi elle ne sera point éloignée de A, par conséquent elle rencontrera la ligne A F dans ce point. Il n'en est pas de même d'une ligne courbe avec une ligne droite. La courbe en s'aprochant toûjours de quelque chose de la droite, elle le peut faire par des degrés qui vont en diminuant à mesure qu'on la prolonge, desorte qu'elle ne la rencontre jamais, comme on le montre dans les Elemens des lignes courbes.

QUATRIE'ME PROPOSITION. 63.

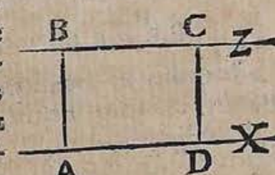
Deux lignes droites qui étant prolongées à l'infini ne se rencontrent point, sont paralleles.

Cela étant il faut concevoir qu'elles sont toûjours en même distance l'une de l'autre, & qu'ainsi elles sont paralleles; car si elles n'étoient pas en même distance, & qu'elles s'aprochassent, elles se rencontreroient enfin par la proposition précédente.

LEMME PREMIER.

Toutes les lignes renfermées entre Z & X deux paralleles, sont égales si elles sont perpendiculaires sur ces paralleles. 64.

A B & C D renfermées entre Z & X, sont perpendiculaires sur Z & sur X, je dis qu'elles sont égales. La distance de Z à X se mesure par les perpendiculaires A B & C D. Les deux lignes Z & X sont en même distance, puisqu'elles sont paralleles; ces deux perpendiculaires A B & C D sont donc égales.



LEMME SECOND.

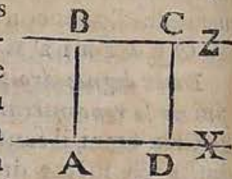
Deux ou plusieurs lignes perpendiculaires sur une même ligne sont paralleles entr'elles. 65.

Les lignes perpendiculaires sur une même ligne ne se rencontrent point, s. 49. elles sont donc paralleles, s. n. 63.

LEMME TROISIE'ME.

Entre deux paralleles, les lignes qui sont perpendiculaires sur l'une, le sont sur l'autre. 66.

Si A B perpendiculaire sur X, ne l'est pas sur Z, donc Z ne l'est pas sur A B; s̃ *n.* 42. ainsi étant inclinée sur cette ligne A B, elle s'aprochera ou d'un côté ou d'autre de la ligne X, & la rencontrera s̃ *n.* 62. par conséquent elle ne lui est pas parallele contre la suposition qu'on fait qu'elle l'est.



Lemme quatrie'me.

67. *La ligne A B ne peut être perpendiculaire sur Z & X que ces deux lignes ne soient paralleles.*

Car ces deux lignes (*même figure*) sont réciproquement perpendiculaires sur A B. s̃ *n.* 42. ainsi elles ne se rencontrent point, s̃ *n.* 49. partant elles sont paralleles. s̃ *n.* 63.

Probleme premier.

68. *Par un point donné mener une ligne parallele à une ligne donnée.* Eucl. l. 1. Prop. 31.

Soit X la ligne donnée (*même figure*) & B le point donné. De B j'abaisse la perpendiculaire B A sur X, & j'éleve sur B A au point B la perpendiculaire B C, qui sera la parallele que l'on cherche par le Lemme précédent.

Je puis trouver cette parallele de cette autre maniere, j'éleve sur X une seconde perpendiculaire D C que je fais égale à A B, & je tire par B & C une ligne qui sera la parallele que l'on cherche, puisque cette ligne & X seront en égale distance l'une de l'autre.

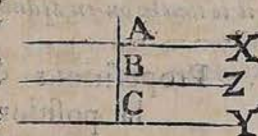
On fait encore la même chose plus facilement en cette maniere. Le point donné est C, de ce point comme centre, & d'un intervale pris à discretion,

je fais le cercle A B, & du point A, & de même intervale, le cercle D C, je prens l'arc A B égal à l'arc D C, & par C & B, je mene une ligne qui sera la parallele que l'on cherche.

Teoreme.

Deux lignes paralleles à une troisiéme sont paralleles entr'elles. Eucl. I. Prop. 30. 69.

X & Y sont paralleles avec Z. De X je mene A B, perpendiculaire sur Z, laquelle étant prolongée jusqu'en C, puisqu'elle est perpendiculaire sur Z, elle le sera sur Y, parallele avec Z, s̃ *n.* 66. & puisque Z est parallele avec X, cette ligne perpendiculaire sur Z le sera aussi sur X parallele avec Z. s̃ *n.* 66. Ainsi puisque X & Y sont perpendiculaires sur A C, elles sont paralleles entr'elles s̃ *n.* 63. ce qu'il faloit démontrer.



Corolaire.

On ne sçauroit faire passer par le même point deux diferentes lignes qui soient paralleles à une même. 70.

Car il faudroit par le Teorême precedent qu'elles fussent paralleles entr'elles; ce qui est absurde, puisqu'elles auroient un point commun, & qu'il est de l'essence des paralleles de ne se rencontrer jamais.

SECTION V.

De la diferente poſition de deux cercles au regard l'un de l'autre.

Avertissement.

Vn cercle peut être poſé tellement au regard d'un autre cercle. 1° Qu'il ne le coupe ni ne le touche point. 2° Qu'il le coupe ; 3° ou que ſans le couper il le touche ou en dedans ou en dehors.

Propoſitions évidentes touchant la poſition des cercles.

Premiere Proposition.

71. L*Es cercles concentriques ne peuvent ni ſe couper ni ſe toucher.*

On peut concevoir que les cercles X & Z concentriques dont A eſt le centre, ſont faits par les points B & C de la même ligne A D. Ainſi le cercle qui décrira B ſera toûjours au dedans du cercle Z que décrira C. Ces deux cercles ne ſe peuvent donc rencontrer.

Seconde Proposition.

72. *Deux cercles concentriques ſont toûjours en même diſtance.*

Car entre X & Z il y a toûjours la même diſtance B C.

Teoreme premier.

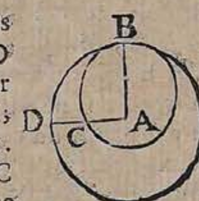
Deux cercles qui ſe coupent ne ſont pas concentriques. Eucl. III. Prop. 5. 73.

Si A eſt le centre de ces deux cercles qui ſe coupent au point B, les lignes A B & A C raions du même cercle ſont égales. A C $\propto$ A B. Et par la même raiſon A B $\propto$ A D. Ainſi A C $\propto$ A B $\propto$ A D ; donc A C $\propto$ A D *Axiome* 3. C'eſt à dire que la partie eſt égale au tout, ce qui ne peut pas être.

Teoreme second.

B C B & B D B deux cercles qui ſe touchent ne ſont pas concentriques, ou n'ont pas même centre. Eucl. III. Prop. 6. 74.

Si A étoit le centre de ces deux cercles, alors A D $\propto$ A B & A B $\propto$ A C s̃ *n.* 33. par conſequent A D $\propto$ A B $\propto$ A C ; ainſi A D $\propto$ A C *Axiome* 3. c'eſt à dire que la partie A C ſeroit égale à ſon tout A D, ce qui eſt abſurde.



*Teoreme troisiéme.

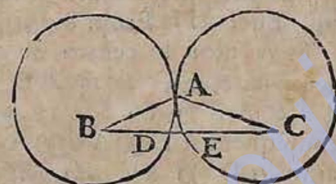
Si les deux cercles A B A & F A F ſe touchent l'un l'autre en dedans ; la ligne droite qui joindra leurs centres étant prolongée, tombera dans le point d'atouchement de ces deux cercles. Euclid. III. Prop. 11. 75.

1° Par le Teorême precedent ces deux cercles n'ont pas un même centre. 2° Soit R centre de B A B : ſi on veut que G le ſoit de F A F qui n'eſt pas dans la ligne R A qui paſſe par A

point de l'atouchement, alors G A ∝ G F s̃ *n.* 33. Ainſi R G + G A ∝ R G + G F. *Axiome* 4. Or R G + G A eſt plus grand que R A s̃ *n.* 12. & par conſequent que R B car R A ∝ R B s̃ *n.* 33. Ainſi R G + G F eſt plus grand que R B ou R G + G B. Otant donc R G partie commune reſtera G F plus grande que le tout G B *Axiome* 7. ce qui eſt impoſſible.

*TEOREME QUATRIE'ME.

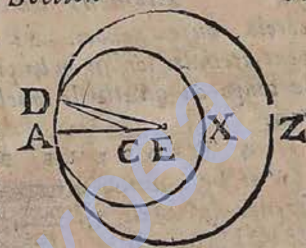
76. *D A D & E A E deux cercles ſe touchent en dehors, ſi on méne une ligne droite par leurs centres, elle paſſera par le point de leur atouchement.* Euclid. III. Prop. 12.



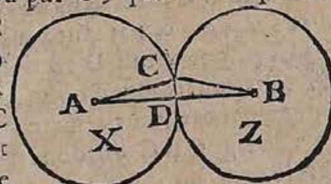
Si on le nie on eſt contraint de dire une choſe abſurde ; car que B ſoit centre de D A D, & C de E A E, & qu'ainſi la ligne B C ne paſſe pas par A où ces deux cercles ſe touchent : B A ∝ B D & C A ∝ C E s̃ *n.* 33. Donc à choſes égales ajoûtant choſes égales A B + A C ∝ B D + C E. Puiſque B C ne paſſe pas par le point d'atouchement de ces deux cercles qui leur eſt commun, D & E ne ſont pas un même point : il y a entre deux un intervale ſavoir D E ; je l'ajoûte à B D + C E alors B D + D E + C E eſt plus grand que A B + A C, ce qui eſt abſurde s̃ *n.* 12.

*TEOREME CINQUIE'ME.

77. *Deux cercles ne ſe peuvent toucher en dedans ou en dehors qu'en un ſeul point.* Eucl. III. Prop. 13.



1° X & Z ſont deux cercles qui ſe touchent en dedans. Puiſqu'ils n'ont pas un même centre ſoit C celui de X & E celui de Z. s'ils ſe touchent aux deux points A & D, alors C A ∝ C D; ajoûtant donc E C à l'un & à l'autre C A + C E ∝ C D + C E. Or E D ∝ C A + C E s̃ *n.* 33. donc C D + C E ∝ E C + C A ∝ E D, partant C D + C E ∝ E D: Ce qui ne peut être s̃ *n.* 12. 2° ſoient deux cercles X & Z qu'on prétend ſe toucher en dehors en deux points diferens C & D. Selon le Teorême précédent la ligne qui joint leurs centres A & B paſſera par D ou par C, que ce ſoit par D.



Alors A D ∝ A C comme B D ∝ B C s̃ *n.* 33. ainſi A D + B D ∝ A C ∝ B C ce qui ne peut être à moins que C & D ne ſoient un même point ; & par conſequent que A D + B D, & A C + B C ne ſoient qu'une même ligne.

SECTION VI.

De la poſition d'une ligne droite au regard d'un cercle.

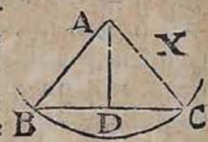
AVERTISSEMENT.

Une ligne droite peut être entierement dans un *cercle, ou au dehors. Si elle est dehors, elle le peut ateindre lorsqu'on la prolonge de sorte qu'elle le coupe ou qu'elle le touche seulement sans y entrer.*

* Teoreme premier.

78. *Une ligne menée entre deux points de la circonference du cercle est entierement dans le cercle.* Eucl. III. Prop. 2.

B & C sont deux points dans la circonference du cercle X ; il faut prouver que la ligne B C menée entre ces points est entierement dans ce cercle. De A centre de X soit sur D milieu de B C une ligne droite. puisque A B & A C raions de X sont égaux & que D est le milieu de B C, cette ligne A D est perpendiculaire s̄ *n.* 40. & partant plus courte que A B & A C s̄ *n.* 50. Ainsi D est dans le cercle s̄ *n.* 33. Or toute autre ligne oblique menée de A sur B C sera encore plus courte que A B & A C s̄ *n.* 57 ; la ligne B C est donc entierement dans le cercle.



Corolaire.

79. *Ainsi une ligne tangente, c'est à dire qui touche un cercle sans le couper & entrer dedans, ne le peut toucher qu'en un seul point.*

Car si cela étoit, elle seroit dans le cercle.

Teoreme second.

80. *La ligne C D est terminée par un cercle : B F qui tombe perpendiculairement sur E sa moitié, coupe par la moitié l'arc dont elle est la corde, & passe par le centre du cercle.*

1° Puisque les points B & F sont également éloignez de C & de D, tous les points de B F sont également éloignez de C & de D s̄ *n.* 38.

donc B C)o B D & F C)o F D, donc B C + C F)o B D + D F, ainsi B F coupe les arcs, dont C D est la corde en deux parties égales. 2° la perpendiculaire B F passe par tous les points également éloignez de C & de D s̄ *n.* 47. Or le centre de ce cercle est également éloigné de ces deux points C & D ; donc B F passe par ce centre.

Corolaire premier. 81.

Donc pour couper un arc en deux parties égales il faut élever sur la moitié de sa corde une perpendiculaire. Eucl. III. Prop. 30.

Corolaire second. 82.

Ayant mené M N parallele à la corde C D, les arcs entre ces paralleles sont égaux.

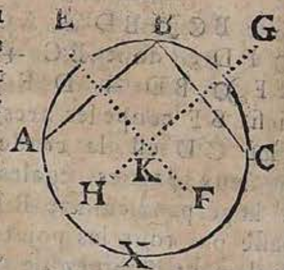
Car B E étant perpendiculaire sur C D elle l'est sur M N. s̄ *n.* 66. Ainsi B M)o B N. Or B C)o & B D, donc les arc de ces cordes égales sont égaux s̄ *n.* 29. Par conséquent ôtant choses égales de choses égales, l'arc B C moins l'arc B M est égal à l'arc B D moins l'arc B N ; c'est à dire que l'arc M C est égal à l'arc N D.

Probleme premier.

Trois points A B C étans donnez trouver le cercle X qui passe par ces points. 83.

Je joins ces trois points par deux lignes, sur le milieu desquelles j'éleve les perpendiculaires E F & G H, lesquelles par le Teorême precedent, passent par le centre de X. Il faut donc que le centre X se trouve en ces deux lignes, &

& par conséquent au point K où elles se coupent. Ainsi on voit ce qu'il faut faire pour trouver le cercle X.



Si les trois points donnez étoient dans une ligne droite, la question auroit été impossible, comme il est évident; car alors les deux perpendiculaires E F & G H ne se couperoient pas étant paralleles.

Corolaire premier.

84. *Deux cercles ne peuvent pas avoir trois points communs, comme A B C, qu'ils ne les ayent tous.*

Ces deux cercles ayant un même centre, sçavoir K, & étant décrits d'un même intervale, ils ne peuvent être qu'un même cercle. ₛ *n.* 35.

Corolaire second.

85. *Deux cercles ne se peuvent couper en plus de deux points,* Eucl. III. Prop. 10.

Car s'ils se coupoient en trois, ils auroient trois points communs; ainsi par le Corolaire précédent ce ne seroit pas deux diferens cercles.

Corolaire troisiéme.

86. *Une portion de cercle étant donnée on peut achever le cercle.* Eucl. III. Prop. 25.

Marquez trois points dans cette portion, aprés quoi vous pouvez trouver le centre du cercle dont elle est partie par le Problême précédent.

Probleme second.

Un cercle étant donné en trouver le centre.

87. Eucl. III. Prop. 1.

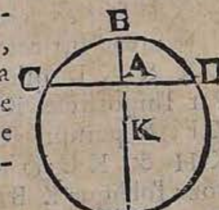
Ayant pris trois points dans ce cercle, comme

A, B, C, il faut les joindre en menant les lignes A B & B C (*même figure que celle du Problême précédent.*) Aprés quoi aiant trouvé le point K centre d'un cercle qui passe par A, B, C, il faut que K soit le centre du cercle proposé, puisqu'il passe par ces trois points; & qu'ainsi ces deux cercles ne peuvent être diferens ₛ *n.* 35.

Teoreme second.

Si la ligne B K passe par le centre K, & coupe la ligne C D, ou l'arc C B D par la moitié, elle est perpendiculaire sur la ligne C D. Eucl. III. Prop. 3. 88.

Car il y a dans cette ligne B K deux points, sçavoir A ou B, & K également éloignez de C & de D, puisque A est la moitié de la ligne C D, & B moitié de l'arc C B D, & que K est le cercle. Donc B K est perpendiculaire, ₛ *n.* 40.



Teoreme troisiéme.

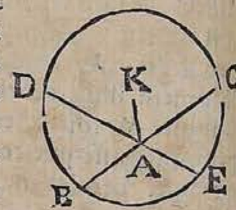
Si la ligne B K passe par le centre K, & est perpendiculaire sur C D, elle coupe C D par la moitié. Euclid. III. Prop. 3. 89.

Le centre est également éloigné de C & de D, & B K étant perpendiculaire, le point A & tous les autres de B K doivent être également éloignez de C & de D ₛ *n.* 39. Donc A C ⫘ A D, ainsi C D est coupé par la moitié.

* Teoreme quatriéme.

Les deux cordes B C & D E qui ne passent pas par le centre ne se peuvent couper par le milieu. Euclid. III. Prop. 4. 90.

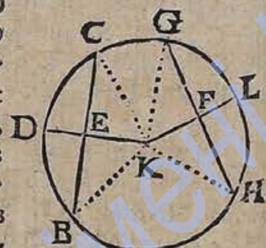
Si ces deux cordes se coupent en A, qui n'est pas le centre, & que ce point soit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de A une ligne au centre K, cette ligne K A, sera perpendiculaire sur BC & sur D E s̃ *n.* 88. donc BC & DE seront perpendiculaires sur K A, s̃ *n.* 42. ainsi sur le même point A il y a deux perpendiculaires, ce qui est impossible s̃ n 46.



TEOREME CINQUIE'ME.

91. *Les cordes B C & G H qui sont égalment éloignées du centre K sont égales, & si elles sont égales, leurs distances du centre, sçavoir, K E & K F sont égales.* Eucl. III. Prop. 14.

Je méne sur ces cordes les perpendiculaires DK & KL qui les coupent par le milieu. Par l'hipothése K E ∝ K F, & puisque B K ∝ K H & K C ∝ K G: donc l'oblique K B étant égale à l'oblique K H, & les perpendiculaires K E & K F de ces obliques étant égales, les éloignemens du perpendicule B E & H F seront égaux. s̃ *n.* 54. Par la même voye on prouve que EC ∝ FG, qu'ainsi B C ∝ H G, ce qu'il faloit prouver. On a montré que les obliques comme K B & K H étant égales; & les distances B E & H F du perpendicule étant égales, les perpendiculaires K E & K F sont égales, s̃ *n.* 55.



TEOREME SIXIE'ME.

92. *De toutes les cordes d'un cercle, celle qui passe par le centre est la plus grande.* Eucl. III. Pr. 15.

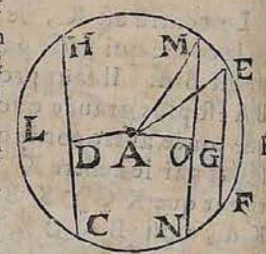
Le centre est K, le diametre ou la corde qui passe par le centre est B A. Il faut prouver que B A est plus grande que C D, & que toute autre corde qui ne passe pas par le centre K. Il est évident que K C ∝ K B & K D ∝ K A, ainsi B A ∝ K C + K D. Or K C + K D est plus grand que C D; s̃ *n.* 12. donc B A est plus grand que C D cette démonstration s'aplique à toute autre corde.

*TEOREME SE'TIE'ME.

Les cordes les plus proches du centre du cercle sont les plus grandes, & les plus grandes sont les plus proches du centre du cercle. Eucl. III. Prop. 15. 93.

H C & E F sont deux cordes. La perpendiculaire A D est plus courte que la perpendiculaire A G; ainsi H C est plus proche de A centre du cercle que E F. Il faut prouver que H C est plus grande que E F.

Je prens A O égale à A D; & sur O j'éléve perpendiculairement la corde M N qui sera égale à B C s̃ *n.* 91. Il ne s'agit donc que de montrer que M N est plus grande que E F, ou ce qui est la même chose que M O moitié de M N s̃ *n.* 89. est plus grande que E G, aussi moitié de E F s̃ *n.* 89. 1° Si E G étoit plus grande que M O, comme A G est plus grande que A O, par l'hipothése oblique A E seroit plus grande que l'oblique A M s̃ *n.* 58. Ce qui eſt abſurde ; car A M & A E ſont les raïons d'un même cercle. 2° E G ne peut être égal à M O ; car A M & A E les obliques étant égales, A G & A O ſeroient égales s̃ *n.* 54. ce qui eſt contre l'hipothéſe. E G ne pouvant donc être ni égale à M O ni plus grande, elle eſt plus petite.



3° On peut démontrer de la même maniere que HC étant plus grande que E F elle eſt plus proche de A centre du cercle, en faiſant M N égale à HC, & prouvant que A O ne peut être ni égale à A G, ni plus grande. Car ſi A O ⊃ A G puiſque A M ⊃ A E donc s̃ *n.* 55. O M ⊃ G E contre l'hipothéſe. Et ſi A O étoit plus grande que A G, comme O M eſt plus grande que A G, Alors A M ſeroit plus grande que A E s̃ *n.* 58. quoique A M & A E ſoient deux raïons. A O ne pouvant donc être ni égale ni plus grande que A G elle eſt plus petite : ainſi M N ou ſon égale B C eſt plus proche du centre que E F qui eſt une plus petite corde.

* TEOREME HUITIE'ME.

94. *Dans les mêmes cercles ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes ſoûtiennent de plus grans arcs, & les plus grans arcs ont de plus grandes cordes.* Eucl. III. Prop. 28. & 29.

H C eſt plus grande que E F. Je dis que l'arc H L C eſt plus grand que l'arc E B F (*même figure que celle ci-deſſus*) ſoit M N parallele à E F en même diſtance de A que l'eſt B C qui

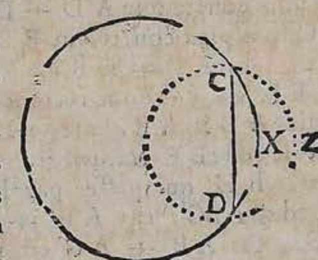
lui eſt ainſi égale s̃ *n.* 91. Par conſéquent les arcs H L C & M B N ſont égaux s̃ *n.* 29. puiſque E F eſt parallele à M N, donc ces deux lignes ne ſe rencontreront jamais s̃ *n.* 69. donc il y a une portion d'arc interceptée entre ces deux lignes. Ainſi la portion M B N eſt plus grande que la portion E B F, qui ſera ainſi plus petite que H L C. Les plus grandes cordes ont donc de plus grans arcs.

Si l'arc E B F eſt plus petit que H L C, & par conſéquent M B N pris égal à H L C, la corde E F ſera plus éloignée du centre du cercle que M N à qui elle eſt parallele ; elle eſt donc plus petite que M N s̃ *n.* 93. par conſéquent moindre que B C ; Ainſi les plus grans arcs ont de plus grandes cordes.

* TEOREME NEUVIE'ME.

C D une même ligne qui eſt la corde de deux arcs de X & de Z cercles inégaux, eſt la corde d'un plus grand arc dans le petit cercle, & la corde d'un plus petit arc dans le plus grand cercle. 95.

Car ſi les deux arcs dont C D eſt la corde étoient les mêmes, qu'ils fuſſent par exemple également de dix degrez ; il ne ſeroit pas vrai comme on en eſt convenu s̃ *n.* 31. que les arcs d'un pareil nombre de degrez ont de plus grandes cordes dans les plus grans cercles,



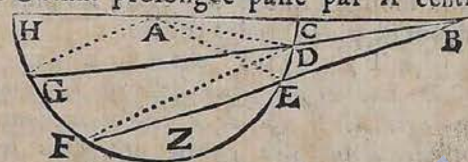
COROLAIRE.

96. *Donc une même ligne ne peut pas être la corde de deux arcs d'un pareil nombre de degrez, qui soient portions de cercles inégaux.*

97. ### TEOREME DIXIE'ME.

Si de B hors le cercle Z on méne plusieurs lignes à ce cercle. 1° De toutes celles qui tomberont sur la partie convexe celle qui passera par le centre, étant prolongée, sera la plus courte. Celles ensuite qui seront plus prés d'elle seront les plus courtes. 2° C'est le contraire dans les lignes qui tombent sur la partie concave. Eucl. III. Prop. 8.

1° BC étant prolongée passe par A centre de Z: je dis qu'elle est plus cour-



te que BD. Car AC ↄ AD: Or AC + CB est plus courte que AD + DB s̃ *n.* 12. donc BC sera plus courte que BD. *Axiome* 7. AD ↄ AE. or AD + DB est plus court que AE + EB. s̃ *n.* 56. donc retranchant les grandeurs égales AD & AE, le reste DB sera plus cout que le reste BE *Axiome* 7.

2° BH qui passe par le centre est plus grand que BG; car AB + AH ↄ AB + AG. Or AB + AG est plus grand que BG s̃ *n.* 12. donc BH est plus grand que BG. Il est pareillement évident que BD + DF est plus grand que BF s̃ *n.* 12. Or DG est plus grand que DF s̃ *n.* 93. donc BD + DG est plus grand que BF.

TEOREME ONZIE'ME.

Si de B hors le centre du cercle DED, on méne des lignes à la circonference BE la partie de la ligne DE qui passe par le centre sera la plus grande; mais le reste BD sera la plus courte. Eucl. III. Prop. 7. 98.

1° BA + AE ↄ BA + AC puisque AE ↄ AC. Or AB + AC est plus grand que BC s̃ *n.* 12. donc BE égal à BA + AC est plus grand que BC. 2° AF ↄ AB + BD. Or AB + BF est plus grand que AF s̃ *n.* 12. ôtant donc AB partie commune, le reste BF sera plus grand que le reste BD. *Axiome* 7.

* LEMME. 99.

Deux lignes AB & AR jointes dans le point A s'ouvrent : Si l'une tourne sur ce point ; la ligne qui joint leurs extrêmitez devient plus grande.

Si AB & AR étoient égales, la chose seroit évidente ; car les arcs compris entre leurs extrêmitez devenant plus grans, ils auroient de plus grandes cordes. Soit AR plus petite que AB, il faut prouver que BD est plus longue que BC & BF que BD, & BE que BF. Concevons que AR décrit le cercle GCDE. 1° Toute ligne tirée de B sur la partie de ce cercle depuis G jusqu'à C où je supose que la ligne menée de B à l'extrêmité de R entre dans ce cercle, sera plus grande selon qu'elle s'éloignera plus de B G s̃ *n.* 97. 2° Suposons que B D est la premiere ligne qui joigne A B & A R, laquelle entre dans le cercle. L'arc étant plus grand que l'arc G C, la perpendiculaire D N sera plus grande que C M, moitié des cordes du double de ces arcs; donc N B étant encore plus grand que M B, la ligne oblique B D sera plus grande que B C s̃ *n.* 58. 3° B E est plus longue que B F, & B F plus longue que B D s̃ *n.* 97. ainsi la ligne qui joint les extrêmitez de A B & de A R devient plus grande à mesure que l'une ou l'autre tourne sur le point A.

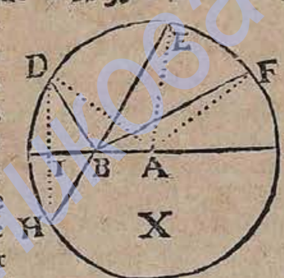
* TEOREME DOUZIE'ME.

100 *De tous les points qui sont dans le cercle hors le centre on ne peut mener à la circonference plus de deux lignes qui soient égales.* Eucl. III. Prop. 9.

Soit A le centre du cercle X, le point B ne l'est donc pas. Je dis 1° que B D est plus grande que B C s̃ *n.* 98. 2° que B E est plus grande que B D; Car A D & A E sont toûjours le raïon de X, qui en tournant & s'éloignant de A B doit faire B E plus grande que B D suivant le Lemme précédent: D'où l'on prouve encore que B F est plus grande que B E. Or B G est plus grande que B F s̃ *n.* 98. Par conséquent dans toute la partie C D E F G du cerle X toutes les lignes

gnes menées de B à la circonference de X sont toutes inégales.

Prenant l'arc C H égal à C D, puisque I H $\gtrdot$ I D s̃ *n.* 88. donc B H $\gtrdot$ B D. s̃ *n.* 53. mais toute autre ligne que B H sera ou plus petite ou plus grande, comme on vient de le voir. On peut demontrer de la même maniere jusque de part & d'autre de B, on peut mener deux lignes égales & non davantage.



COROLAIRE I.

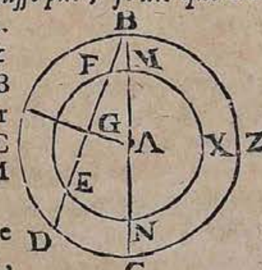
Il n'y a donc que le seul centre du cercle d'où l'on puisse tirer à la circonference plus de deux lignes égales. 101.

COROLAIRE II.

Tout point dans le cercle dont on peut tirer à la circonference trois lignes égales est le centre du cercle. Eucl. III. Prop. 9. 102.

* TEOREME TREIZIE'ME.

Z & X sont deux cercles concentriques, ayant mené du point B la ligne B C qui passe par leur centre A & B D qui n'y passe pas, je dis que B M $\lessdot$ *C N, & B F* $\gtrdot$ *D E.* 103.



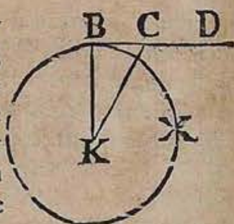
1° A M $\gtrdot$ A N, & A B $\gtrdot$ A C; donc A B − A M $\gtrdot$ A C − A C. Or A B − A M $\gtrdot$ B M, & A C − A N $\gtrdot$ N C, donc B M $\gtrdot$ N C.

2° De A menant une perpendiculaire sur B D, alors G D $\gtrdot$ G B & G E $\gtrdot$ G F s̃ *n.* 89. Donc G D − G E $\gtrdot$ G B − F G. Or G D − G E $\gtrdot$ D E & G B − G F $\gtrdot$ F B; donc D E $\gtrdot$ B F.

TEOREME QUATORZIE'ME.

104 *Une ligne perpendiculaire à l'extrêmité d'un rayon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un ſeul point.* Eucl. III. Prop. 16 & 18.

B D eſt perpendiculaire ſur B K, il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle X qu'au point B.



Si on dit qu'elle le touche dans un ſecond point, comme en C, je méne de K à C une ligne, laquelle n'eſt pas perpendiculaire ſur BD, puiſque de K ſur BD on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire s̃ *n.* 48. elle eſt donc plus grande que le raïon BK, qui eſt perpendiculaire ſur B D, s̃ *n.* 50. Partant le point C eſt hors le cercle X, ainſi BD ne le touche pas en ces deux points B & C, mais ſeulement en B.

Comme la ligne courbe ſe détourne en chaque point & s'éloigne de la ligne droite, elle ne la peut toucher qu'en un ſeul point.

COROLLAIRE.

105 *Il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui touche le cercle dans un même point.*

Deux diferentes lignes ne peuvent pas toucher le cercle X au même point B; car par ce Teorême elles ſeroient toutes deux perpendiculaires ſur BK; ce qui eſt impoſſible s̃ *n.* 48.

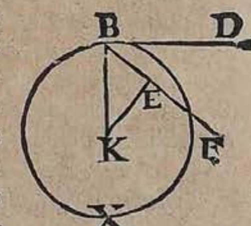
TEOREME QUINZIE'ME.

106 *Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui ſoit perpendiculaire ſur le point de l'atouchement de la tangente ou touchante, cette perpendiculaire paſſera par le centre de ce cercle.* Eucl. III. Prop. 19.

C D eſt une tangente ou touchante: de C point d'atouchement, je méne au dedans du cercle une perpendiculaire, je dis qu'elle paſſe par le centre K; ſi on veut que ce ſoit par B qui n'eſt pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raiſon, car de K aiant mené le raion K C, alors C D eſt une ligne touchante s̃ *n.* 104. donc elle eſt perpendiculaire ſur C K, ainſi il y auroit ſur C deux perpendiculaires K C & B C, ce qui ne peut pas être s̃ *n.* 48.

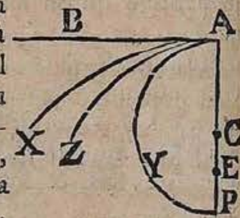
TEOREME SEIZIE'ME.

Entre une tangente & la circonference d'un cercle on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infini de lignes circulaires. Eucl. III. Prop. 16. 107



Si entre B D tangente & le cercle X, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'eſpace entre B D la tangente & le cercle, que ce ſoit la ligne B F, ſur laquelle je méne du point K une autre ligne qui lui ſoit perpendiculaire, ſavoir K E, qui ſera plus courte que le raïon B K, qui n'eſt pas perpendiculaire ſur cette ligne, s̃ *n.* 50. ainſi K E étant plus petite que le raïon B K, ſon extrêmité E eſt au dedans du cercle. Par conſéquent la ligne B F n'eſt pas hors du cercle, ainſi elle ne partage pas l'espace qui est entre lui & la tangente B D.

Mais entre A B la tangente & le cerle Y, on peut faire passer une infinité de cercles, car aïant prolongé le raïon A C au de-là du centre C; & de E comme centre, & de l'intervale E A aïant fait le cercle Z, la ligne A B sera tangente à ce cercle, $\overline{s}$ *n.* 104. lequel étant plus grand, sera au dehors du cercle Y. Pareillement le cercle X, dont le centre est P, sera encore entre A B & Y, ainsi à l'infini. Par conséquent entre la tangente A B & le cercle Y on peut faire passer une infinité de lignes circulaires.



Corolaire.

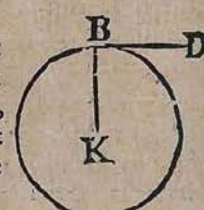
108 *Un espace fini tel que celui qui est centre la ligne droite A B, & le cercle Y se peut dont diviser dans une infinité de parties.*

Une ligne menée de A B à la circonference de Y, par conséquent finie se peut diviser ainsi en une infinité de parties.

Probleme premier

109 *Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.*

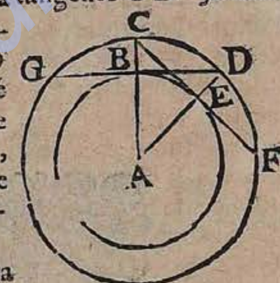
Le centre est K, le point donné B, je méne le raïon K B, & sur son extrêmité B, j'éleve perpendiculairement B D qui sera la tangente qu'il faloit faire $\overline{s}$ *n.* 104.



Probleme second.

D'un point donné hors le cercle tirer une tangente. Eucl. III. Prop. 17. 110.

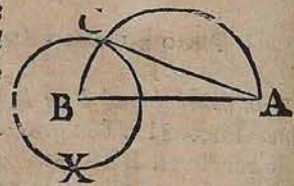
Le cercle est BEB, le point donné est C, duquel je méne une ligne au centre A & au point B, où cette ligne coupe le cercle, par le problême precedent je fais la tangente G D. Je décris un cercle concentrique par C, & de D où ce cercle est coupé par la tangente G D je prens D F égale à D C, je joins C & F par une ligne qui sera la tangente.



Par la construction la corde G D $\propto$ C F, car l'arc G C est égal à l'arc C D, & l'arc C D à l'arc D F; ainsi les arcs G D & C F étant égaux, leurs cordes sont égales.

Je méne de D au centre A la ligne A D qui sera perpendiculaire sur C F, puisque deux de ses points, savoir A & D sont également éloignez de ses extrêmitez : Or puisque les cordes D G & C F sont égales, les lignes A B & A E sont égales, $\overline{s}$ *n.* 91. Donc le point E aussi-bien que B est dans le cercle B E B, ainsi la ligne C F étant perpendiculaire sur E extrêmité du raïon A E elle touche le cercle, $\overline{s}$ *n.* 104.

Ce Problême se pratique plus facilement ainsi; soit A le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle X; Aprés avoir tiré *la ligne A B de A à B centre du cercle X, il faut décrire sur cette ligne le cercle A B C, & au point de section C mener A C qui sera la tangente*



qu'on cherchoit, ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.

ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE SECOND.

De la seconde dimension du Corps.

SECTION PREMIERE.

Des Angles & de leurs mesures.

AVERTISSEMENT.

Nous alons parler de la seconde dimension du corps, c'est à dire des surfaces. Nous ne considerons ici que celles qui sont planes, c'est à dire *les plus courtes entre deux lignes droites : Or en parlant de celles-ci, nous commencerons par celles qui sont renfermées entre deux lignes qui se rencontrent ou qui se coupent dans un point.*

PREMIERE DEFINITION.

1. *L'Ouverture de deux lignes diferentes qui se coupent ou se rencontrent dans un point se nomme angle.*

Je dis deux diferentes lignes ; car deux lignes qui se rencontreroient directement dans un point ne sont qu'une même ligne.

SECONDE DEFINITION.

2. *Lorsque deux lignes qui se coupent ou se rencontrent, sont sur un plan, l'angle qu'elles font s'apelle plan.*

Euclide définit l'angle l'inclination d'une ligne sur une autre ligne qu'elle coupe ou qu'elle touche ; mais cette définition ne donne pas une notion où l'on aperçoive cette proprieté de l'angle de pouvoir être divisé ; car on ne conçoit pas ce que c'est que de diviser l'inclination de deux lignes, au lieu que l'idée qu'on a de l'ouverture de deux lignes, enferme celle de la surface qui est à cette ouverture, laquelle surface se peut diviser.

TROISIE'ME DEFINITION.

3. *Si les deux lignes qui comprennent cet angle plan sont courbes, c'est un angle curviligne* tel qu'est A. *Si une de ces lignes est courbe & l'autre droite, cet angle est nommé mixte* tel qu'est B. *Si ces deux lignes sont droites, c'est un angle rectiligne* tel qu'est C.

QUATRIE'ME DEFINITION.

Les deux lignes qui renferment un angle, sont les côtez de cet angle : le point où ces deux lignes se coupent ou se rencontrent en est la sommet. 4.

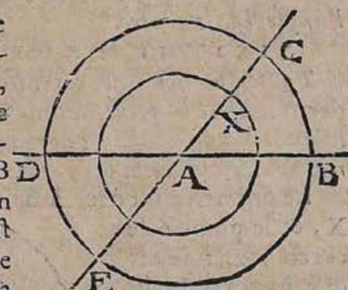
Lorsque l'on marque un angle avec trois lettres, celle du milieu marque le sommet, & les deux autres les deux côtez.

Propositions évidentes touchant les Angles.

PREMIERE PROPOSITION.

Qu'on prolonge les côtez d'un angle, ou qu'on en retranche, cela ne le fait ni plus grand ni plus petit. 5.

Puisque l'angle BAC est l'ouverture de deux lignes, il est évident que soit qu'on prolonge les lignes AB & AC ou qu'on en retranche, c'est toûjours la même ouverture, & la surface qui est à cette ouverture, c'est à dire qui est la plus prés du sommet A, n'en est ni augmentée ni diminuée.



SECONDE PROPOSITION.

6. *L'angle BAC ne peut être ni augmenté ni diminué que lorsqu'un des côtez AB ou AC en tournant sur A le sommet, comme sur un centre, il s'éloigne ou s'aproche de l'autre côté.*

On voit alors que cét angle, c'est à dire l'ouverture de AB & de AC s'augmente ou se diminuë, & par conséquent la surface qui est prés de A sommet de l'angle BAC.

TROISIE'ME PROPOSITION.

7. *Un des côtez de l'angle B A C en tournant & s'éloignant de l'autre côté, fait toûjours cét angle plus grand, jusqu'à ce que faisant une ligne droite avec cét autre côté, il ne renferme plus une surface, ainsi il ne fait plus d'angle.*

QUATRIE'ME PROPOSITION.

8. *AB ou AC un des côtez de l'angle B A C ne peut faire en tournant qu'un tour entier, ou un cercle; aprés quoi il se joint avec l'autre côté, & ne fait avec lui qu'une seule ligne droite.*

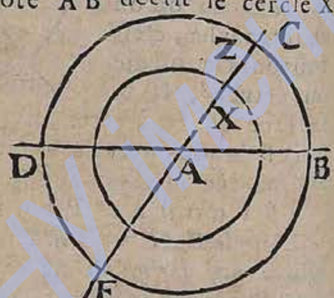
CINQUIE'ME PROPOSITION.

9. *Chaque point du côté d'un angle, qui fait un tour entier, décrit un cercle dont A sommet de l'angle est le centre.*

SIXIE'ME PROPOSITION.

10. *Toutes portions de ces diferens cercles décrits par les diferens points d'un des côtez de l'angle, lesquelles portions sont comprises entre les deux côtez de l'angle, sont d'un pareil nombre de degrez.*

Le point X du côté AB décrit le cercle X X, & le point Z le cercle Z Z : je dis que les portions de ces cercles comprises entre les côtez A B & A C sont d'un égal nombre de degrez; ce qui est évident; car ces deux cercles sont décrits dans un même tems, savoir celui qu'il faut afin que la ligne AB ou AC fasse un tour entier. Divisons donc ce tems en trois cent soixante momens autant que le cercle a de degrez. Dans le premier moment où X décrira



la trois cent soixantiémepartie de toute sa grandeur, Z fera aussi une même partie de sa grandeur. Car comme dans un même tems tout le cercle entier s'acheve; aussi chaque partie s'acheve à proportion.

SE'TIE'ME PROPOSITION.

Ayant décrit un cercle du sommet d'un angle, la grandeur de cét angle ne dépend que de la grandeur de la portion de ce cercle comprise entre ses côtez. 11.

Car la grandeur d'un angle ne dépend point de ses côtez; mais seulement de son ouverture, selon qu'un de ses côtez s'éloigne plus ou moins en tournant de l'autre côté par la seconde proposition.

HUITIE'ME PROPOSITION.

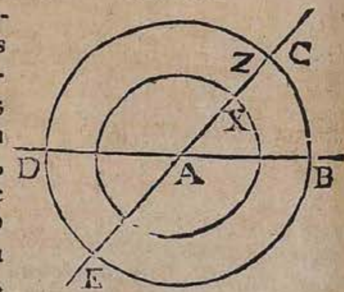
La mesure d'un angle est donc la portion d'un cercle dont le centre est au sommet de ce cercle (n'importe de quel intervale) *laquelle est comprise entre les côtez de cét angle.* 12.

Les arcs des cercles X & Z compris entre les côtez A B & A C sont d'un égal nombre de degrez.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Le plus grand angle ne peut avoir pour sa mesure la demie circonference entiere, 13.

Car lorsque le côté A C de l'angle B A C, a fait en tournant la demie circonference BCD; que C est venu au point D, alors il ne fait plus qu'une ligne droite avec A B : Car puisqu'on supose que B C D est la demie circonference, il faut que A D + A B soit le diamétre du cercle; & qu'ainsi A D & A B ne soient qu'une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties égales. Toute la circonference du cercle est de trois cent soixante degrez, & par conséquent la demie circonference de cent quatre-vingt degrez; ainsi un angle ne peut jamais être de cent quatre-vingt degrez ; & il ne peut pas en avoir davantage, car lorsque le côté A C est venu en D & qu'il passe au delà venant en E,



on ne peut pas dire qu'il fasse un angle avec A B qui ait pour sa mesure l'arc E D C B, car A E & A B ne renferment pas la surface qui répond à cét arc E D C B, mais celle qui répond à l'arc B E plus petit que la demie circonference.

Cinquie'me Definition.

14. *Vn angle qui a pour sa mesure la moitié de la demie circonference ou le quart de l'entiere circonference du cercle, c'est à dire un arc de quatre-vingt-dix degrez, s'apelle angle droit.*

Ansi suposant que l'arc A C est le quart de la circonference A C D E, & par conséquent de nonanté degrez, qui sont le quart de trois cent soixante degrez que vaut tout le cercle, l'angle A B C qui a pour mesure cet arc A C, est droit.

Sixie'me Definition.

15 *Vn angle qui a pour sa mesure un arc de plus de de nonante degrez est dit obtus.*

L'angle F B C est obtus, l'arc F C qui le mesure, étant de plus de nonante degrez, puisqu'il est plus grand que le quart de cercle A C.

Se'tie'me Definition.

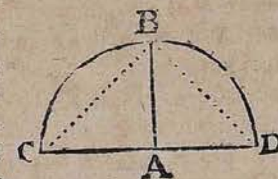
Vn angle qui a pour sa mesure un arc qui a moins de nonante degrez, est apellé aigu. 16.

L'angle F B E est aigu aiant pour sa mesure, l'arc F E moindre que l'arc A E de nonante degrez.

Teoreme premier.

Vne ligne perpendiculaire sur une autre fait avec elle deux angles droits; & si elle fait deux angles droits, elle est perpendiculaire, 17.

1° B A est perpendiculaire sur A milieu de C D; d'où comme centre aiant décrit le cercle C B D, par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes B C & B D sont égales, ainsi les arcs qu'elles soûtiennent



sont égaux ; & partant puisque C B D est la moitié de la circonference, C D étant le diamétre du cercle, les arcs B C & B D en seront le quart ; donc les angles B A C & B A D aiant chacun pour mesure le quart de cercle, ils sont droits, § n. 14.

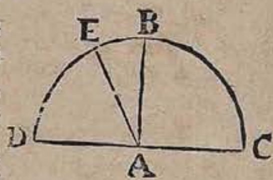
2° Il est facile de démontrer la seconde partie, car si les deux angles C A B & D A B sont droits, les arcs B C & B D sont égaux, moitié chacun de la demie circonference ; & B étant ainsi en égale distance de C & de D, la ligne A B est perpendiculaire.

Teoreme second.

La ligne E A oblique sur C D fait avec elle d'un côté un angle obtus, & de l'autre un aigu, qui tous deux ensemble valent deux droits. 18.

Soit A B une perpendiculaire ſur A milieu de la ligne C D; donc l'arc C B ſera égal à BD, & par conſéquent chacun eſt de nonante degrez; puiſque E A eſt oblique, & qu'ainſi elle n'eſt pas perpendiculaire, les deux arcs C E & E D ſont inégaux; l'arc C E eſt plus grand que B C, donc l'angle C A E eſt obtus, § *n.* 15.

L'arc E D eſt plus petit que B D qui eſt de nonante degrez; donc l'angle E A D, § *n.* 16. eſt aigu. Ces deux angles C A E & E A D, ont pour meſure les arcs



C E & E D, qui ſont enſemble la demie circonference, c'eſt à dire, deux quarts de cercle. Ils valent donc deux angles droits, puiſque leur meſure eſt égale à deux fois nonante degrez, meſure de deux angles droits.

*Teoreme troiſiéme.

19.* *Deux lignes A B & A C ont A un point commun. Si elles font avec A E deux angles égaux à deux droits, elles ne font qu'une même ligne.* Euclid. I. Prop. 14.

Soient donc B A E + C A E égaux à deux droits. Si on dit que B A & A C ne font pas une ſeule ligne, & que B A étant prolongée va en D; donc par le Teorême precedent les angles

B A E & E A D vaudront deux droits; donc E A D = E A C ce qui eſt abſurde.

Huitiéme Definition.

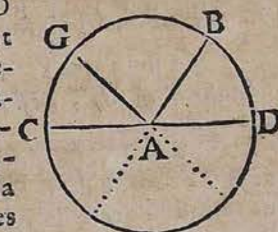
L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux droits 20.
s'apelle le complément de l'angle obtus au demi cercle, figure § *n.* 18.

Ainſi D A E eſt le complément de C A E.

Teoreme quatriéme.

Tous les angles que deux ou pluſieurs lignes font 21.
avec une ligne ſur laquelle elles tombent, ſont égaux à deux angles droits, & ont par conſéquent pour meſure la demie circonference. Eucl. I. Prop. 13.

Qu'on conçoive tant de lignes que l'on voudra qui tombent ſur C D au point A, de ce point comme centre aiant décrit un cercle, la meſure de tous ces angles ſera la demie circonference C G B D, qui eſt la meſure de deux angles droits.



Corolaire.

Ainſi deux ou pluſieurs lignes ſe coupant en un 22.
point, tous les angles qu'elles font au tour de ce point ſont égaux à quatre angles droits.

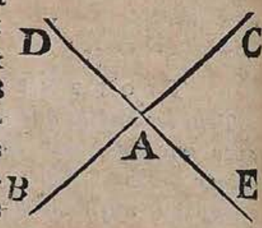
Car les angles que A G & A B font ſur C D valant deux droits, ſi l'on conçoit que ces lignes ſoient prolongées, tous les angles qu'elles feront de l'autre part ſeront auſſi égaux à deux angles droits: donc les angles qu'elles font autour du point A valent quatre angles droits.

Teoreme cinquiéme.

Deux lignes en ſe coupant font les angles opo- 23.
ſez au ſommet égaux. Eucl. I. Prop. 15.

Les deux lignes B C & D E se coupent au point A. Je dis que les angles D A C & B A E sont égaux, comme aussi D A B & C A E.

D A B & B A E valent deux droits ; D A B & D A C valent aussi deux droits s̄ *n.* 18. donc D A B + B A E ɔ D A B + D A C : ôtant de ces deux valeurs égales l'angle commun D A B, les restes D A C & B A E seront égaux. Par le même raisonnement, on fait voir que D A B ɔ C A E.



Neuvie'me Definition.

24. *Sinus d'un arc, c'est la moitié de la corde du double de cet arc.*

L'arc B D E est le double de l'arc B D ; la ligne B C, moitié de B E corde de B D E est sinus tant de l'arc B D que de l'arc B F, son complément au demi cercle ; ainsi les arcs D B & B F égaux ensemble au demi cercle ont un même sinus, & sont réciproquement complément l'un de l'autre au demi cercle.

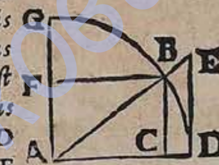
Dixie'me Definition.

25. *Le sinus d'un angle c'est le sinus de l'arc qui le mesure.*

Ainsi B C qui est sinus de l'arc B D mesure de l'angle B A D, est le sinus de cet angle. Lorsqu'un angle est obtus son sinus est aussi le sinus de l'angle aigu, qui est son complément au demi cercle, ainsi B C est

sinus de l'angle obtus B A F aussi-bien que de l'angle aigu B A C, c'est pourquoi dans la suite l'on ne considere que les sinus des angles aigus.

B C étant le sinus de l'angle B A D, on apelle C D compris entre B C & l'arc B D, le sinus verse de cet arc B D ; dont B C est le sinus, qu'on nomme sinus droit pour le distinguer de C D sinus verse. La ligne D E qui touche l'arc B D, & qui est terminée par A E & A D qui comprennent le même arc se nomme tangente de cet arc & de l'angle B A D ; la ligne A E s'apelle secante de cet angle & de cet arc.



Teoreme sixie'me.

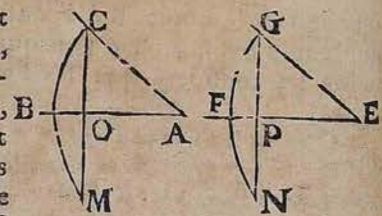
Aiant décrit l'arc qui mesure un angle, & du point où il coupe un des côtez mené une perpendiculaire sur l'autre, cette perpendiculaire sera le sinus de cet angle. figure s̄ *n.* 25. 26.

Soit l'angle B A D, du sommet duquel, & de l'intervale qu'on a voulu, on ait fait l'arc B D. Si de B on abaisse la perpendiculaire B C sur A D, je dis que B C sera le sinus de B A D, car l. 1. n. 89. B C ɔ C E, & l. 1. n. 47. B D ɔ D E : par conséquent B C est le sinus de l'arc B D, & de l'angle B A D selon la définition du sinus s̄ *n.* 28.

Teore'me setie'me.

Les angles égaux ont des sinus égaux ; & si les sinus sont égaux, les angles sont égaux. 27.

1° Les angles C A B & G E F sont égaux. Ainsi de leur sommet A & E & d'un intervale égal, aiant fait les arcs C B, G F qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux. Je les continuë de sorte que C B ∝ B M & G F ∝ F N : donc puisque les arcs égaux ont des cordes égales C M ∝ G N ; & par conséquent C O & G P les moitiés de ces cordes sont égales ; or ces moitiés sont les sinus des angles C A B & G E F, donc les sinus de ces angles sont égaux.



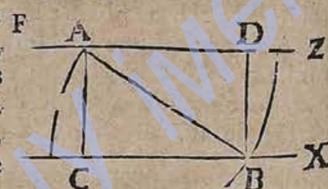
Si les sinus C O & G P sont égaux, C M ∝ G N, & partant C B M ∝ G F N ; donc les angles C A B & G E F étant mesurez par ces arcs égaux, ils sont égaux.

Teoreme Huitie'me.

28. *Les angles alternes que fait une ligne qui joint deux paralleles sont égaux.* Eucl. I. Prop. 29.

Z & X sont deux paralleles, je dis que les angles D A B & A B C sont égaux, & que X B A est aussi égal à B A F.

Je méne entre les paralleles Z & X, les perpendiculaires A C & D B, qui sont ainsi égales. Concevant que de A & B comme centre & d'un même intervale A B on a décrit les arcs qui sont les mesures des angles D A B & A B C, les lignes A C & B D s̃ *n.* 26. en seront les sinus qui étant ainsi égaux les angles D A B & A B C seront égaux. s̃ *n.* 27.



D A B & B A F valent deux droits, s̃ *n.* 18 A B C, & X A B valent aussi deux droits. Ainsi D A B + B A F ∝ A B C + X B A. ôtant de part & d'autre des choses égales, savoir les angles D A B & A B C égaux, restera X A B ∝ B A F.

Teoreme Neuvie'me.

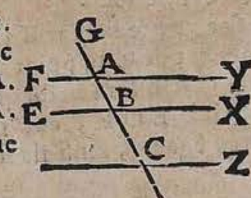
Si une ligne joignant deux autres lignes fait les angles alternes égaux, ces deux lignes sont paralleles. Eucl. I. Prop. 27. 29.

Si l'angle D A B est égal à l'angle A B C, concevant que de A & de B comme centre, & d'un même intervale A B on ait fait les arcs qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux, puisque les angles le sont (*même figure ci-dessus.*) Aiant donc abaissé de A sur X & de B sur Z des perpendiculaires, s̃ *n.* 26. elles seront les sinus de ces angles, & égales. s̃ *n.* 27. Partant Z & X sont paralleles, l. 1. n. 61.

Teoreme Dixie'me.

Une ligne coupant deux ou plusieurs paralleles, tous les angles qu'elle fait avec elles sont égaux. 30.

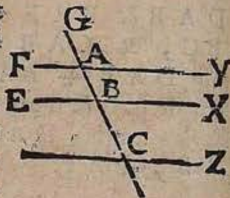
Z C B ∝ C B E s̃ *n.* 23. & C B E ∝ A B X : donc Z C B ∝ C B E ∝ X B A. Donc Z C B ∝ X B A. On démontre de même que G A Y ∝ A B X.



Teoreme Onzie'me.

Si G C tombant sur les lignes Y, X, Z fait avec elles les mêmes angles, que (GAY ∝ GCZ) ces lignes seront paralleles Euclid. I. Prop. 28. 31.

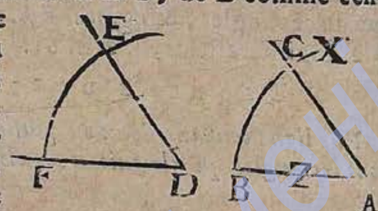
GAY + YAB valent deux droits, comme auſſi GBX + GBE s̄ *n.* 18. Otant donc de ces deux touts égaux les angles GAY & GBX qu'on ſupoſe égaux, les angles alternes YAB & GBE reſteront égaux. Donc s̄ *n.* 29. les lignes Y & Z ſont paralleles. On démontrera de la même maniere que Y & Z ou X & Z ſont paralleles.



PROBLEME PREMIER.

32. *Sur le point A élever une ligne, qui faſſe avec Z un angle égal à un autre angle donné.* Eucl. I. Prop. 23.

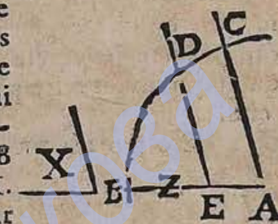
L'angle donné eſt EDF, de D comme centre je fais l'arc EF; aprés du point donné A comme centre, & de l'interva-le DE je fais le cercle X: dont je prens l'arc BC égal à l'arc EF, enſuite menant de C au point A une ligne droite, l'angle CAB ſera celui que l'on propoſoit de faire égal à EDF, car ils ont pour meſure des arcs égaux, ainſi ils ſont égaux.



PROBLEME SECOND.

33. *Par D un point donné mener une ligne droite ſur Z qui faſſe avec elle un angle égal à un angle donné.*

Sur Z dans quelque point que ce ſoit pris à diſcrétion, j'éléve une ligne telle que AC, qui par le Problême précédant faſſe l'angle CAB égal à l'angle donné X. Si cette ligne paſſe par le point D, le Problême eſt achevé.

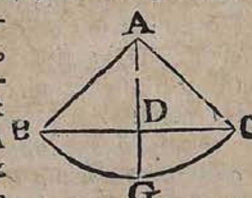


Si elle n'y paſſe pas, je méne par D une ligne parallele à CA; donc s̄ *n.* 30. DEB ∝ CAB ∝ X. Ainſi DEB ∝ X.

PROBLEME TROISIE'ME.

Couper un angle en deux parties égales. 34.
Eucl. I. Prop. 9.

L'angle donné eſt BAC aiant fait ſes deux côtez AB & AC égaux, il faut les joindre par la ligne BC, ſur laquelle, & du point A aiant mené une perpendiculaire AG. BD ∝ DC, l. 1. *n.* 88. Partant concevant que l'arc BGC eſt partie d'un cercle dont A eſt le centre, & AB & AC les raions: ſelon la notion de la perpendiculaire BG ∝ GC, ce qui étant l'angle BAG eſt égal à GAC, ainſi BAC eſt coupé en deux parties égales.



* TEOREME DOUZIE'ME.

On ne peut couper en deux parties ou autrement un angle mixte fait du cercle & de ſa tangente, par des lignes droites, mais on le peut avec des cercles. 35.

C'est ce qu'on a démontré en prouvant l. 1. n. 107. qu'on ne pouvoit mener aucune ligne droite entre le cercle & sa tangente, mais qu'on y pouvoit faire passer une infinité de cercles.

Corolaire Premier.

36. *L'angle mixte compris entre le cercle & sa tangente est plus petit qu'aucun angle rectiligne.* Eucl. III. Prop. 16.

Cela est évident puisqu'on ne peut pas diviser l'angle mixte par une ligne droite qui puisse faire un angle rectiligne avec la tangente.

Corolaire second.

37. *Donc on peut diviser dans un nombre infini de parties une grandeur plus petite qu'une grandeur proposée.*

Car l'espace compris entre le cercle & sa tangente est plus petit qu'aucun angle aigu rectiligne, par le Corolaire précédent. Or cependant cette partie se peut diviser à l'infini, en tirant plusieurs cercles, comme on l'a enseigné l. 1. n. 107.

C'a été une grande dispute, si l'angle étoit une quantité ou grandeur qui se pût diviser. Il est evident que c'en est une. Ce qui en a fait douter c'est la mauvaise définition qu'Euclide donne de l'angle. L'idée que nous en avons donné en le définissant, l'ouverture de deux lignes qui se rencontrent ou se coupent en un point, renferme un espace, & par conséquent une grandeur divisible.

* Teoreme treziéme.

38. *De deux angles qui ont même base, celui dont*

les côtez sont plus petits est le plus grand.

D A C & D B C ont D C une même base, puisque B D est plus court que D A, donc le cercle Z de l'intervale B D est plus petit que X de l'intervale A D; donc l'arc D Z C est d'un plus grand nombre de degrez que l'arc DXC l. 1. n. 95. Or ces deux arcs sont la mesure des angles B A C & D B C. Ainsi B D C ayant une plus grande mesure, il est plus grand.

SECTION II.

De la comparaison des Angles, & de leur diferente position au regard d'un Cercle.

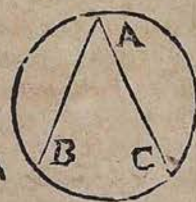
Avertissement.

Pour comparer deux Angles, il faut mener des paralleles à un des côtez de l'un par le sommet de l'autre, ce qui fera connoître s'ils sont égaux ou s'ils ne le sont pas; suivant ce qu'on a démontré que les lignes paralleles font les mêmes angles avec la ligne qu'elles coupent.

La mesure naturelle d'un angle c'est l'arc que ses côtez réferment, & dont son sommet est le centre. Ainsi lorsqu'on compare plusieurs angles, si quelqu'un d'eux renferme un arc dont le centre n'est pas son sommet, il faut le raporter à un angle qui le soit, c'est à dire qui ait ce centre pour sommet. Or les angles selon leurs diferentes positions au regard du *cercle, c'est à dire qu'ils sont au dehors ou dedans, que leur sommet est dans la circonference, que leurs côtez touchent ou qu'ils coupent cette circonference ils reçoivent diferens noms, qu'on va expliquer dans les définitions suivantes.*

PREMIERE DEFINITION.

39. *L'angle B A C dont le sommet A est dans la circonference du cercle est dit être inscrit à ce cercle, & l'angle EDF, dont les côtez touchent le cercle, est nommé circonscrit.*

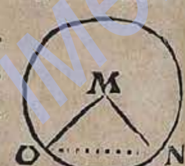


SECONDE DEFINITION.

40. *On apelle segment de cercle une portion de cercle lequel est coupé par une ligne droite. La plus petite portion s'apelle le petit segment.*

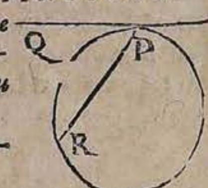
TROISIEME DEFINITION.

41. *L'angle N M O dont le sommet M, est le centre du cercle, & qui a pour ses côtez les raions de ce cercle, est nommé l'angle du centre.*



QUATRIE'ME DEFINITION.

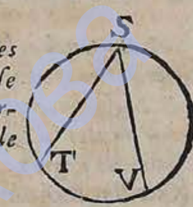
42. *L'angle Q P R compris entre P Q, une tangente & la corde P R est nommée angle du segment.*



CIN-

CINQUIEME DEFINITION.

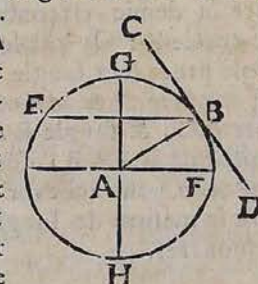
L'angle T S V compris entre les deux cordes T S & V S, qui se joignent dans un point de la circonference, s'apelle angle dans le segment. 43.



TEOREME PREMIER.

L'angle C B E compris entre la tangente D C & la corde B E a pour mesure un arc égal à B G, 44.
moitié de l'arc dont B E est la corde. Eucl. III. Prop. 32.

Du point G je méne la ligne G H par le centre, & par le même centre je méne FA, parallele à BE, & du point d'atouchement B une perpendiculaire sur C D qui va au centre A l. 1. n. 106. partant A B C est droit : s̃ *n.* 17. & puisque BG ∝ GE, donc GH l. 1. n. 88. est perpendiculaire sur B E & partant sur F A qui est parallele à B E ; par conséquent l'angle F A G est droit, ainsi il est égal à A B C. Les alternes FAB & EBA sont égaux ; s̃ *n.* 28. donc ôtant ces deux angles égaux, sçavoir F A B de F A G qui est droit, & A B E de l'angle droit A B C, les restes BAG & C B E seront égaux. Or B A G a pour sa mesure l'arc B G ; donc C B E qui lui est égal, a pour sa mesure un arc égal à B G, moitié de B G E, ce qu'il faloit prouver.



COROLAIRE.

45. *A B touche les cercles Z. X. Y, leurs parties comprises entre la tangente A B & la corde A C, seront toutes d'un même nombre de degrez.*

Car la moitié de ces portions est la mesure de l'angle B A C. Ainsi si cet angle étoit par exemple de dix degrez, toutes ces portions seroient chacune de vingt degrez.

TEOREME SECOND.

46. *L'angle B A C inscrit dans le cercle Z, a pour sa mesure la moitié de l'arc B C sur lequel il est apuié.*

Je méne par A la ligne E D qui touche le cercle Z : les trois angles E A B, BAC & CAD valent 2 droits s̃. *n.* 21. ils ont pour leur mesure la demie circonference du cercle Z : Or par le Teorême precedent l'angle DAC a pour sa mesure la moitié de l'arc A C, & l'angle E A B la moitié de l'arc A B ; donc la moitié de l'arc BC, qui reste pour achever la demie circonference sera la mesure de l'angle B A C ; ce qu'il faloit démontrer.

COROLAIRE PREMIER.

47. *Tous les angles inscrits dans un cercle apuiez sur un même arc, ou sur un même segment sont égaux.* Eucl. III. Prop. 21.

Car ils ont pour leur mesure la moitié de l'arc sur lequel ils sont apuiez, ainsi aiant une même mesure ils sont égaux.

COROLAIRE SECOND.

L'angle du centre C A D est double de l'angle inscrit C B D, qui est apuié sur le même arc C D. Euclid. III. Prop. 20. 48.

Car l'angle C A D, s̃ *n.* 12. a pour sa mesure l'arc C D dont la moitié est la mesure de l'angle C B D.

COROLAIRE TROISIE'ME.

Dans des cercles égaux, les angles égaux (soit qu'ils soient ou au centre ou inscrits) sont apuiez sur des arcs égaux. Eucl. III. Prop. 26. 49.

Si cela n'étoit pas, ces angles aiant des mesures inégales, ils seroient inégaux ; & on les supose égaux.

COROLAIRE QUATRIE'ME.

Dans des cercles égaux, les angles (soit au centre ou inscrits) qui sont apuiez sur des arcs égaux, sont égaux. Eucl. III Prop. 27. 50.

Ils ont des mesures égales, ils sont donc égaux.

COROLAIRE CINQUIE'ME.

L'angle inscrit dans le demi cercle, ou dont le diamétre du cercle est la base, est droit. Eucl. III. Prop. 31. 51.

Car il est apuié sur la demie circonference, dont la moitié qui est de nonante degrez, est la mesure de l'angle droit. s̃. *n.* 14.

COROLAIRE SIXIE'ME.

L'angle dans le grand segment est aigu. Euclid. III. Prop. 31. 52.

Car il est apuié sur un arc moindre que la demie circonference, ainsi la moitié de cet arc qui est sa mesure, est moins de nonante degrez. s̄ *n.* 16.

COROLAIRE SEPTIE'ME.

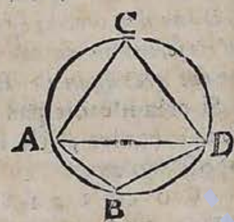
53. *L'angle dans le petit segment est obtus.* Euclid. III. Prop. 31.

Car il est apuié sur un arc plus grand que la demie circonference, dont la moitié qui est la mesure est de plus de nonante degrez. s̄ *n.* 15.

COROLAIRE HUITIE'ME.

54. *Les angles A B D & A C D inscrits en deux segmens oposez sont égaux à deux droits.*

Car ils ont pour mesure la moitié des arcs A B D & A C D, & par consequent la moitié de toute la demie circonference qui vaut deux fois nonante degrez, ainsi ces deux angles ont pour mesure ensemble la valeur de deux angles droits.



* PROBLEME PREMIER.

55. *Couper un segment dans le cercle X, qui soit capable de l'angle donné A.* Eucl. III. Prop. 34.

C'est à dire, que l'angle qui sera apuié sur ce segment, soit égal à l'angle A.

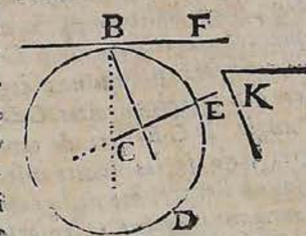
Je méne D F qui touche le cercle X, & par le Problême s̄ *n.* 32. sur D F je méne D E une seconde ligne qui fasse avec D F un angle égal à A : tout angle inscrit dans le cercle X qui sera

apuié sur D E a pour sa mesure la moitié de l'arc E D, s̄ *n.* 47. or la moitié de cét arc est la mesure de l'angle E D F égal à A par le Teor. 1. s̄ *n.* 44. donc on a fait ce qui étoit proposé : c'est à dire, que tout angle inscrit dans le cercle X, dont la base sera l'arc D E, quelque part que soit son sommet dans la circonference du cercle, il sera égal à A.

* PROBLEME SECOND.

Trouver le cercle dont le segment terminé par la ligne B D soit capable d'un angle égal à l'angle K. 56.
Euclid. III. Prop. 33.

Sur B D, par le Problême s̄ *n.* 32. soit fait l'angle F B D égal à l'angle K : au point B soit élevée B C perpendiculaire sur B F, & sur le milieu de B D une autre perpendiculaire E C, qui coupera B D au point C d'où aiant décrit un cercle de l'intervale B C on aura le cercle que l'on cherchoit, ce qu'il faut prouver.

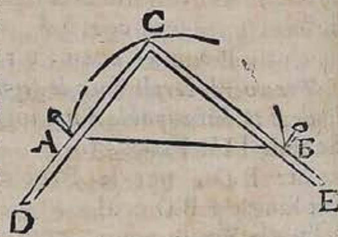


B F perpendiculaire sur le raion B C touche ce cercle l. 1. n. 104. L'angle F B D a pour sa mesure un arc égal à la moitié de de l'arc B D, s̄ *n.* 44. tous les angles inscrits dans ce cercle, & apuiez sur B D sont égaux, & ont pour leur mesure la moitié de l'arc B D; s̄. *n.* 47. ils sont donc égaux à l'angle B F D, & partant à l'angle K à qui on a fait égal F B D.

AVERTISSEMENT.

De ce que l'on a prouvé que tous les angles *apuiez ſur le même arc ſont égaux, l'on aprend le moien de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, ſans compas, ou ſans avoir le centre de ce cercle, ce qui eſt d'une grande utilité.*

A B eſt la corde d'un arc propoſé, ou de la portion d'un cercle laquelle l'on veut tracer. On veut que cet arc ſoit de dix degrez, ainſi l'angle inſcrit dans cet arc, aura pour ſa meſure la moitié de trois cent ſoixante degrez moins dix, c'eſt à dire, que cet angle ſera de cent ſoixante-quinze degrez. Je diſpoſe donc les deux régles droites C D & C E, deſorte que l'angle D C E ſoit de cent ſoixante-quinze degrez, & je les joints enſemble : je plante deux clous à l'extrêmité de la corde A & B, aprés quoi tournant le point C enſorte que les deux régles C D & C E raſent toûjours les clous A & B, je décrirai la ligne circulaire A C B, qui ſera l'arc que l'on cherchoit.

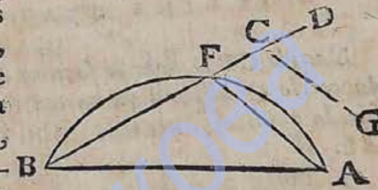


Par ce moien on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puiſſe avoir ce cercle. Cette operation eſt mécanique, en voici une qui eſt geométrique.

*PROBLEME TROISIE'ME.

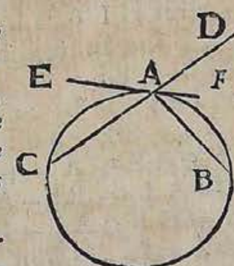
57. *La corde A B d'un ſegment de cercle étant donnée avec l'angle dans ce ſegment, trouver les points par où paſſe l'arc dont A B eſt la corde, ſans connoître ni chercher le centre du cercle, dont cet arc eſt partie.*

Je méne la ligne B D: aprés dans un point de cette ligne pris à diſcretion, je fais l'angle G C F égal à l'angle donné; enſuite je méne par A une ligne parallele à G C; ainſi l'angle A F B eſt égal à G C F, Teorême. §. *n.* 30. & à l'angle donné, partant l'arc propoſé, ſelon ce qui vient d'être démontré, paſſe par F; par une ſemblable operation, je trouve les autres points par où paſſe cét arc, ſans qu'il ſoit neceſſaire de chercher le centre du cercle dont cét arc eſt une partie.



TEOREME TROISIE'ME.

L'angle D A B dont A le 58.
ſommet eſt dans la circonference fait par la corde A B, & la ligne C D qui coupe le cercle, a pour ſa meſure la moitié de l'arc A B plus la moitié de l'arc A C.

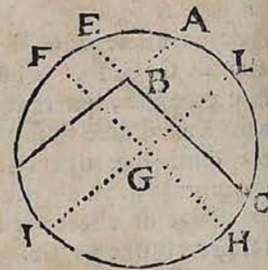


Je méne par A la tangente E F. Par le Teorême premier §. *n.* 44. la meſure de l'angle E A C eſt la moitié de l'arc A C, comme la moitié de l'arc A B, l'eſt de l'angle B A F. Or l'angle D A B eſt égal à l'angle F A B, plus l'angle D A F ou E A C qui lui eſt égal. §. *n.* 23. Donc les moitiés des deux arcs A B & A C meſures des deux angles F A B & C A E ſont la meſure de D A B, ce qu'il faloit prouver.

TEOREME QUATRIE'ME.

59\. *L'angle CBD dont le sommet B est au dedans du cercle & ailleurs qu'au centre, a pour sa mesure la moitié de l'arc CD, plus la moitié de l'arc AE.*

Je méne par G le centre du cercle des paralleles aux côtez de l'angle CBD.



L'angle DBC est égal à l'angle IGH. s̃ *n.* 30. La mesure de IGH est l'arc HI : il n'est donc question que de prouver que l'arc HI est la moitié des arcs DC & AE. Les arcs HI & FL sont égaux. s̃ *n.* 23. DI ∝ AL s̃ *n.* 82. & CH ∝ FE. 1° HI ∝ AE + AL + EF. 2° HI ∝ DC − CH (ou EF) − DI (ou AL.) C'est à dire HI ∝ DC − EF − AL : par conséquent HI + HI ∝ AE + AL + EF + CD − EF − AL. Or + AL + EF − AL − EF ∝ zero. Donc HI + HI ∝ AE + DC. Par conséquent la moitié de l'arc HI est la moitié des arcs DC & AE, qui sont ainsi la mesure de l'angle CBD égal à IGH dont l'arc HI est la mesure.

TEOREME CINQUIE'ME.

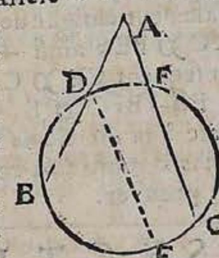
60\. *CD ou CE est perpendiculaire sur le diamétre AE. L'angle ACD ou ACE a pour sa mesure la moitié de l'arc AB.*

Je méne par B une parallele à CD ou à CE. Les Angles ABF & ACD & ACE sont égaux s̃. *n.* 30. Or l'angle ABF a pour mesure la moitié de l'arc AF, s̃ *n.* 46. lequel arc est égal à l'arc AB ; l. 1. n. 88. donc l'angle DAC ou ECA a aussi pour sa mesure la moitié de l'arc AB ; ce qu'il faloit prouver.

TEOREME SIXIE'ME. 61.

L'angle BAC dont le sommet A est hors le cercle entre les deux lignes AB & AC qui coupent le cercle, a pour sa mesure la moitié de l'arc BC moins la moitié de l'arc DF.

Je méne par D une parallele à AC ; ainsi l'angle BAC est égal à BDE, s̃ *n.* 30 qui a pour mesure la moitié de l'arc BE s̃ *n.* 46. Les arc CE & DF sont égaux l. 1. n. 82. Or BE ∝ BC − CE, donc BE ∝ BC − DF ; ainsi puisque la moitié de BE est la mesure de l'angle BAC, cet angle a pour sa mesure la moitié de l'arc BC moins la moitié de l'arc DF ; ce qu'il faloit prouver.

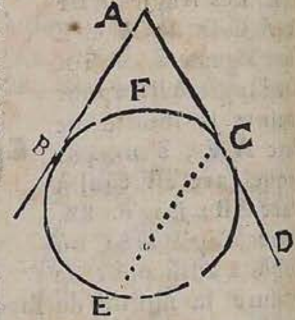


TEOREME SE'TIE'ME.

A le sommet de l'angle BAC est hors le cercle ; que ses côtez AB & AC touchent. Cet angle a 62.

pour sa mesure la moitié de l'arc concave BEC moins la moitié de l'arc convexe BFC.

Je méne par C un des points d'atouchement CE parallele à AB. L'angle BAC est égal à l'angle DCE s̄ n. 30 Or DCE a pour sa mesure la moitié de l'arc CE s̄. 44. qui l'est ainsi de CAB. Reste à prouver que la moitié de l'arc CE est égale à la moitié de l'arc concave BED, moins la moitié de l'arc convexe BFD.



AB étant tangente, elle est perpendiculaire sur un raion mené de B au centre l. 1. n. 104. & ce raion étant prolongé l'est sur CE. l. 1. n. 66. & coupe CF par la moitié l. 1. n. 89. Ainsi B est également éloigné de E & de C. l. 1. n. 39. donc BFC ↄo BE ; ainsi + BFC − BE ↄo O ; & par consequent CE ↄo CE + EB − BFC, puisque + EB − BFC ↄo E, la moitié de CE est donc égale à la moitié de l'arc concave CE + EB moins la moitié du convexe BFC, ce qu'il faloit prouver.

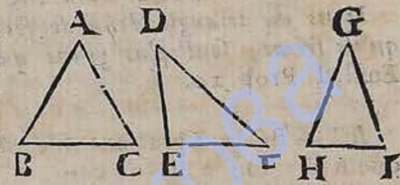
SECTION III.

Des surfaces comprises entre trois lignes, ce qui s'apelle triangle.

Premiere Definition.

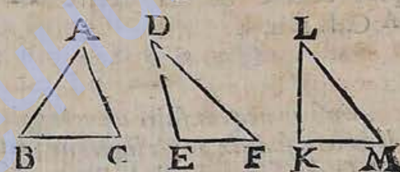
63. *Un triangle, dont les trois côtez sont égaux, est nommé Equilateral. Si ces trois côtez sont inégaux, Scalene ; & si deux seulement sont égaux, Isoscele.*

Ainsi le triangle ABC est Equilateral : DEF est Scalene, & GHI Isoscele.



Seconde Definition.

Vn triangle dont tous les angles sont aigus, s'apelle Oxigone, si l'un d'eux est obtus Amblygone, si l'un est droit Rectangle. 64.



Le triangle ABC est oxigone, DEF amblygone & LKM rectangle.

Troisie'me Definition.

Vn triangle est dit inscrit dans le cercle lorsque le sommet de ses trois angles est dans la circonference de ce cercle. & alors ce cercle est dit circonscrit à ce triangle. 65.

Quatrie'me Definition.

Vn triangle est dit circonscrit à un cercle hors duquel sont tous ses angles ; & dont les côtez touchent ce cercle. Et alors ce cercle est dit inscrit dans ce triangle. 66.

Cinquie'me Definition.

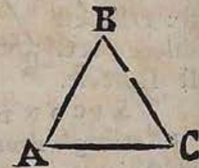
Deux triangles sont dits équiangles lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun. 67.

Sixie'me Definition.

Deux triangles sont dits égaux lorsqu'étant équiangles, les côtez qui comprennent les angles de l'un sont égaux aux côtez qui comprennent les angles de l'autre chacun à chacun. 68.

TEOREME PREMIER.

69. *Dans un triangle deux de ses côtez, quels qu'ils soient, sont plus grans que le troisiéme.* Eucl. I. Prop. 20.



AB + BC sont plus grans que A C : On a dit qu'entre deux points A & C on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite A C. l. 1. n. 4.

COROLAIRE.

70. *Ainsi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, si deux de ces lignes ne sont plus grandes que la troisiéme.* Eucl. I. Prop. 22.

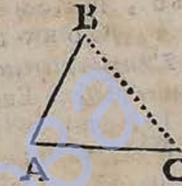
PROBLEME PREMIER.

71. *Faire le triangle dont on a les trois côtez A, B, C.* Eucl. I. Prop. 1. & 22.

D'une des extrêmitez de ces trois lignes, par exemple de C, je fais un arc de l'intervale de A ; & de l'autre extrêmité je fais un autre arc de l'intervale de B, ensuite aiant mené des extrêmitez de C au point où ces deux arcs se coupent, les deux lignes A & B, le triangle sera fait, dont les côtez par la construction seront égaux aux lignes données.

PROBLEME SECOND.

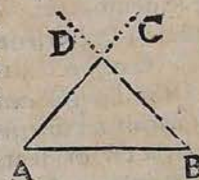
72. *Faire le triangle dont on a un angle & la grandeur des côtez A B & A C qui le comprennent.*



Aiant mis ces deux côtez A B & A C, ensorte qu'ils fassent l'angle B A C égal à l'angle donné B, *s. n.* 32. la ligne B C qui en joindra les extrêmitez achevera le triangle.

PROBLEME TROISIEME.

Faire le triangle dont on a un côté, & les deux angles sur ce côté. 73.



Tirant deux lignes sur les extrêmitez du côté A B qui fassent par le Probléme *s. n.* 32, les angles donnez C A B & D B A, je dis qu'étant prolongées, elles acheveront le triangle A B E, qui est celui qu'on cherchoit, comme il est évident.

PROBLEME QUATRIEME.

A l'entour du triangle A B C décrire un cercle. 74.
Eucl. IV. Prop. 5.

Il faut décrire un cercle par les trois points A, B, C : ce qu'on a déja enseigné l. 1. n. 83.

TEOREME SECOND.

Les trois angles d'un triangle sont égaux à deux 75.
angles droits. Eucl. I. Prop. 32.

Je décris un cercle à l'entour du triangle donné. Ses trois angles ont pour mesure la moitié des arcs qui les soûtiennent *s. n.* 46. ainsi ils ont pour mesure la moitié de la circonference du cercle, c'est à dire 180 degrez valeur de deux angles droits.

COROLAIRE PREMIER.

Donc connoissant les deux angles d'un triangle 76.
on connoît le troisiéme.

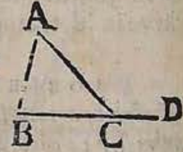
Car les trois valant 180, si les deux valent

160, le troisiéme vaudra vingt.

COROLAIRE SECOND.

77. *L'angle exterieur ACD est égal aux deux interieurs oposez.* Eucl. I. Prop. 32.

Les deux angles ACB & ACD valent deux droits. *s. n.* 18. Or ACB plus les deux angles interieurs, CAB & CBA valent aussi deux droits, comme nous venons de le démontrer; donc les deux interieurs sont égaux à l'exterieur ACD.



COROLAIRE TROISIEME.

78. *Donc l'angle exterieur ACD est plus grand qu'aucun des interieurs oposez.* Eucl. I. Prop. 16.

Cela est évident puisqu'il est égal aux deux interieurs oposez.

COROLAIRE QUATRIEME.

79. *Les trois angles d'un triangle peuvent être aigus.*

Car on peut partager cent quatre-vingt degrez valeur des trois angles d'un triangle en trois parties, dont chacune sera moindre que la valeur d'un angle obtus ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que cent quatre-vingt, valeur de deux angles droits.

COROLAIRE CINQUIE'ME.

80. *Dans un triangle, il ne peut y avoir plus d'un angle droit, ni plus d'un obtus.*

Si deux des angles étoient droits, les trois ensemble vaudroient plus de deux droits. Si deux étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois ensemble vaudroient davantage que deux droits; ce qui est contre le Teorême précédent.

COROLAIRE SIXIE'ME.

Deux des angles d'un triangle sont donc necessairement aigus, ou plus petits que deux droits. 81.
Eucl. I. Prop. 17.

Cela est évident puisqu'un triangle ne peut pas avoir deux de ses angles ni droits ni obtus.

COROLAIRE HUITIE'ME.

Si dans deux triangles deux angles de l'un sont 82.
égaux à deux angles de l'autre, ils sont équiangles, c'est à dire que le troisiéme angle de l'un est égal au troisiéme angle de l'autre.

Car les trois angles de chacun de ces triangles sont égaux à deux droits; ainsi puisque de deux tous égaux ôtant des parties égales, les restes sont égaux, il faut qu'aprés avoir ôté de chaque triangle les deux premiers de l'un égaux aux deux premiers de l'autre, le troisiéme angle de l'un qui reste, soit égal au troisiéme angle de l'autre.

COROLAIRE SE'TIE'ME.

Si un triangle a un de ses angles plus grand que 83.
celui d'un autre triangle, les deux autres seront plus petits que les deux autres de celui-là.

Car ôtant de la valeur de deux droits, une plus grande partie, ce qui reste doit être plus petit que lorsqu'on ôte moins.

TEOREME TROISIE'ME.

Le triangle scalene ABC a ses trois angles 84.
inégaux.

Aiant décrit le cercle X à l'entour de ce triangle puisque les trois côtez AB, AC, BC sont inégaux, les trois arcs dont ils sont les cordes sont inégaux; par conséquent les trois angles du triangle ABC, qui ont pour me-

ſure la moitié de ces arcs §. n. 46. ſont inégaux.

TEOREME QUATRIEME.

85. *Dans le triangle iſoſcele ABC les angles ſur la baſe ſont égaux ; & ſi les angles ſur la baſe ſont égaux, le triangle eſt iſoſcele.* Eucl. I. Prop. 5.

Aiant décrit le cerle X autour de ce triangle, puiſque AB ∝ AC, les arcs que ces côtez ſoûtiennent ſont égaux. Or la moitié de ces arcs égaux eſt la meſure des angles ABC & ACB, §. n. 46. donc ces angles ſont égaux.

L'autre partie de cette propoſition eſt facil. Car ſi les deux angles ABC & ACB ſont égaux, les arcs AB & AC, ou leurs cordes ſont égales ; ainſi le triangle ABC eſt iſoſcele.

COROLAIRE PREMIER.

86 *Aucun des angles de la baſe d'un iſoſcele ne peut être droit ni obtus.*

Car ſi l'un étoit droit, l'autre le ſeroit auſſi : ainſi ſes trois angles vaudroient plus que deux droits, ce qui ne peut être. Et ſi l'un étoit obtus l'autre le ſeroit, ainſi deux ſeuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits, ce qui eſt encore plus impoſſible.

COROLAIRE SECOND.

87. *Si deux triangles iſoſceles ont un angle égal, ils les ont tous.*

Car 1° Si cét angle égal eſt ſur la baſe, ils auront le ſecond angle de la baſe égal, partant le troiſiéme par le Corolaire huitiéme, Teorême ſecond §. n. 82.

2° Si c'eſt l'angle du ſommet, la valeur des deux angles ſur la baſe de chaque triangle ſera la même, chacun ſera la moitié de cette

même ſomme, ainſi ils ſeront égaux.

TEOREME CINQUIE'ME.

Les trois angles d'un équilateral ſont égaux. 88.

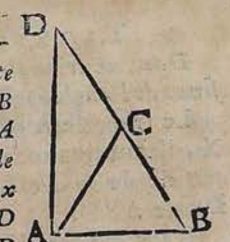
Aiant décrit un cercle à l'entour du triangle équilateral, les arcs dont les côtez de ce triangle ſont les cordes, ſont par conſequent égaux & leurs moitiés égales. Or par le Teorême ſecond, §. n. 46. ces moitiés ſont la meſure des angles du triangle. Donc tous ces angles ſont égaux.

COROLAIRE.

Ainſi chaque angle d'un équilateral eſt aigu, & toûjours de ſoixante degrez. 89.

Car ſi l'un étoit obtus ou droit, tous trois le ſeroient, ainſi ils vaudroient plus que deux angles droits, ce qui ne peut être. Chacun eſt neceſſairement la troiſiéme partie de deux angles droits, c'eſt à dire de ſoixante degrez, qui ſont le tiers de cent quatre vingt, valeur de deux angles droits, auſquels ſont égaux les trois angles de tout triangle.

Pour tirer ſur AB une perpendiculaire, faites ABC équilateral, & tirez BCD ; deſorte que BC ∝ CD. l'angle CAB eſt de 60 degrez, comme auſſi ACB, Or ACB eſt le double de ADC & de DAC qui ſont égaux ACD étant iſoſcelle : Donc DAC eſt de trente degrez : donc DAB eſt de nonante : ainſi DA eſt perpendiculaire ſur AB.



TEOREME SIXIE'ME.

Dans un triangle le plus grand côté ſoûtient le plus grand angle, & le plus grand angle eſt ſoûtenu par le plus grand côté. Eucl. I. Prop. 18. & 19. 90.

Aiant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle soûtient le plus grand arc. Or par le Teoréme second, $\S$ *n.* 46. la moitié de cét arc mesure l'angle oposé à ce plus grand côté; donc cet angle qui est mesuré par la moitié du plus grand arc est le plus grand.

Dans un triangle inscrit dans un cercle le plus grand angle est mesuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc a la plus grande corde, ainsi le côté oposé à cét angle est le plus grand.

91. TEOREME SE'TIE'ME.

Dans un triangle, si deux de ses angles sont égaux, les cotez oposez à ces angles sont égaux. Eucl. I. Prop. 6.

Aiant inscrit ce triangle dans un cercle, ces angles égaux seront soûtenus par des arcs égaux qui ont des cordes égales, côtez oposez à ces angles.

92. TEOREME HUITIE'ME.

Dans un triangle la moitié de chaque côté est le sinus de l'angle oposé.

Le triangle A B C soit inscrit dans le cercle X, il faut démontrer que A D moitié de A C est le sinus de l'angle A B C.

L'arc AE moitié de l'arc AC est la mesure de l'angle A B C, $\S$. *n.* 46. ainsi l'arc A C est double de l'arc qui est la mesure de l'angle A B C: donc A D moitié de la corde de l'arc A C est le sinus de l'arc A E & celui de l'angle A B C, $\S$. *n.* 24. & 25.

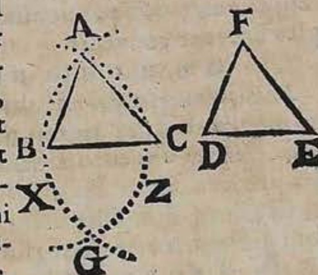
On démontre par la même voie que la moitié de BA est le sinus de A C B, & la moitié de B C celui de B A C.

Donc le sinus d'un angle est au côté oposé de cet angle, comme le sinus d'un autre angle est au côté de cet angle, où les sinus des angles sont entre eux comme les côtez oposez, puisque les moitiés sont comme les touts.

TEOREME IX.

Deux triangles dont les côtez sont égaux, sont équiangles.

Les triangles A B C & D E F ont leurs côtez 93.
égaux. Je dis qu'ils sont équiangles, ou ce qui est la même chose, qu'étant posez l'un sur l'autre ils conviennent.



1° B C étant égal à D E, il est clair que la ligne D E étant posée sur BC, elles conviendront ensemble. Si on dit que D F ne conviendra pas avec A B ni E F avec A C. je démontre le contraire. De B comme centre & de l'intervale A B ou D F lignes égales, je décris le cercle Z; & de C de l'intervale A C ou E F, qui son égales, le cercle X; ces deux cercles se coupent necessairement au point A.

2° Il est évident que D étant posé sur B, le point F se trouvera necessairement dans le cercle Z, & que E étant posé sur C, le point F se trouvera dans le cercle X: le point F se trouvera donc dans Z & X, partant dans le point A où ces deux cercles se coupent, ainsi ces deux triangles posez l'un sur l'autre conviendront: ce qu'il faloit démontrer.

On pouroit dire que ces deux cercles Z & X ſe coupent ailleurs qu'en A : il eſt vrai ; mais par ce qui a été démontré , ce ne peut être qu'en deux points , & ce ſecond point eſt neceſſairement au deſſous de BC ; ſavoir au point G, comme il eſt évident ; ainſi s'ils ſe coupoient au deſſus de B C en un autre point qu'en A , ils ſe couperoient en trois, ce qui ne peut être.

COROLAIRE I.

94. *Aiant mené ſur B C deux lignes B A & C A au point A , on ne peut pas ſur la même ligne BC mener deux autres lignes égales , vers un point diferent de A.* Eucl. I. Prop. 7.

Car cela fait deux triangles dont les côtez ſont égaux , qui par conſequent étant équiangles doivent convenir.

COROLAIRE II.

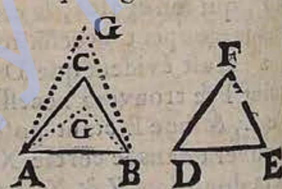
95. *Deux triangles qui ont chacun deux côtez égaux aux deux côtez de l'autre , & la baſe égale à la baſe ; les angles compris entre les côtez égaux ſont égaux.* Eucl. I. Prop. 8.

Ces deux triangles aiant leurs côtez égaux ſont entierement équiangles.

TEOREME DIXIE'ME.

96. *Deux triangles équiangles qui ont un côté égal, ſont entierement égaux.*

A B C & D E F ſont équiangles , & A B ∝ D E ; je dis qu'étant poſez l'un ſur l'autre ils conviendront ; qu'ainſi ils ſont entierement égaux.



D E conviendra avec A B , ſi D F ne convient pas avec A C, mais avec A G : comme les angles , F D E & C A B ſont égaux,

il s'enſuivra que l'angle C A B ∝ G A B qui ſera le même que F D E ; ce qui étant abſurde, & ne pouvant pas être , il faut reconnoître que D F conviendra avec A C , & par la même raiſon F E avec B C , ainſi le point F avec C , & par conſéquent ces deux triangles ſont en tout égaux.

COROLAIRE.

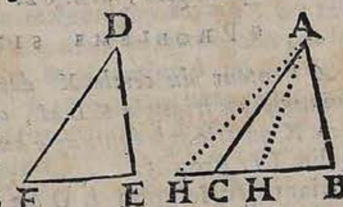
Deux triangles qui ont deux angles égaux & un côté ſont entirement égaux Eucl. I. Prop. 26.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux ſont entierement équiangles $\bar{s}$ *n.* 82. Par conſéquent s'ils ont un côté égal , il faut ſelon ce Teorême qu'ils ſoient entierement égaux. 97.

TEOREME ONZIE'ME.

Deux triangles qui ont un angle égal , & les deux côtez qui comprennent cet angle égaux , ſont en tout égaux. Eucl. I. Prop. 4. 98.

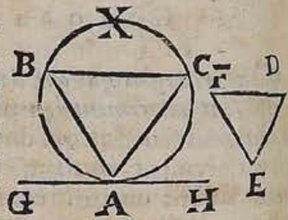
L'angle B A C ∝ E D E & A B ∝ D E & A C ∝ D F ; je dis que ces deux triangles conviendront étant poſez l'un ſur l'autre : car DE conviendra avec AB, ſi D F ne convenoit pas avec A C mais avec A H , l'angle BAC ſeroit égal à l'angle B A H , ce qui ne peut être : ainſi D F convient avec A C , & le point F avec C , par conſequent B C ∝ E F , ainſi ces deux triangles qui ont leurs côtez égaux , ſont équiangles , $\bar{s}$ *n.* 93. c'eſt à dire égaux en toutes choſes.



*PROBLEME CINQUIE'ME.

99. *Dans le cercle X inſcrire un triangle équiangle au triangle donné DEF.* Eucl. IV. Prop. 2.

Je tire la tangente G H, je fais l'angle GAB égal à FDE, & CAH égal à DFE, j'acheve le triangle A B C en tirant la ligne B C.



Puiſque l'angle BAG, dont la meſure eſt la moitié de l'arc B A, s̃. *n.* 44. qui eſt auſſi la meſure de l'angle BCA, eſt égal à FDE, donc BCA ∝ FDE.

Par la même raiſon C A H fait égal à DFE, aiant pour ſa meſure la moitié de l'arc A C, meſure de CBA : il faut que CBA & DFE ſoient égaux : ainſi ces deux triangles ABG & EFD aiant deux angles égaux, ils ſont entierement équiangles, s̃. *n.* 82.

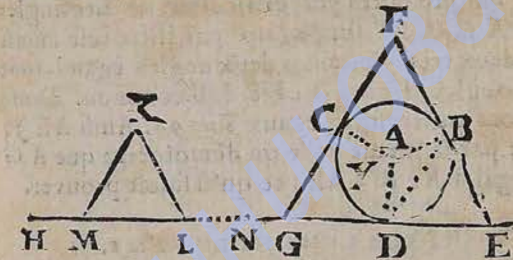
*PROBLEME SIXIE'ME.

100 *A l'entour du cercle X décrire un triangle équiangle au triangle KLM, ou circonſcrire au cercle X un triangle équiangle au triangle KLM.* Euclid. IV. Prop. 3.

Aiant tiré le raion AD je fais d'une part l'angle BAD ∝ NLK & de l'autre DAC ∝ KMH ; aprés aiant mené par les trois points B, D, C, les tangentes EF, FG, GE : je dis que le triangle EFG ſera équiangle à LKM.

Les ſix angles des deux triangles BAD & BED valent quatre angles droits ; AB &

AD étant perpendiculaires EBD + ABD vaut un droit, EDB + BDA vaut encore un droit. Donc BED + BAD vaut deux

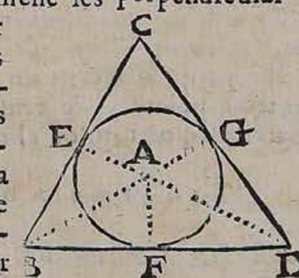


droits. Or par la conſtruction BAD ∝ KLN cet angle KLN + KLM vaut deux droits. Donc BED ∝ KLM : par la même voie on démontre que DGC ∝ KML, & par conſéquent que EFG ∝ LKM, & qu'ainſi les triangles EFG & LKM ſont équiangles.

*PROBLEME SE'TIE'ME.

Dans le triangle BDC décrire un cercle. Eucl. IV. Prop. 4. 101.

Je coupe comme on l'a enſeigné s̃ *n.* 34. les angles CBD & CDB en deux parties égales par les lignes DA & BA : & du point A où ces deux lignes ſe coupent, je méne les perpendiculaires AE, AF, AG ſur les côtez du triangle ; enſuite de A & de l'intervale de l'une de ces lignes je décris le cercle X, qui ſe trouvera inſcrit dans le triangle BCD : pour le prouver il faut faire voir que les trois lignes



A E : A F, A G ſont égales.

Les deux triangles A E B & A F B ſont rectangles par la conſtruction, puiſque A E & A F ont été faites perpendiculaires. Les angles E B A & A B F ſont égaux par l'hipotéſe : ainſi ces deux triangles aiant deux angles égaux ſont équiangles. Ils ont le côté A B commun. Donc ils ſont entierement égaux § *n. 96*. Ainſi AE ∝ AF : par la même voïe on démontrera que A G eſt égal à AF & à AE : ce qu'il faloit prouver.

* Probleme huitiéme.

102. *Trois lignes étant données qui font un triangle ſi on les prolonge, trouver un point qui en ſoit également éloigné.*

Il n'eſt queſtion que de circonſcrire un cercle au triangle que ces trois lignes peuvent faire. Le centre de ce cercle ſera le point que l'on propoſoit de trouver (*figure* §. *n.* 101.) car ſi ces lignes ſont BD, CD, DB, le centre A en eſt également éloigné, comme on vient de le démontrer.

* Probleme neuviéme.

103. *Trois points étant donnez, trouver un quatriéme également éloigné de ces trois points.*

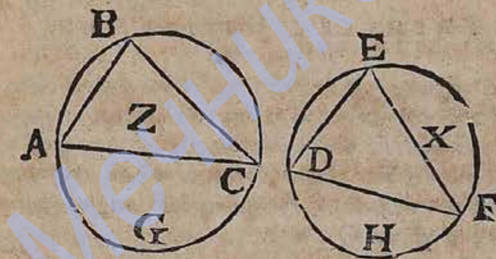
Il n'y a qu'à décrire un cercle qui paſſe par ces trois points, le centre du cercle ſera le quatriéme point qu'on cherche.

Teoreme douziéme.

AB ∝ *DE & BC* ∝ EF. *Si l'angle*
104 *ABC eſt plus grand que DEF, la Baſe BC ſera*

ſera plus grande que DF : Et ſi la baſe AC eſt plus grande que DF, l'angle ABC eſt plus grand que DEF. Eucl. I. Prop. 24. & 25.

Soient inſcrits ces deux triangles dans les cercles Z & X. Si l'angle ABC eſt plus grãd que DEF, alors l'arc AGC eſt de plus de degrez que l'arc BHF, donc ſi X ∝ Z la corde AC ſeroit plus



grande que DF. Et ſi AC eſt plus grande que DF, l'angle ABC ſeroit plus grand que DF : à plus forte raiſon ſi Z eſt plus grand que Z puiſque les cordes de mêmes degrez ſont plus grandes dans les plus grans cercles l. I. n. 30. Or Z eſt neceſſairement plus grand que X ; car comme on ſupoſe A B ∝ D E, & BC ∝ E F ; donc A B + BC ∝ D E + DF : par conſéquent ſi X étoit plus grand, les arcs DE & EF ſeroient de moins de degrez que les arcs A B & BC l. I. n. 95. Et l'arc DHF ſeroit de plus de degrez que l'arc A G C : ce qui ne peut pas être, puiſqu'on ſupoſe l'angle ABC plus grand que DEF.

On peut prouver par cette même métode que ſi la baſe AC eſt plus grande que la baſe D F, l'angle ABC eſt plus grand que l'angle DEF.

SECTION IV.

Des Figures de plusieurs côtez.

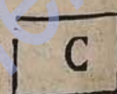
PREMIERE DEFINITION.

105. *Les figures quadrilataires ou de quatre côtez, reçoivent diferens noms. Si les côtez oposez sont paralleles, le quadrilataire est apellé d'un nom general,* Parallelogramme. *2° Si les quatre côtez sont égaux, & que les angles soient droits, c'est un* Quarré.

3° Si les quatre côtez sont égaux, & que les angles oposez soient aussi égaux mais non droits, c'est ce qu'on apelle Rhombe *ou* Losange.

La figure B est un Rombe.

4° Si tous les côtez ne sont pas égaux, mais que tous les angles soient droits, cela s'apelle, Quarré long, oblong, Parallelogramme rectangle, *ou simplement*, Rectangle.



Telle est la figure C.

5° Si les côtez oposez sont égaux, & les angles oposez aussi égaux, mais non droits, cette figure est Rhomboïde.

Telle est la figure D.

6° Toute figure quadrilataire, dont les côtez oposez ne sont ni paralleles ni égaux s'apelle un Trapeze.

Telle est la figure E.

SECONDE DEFINITION.

Une figure est dite réguliere lorsque tous ses côtez & tous ses angles sont égaux. 106

TROISIEME DEFINITION.

Une figure de plusieurs côtez se nomme generalement Poligone. *Elle prend le nom qui lui est propre du nombre de ses côtez, ou du nombre de ses angles que comprennent ses côtez. Ainsi une figure de cinq côtez est nommée,* Pentagone; *de six,* Exagone; *de sept,* Eptagone, *ainsi de suite.* 107

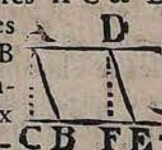
QUATRIE'ME DEFINITION.

Aiant mené deux lignes des extrêmitez d'un des côtez d'une figure réguliere inscrite dans un cercle ou circonscrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font, est apellé angle du centre. 108

LEMME PREMIER.

Les lignes obliques A B & D E qui font les angles A B C & D E F égaux entre les paralleles Z & X sont égales. 109

Aiant mené les perpendiculaires A C & D F entre les paralleles Z & X, elles seront égales. Les angles ACB & DFE sont droits, & les angles ABC & DEF sont égaux par l'hipotése. Les deux triangles ABC & DEF sont donc équiangles, & AC étant égal à DF, ils seront tout égaux, *s n. 96.* & par consequent A B = D E.



LEMME SECOND.

Les lignes A B & D E, qui font mêmes angles
110. *sont paralleles.*

Par l'hipotése A B C ∝ D E F, par conséquent s̃ *n.* 29. A B & D E doivent être paralleles. (*même figure ci-dessus.*)

LEMME TROISIE'ME.

Deux lignes comme A D & B E qui joignent
111. *les deux lignes A B & D E égales & paralleles, sont égales.* Eucl. I. Prop. 33.

Les perpendiculaires A C & D F sont paralleles l. 1. n. 65. A B & D E étant paralleles, les angles ABC & DEF sont égaux. Or ACB & D F E sont droits; ainsi ces deux triangles A B C & D E F étant équiangles & aiant un côté égal, puisque A B ∝ D E; ils sont entierement égaux, partant BC ∝ EF, donc CF ∝ B E. Or A D & C F sont entre les paralleles AC & DF, elles sont donc égales l. 1. n 64. donc B E ∝ C F ∝ AD; ainsi BE ∝ AD.

TEOREME PREMIER.

Les quatre angles d'un quadrilataire A B C D
112. *sont égaux à quatre droits.*

Car menant la ligne A C d'un des angles à l'angle oposé, on partage cette figure dans les deux triangles A B C & A C D, les angles de chacun desquels valent deux droits. Ainsi tous les angles de A B C D valent quatre droits.

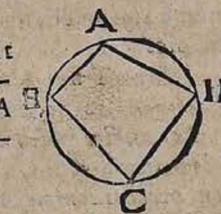
TEOREME SECOND.

Les angles oposez d'un quadrilataire inscrit
113. *dans un cercle, valent deux angles droits.* Eucl. III. Prop. 22.

Les deux angles D A B & B C D, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc sur lequel ils sont apuiez s̃ *n.* 46. Or tous deux sont apuiez ensemble sur toute la circonference; ils ont donc pour mesure la moitié de toute la circonference, & par consequent ils valent deux angles droits. s̃ 14. (*figure suivante.*)

COROLAIRE.

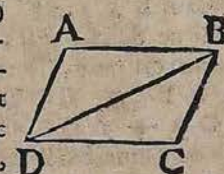
Si les angles oposez A B C & A D C ne valent pas deux droits, on ne peut pas inscrire la figure A B C D dans un cercle. 114.



Car si A B C D est inscrit dans un cercle les deux angles oposez A B C & C D A valent précisément deux angles droits.

TEOREME TROISIE'ME.

Si les côtez oposez du quadrilataire A B C D sont égaux, ils sont paralleles. 115.



A B ∝ C D & B C ∝ A D le côté B D est commun; donc ces deux triangles A B D & B C D sont équiangles s̃ *n.* 93. donc l'angle A B D ∝ B D C, partant A B est parallele à D C s̃ *n.* 110. De même B C sera parallele à A D, puisque l'angle A D B est égal à D B C.

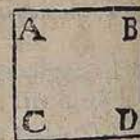
TEOREME QUATRIE'ME.

Si deux des côtez oposez d'un quadrilataire sont égaux & paralleles, les deux autres sont aussi égaux & paralleles. 116.

Ils sont égaux s̃ *n.* 111. ils sont paralleles. s̃ *n.* 115.

TEOREME CINQUIE'ME.

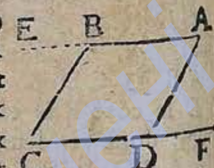
117. *Si les quatre angles du quadrilataire ABCD sont droits, c'est un Parallelogramme.*



Car AB & CD, par l'hipotése sont perpendiculaires sur AC, partant l. 1. n. 65. ils sont paralleles. AC & BD sont aussi perpendiculaires sur DC, par conséquent par la même raison ces lignes sont paralleles.

TEOREME SIXIE'ME.

118. *Les angles oposez BCD & BAD du Parallelogramme ABCD sont égaux, & ceux qui sont proches comme BCD & ADC valent deux droits.*



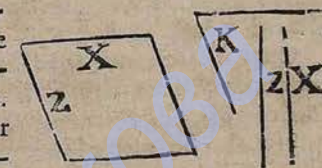
1° L'angle FDA ∝ DCB s̄ *n.* 30. & FDA ∝ DAB s̄ *n.* 28. partant puisque deux angles égaux à un troisiéme, sont égaux DAB ∝ BCD : Or FDA + ADC vaut deux angles droits, s̄ *n.* 18. Donc BCD égal à ADF vaut avec ADC deux droits.

2° On démontre de même que les deux angles oposez ABC & ADC sont égaux, & que BAD + ABC valent deux droits; ce qu'il faloit démontrer.

PROBLEME PREMIER.

Faire un Parallelogramme dont on a un angle
119. *& les deux côtez qui le comprennent.* Euclid. I. Prop. 45.

Les côtez donnez sont Z & X, l'angle donné K, il faut joindre Z & X, desorte qu'ils fassent un angle égal à K, s̄ *n.* 32. & ensuite tirer deux lignes paralleles à Z & à X, l. 1. n. 68.

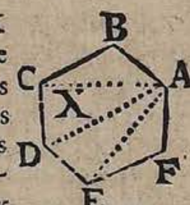


COROLAIRE. 120

Donc pour faire un quarré dont on a un côté, il n'est question que de joindre deux lignes égales à celle qui est donnée, desorte qu'elles fassent un angle droit. Eucl. I. Prop. 46.

TEOREME SE'TIE'ME. 121.

Toute figure poligone ou de plusieurs côtez, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtez, moins deux.



Dans la figure poligone X qui a six côtez, aiant mené de A à tous les autres angles des lignes droites, on fait plusieurs triangles qui ont pour base les côtez de ce poligone, à la réserve de deux qui sont aux deux côtez de A, dont AB & AF sont un des côtez. Ainsi il y a autant de triangles qu'il y a de côtez moins deux. La même chose se trouve dans tous les Poligones; c'est pourquoi on peut dire absolument qu'un poligone se peut réduire en autant de triangles qu'il a de côtez moins deux. Le poligone X qui a six côtez est réduit en quatre triangles.

COROLAIRE.

Donc tous les angles d'une figure de plusieurs 122.

côtez, comme de X, sont égaux à deux fois autant d'angles droits qu'elle a de côtez, moins deux.

C'est à dire, que tous les angles de X qui a six côtez, sont égaux à huit angles droits. Car ce poligone se réduit en autant de triangles qu'il a de côtez, moins deux, c'est à dire en quatre. Donc puisque les angles de chaque triangle sont égaux à deux droits, tous les angles de cette figure sont égaux à deux droits. On peut donc dire que tous les angles d'un chiliogone; c'est à dire d'une figure de mille côtez sont égaux à mille neuf cent quatre-vingt-seize angles droits; ce qu'on conçoit clairement, quoiqu'il soit impossible d'imaginer nétement un Chiliogone.

AVERTISSEMENT.

Tous les angles autour d'un point sont égaux à quatre angles droits, qui valent trois cent soixante degrez, § n. 22. Par conséquent dans une figure réguliére tous les angles étant égaux, si elle a dix côtez, l'angle du centre vaudra la dixiéme partie de trois cent soixante: divisant donc trois cent soixante par dix, comme on l'enseigne dans l'Arithmétique, ce nombre trente-six quotient de cette division, donnera la valeur de l'angle du centre d'une figure de dix côtez, ainsi de tout autre poligone. L'angle du centre étant connu, celui de la figure, c'est à dire celui que les côtez de la figure comprennent l'est: car si par exemple on sçait que l'angle du centre E A F, est de trente-six degrez, ôtant ce nombre de cent quatre-vingt valeur des trois angles du triangle E F A, le reste cent quarante-quatre sera la valeur des angles de

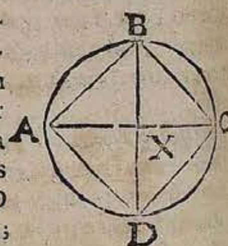
la base, lesquels sont égaux à celuy de la figure, comme il est évident. On demande quels sont les poligones qui se peuvent toucher par leurs angles, sans laisser d'espace vuide entr'eux. Il faut que leurs angles qui seront au tour d'un point commun fassent précisément quatre angles droits, § n. 22. Ainsi il n'y a que les quarrez & les exagones qui le puissent. Les quatre angles de quatre quarrez qui ont un point commun font quatre angles droits. Les trois angles des trois exagones qui ont un point commun, étant chacun de cent vingt, font ensemble trois cent soixante, valeur de quatre angles droits.

Lorsqu'on connoît l'angle du centre d'une figure réguliére, on la peut inscrire dans un cercle. Il faut mener du centre deux raions qui fassent un angle tel que doit être l'angle du centre de cette figure; car si c'est une figure de dix côtez faisant un angle de trente six degrez, qui est la dixiéme partie de trois cent soixante, la corde de cét angle sera un des côtez de cette figure.

Pour circonscrire un poligone ou figure réguliére autour d'un cercle, il faut premierement l'inscrire & en prolonger les raions; aprés aiant divisé par la moitié un des côtez de ce poligone inscrit, comme E F; aiant mené le raion A B par cette moitié, & fait au point B une tangente entre A C & A D, on aura un des côtés du poligone circonscrit. Ensuite il faut faire tous les raions prolongés de l'inscrit égaux à A C & A D, par l'extrêmité desquels aiant mené des lignes droites on aura la figure que l'on cherchoit, ainsi qu'il est évident *mais l'on ne peut pas faire avec la seule régle & le compas l'angle du centre de toute figure réguliere, sans exception, comme nous le ferons voir ; cela ne se peut que mécaniquement en se servant d'un demi cercle, qui est divisé par degrés, qu'on nomme un raporteur.*

PROBLEME SECOND.

123. *Inscrire un quarré dans le cercle X.* Eucl. IV. Prop. 6.



Il faut mener une ligne par le centre du cercle telle que A C qui en soit le diamétre ; & sur celle-là & au centre, la perpendiculaire B D. Les quatre points A, B, C, D sont en égales distances ; l. 1. n. 39. aiant donc mené des lignes droites par ces quatre points on aura un quarré dans le cercle X. Car 1° cette figure a quatre côtez égaux. 2° Tous les angles de A B C D sont droits, s *n.* 51. car chacun d'eux est apuié sur la demie circonference.

PROBLEME TROISIE'ME.

Faire un cercle dans le quarré F G H I. Eucl.
124 IV. Prop. 8.

Aiant coupé par la moitié les quatre côtez de ce quarré, & mené AC & BD, si du point E où ils se coupent, & de l'intervale A E, on décrit un cercle, il se trouvera inscrit dans ce quarré : car les quatre lignes A E, B E,

C E, D E, sont égales ; ainsi le cercle passera par les points A, B, C, D.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Circonscrire un quarré à un cercle. Eucl. IV. 125.
Prop. 7.

Il faut mener deux diamétres qui se coupent à angles droits ; ensuite par les quatre extrémités de ces deux diamétres, aiant mené quatre lignes tangentes au cercle, elles feront le quarré que l'on cherche, comme il est évident.

*PROBLEME CINQUIE'ME.

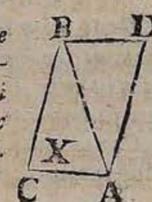
Faire un cercle au tour d'un quarré. Eucl. IV. 126.
Prop. 9.

Aiant tiré des diagonales, & prenant pour raion la moitié d'une des diagonales, le cercle qu'on décrira sera celui que l'on cherche, comme il est évident.

SECTION V.

De la mesure de l'aire des surfaces.

TEOREME PREMIER.



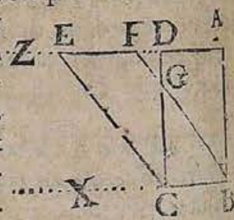
L*A diagonale A B, qui est une ligne menée d'un angle du parallelogramme X a un autre angle qui lui est oposé, partage X en deux triangles tout égaux.* Eucl. I. Prop. 34. 127.

Dans les deux triangles A B C & B A D, A D ∝ B C & A C ∝ B D, le côté A B est commun; ainsi ces deux triangles sont égaux & équiangles. s̃ *n.* 93.

TEOREME SECOND.

Les parallelogrammes A B C D & B C E F qui
128. *sont entre les mêmes paralleles & qui ont leurs bases égales, sont égaux* Eucl. I. Prop. 35. & 36.

Si la base de BCEF n'étoit pas la même base que celle de A B C D : sur B C s̃ *n.* 119. soit fait un parallelogramme semblable & égal à A B C D. Je supose que A B C D est rectangle; il faut prouver qu'il est égal à CEFB.



A B & D C perpendiculaires entre les paralleles X & Z, sont égales. Par l'hipotése F B ∝ C E & A D ∝ E F. partant A D + D F ∝ E F + D F. Les deux triangles A B F & D C E aiant leurs côtez égaux, ils sont entierement égaux s̃ *n.* 93. Otant de ces deux triangles égaux la partie D G F qui leur est commune, les trapezes A B G D & C G E F seront égaux. Ajoûtant donc à l'un & à l'autre la même grandeur B G C, ce qui fait les parallelogrammes A B C D & B C F E, ces deux figures seront égales, ce qu'il faloit prouver.

COROLAIRE PREMIER.

129. *Donc en mesurant la surface d'un parallelogramme comme B C E F, il ne faut avoir égard qu'à la base B C & à la perpendiculaire qui mesure sa hauteur,*

Car ce parallelogramme est égal à un parallelogramme rectangle dont B C est la base, &

dont les côtez qui sont perpendiculaires sont égaux à sa hauteur. Ainsi c'est le parallelogramme rectangle comme A B C D qui est la mesure de tous les parallelogrammes dont les bases seront égales à B C & qui auront même hauteur, ou seront entre les mêmes paralleles X & Z. Il ne peut y avoir qu'un parallelogramme rectangle sur la base B C entre X & Z, & il peut y avoir une infinité de parallelogrammes non rectangles sur la même base, & entre ces mêmes paralleles X & Z.

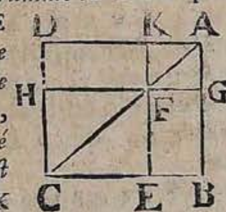
COROLAIRE SECOND.

Donc en mesurant l'étenduë d'un parallelogram- 130.
me non rectangle, il ne faut point avoir égard à son circuit.

Car quand les côtez B F & C E seroient d'un million de lieuës ou infinis; ce qui se peut concevoir en suposant que les lignes X & Z soient prolongées à l'infini : ce parallelogramme dont le circuit est infini, ne sera pas plus grand que A B C D dont le circuit est fini.

TEOREME TROISIE'ME.

Aiant partagé le parallelogramme A B C D par 131.
H G parallele à A D & K E parallele à A B; desorte que K E & H G coupent dans le même point la diagonale A C, les suplémens qui sont à côté du diametre sont égaux, c'est à dire que B E F G ∝ D K F H. Eucl. I. Prop. 43.

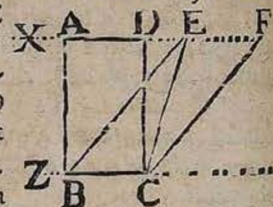


ABC ∝ ADC & A G F ∝ A K F & F E C ∝ F H C s̃ *n.* 127. Des deux triangles égaux A D C & A B C ôtant des grandeurs égales A K F & F H C d'une part, & A G F & F E C de l'autre, les restes F K D H & B E F G seront égaux ; ce qu'il faloit démontrer.

TEOREME QUATRIE'ME.

132. *Les parallelogrammes sont doubles des triangles de même hauteur & de même base* Eucl. I. Prop. 41.

Le triangle E B C a même base que le parallelogramme A B C D, & ils ont même hauteur étant entre les paralleles X & Z : je méne C F parallele à B E pour faire le parallelogramme B C F E, lequel est égal à A B C D $\bar{s}$ *n*. 128. Or B E C est égal à E C F $\bar{s}$ *n*. 127. donc B C F E ou la grandeur égale A B C D, est le double de B E C.



COROLAIRE PREMIER.

133. *Donc les triangles de même base ou de base égale & de même hauteur sont égaux.* Eucl. I. Prop. 37. & 38.

Puisqu'ils sont tous la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur.

COROLAIRE SECOND.

Donc pour mesurer la surface d'un triangle, il ne faut avoir égard qu'à sa hauteur & à sa base.

Puisqu'il est égal à la moitié d'un parallelogramme, qui a même base & même hauteur.

*TEOREME CINQUIE'ME.

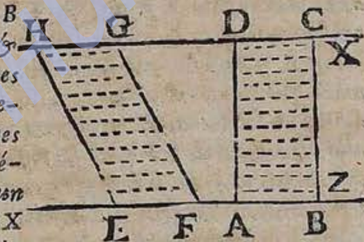
134. *Les triangles égaux de même base ou de base égale, & posez d'une même part sont entre les mêmes paralleles.* Eucl. I. Prop. 39. & 40.

S'ils sont égaux ils ont même hauteur ; & par consequent les perpendiculaires abaissées de leur sommet sur leurs bases seront égales.

Si on méne donc une ligne par leur sommet, elle sera parallele à leur base l. 1. n. 61.

Ces propositions se peuvent démontrer par une autre métode, dont il est bon ici de donner quelque connoissance. Il est évident 1° que lorsque deux surfaces planes sont faites par le mouvement de deux lignes droites & égales, si le mouvement de l'une & de l'autre ligne est égal, & qu'il dure autant de tems, ces deux surfaces sont égales. 135.

Si par exemple A B est égale à E F, & que ces deux lignes se meuvent parallelement à elles-mêmes d'un mouvement égal, venant dans un même tems de Z à X deux lignes paralleles, les deux parallelogrammes ABCD & EFGH que décrivent AB & EF sont égaux. Si EF se meut bien toûjours parallelement à elle-même : mais qu'en même tems elle ait un autre mouvement qui la porte ou à droit ou à gauche, on voit bien que ses extrêmitez E & F décrivent de plus grandes lignes, que A & B extrêmitez de AB qu'on supose n'avoir qu'un mouvement qui la porte par le plus court chemin de Z à Z ; ainsi quoique ABCD & EFGH soient des surfaces égales, le circuit de celle-cy est plus grand.



Si ces lignes A B & E F en se mouvant laissoient à chaque instant une trace, il est évident que comme on supose qu'elles sont portées dans un même tems de Z à X, les deux surfaces A B C D & E F G H qu'elles décrivent, seroient couvertes d'un nombre égal de lignes toutes égales ; & par conséquent que ces deux surfaces doivent être éga-

les. Ce qu'on peut démontrer encore plus ſenſiblement, au lieu que A B & E F ſont des lignes matématiques ſans largeur ; ſupoſons que ce ſoient des lignes qui ont quelque largeur, mais ſi petite qu'elle ſoit abſolument indiviſible, & qu'on les a rangées parallelement les unes à côté de AB, les autres à côté de E F entre Z & X lignes paralleles. Puiſque l'eſpace entre Z & X eſt partout le même, & que ces indiviſibles ſont toutes égales, il y en aura autant ſur A B que ſur E F, elles feront par conſéquent deux ſurfaces égales. Si celles qui ſont ſur E F ſont bien toûjours paralleles entr'elles ; mais que l'extrêmité de la ſeconde paſſe au de-là de E, & celle de la troiſiéme encore au de-là ; alors le circuit de E F C D ſera plus grand que celui de A B C D ; & ſi ce n'eſt que nous ſupoſons dans ces lignes une largeur indiviſible, c'eſt à dire inſenſible les côtez E H & F G ne ſeroient pas des lignes droites ; mais des lignes comme dentelées.

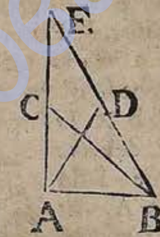
Cette métode que nous expliquons ici s'apelle la métode des indiviſibles, parce qu'on ſupoſe des lignes qui ont une largeur indiviſible à cauſe de ſa petiteſſe.

On peut emploier cette même métode pour prouver l'égalité des triangles qui ſont ſur une même baſe, & qui ont la même hauteur ou qui ſont entre deux paralleles ; car ſi on ſupoſe que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles ſe diminuënt proportionnellement, il faut que dans le même tems elles faſſent des ſurfaces égales. Si auſſi on

conçoit deux ſurfaces ſur deux baſes égales, compoſées d'un égal nombre de lignes indiviſibles, qui

ſe ſont diminuées proportionnellement ; de ſorte que toutes ſoient égales chacune à chacune, il faut que ces deux ſurfaces qui ſont deux triangles ſoient égales.

Remarquez que de deux triangles d'une ſurface égale, celui dont les côtez & les angles ſont plus égaux entr'eux, ont moins de circuit. Le triangle même rectangle aura plus de circuit qu'un équilateral qui lui ſoit égal : car ſoit A B C un rectangle & A B D un équilateral de même hauteur ; ils ſont égaux § *n.* 133. *Soit A C prolongé en E, deſorte que* $AC \propto CE$; *alors* $AE \propto AC + CE$, & $BE \propto BD + DA$. *Or B E eſt plus petit que* $BC + CE$; *donc le circuit de A B D eſt plus petit que le circuit de A B C. Nous ferons voir dans la ſuite qu'une figure qui eſt plus uniforme en toutes ſes parties, renferme une plus grande ſurface dans un moindre circuit.*



Probleme premier.

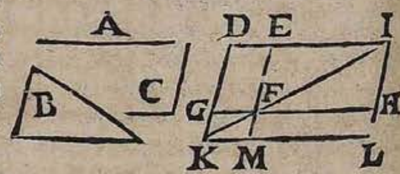
Faire un parallelogramme égal à un triangle 136.
donné, & qui ait un angle donné. Eucl. I. Prop. 42.

Il faut 1° mener deux paralleles de la diſtance de la hauteur du triangle donné. 2° Prendre la moitié de la baſe du triangle pour celle du parallelogramme ; enſuite élever une ligne qui faſſe avec la baſe l'angle donné § *n.* 32. ce parallelogramme ſera celui que l'on propoſoit de faire.

* PROBLEME SECOND.

137. *A une ligne étant donnée & C un angle, faire un parallelogramme égal à B triangle donné.* Eucl. I. Prop. 44.

1° Je fais D E F G par le problême precedent selon l'angle C, égal à B. 2° Je prolonge G F & D E. desorte que F H ∝ A. Et E I ∝ F H J'acheve le parallelogrãme EFH. Je prolonge la ligne I F jusqu'à ce qu'elle trouve le prolongement de D G; & j'achéve le parallelogramme DKLI, dans lequel FHLM est égal à DEFG s̄ *n.* 131. Ainsi c'est le parallelogramme que l'on cherchoit.



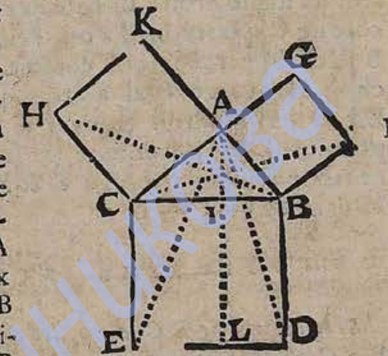
DEFINITION.

138. *Dans un triangle rectangle, le côté oposé à l'angle droit se nomme Hipotenuse.*

TEOREME SIXIÉME.

139. *Dans le triangle rectangle A B C le quarré de l'hipoteneuse, ou du côté qui soûtient l'angle droit est égal aux deux quarrez des deux autres côtez:* Eucl. I. Prop. 47.

L'hipotenuse est C B, je fais sur les trois côtez A B, B C, B A, trois quarrez. Il faut prouver que B C E D ∝ A B F G + A C H K.



Je mène par le point A sommet de l'angle droit, A L parallele à BD ou à CE, & de H une ligne à B, & de E une autre ligne au point A qui sont les deux triangles H C B & A C E: les lignes K A & A B ne font qu'une même ligne s̄ *n.* 19. selon la définition du quarré les angles K A G & G A B & tous les autres de ces quarrez étant droits. Ainsi K A ou K B est parallele à H C s̄. *n.* 117. Ajoûtant aux angles droits A C H & B C E à l'un & à l'autre l'angle A C B, il faut que H C B ∝ A C E: or les côtez qui comprennent ces angles sont égaux, H C ∝ A C & C B ∝ C E, par la définition du quarré; donc ces triangles H C B & A C E sont égaux s̄ 98. Or A C H K est double de H C B s̄. *n.* 132. partant de A C E qui n'est que la moitié de C I L E s̄. *n.* 132. il faut donc que C I L E soit égal à A C H K.

Par la même voie on démontre que B D L I est égal à A B F G : or C E L I + B D L I ∝ B C E D, donc B C E D ∝ A B F G + A C H K: ce qu'il faloit prouver.

PROBLEME TROISIEME.

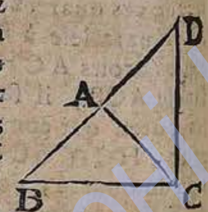
Trouver un quarré égal à deux ou plusieurs autres quarrez. 140

il ne faut que joindre les deux bases des deux quarrez proposez A & B, de sorte qu'ils fasſent un angle droit. La baſe de cét angle ſera le côté de C quarré égal à ces deux quarrez A & B ſelon le précédent Teorême. Si on cherchoit H quarré égal à trois quarrez donnez E,F,G, Il faudroit trouver K égal aux deux premiers E & F, & enſuite par la même métode en trouver un autre égal à K & à G, qui ſeroit H égal à E + F + G.

* Teoreme Setiéme.

141. *Si le quarré de B C d'un des côtez du triangle B A C eſt égal aux quarrez des deux autres côtez A B & A C, l'angle B A C compris de ces deux côtez, eſt droit.* Eucl. I. Prop. 48.

Soit fait A D perpendiculaire ſur AC & égale à A B ; donc les quarrez de A D & A C ſont égaux à celui de D C s̄. *n.* 139. Or ces deux quarrez ſont égaux par l'hipotéſe à celui de B C ; donc celui de B C & de D C ſont égaux : Ainſi CD & BC ſont égaux ; donc les deux triangles A B C & A D C ſont entierement égaux, & par conſéquent équiangles s̄. *n.* 93. BAC eſt donc droit auſſi-bien que CAD. On ſupoſe ici ce qui eſt évident que les quarrez égaux ont des côtez égaux.



Teoreme Huitiéme.

142. *Vn triangle eſt égal à deux ou pluſieurs triangles de même hauteur, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne.*

Le triangle ABC eſt égal aux triangles ABE, EAD & DAC, qui ſont ſes parties. Or A C D ↄ CFD, & DAE ↄ DGE, & EAB ↄ EHB s̄. *n.* 133. donc CAB eſt égal à deux ou pluſieurs triangles, &c. Ce qu'il faloit prouver.

Definition.

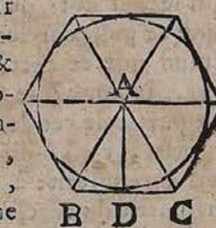
On apelle Apotême *la partie du raion qui eſt entre le cercle d'un poligone inſcrit & le centre du cercle.* 143.

A D eſt un apotême. [*figure ſuivante*]

Teoreme Neuviéme.

La ſurface d'un poligone regulier eſt égale à un triangle qui a pour baſe le circuit de ce poligone, & pour hauteur l'apotéme de ce poligone. 144

Ayant mené des lignes du centre A à chaque angle, on le réduit en autant de triangles qu'il a de côtez, tous égaux au triangle A B C qui a BC pour baſe & pour hauteur l'apotême A D ; or un triangle qui a AD pour hauteur, & pour baſe le circuit de ce poligone eſt égal à tous ces triangles dont la hauteur eſt D A, & les baſes priſes enſemble, font le circuit de ce poligone s̄. *n.* 142. qui eſt ce qu'il faloit prouver.



Propoſitions évidentes touchant les Poligones.

Premiere Propoſition.

Vn poligone eſt plus grand que le cercle auquel il 145.

est circonscrit.

SECONDE PROPOSITION.

146. *Vn poligone est plus petit que le cercle dans lequel il est inscrit.*

TROISIE'ME PROPOSITION.

147. *Vn cercle peut être pris pour un poligone d'une infinité de côtez.*

Car, par exemple, si un poligone dont le diamétre est petit avoit un million de côtez, il est évident qu'il ne difereroit pas sensiblement d'un cercle. Si dis-je on conçoit dans un cercle autant de côtez qu'il a de points sensibles, ce sera un poligone & un cercle en même tems.

TEOREME DIXIE'ME.

148. *De deux poligones circonscrits à un cercle, celui qui a plus de côtez, a un plus petit circuit & une plus petite surface.*

X est un poligone circonscrit à un cercle, je divise ses côtez pour faire un autre poligone qui ait plus de côtez en menant des tangentes qui seront hors du cercle, ainsi ce poligone sera plus grand que ce cercle s. n. 145. Je considere la même partie de ces deux poligones, c'est à dire, qui soit circonscrite à la même partie du cercle; par exemple à EFD, puisque BA + AC est plus grand que BC, donc DB + BA + AC + CF est plus grand que DB + BC + CF; ainsi le circuit de celui qui a moins de côtez est plus grand. La figure EFCABD excede EFCBD de la grandeur du triangle ABC; la surface de celui qui a plus de côtez est donc plus petite.

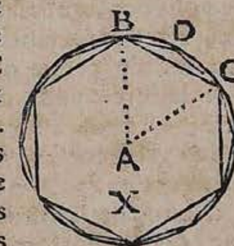
COROLAIRE.

Donc puisque plus un poligone a de côtez plus il 149. *est petit, demeurant toûjours plus grand que le cercle auquel il est circonscrit; il s'ensuit que plus un poligone a de côtez, son circuit & sa surface aprochent plus du circuit & de la surface du cercle auquel il est circonscrit; & qu'ainsi un poligone circonscrit d'une infinité de côtez ne difere point du cercle.*

TEOREME ONZIE'ME.

De deux poligones inscrits dans un même cercle, 150. *celui qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande surface.*

Deux poligones étant inscrits dans le cercle X; je considere la partie ABDC & les parties de ces deux poligones qui y répondent. 1° BD + DC est plus grand que BC; partant le circuit de celui qui a plus de côtez est déja plus grand.



2° La figure ABDC surpasse ABC de la grandeur du triangle BDC; ainsi le poligone qui a plus de côtez à une plus grande surface, ce qu'il faloit prouver.

COROLAIRE PREMIER.

Donc puisque de deux ou plusieurs poligones ins- 151 *crits dans un même cercle, celui-là est plus grand qui a plus de côtez demeurant toûjours plus petit que le cercle s. n. 146. il s'ensuit que plus un poligone inscrit a de côtez, plus il aproche de la circonference & de la surface du cercle; & qu'ainsi un poligone inscrit qui a une infinité de côtez ne difere point du cercle.*

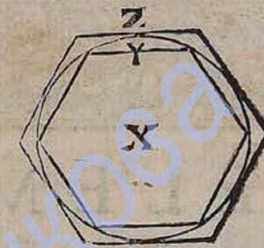
TEOREME DOUZIE'ME.

La surface d'un cercle est égale à un triangle
152. *qui a pour sa hauteur le raion de ce cercle, & pour base la circonference.*

On peut suposer selon les deux Téorêmes précédens & leurs Corolaires, qu'un cercle est égal à un poligone d'une infinité de côtez, qui lui est circonscrit ou inscrit. La surface de ce poligone est égale à un triangle qui a pour base son circuit, qui est ici la méme chose que la circonference du cercle; & pour hauteur l'apotême ou la perpendiculaire menée du centre de ce poligone sur un des côtez de ce méme poligone, qui aiant un nombre infini de côtez, cette perpendiculaire n'est point diferente du raion du cercle où il est inscrit. Prenant donc le cercle pour un poligone semblable, sa surface est égale à un triangle, dont la base est égale à sa circonference, & la hauteur est égale à son raion.

Connoissant le raion d'un cercle si on connoissoit donc la juste grandeur de sa circonference, il seroit facile de trouver sa quadrature, c'est à dire un quarré égal à sa surface; car on peut trouver un quarré égal à un triangle donné. Mais on ne peut exprimer la grandeur de la circonference d'un cercle qu'en assignant deux lignes, l'une plus grande & l'autre plus petite que cette circonference, qui ne diferent entr'elles que d'une grandeur moindre que toute grandeur qu'on puisse marquer; ce que l'on démontre de cette maniere. Soit le cercle donné X; je supose qu'un poligone que je nomme Z, lui soit circonscrit, & qu'un autre que j'apelle Y lui soit inscrit. La grandeur donnée, qui est la diference de la surface du cercle à une autre surface est T.

J'aug-



J'augmente ou diminuë les côtez des poligones Z & Y jusqu'à ce que leur diference soit plus petite que la grandeur T, ce qui est facile; car en augmentant les côtez de l'un & de l'autre, on augmente la grandeur de Y. s. n. 150, & on diminuë celle de Z. s. n. 148. & 149. Ainsi l'un & l'autre aprochent plus de la circonference du cercle. La diference de Z avec Y est plus grande que celle de Z avec le cercle X, puisque X est plus grand que Y: donc la diference des surfaces de Z & de Y étant plus petite que la grandeur T, on trouve une surface qui difere de celle du cercle d'une grandeur plus petite que celle qu'on avoit proposée; c'est à dire que si on proposoit de trouver une surface qui ne diferât de celle d'un cercle donné que de la cent miliéme partie d'une ligne, on en pouroit trouver une qui difereroit encore moins.

ELEMENS
DE
GEOMETRIE
OU
DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE TROISIE'ME.

Des proprietés qui conviennent à toute grandeur, & par conséquent aux lignes, aux plans & aux solides.

AVERTISSEMENT.

J'ai expliqué dans les Elemens des Mathematiques les proprietés de la Grandeur en general. Je repéte ici ce que j'y ai dit qui peut convenir aux dimensions du corps, aux lignes, aux plans & aux solides pour ceux qui n'auront pas vû ces Elémens, outre qu'il faut avoir fort presentes ces veritez qu'on va voir.

SECTION PREMIERE.

Des quatre operations, Adition, Soustraction, Multiplication & Division.

Premiere Operation, Adition.

1. LA premiere & la plus simple proprieté de toute Grandeur, c'est qu'elle peut être augmentée ou diminuée. Le signe de l'adition c'est celui ci $+$. Ainsi $a+b$ veut dire, comme on l'a déja vû, qu'on ajoûte la grandeur b à la grandeur a, quelles que soient ces grandeurs, ou des lignes ou autres grandeurs. Lorsqu'il faut ajoûter une grandeur à elle même plusieurs fois, il sufit de mettre devant la lettre qui la marque, le nombre de fois qu'on veut marquer qu'elle est ajoûtée à elle même; ainsi $3b$ marque que b est ajoûté trois fois à soi même.

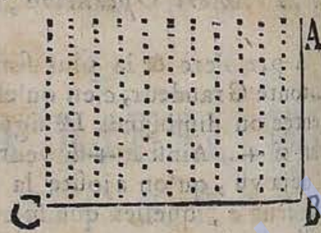
Seconde Operation, Soustraction.

2. Le signe de la soustraction est une petite barre. Ainsi $a-b$ marque qu'on conçoit que de a on a retranché b; & par conséquent que a étoit plus grand que b. Pour retrancher deux a de cinq a, il est évident qu'il faut ôter du plus grand nombre celui qui est le plus petit, & écrire le reste, c'est à dire, $3a$.

Troiſiéme Operation, Multiplication.

3. Multiplier une grandeur par une autre grandeur, c'eſt la prendre autant de fois qu'il y a de parties dans celle qui la doit multiplier. Multiplier *a* par *b*, c'eſt prendre *a* autant de fois que *b* a de parties ; ce qu'on marque en uniſſant ces deux lettres ainſi *ab*.

4. Quand on marque deux lignes par deux lettres, que par exemple *ab* marque la multiplication de deux lignes AB & BC, on entend que ces deux lignes font le plan rectangle ABC. Il eſt évident que ce plan eſt fait par le mouvement de la ligne AB muë de B à C, ainſi repetée ou priſe autant de fois qu'il y a de parties en BC. Nous verrons que les ſolides ſe font d'un plan multiplié par une ligne. Si on concevoit donc le plan *ab* multiplié par *c* une ligne, alors *abc* ſeroit un ſolide. On ſupoſe pareillement que dans les ſolides qu'on exprime ainſi, tous les angles ſont droits.



5. Pour marquer la multiplication d'une ligne par une ligne, il faut autant qu'on le peut ſe ſervir de petites italiques, & ne marquer chacune de ces lignes que par une ſeule lettre, nommant l'une par exemple *b* & l'autre *c*. En voila la raiſon : On marque ordinairement les lignes avec deux lettres capitales, comme ici la ligne A B. Or cela ne ſignifie pas que A eſt multiplié par B, mais ſeulement que

A & B ſont les deux extrêmitez de cette ligne. Comme l'union de ces deux lettres n'eſt donc pas le ſigne de la multiplication, pour multiplier la ligne AB par la ligne BC en ſe ſervant de ces capitales, il faut un ſigne particulier : Ce ſigne eſt arbitraire. On peut joindre AB avec BC mettant une croix entre deux ainſi ; AB † BC. C'eſt-là le ſigne dont je me ſervirai pour exprimer que AB eſt multiplié par BC.

Quatriéme Opération, de la Diviſion.

La diviſion défait ce qu'a fait la multiplication ; ainſi comme *a* multipliant *b* fait le plan *ab* ; ſi on diviſe ce plan par *b*, c'eſt à dire ſi on le défait, il reſtera *a* ; & ſi c'eſt par *a* qu'on le diviſe, il reſtera *b*. De même pour diviſer AB † BC par BC, il faut écrire ſeulement AB. La diviſion ſe fait donc en ſuprimant le diviſeur de la grandeur à diviſer. Pour diviſer *cd* par *c*, il faut ſuprimer *c* & écrire *d* qui ſera le quotient, comme on parle de *cd* diviſé par *c* ; c'eſt à dire que *d* ſera le ſigne du nombre de fois que *c* eſt dans *cd*. Lorſque dans la grandeur à diviſer on ne trouve aucune des lettres du diviſeur, on met la grandeur à diviſer ſur une petite ligne, & deſſous le diviſeur ; ainſi $\frac{a}{b}$ eſt le ſigne que *a* eſt diviſé par *b*, c'eſt à dire du nombre de fois que *b* eſt contenu dans *a*. 6.

Des mêmes operations.

Adition, soustraction, multiplication & division, lorsque les grandeurs sont composées.

7. On nomme grandeur composée celle qui est éfectivement composée de deux ou de plusieurs grandeurs qui sont exprimées chacune par un signe particulier ; desorte que cette grandeur se marque avec deux ou plusieurs lettres diferentes. Ainsi $a+b$ ou $a-b$ sont des grandeurs composées. Nous alons voir comme se font les quatre operations dont nous venons de parler sur ces grandeurs : Mais avant toutes choses remarquez, que puisque selon le neuviéme Axiome, plus une grandeur moins la même grandeur, ce n'est rien ; que $+3-3$ est égal à zéro : pour rendre une expression plus nête on en peut retrancher la même grandeur qui se trouve avec des signes contraires ; aiant par exemple cette expression $5b-2b$ la réduire à celle-ci $3b$; car lorsqu'une grandeur n'a point de signe exprimé, il faut sous-entendre le signe $+$. Ainsi $5b-2b$, c'est comme s'il y avoit $+5b-2b$. Or dans cette expression il y a deux fois b avec des signes contraires, ainsi faisant disparoître $2b$ je réduis cette expression à celle-ci $+3b$ ou simplement $3b$.

Adition des grandeurs composées.

8. Les grandeurs composées s'ajoûtent comme les simples. Pour ajoûter $b+c$ avec $f+h$ il faut les joindre avec le signe $+$; ainsi $b+c+f$ $+h$. Pour abreger lorsque la même lettre ou la même grandeur se trouve avec des signes contraires, on l'éface ; ainsi ajoûtant $b+d$ avec $c-d$, j'écris $b+c$ éfaçant d. Lorsque les mêmes lettres se trouvent répétées plusieurs fois, pour avoir une expression plus courte & plus nête, on ne les marque qu'une seule fois ; mais on met devant un chifre qui fait connoître combien on doit concevoir qu'elles sont prises de fois. Ainsi pour ajoûter $4f+6g$ avec $3f-4g$, l'adition est $7f+2g$: Si on marquoit au long cette operation, on auroit $4f+6g+3f-4g$. Or $4f+3f$, c'est $7f$. Et $+6g-4g$ font $+2g$.

Soustraction des grandeurs composées.

La régle generale de cette operation est qu'il faut changer les signes de la grandeur qu'on doit retrancher. On a dit qu'on doit sousentendre le signe $+$ devant toute grandeur qui n'a aucun signe. Pour ôter ainsi $b+d$ ou $+b+d$ de $c+f$, il faut écrire $c+f-b-d$. Ce qui est certain ; car 1° il faut joindre b avec $c+f$ par le signe $-$, signe de la soustraction. Or puisque ce n'est pas seulemēt $+b$ qu'on veut retrancher, mais encore $+d$; il faut donc encore écrire d, en mettant devant cette lettre d le signe $-$, ou changeant son signe $+$ dans le signe $-$. Au contraire s'il faloit ôter $b-d$ de $c+f$, il faudroit changer les signes de $+b-d$ mettant $c+f-b+d$. La raison en est évidente ; car quand on soustrait $b-d$ de $c+f$ on ne veut pas ôter entierement la grandeur b, il s'en faut la grandeur d ; ainsi aiant mis $c+f-b$, on retranche de $c+f$ plus 9.

qu'il ne faut retrancher, ſavoir la grandeur d; c'eſt pourquoi on l'ajoûte, lui donnant le ſigne plus en cette maniere $c + f - b + d$. Je ne donne point d'autre exemple de la ſouſtraction. On en trouvera dans les Elemens des Mathematiques, où l'on verra comme les expreſſions de cette operation s'abrégent.

De la multiplication des grandeurs compoſées.

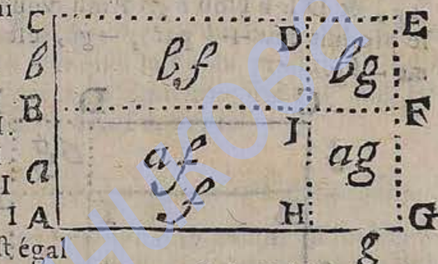
10. On peut propoſer de multiplier, 1° une ligne plus une autre ligne, comme $a + b$ par une ligne plus une autre ligne, comme par $f + g$. 2° Ou de multiplier une ligne moins une autre ligne par une ligne plus une autre ligne, comme $a - b$ par $f + g$. 3° Ou de multiplier une ligne moins une autre ligne $a - b$ par une ligne moins une autre ligne comme par $f - g$. Ce qui fait ces trois cas. 1° $a + b$ par $f + g$. 2° $a - b$ par $f + g$. 3° $a - b$ par $f - g$; pour leſquels on donne les régles ſuivantes que nous démontrerons d'une maniere ſenſible.

PREMIERE REGLE.

11. *Lorſque deux grandeurs données ont chacune le ſigne $+$ leur produit doit avoir le même ſigne $+$.*

Il faut multiplier $a + b$ par $f + g$. Suivant ce qu'on a dit de la multiplication des grandeurs ſimples, écrivant af, ce ſigne ſera la marque du produit de a par f; ainſi faiſant autant de multiplications partiales qu'il y a ici de lettres, on aura $af + bf + ag + bg$, pour produit de $a + b$ multiplié par $f + g$. Soit $a + b \propto$ A C. $a \propto$ A B. $b \propto$ B C. Soit auſſi

$f + g \propto$ A G, $f \propto$ A H. $g \propto$ H G. Je ſupoſe que ACEG eſt un rectangle coupé par des paralleles qui font les parallelogrammes A B I H. F G I H. B C D I. D E F I. auſquels eſt égal



A C E G, puiſque le tout eſt égal à ſes parties. Or ces quatre produits $af + bf + ag + bg$ ſont égaux à ces quatre parallelogrammes comme il eſt évident; ils ſont donc égaux à A C † A G, c'eſt à dire au parallelogramme de A C par A G, de $a + b$ par $f + g$. Ce qu'il faloit prouver.

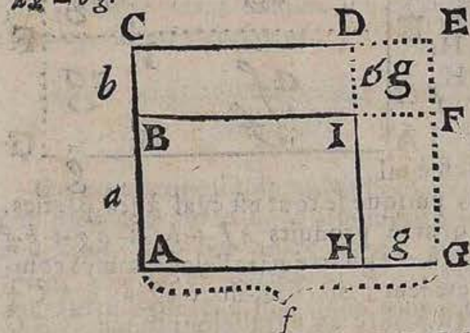
SECONDE REGLE.

Plus en moins, ou moins en plus donne un produit qui doit avoir le ſigne $-$. 12.

C'eſt à dire que ſi l'une des deux grandeurs a le ſigne $-$ & l'autre le ſigne $+$, leur produit doit avoir le ſigne $-$. Soit donné $a + b$ pour être multiplié par $f - g$. Je multiplie 1° $a + b$ par f; ce qui fait $af + bf$: mais comme ce n'étoit pas par toute la valeur de f qu'il faloit multiplier $a + b$; qu'il s'en faloit g, j'ôte ce que j'avois mis de trop, écrivant $af + bf - ag - bg$: ce que je démontre ſenſiblement. Soit $a \propto$ A B. $b \propto$ B C. $f \propto$ A G & $g \propto$ H G; ainſi $a + b \propto$ A C, & $f - g \propto$ A H. La valeur de $a + b$ multipliée par $f - g$, eſt donc A C † A H; c'eſt à dire le parallelogramme ACDH. Conſiderez que A G E C $\propto af + bf$

F 5

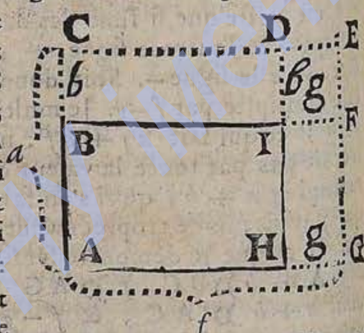
Or A C D H est égal à ce parallelogramme, pourvû qu'on lui ôte I F G H ou ag, & D E F I ou bg. Ainsi vous voiez que le produit de $a+b$ par $f-g$, est $af+bf-ag-bg$.



TROISIE'ME REGLE.

Moins en moins donne plus.

13. On propose de multiplier ces deux grandeurs composées $a-b$ & $f-g$ l'une par l'autre. Elles ont le signe −. Je dis que leur produit est $af-bf-ag+gb$, à la fin duquel vous voiez le signe +. Je le démontre ; soit $a \propto$ A C & $b \propto$ B C ; ainsi $a-b \propto$ A B : soit aussi $f \propto$ A G & $g \propto$ H G ; ainsi $f-g \propto$ A H : Parconséquent il faut que le



produit de $a-b$ par $f-g$ soit égal à A B I H, auquel est égal A C E G ou af, si on en retranche D E G H ou ag, & B C E F égal à bf, pourvû qu'on lui rajoûte D E F I ou bg qu'on lui

ôte de trop ; car en ôtant D E G H & B C E F, on ôte deux fois D E F I ou bg : Ainsi $af-bf-ag+bg$ est le produit de $a-b$ par $f-g$. Vous voiez ici que moins en moins ne donne plus, c'est à dire qu'à la fin du produit il n'y a plus, que parce qu'aiant trop ôté, il faut remettre ce qu'on ôtoit de trop.

De la division des grandeurs composées.

Comme la division défait ce que la multiplication a produit, on connoît par les trois dernieres regles ce que doit être le quotient de la division d'un produit de deux grandeurs composées qui ont été multipliées l'une par l'autre. Si dans le produit il n'y a que le signe + ; ce quotient doit avoir ce même signe selon la premiere régle s̃ *n.* 11. Lorsque dans le produit il y a à la fin le signe −, si le diviseur a le signe + le quotient doit avoir le signe − ; & si le diviseur a le signe −, le quotient aura le signe + selon la seconde Régle s̃ *n.* 12. Enfin lorsqu'on voit dans le produit à diviser le signe −, mais à la fin le signe +, il faut necessairement que le diviseur & le quotient aient le signe − selon la troisiéme régle s̃ *n.* 13. 14.

AVERTISSEMENT.

En voila assez pour entendre la suite de ces Elemens ; mais pour pratiquer avec plus de facilité cette maniere d'arithmétique par lettres, ce qui s'apelle algêbre, il faut lire les Elemens des Mathematiques.

SECTION II.

De la puissance des lignes.

PREMIERE DEFINITION.

15. *Puissance d'une ligne, c'est ce qu'elle peut faire étant multipliée par elle même.*

SECONDE DEFINITION.

16. *Premiere puissance d'une ligne, c'est le quarré qu'elle fait étant multipliée par elle-même.*

La premiere puissance de b c'est $b\,b$, c'est à dire le quarré de b qui se marque encore ainsi b^2 : Ce nombre 2 marque que $b\,b$ a deux dimensions. Remarquez qu'il y a bien de la diference entre b^2 & $2b$; car cette seconde expression $2\,b$ marque que b a été ajoûté deux fois à lui-même ; au lieu que b^2 fait connoître que b est multiplié par lui même. Or cela est bien diferent, car par exemple deux fois 3 ou 3 ajoûté à lui même ne fait que 6, au lieu que multiplié par lui-même il fait 9.

Lorsqu'on marque une ligne avec deux lettres capitales, qu'on l'apelle par exemple A B, on peut marquer la premiere puissance ou le quarré de cette ligne ainsi : A B † A B, c'est à dire A B multiplié par A B, ce qui fait son quarré. Pour abreger on met cette lettre q de cette maniere: A B q ce qui tient lieu de cette expression *le quarré de A B.*

TROISIE'ME DEFINITION. 17.

On apelle racine d'une puissance la ligne de la multiplication de laquelle elle est faite.

La racine quarrée de $b\,b$, c'est une ligne égale à b, c'est-à dire le côté d'un quarré égal à bb.

QUATRIE'ME DEFINITION. 18.

La seconde puissance d'une ligne, c'est le solide ou le cube qu'elle fait multipliant elle même son propre quarré.

Le quarré de b est $b\,b$ si on multiplie $b\,b$ par b, ce qui fait $b\,b\,b$ ce solide ou cube est la seconde puissance de la ligne b. Ce cube $b\,b\,b$ se peut exprimer ainsi b^3 : ce nombre 3 marque que le solide a trois dimensions. Il est évident que b^3 est diferent de $3\,b$; car $3\,b$ c'est b ajoûté trois fois à lui même ; & b^3 c'est b multiplie une premiere fois, ce qui produit son quarré, & en second lieu ce quarré multiplie encore par b.

Soit A B une ligne marquée avec ces deux lettres capitales, on peut exprimer ainsi sa seconde puissance ou son cube A B † A B † A B: ce qui fait connoître qu'on a multiplié premierement AB par AB, ce qui fait le quarré de AB. Et en second lieu, qu'on a multiplié le quarré de AB par AB racine de ce quarré ; cette expression est longue, celle-ci est plus courte AB c. cette lettre c marque que par AB c on entend le cube de AB, ou un cube dont AB est la racine.

CINQUIE'ME DEFINITION. 19.

Toute grandeur faite du produit de deux autres s'apelle plane.

Ainsi $b\,d$ est une grandeur plane ou un plan dont une de ces lettres marque sa largeur, &

l'autre sa longueur ; c'est à dire ses deux dimensions. AB + BC est une grandeur plane.

SIXIE'ME DEFINITION.

20. *Toute grandeur faite du produit de trois autres, s'apelle solide.*

Ainsi *bdc* est un solide, dont ces trois lettres marquent les trois dimensions ; le produit de deux de ses lettres marque le plan ou surface de la multiplication de laquelle il est composé, ce plan étant multiplié par sa hauteur, dont la troisiéme lettre est le signe.

AVERTISSEMENT.

Les Propositions suivantes sont d'Euclide, c'est pour cela seulement que je les propose ; car ce qu'on a dit touchant les operations qu'on a enseignées dans la premiere Section, fait voir évidemment tout ce qu'enseigne Euclide dans ces Propositions. Aussi on les peut passer, si on ne trouve à propos de les lire pour s'exercer dans ces operations.

EUCLIDE LIVRE SECOND.

*PREMIERE PROPOSITION.

21. *Si* b *&* c *sont les parties de* x, *les deux plans* bz *&* cz *sont égaux à tout le plan* zx.

Il faut prouver que $xz \propto zb + zc$. Puisque le tout & ses parties prises ensemble ne sont qu'une même chose, il est évident qu'aiant multiplié x le tout, & $b + c$ toutes ses parties par z une même grandeur, les deux produits zx & $zb + zc$ ne doivent être qu'une même chose, par conséquent égaux.

*SECONDE PROPOSITION.

22. b *&* c *sont les parties de* x, *les plans* bx

& cx *faits chacun du tout* x *avec une de ses parties, sont égaux aux quarrés du tout.*

C'est à dire que $bx + cx \propto xx$. Cette proposition n'est qu'une expression diferente de la Proposition precedente.

TROISIE'ME PROPOSITION.

La grandeur z *& ses parties* b *&* d *étant multipliées par* b *l'une de ses parties, le produit de* z 23.
par b *est égal au quarré de* b, *plus au plan de* b *multiplié par l'autre partie* d.

Il faut démontrer que $zb \propto bb + bd$. Les parties de z sont $b + d$ donc $z \propto b + d$; ainsi par la premiere Proposition en multipliant z & $b + d$ deux grandeurs égales, par le même multiplicateur b les produits seront égaux $zb \propto bb + bd$, qui est ce qu'il faloit prouver ; car comme vous le voiez le plan zb est égal à bb quarré de b, plus au plan de b multiplié par l'autre partie d, savoir bd.

*QUATRIE'ME PROPOSITION.

Une ligne étant coupée en deux parties, le quarré de la ligne entiere est égal aux quarrés de ses 24.
parties, & à deux fois le plan de ses parties.

Soit z une ligne dont a & b sont les parties ainsi $z \propto a + b$. Aiant multiplié $a + b$ par $a + b$, le produit $aa + 2ab + bb$ sera la valeur de ce quarré, qui contient aa & bb quarrez de a & de b parties de z & $2ab$; c'est à dire deux fois le plan de a & de b ses parties ; ce qu'il faloit prouver.

*CINQUIE'ME PROPOSITION.

Les deux parties égales de z *sont* b *&* b, *& les* 25.
deux inégales sont b + c *&* d. *Je dis que le plan des deux inégales, savoir* db + dc *avec* cc *quarré de la partie du milieu* c, *est égal à* bb *quarré de* b *moitié de* z.

Il faut démontrer que $db + dc + cc \propto bb$. Puisque $b + c + d \propto z$, & que b est moitié de z, il faut donc que $c + d \propto b$, donc s̃ *n.* 24. $bb \propto cc + 2cd + dd$. Si l'on multiplie $d + c$ & b par d, il faut aussi s̃ *n.* 21. que $dd + dc \propto bd$. Ainsi je puis substituer bd en la place de $dd + dc$. par conséquent $cc + 2cd + dd \propto cc + dc + bd$; Or $cc + 2cd + dd \propto bb$. Donc $cc + dc + bd \propto cc + 2cd + dd \propto bb$. Donc $cc + dc + bd \propto bb$.

26. ### *Sixie'me Proposition.

b est la moitié de z. Si on ajoûte d à z, je dis que le plan de z + d multiplié par d avec le quarré de b est égal au quarré de b + d.

Il faut démontrer que $zd + dd + bb \propto bb + 2bd + dd$.

Retranchant de part & d'autre bb & dd, reste $zd \propto 2bd$. Ainsi il n'est question que de montrer que cela est; c'est à dire que zd est égal à $2bd$. Or $z \propto b + b$, car b est la moitié de z; donc s̃ *n.* 21. $zd \propto db + db$ ou $zd \propto 2bd$, ce qu'il faloit démontrer.

27. ### *Se'tie'me Proposition.

Le quarré de la grandeur entiere z plus le quarré de l'une de ses parties b, sont égaux au quarré de son autre partie d, plus deux fois le plan fait de z multiplié par b.

Les parties de z sont b & d, il faut démontrer que $zz + bb \propto dd + 2zb$. 1° Selon ce qu'on a dit s̃. *n.* 23. $zb \propto bb + bd$; donc ajoûtant une fois ces grandeurs à elles-mêmes $2zb \propto 2bb + 2bd$. Ajoûtant encore de part & d'autre dd on aura $2zb + dd \propto 2bb + 2bd + dd$. Or mettant zz au lieu de $bb + 2bd + dd$ qui lui est égal s̃. *n.* 24. on aura

$2zb + dd \propto zz + bb$, ce qu'il faloit prouver.

*Huitie'me Proposition. 28.

Les parties de z étant b & d, je dis que quatre fois le plan fait de z & de b plus le quarré de l'autre partie d est égal au quarré de z + b.

Il faut ainsi prouver que $zz + bb + 2zb \propto dd + 4zb$.

Par la proposition précédente $zz + bb \propto dd + 2zb$. Ajoûtant de part & d'autre $2zb$ alors $zz + bb + 2zb \propto dd + 4zb$, qui est ce qu'il faloit prouver: car vous voiez que $zz + bb + 2zb$ est le quarré de $z + b$ s̃. *n.* 24. lequel quarré est égal au quarré dd de la partie d, & à $4zb$ qui vaut quatre fois le plan zb, fait de la grandeur entiere z & de son autre partie b.

*Neuvie'me Proposition. 29.

Les deux moitiés de z sont b & b, les parties inégales sont b + c & d, je dis que les quarrés des parties inégales b + c & d sont le double du quarré de la moitié qui est b, plus le quarré de c partie du milieu.

Il faut démontrer que $bb + 2bc + cc + dd$ est le double de $bb + cc$; c'est à dire que $2bb + 2cc \propto bb + 2bc + cc + dd$.

Puisque $b \propto c + d$. Donc en multipliant b & $c + d$ par $2c$, on aura $2cb \propto 2cc + 2cd$. Ainsi au lieu de $2bc$ mettant $2cc + 2cd$ dans cette égalité qu'il faut prouver, on aura $2bb + 2cc \propto bb + 2cc + 2cd + cc + dd$. Retranchant de part & d'autre $bb + 2cc$, restera $bb \propto cc + 2cd + dd$; ce qui est vrai s̃ *n.* 24. car $b \propto c + d$; il faut donc que $2bb + 2cc \propto bb + 2cc + 2cd + cc + dd$, puisqu'en ôtant de part & d'autre des grandeurs égales, les restes se trouvent égaux.

* DIXIÉME PROPOSITION.

30. b & b *sont les deux parties de* z, *on ajoûte* d *à* z. *Le quarré de* $z + d$, *savoir* $zz + 2zd + dd$ *avec encore* dd *quarré de* d, *est double de* bb *quarré de* b *avec celui de* $b + d$, *savoir* $bb + 2bd + dd$.

Il faut démontrer que $2bb + 2bd + dd$ est la moitié de $zz + 2zd + 2dd$, ou ce qui est la même chose que $4bb + 4bd + 2dd \propto zz + 2zd + 2dd$.

Puisque $z \propto b + b$, donc $z + d \propto 2b + d$. Donc mettant le quarré de $2b + d$, savoir $4bb + 4bd + dd$ en la place de celui de $z + d$, savoir $zz + 2zd + dd$, qui lui est égal; nous réduirons l'égalité qu'il faut prouver à celle-ci $4bb + 4bd + 2dd \propto 4bb + 4bd + 2dd$. Aprés quoi il n'y a plus de dificulté. Comptez & vous trouverez de part & d'autre un égal nombre de grandeurs égales.

AVERTISSEMENT.

On pouroit faire une infinité de propositions semblables, qu'on trouve en faisant les operations qu'on a enseignées dans la premiere Section, & qu'on démontre dans les lieux mêmes où l'on en a besoin; ainsi il n'est pas besoin de les faire à part. Le reste des propositions du second Livre d'Euclide, se trouveront ensuite dans les lieux qui leur conviennent.

SECTION III.

Des raisons & des proportions.

AVERTISSEMENT.

On peut considerer ce qu'une ligne est en elle-même, ou ce qu'elle est par raport à d'autres lignes. Ce raport fait qu'on dit qu'elle est égale ou inégale, petite ou grande. Il en est de même des surfaces & des solides. Raporter une ligne à une autre ligne, c'est comparer ensemble ces deux lignes; ce qui se peut faire en deux manieres, ou en considerant l'excés de l'une par dessus l'autre, c'est à dire leur diference; ou en considerant comme l'une contient ou est contenuë dans l'autre. Ces deux manieres de comparaisons font deux sortes de raports. Dans la Géométrie on ne considere guéres que le second; & c'est pour le marquer qu'on emploie ce mot RAISON, *qui en general signifie* RAPORT, *comme on l'a dit dans les Elemens des Mathématiques.*

PREMIERE DEFINITION.

RAISON, *c'est la maniere qu'une grandeur contient ou est contenuë dans celle avec qui on la compare.* 31.

Pour exprimer une raison, par exemple, celle de a à b, on met a sur une ligne, & b dessous en cette maniere $\frac{a}{b}$. Cette expression est naturelle; car comme on a vû $\tilde{S}$. n. 6. c'est le ſigne de la diviſion. Or la diviſion fait connoître combien de fois une grandeur eſt dans une autre grandeur ; ainſi le ſigne de cette operation exprime la valeur d'une raiſon qui n'eſt proprement que ce qu'on apelle dans l'Arithmétique le quotient, qui marque la maniere qu'une grandeur eſt contenuë dans une autre.

Seconde Definition.

32. *Une raiſon qui ſe peut exprimer en nombres s'apelle raiſon de nombre à nombre.*

Une grandeur peut être contenuë exactement dans une autre ligne, ou la contenir tant de fois. Cette grandeur X ſe peut trouver préciſément ſix fois par exemple dans A, & cinq fois dans B : alors la raiſon de A à B, qui ſe peut exprimer avec ces nombres 6 & 5, ſe nomme raiſon de nombre à nombre.

Troisiéme Definition.

33. *Une raiſon qui ne ſe peut exprimer par aucun nombre ſe nomme ſourde.*

Aiant diviſé A une ligne en tant de parties, telles que X en eſt une, ſi X ne ſe trouvoit point tant de fois dans B ; & que ce fût en vain qu'on cherchât une grandeur qui fût un nombre de fois exactement dans A & dans B, la raiſon de A & de B ſeroit une raiſon ſourde.

Quatriéme Definition.

34. *L'égalité des raiſons ſe nomme proportion.*

S'il y a même raiſon de A à B que de C à D, on dit qu'il y a même proportion entre ces quatre grandeurs, ou qu'elles ſont proportionnelles ; ce qu'on marque avec quatre points au milieu d'elles ainſi A B : : C D.

Cinquiéme Definition. 35.

Le premier terme d'une raiſon ſe nomme l'antecedent, l'autre terme le conſéquent.

Toute comparaiſon ſupoſe deux termes ; par conſéquent puiſque la raiſon eſt un raport ou comparaiſon, elle ſupoſe deux termes.

Sixiéme Definition. 36.

Une proportion a deux antecedens & deux conſéquens.

La proportion eſt une égalité de deux raiſons que l'on compare ; ainſi comme chaque raiſon ſupoſe deux termes, la proportion en doit avoir quatre.

Setiéme Definition. 37.

Le même terme peut ſervir dans une proportion de conſéquent & d'antecedent, & alors cette proportion ſe nomme continuë.

Si A par exemple eſt à B comme B eſt à C, cela fait deux raiſons qui ſont égales, & qui par conſéquent font cette proportion A B : : B C où B ſert de conſéquent à la premiere raiſon, & d'antecedent à la ſeconde. Cette proportion qu'on nomme continuë, ſe marque ainſi avec une barre entre deux points ∺ A, B, C.

Huitiéme Definition. 38.

Une proportion continuë qui a pluſieurs termes s'apelle progreſſion.

Si par exemple A eſt à B comme B à C, & B à C comme C eſt à D, & C à D comme D à E, & de ſuite, cela s'apelle progreſſion, qu'on exprime ainſi ∺ A, B, C, D, E, &c.

Neuviéme Definition. 39.

Pluſieurs lignes, ſix par exemple étant en proportion, lorſque la premiere d'une part eſt à la ſeconde, & celle-ci à la troiſiéme, comme la quatriéme de l'autre part eſt à la cinquiéme, & celle-

ci à la sixiéme, cette proportion s'apelle ordonnée.

On diroit que cette proportion seroit troublée, si ces mêmes six lignes étoient rangées de maniere que cela ne fût pas.

DIXIE'ME DEFINITION.

40. *Le premier & le dernier terme d'une proportion s'apelle les extrêmes de cette proportion; & le second & le troisiéme, les termes moiens ou simplement moiens.*

Soit cette proportion A, B : : C, D. Les extrêmes sont A & D, & B & C les moiens.

ONZIE'ME DEFINITION.

41. *Si de quatre grandeurs proportionnelles on compare la premiere & la quatriéme avec la seconde & la troisiéme, c'est à dire les extrêmes avec les moiens; on dit alors que les unes sont réciproques aux autres.*

Par exemple, si A, B : : C, D, & qu'on compare A avec D & B avec C en écrivant A, D, B, C, on dira que ces quatre grandeurs sont en raison réciproque.

Propositions évidentes touchant les raisons & les proportions.

AVERTISSEMENT.

On peut voir dans les Elemens des Mathématiques la maniere dont on démontre toutes ces propositions.

PREMIERE PROPOSITION.

Quatre termes demeurent en proportion, quel-
42. *que changement qu'on y fasse, pendant que le premier antecedent contient ou est contenu dans son*

conséquent, comme le second antecedent contient ou est contenu dans son conséquent.

C'est la définition même de la proportion.

SECONDE PROPOSITION.

Si A, B : : C, D, *en faisant que les* 43.
conséquens B *&* D *deviennent les antecedens, aprés ce changement qui se nomme* PERMUTANDO *ou raison inverse, ces quatre grandeurs seront encore proportionnelles* B, A : : D, C.

Contenir & être contenu sont des choses réciproques; ainsi si A contient B comme C contient D, il faut que B soit contenu dans A comme D est contenu dans C; & qu'ainsi il y ait égalité de raisons. Quand on tire une conséquence de cette proposition, cela s'apelle conclure *permutando.*

TROISIE'ME PROPOSITION. 44.

Si A, B : : C, D, *en comparant les antecedens ensemble & les conséquens ensemble, ce qui s'apelle* ALTERNANDO *ou raison alterne, ces quatre grandeurs sont encore proportionnelles* A, C : : B, D. Eucl. V. Prop. 16.

Si B est partie de A, par exemple un tiers, il faut que D soit aussi un tiers de C, puisque ces quatre grandeurs sont en proportion. Or le tout est au tout comme le tiers est au tiers. Si les tiers sont égaux, les touts seront égaux. Ainsi si A B : : C D, donc A C : : B D. Quand on tire une conséquence de cette proposition, cela s'apelle conclure *alternando.*

QUATRIE'ME PROPOSITION.

X, Z : : A, B; *ajoûtant* X *à* A *&* Z *à* B, 45.
ces deux grandeurs A *&* B *auront toûjours la même raison.*

C'est à dire que A + X. B + Z : : A B. Il est évident que deux grandeurs conservent la même raport, si on leur ajoûte proportionnellement ; que si par exemple à celle qui étoit deux fois plus grande on ajoûte deux fois plus, elle demeurera deux fois plus grande.

CINQUIÉME PROPOSITION.

X, Z : : A, B. *Retranchant* X *de* A *&* Z
46. *de* B, *ces deux grandeurs auront toûjours la même raison.* Eucl. V. Prop. 19.

C'est à dire que A–X , B–Z : : A, B. Retranchant proportionnellement de deux grandeurs, il faut qu'elles aient toûjours le même raport : Car il en est de même de la soustraction que de l'adition.

SIXIÉME PROPOSITION.

47. *Si A B :: C D, le premier antecedent plus son conséquent est à son conséquent, comme le second antecedent plus son conséquent est à son conséquent.* Eucl. Prop. 18.

C'est à dire que A + B, B : : C + D. D. & cela s'apelle raisonner *componendo.*

Puisque A B : : C D, donc *alternando* A C : : B D ; donc ajoûtant B à A, & D à C selon la Proposition quatriéme, § 45 A + B. C + D : : A C, qui est la même que celle de B à D. Ainsi A + B. C + D : : B D. Donc *alternando* A + B. B : : C + D D. ce qu'il faloit prouver.

SETIÉME PROPOSITION.

Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion
48. *la somme des antecedens est à celle des conséquens comme chaque antecedent est à son conséquent,* Eucl. V. Prop. 12.

Soit A B : : C D : : E F, il faut prouver que A + C + E est à B + D + F ; comme A ou tout autre antecedent est à son conséquent : Par la proposition précédente A + C C : : B + D

+ D D. *Alternando.* A + C B + D : : C D. Or la raison de C à D est la même que celle de E à F. Donc A + C B + D : : E F. *Alternando* A + C E : : B + D F. Donc encore, selon la précédente A + C + E B + D + F : : E F ou A B ou C D, car c'est toûjours la même raison.

HUITIÉME PROPOSITION.

Si A B : : C D le premier antecedent moins 49.
son conséquent est à son conséquent, c'est à dire A–B à B, comme le second antecedent moins son conséquent est à son conséquent, c'est à dire C–D à D. Eucl. V. Prop. 17.

Il faut prouver que A–B B : : C–D D. Cela s'apelle raisonner *dividendo.*

Puisque A B : : C D, donc *alternando* A C : : B D ; donc ôtant B de A & D de C, selon la Prop. cinquiéme § *n.* 46. A–B C–D : : A C. Or la raison de A à C est la même que celle de B à D ; ainsi A–B C–D : : B D : donc *alternando* A–B B : : C–D D ; ce qu'il faloit prouver.

AVERTISSEMENT.

La raison inverse de la division, c'est à dire le changement d'une proportion, où l'on conclut dividendo, *s'apelle conversion de raison : Par exemple si A–B B : : C–D D, en changeant ainsi A–B C–D : : B D, aprés ce dernier changement la proportion demeure encore, comme il est évident, & cela se nomme conversion de raison, terme qui n'est point necessaire.*

NEUVIÉME PROPOSITION.

Deux grandeurs qui ont une même raison avec
une troisiéme sont égales entr'elles. Eucl. V. 50.
Prop. 9.

Si A B :: C B, il faut que A soit contenu dans B, ou qu'il contienne B comme C est contenu dans B ou qu'il le contient : or il ne se peut pas faire que deux choses soient également contenuës dans une troisiéme, & qu'elles ne soient pas égales. Deux tiers deux quarts d'une même grandeur ou de grandeurs égales sont necessairement égaux.

Si A B :: E F & A C :: E F, ou si A $\frac{B}{C}$ :: E F, on doit conclure donc B ∝ C.

DIXIE'ME PROPOSITION.

51. *Deux raisons égales à une troisiéme raison, sont égales entr'elles.* Eucl. V. Prop. 11.

Si A B :: X Z, & C D :: X Z ; ce qu'on abrege ainsi, si A B :: X Z :: C D, il faut que A B :: C D : ou cequi est la même chose, selon ce qu'on a dit § n. 31. si $\frac{A}{B} \propto \frac{X}{Z} \propto \frac{C}{D}$ il faut que $\frac{A}{B} \propto \frac{C}{D}$ Car ces deux raisons sont comme deux quotiens, qui étant égaux au quotient d'une même grandeur, savoir à $\frac{X}{Z}$ doivent être égaux, deux grandeurs égales à une troisiéme, étant égales entr'elles.

ONZIE'ME PROPOSITION.

52. *Lorsque deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison aprés avoir été multipliées qu'avant que d'être multipliées.*

Si on multiplie A & B par X, je dis que AX BX :: A B. La multiplication est une espece d'adition : ainsi en multipliant A & B par X, on ajoûte à l'une & à l'autre proportionnellement ; car si A est par exemple le triple de B, & B le tiers de A, & que X vale 6 : il est évident que AX, c'est à dire six triples, seront encore le triple de BX six tiers. Ce triple, dis-je, & ce tiers sont augmentez proportionnellement.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Lorsqu'on divise deux grandeurs par une troisiéme, ce qui restera de ces deux grandeurs sera en même raison que les grandeurs entieres. 53.

Si Ax sont six triples de Bx six tiers, divisant Ax & Bx par x qui vaut six ; c'est à dire ôtant six triples de Ax & six tiers de Bx, comme on ôte proportionnellement de ces deux grandeurs les restes A & B seront comme Ax & Bx selon la proposition cinquiéme § 46. Comme six fois un triple est à six fois son tiers, le seul triple est au seul tiers.

TRE'ZIEME PROPOSITION.

La raison de deux plans dépend des raisons qu'ont les côtez de l'un aux côtez de l'autre. Il en est de même des solides. 54.

Soit $a b$ un plan ; sa grandeur ou sa surface est égale au produit de a multiplié par b. § n. 19. Lequel produit ab sera plus grand ou plus petit selon la longueur de a & de b. il en est de même des solides. La grandeur d'un plan à un autre plan dépend ainsi de la raison des côtez de l'un aux côtez de l'autre. Soit $c d$ un second plan, la raison de $a b$ à $c d$ dépend de la raison de a à c, & de celle de b à d.

DOUZIEME DEFINITION.

On apelle raison composée, la raison qui est entre deux plans, comme aussi celle qui est entre deux solides. 55.

La raison de $a b$ à $c d$ se nomme composée, comme aussi celle de $a d x$ à $c dx$.

TEOREME PREMIER.

56. *Deux plans* ax *&* bx *qui ont un de leurs côtés égaux, savoir* x, *sont entr'eux comme leurs côtés inégaux* a *&* b.

ax & bx sont les produits de a & de b multipliez par x une même grandeur, ainsi $ax \; bx :: a \; b$ s̃ n. 52.

TEOREME SECOND.

Deux solides axz *&* bxz *qui ont une de leurs*
57. *dimensions égale, savoir* xz *sont comme* a *&* b.

axz & bxz sont les produits de a & de b multipliez par le même multiplicateur xz. Ainsi $axz \; bxz :: a \; b$. s̃ n. 52.

TEOREME TROISIE'ME.

58. *Plusieurs grandeurs étant de suite, la seconde plus grande que la premiere, & la troisiéme plus grande que la seconde, ainsi de suite; la raison de la premiere à la derniere est égale à une raison composée de toutes celles qui sont entre les deux extrêmes.*

Soient ces grandeurs de suite a, b, c, d, e, f, dont a la premiere est plus petite que b, & celle-ci que c; ainsi des autres. Il faut prouver que la raison de a à f est égale à une raison composée des raisons de a à b, de b à c, de c à d, de d à e, de e à f. 1° $ab \; bc :: a \; c$. s̃ n. 52. Or la raison de ab à bc est composée de celle de a à b & celle de b à c par la définition des raisons composées s̃ n. 55. Donc voila déja la raison de a à c égale à la raison composée des raisons de a à b & de b à c.

2° $abc \; bcd :: a \; d$. s̃ n. 52. Or la raison de abc à bcd est composée des raisons de a à b de b à c de c à d s̃ n. 55. La raison de a à d est donc égale à une raison composée des raisons

de a à b, de b à c, de c à d.

3° $abcd \; bcde :: a \; e$; de même $abcde \; bcdef :: a \; f$. Ainsi il est évident que la raison de a à f est égale à une raison composée des grandeurs interposées entre a & f; ce qu'il faloit prouver.

TREZIE'ME DEFINITION. 59.

Une raison composée de deux raisons égales s'apelle raison doublée.

La raison de aa à bb composée des deux raisons égales de a à b, & de a à b est une raison doublée.

QUATORZIE'ME DEFINITION. 60.

Une raison composée de trois raisons égales s'apelle triplée.

La raison de aaa à bbb composée des trois raisons égales de a à b de a à b & de a à b, se nomme triplée.

TEOREME QUATRIE'ME. 61.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles le produit des antecedens est à celui des conséquens en raison doublée de celles des antecedens à leurs conséquens, ou comme les quarrés de chaque antecedent au quarré de son conséquent.

Si $a \; b :: c \; d$. Le produit ac des antecedens est à bd celui des conséquens en raison doublée de celles des antecedens à leurs conséquens; car ac est à bd en raison composée de celles de a à b & de c à d, qui étant égales, cette raison est doublée selon la définition 13. s̃ n. 59. Or aa quarré de l'antecedent a est à bb quarré du conséquent b en raison composée des raisons de a à b & de a à b qui est doublée de ces deux raisons, s̃ n. 59. Lesquelles raisons sont les mêmes que ces deux raisons de a à b & de c à d. Par conséquent le produit *ac* est au produit *bd*, comme le quarré *aa* est au quarré *bb*.

62. TEOREME CINQUIE'ME.

Dans une progression geométrique la raison de deux termes, entre lesquels il y a deux intervales, est doublée; & s'il y a trois intervales triplée.

Soit ∺ *a*, *b*, *c*, *d*, &c. La raison de *a* à *c* est composée ou égale à une raison composée de celle de *a* à *b*, & de celle de *b* à *c* s̄ *n.* 58. Or ces termes étant en progression, ces deux raisons sont égales, celle qu'elles composent est donc une raison doublée s̄ *n.* 59. On démontre de la même maniere que la raison de *a* à *d* est triplée.

TEOREME SIXIE'ME.

63. *Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit des deux extrêmes est égal à celui des deux moiens.*

Soient A B :: C D, je dis que A†D)(B†C; & je le démontre. Multipliant A & B par D, on fait les deux produits ou plans A†D & B†D, qui sont entr'eux comme A & B s̄ *n.* 52. A†D B†D :: A B. De même aiant multiplié C & D par B, alors B†C B†D :: C D. Or C D :: A B; donc A†D B†D :: A B. Par conséquent B†C & A†D aiant une même raison avec B†D, ils sont égaux s̄ *n.* 50. ce qu'il faloit prouver.

64. COROLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moien.

Soient ∺ *a. b. c.* Puisqu'il y a même raison entre *a* & *b* qu'entre *b* & *c*; donc *a b* :: *b c*. Ainsi selon ce Teorême *ac*)(*bb*.

TEOREME SE'TIE'ME.

65. *Lorsque quatre grandeurs sont tellement dispo-*

sées, que le produit des extrêmes est égal à celui des moiens, elles sont proportionnelles.

Si A†D)(B†C, je dis que A B :: C D; & en voila la preuve A†C B†C :: A B s̄. *n.* 52. Et A†C A†D :: C D s̄. *n.* 52. Partant les deux produits B†C & A†D étant égaux, la raison de A†C à B†C, est la même que celle de A†C à A†D; s̄ *n.* 50. ainsi les deux raisons de A à B & C à D étant égales à une même raison s̄ *n.* 51. elles sont égales entr'elles, & par conséquent A B :: C D; ce qu'il faloit prouver.

COROLAIRE.

En changeant les quatre termes d'une proportion, pourvû que deux de ses termes soient toûjours ou les deux extrêmes ou les deux moiens, ils seront toûjours rangez proportionnellement. 66.

Soient ces quatre termes A B C D, pourvû par exemple que A & D soient toûjours ou les deux moiens ou les deux extrêmes, leurs produits seront égaux s̄ *n.* 63. par conséquent selon ce Teorême ils seront proportionnels. Ainsi si A B :: C D, on en changera la situation sans troubler la proportion en ces manieres C D :: A B, & B A :: D C, & A C :: B D; où vous voiez que A & D sont toûjours ou les deux extrêmes ou les deux moiens, comme aussi B & C.

* TEOREME HUITIE'ME.

Si quatre grandeurs sont en proportion, la plus grande jointe avec la plus petite, sera plus grande que les deux autres ensemble. Eucl. V. Prop. 25. 67.

Soit A B : : C D, je ſupoſe que A eſt plus grand que B, & que C l'eſt plus que D; ainſi A & D ſont le plus grand & le plus petit terme. Il faut prouver que A+D eſt plus grand que B+C.

Soit *x* l'excez de A par deſſus B; ainſi que B+*x* ∝ A, & ſupoſant que Z eſt l'excez de C par deſſus D, D+*z* ∝ C. Je mets donc B+*x* en la place de A qui eſt la même choſe; & D+*z* en la place de C. La queſtion ſe réduit ainſi à prouver que B+*x*+D eſt plus grand que B+*z*+D. J'ôte de part & d'autre B+D; reſte donc de prouver que *x* eſt plus grand que *z*.

Puiſque *x* eſt la diference de A & de B, donc retranchant B de A reſtera leur diference *x*; ainſi A−B ∝ *x*, comme C−D ∝ *z*. Or A−B B : : C−D D s̃ *n.* 49. donc mettant *x* en la place A−B & *z* en celle de C−D, on aura *x* B : : *z* D, ou *x* *z* : : B D, & puiſque B D : : A C; donc *x* *z* : : A C. Or A eſt ſupoſé plus grand que C, par conſéquent *x* le doit être plus que *z*.

Teoreme neuvie'me.

68. *Lorſque des grandeurs ſon proportionnelles, leurs quarrez ſont proportionels.*

Si *a* *b* : : *c* *d*, je dis que *aa* *bb* : : *cc* *dd*. Ces quarrez ſont en raiſon compoſée de celles de leurs côtez. *aa* eſt à *bb* en raiſon compoſée de celles de *a* à *b* & de *a* à *b*; ainſi comme la raiſon de *cc* à *dd* eſt auſſi compoſée des mêmes raiſons. Ces deux raiſons compoſées ſont les mêmes; la raiſon de *aa* à *bb*, eſt donc la même que celle de *cc* à *dd*; ainſi ces quarrez

ſont en proportion.

Teoreme dixie'me.

Lorſque des grandeurs ſont proportionnelles, leurs cubes ſont proportionnels. 69

Si *a* *b* : : *c* *d*, je dis que *aaa* *bbb* : : *ccc* *ddd*. Cela ſe démontre comme dans le precedent Téorême.

Teoreme onzie'me.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, le quarré de la premiere eſt à celui de la ſeconde, comme la premiere à la troiſiéme. 70.

Soient ∺ *a*. *b*. *c*. je dis que *aa* *bb* : : *a* *c*. La raiſon de *a* à *c* eſt compoſée des deux raiſons de *a* à *b* & de *b* à *c* s̃ *n.* 58. La raiſon de ces raiſons *a* à *b* & de *b* à *c* ſont la même; ainſi la raiſon de *a* à *c* eſt doublée s̃ *n.* 58. Or la raiſon de *aa* à *bb* eſt doublée auſſi des mêmes raiſons s̃ *n.* 59. donc *aa* eſt à *bb* comme *a* à *c*.

Teoreme douzie'me.

Quatre grandeurs étant en proportion continuë, le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde, comme la premiere eſt à la quatriéme. 71.

Soient ∺ *b*. *c*. *d*. *f*. La raiſon de *b* à *f* eſt compoſée des trois raiſons interpoſées s̃. *n.* 58. & ces trois raiſons étant les mêmes, cette raiſon de *b* à *f* eſt triplée s̃ *n.* 60. Or le cube *bbb* eſt au cube *ccc* en raiſon triplée de la même raiſon s̃ *n.* 60. Donc *bbb* *ccc* : : *b* *f*.

AVERTISSEMENT.

Voila tout ce qu'il y a de neceſſaire dans la doctrine des raiſons & des proportions. Il n'y a rien qui ſoit plus d'uſage dans les Mathématiques que cette doctrine, & rien qui ait été expliqué avec plus d'obſcurité par Euclide. Premierement la définition qu'il donne de la raiſon, que c'eſt (comme parloient autrefois ſes Interprétes François) une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre ſelon la quantité: *Cette définition, dis-je, eſt obſcure. Il eſt vrai, que c'eſt la faute de ſes Interprétes; car on peut entendre les termes Grecs dont il s'eſt ſervi, de ſorte qu'il ait voulu dire, que raiſon c'eſt un raport mutuel de quantité à quantité : mais cela eſt trop vague, comme je l'ai remarqué dans les Elemens des Mathématiques; car raportant une quantité à une autre quantité, c'eſt à dire en les comparant enſemble ſelon que l'une eſt plus grande que l'autre ou plus petite, ou qu'elles ſont toutes deux égales: on peut faire cette comparaiſon en deux manieres, ou en conſiderant leur diference, l'excez de l'une par deſſus l'autre, ou la maniere que l'une contient ou eſt contenuë dans l'autre; ainſi ce mot de raiſon qui proprement ne ſignifie autre choſe que raport, ne détermine pas l'eſpece particuliere de raport qu'on veut marquer par ce nom.*

Outre cela, Euclide démontre l'égalité des raiſons ou la proportion d'une maniere qui n'eſt pas naturelle. Pour le concevoir, il faut remarquer qu'Euclide nomme grandeur multiple celle qu'une plus petite grandeur meſure exactement tant de fois: & grandeurs équimultiples, celles qui contiennent chacune autant de fois la grandeur dont elles ſont le multiple. Par exemple douze & neuf deux grandeurs multiples, douze de quatre & neuf de trois, ſont équimultiples, car quatre eſt trois fois en douze comme trois eſt trois fois dans neuf. Or Euclide définit ainſi la proportion. Il dit que quatre grandeurs ſont proportionnelles lorſque les équimultiples de la premiere & de la troiſiéme ſont tous deux ou égaux aux équimultiples de la ſeconde & de la quatriéme, ou tous deux plus grans, ou tous deux plus petits. Cette définition eſt obſcure, & demandoit une démonſtration. Néanmoins Euclide la ſupoſe toûjours; & c'eſt à elle qu'il a recours lorſqu'il montre la proportion des lignes: ce que nous ferons d'une maniere plus naturelle & plus claire. Nous alons raporter ici toutes les autres propoſitions qu'il fait dans ſon cinquiéme Livre, où il traite des raiſons & des proportions, & dont nous n'avons point parlé ailleurs. Je les marque toutes d'une étoille, car elles ne ſont point neceſſaires, & on peut les négliger. Je les démontre d'une maniere auſſi courte & auſſi ſenſible qu'aucun autre de ces Interprétes.

Propoſitions tirées du cinquiéme Livre d'Euclide.

PREMIERE PROPOSITION. 72.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra équimultiples d'autant d'autres grandeurs, chacune à la ſienne; comme l'une ſera multiple de l'une, ainſi les toutes ſeront multiples des toutes.

J'exprime cela en moins de paroles & plus ſenſiblement. bx *&* cx *étant équimultiples de* b *& de* c*, la grandeur* bx *eſt à* b *&* cx *à* c*, comme* $bx + cx \quad b + c$.

1° *bx cx : : b c.* 5 *n.* 52. 2° *Alternando.*

$bx \;\; b :: cx \;\; c$. 3° Ajoûtant donc à bx & à b les grandeurs cx & c qui sont en méme raison s̄. *n.* 45. $bx \;\; b :: bx+cx \;\; b+c$, & $cx \;\; c :: bx+cx \;\; b+c$.

* Seconde Proposition.

73. *Si la premiere est autant multiple de la seconde que la troisiéme de la quatriéme, & la cinquiéme autant multiple de la seconde que la sixiéme de la quatriéme; la composée de la premiere & de la cinquiéme sera autant multiple de la seconde que la composée de la troisiéme & de la sixiéme le sera de la quatriéme.*

Je dis simplement, & je dis tout ce que veut dire Euclide : *Si* $A \;\; B :: C \;\; D$, *& que* $E \;\; B :: F \;\; D$, *je dis que* $A+E \;\; B :: C+D \;\; F$.

Puisque $A \;\; B :: C \;\; D$ & $E \;\; B :: F \;\; D$. Donc *alternando* $A \;\; C :: B \;\; D$ & $E \;\; F :: B \;\; D$. Ainsi la raison de A à C est la même que celle de E à F, ces deux raisons étant la même que celle de B à D. s̄ *n.* 51. partant $A \;\; C :: E \;\; F$, donc ajoûtant E avec A & F avec C. s̄ *n.* 45. $A+E \;\; C+F :: B \;\; D$. Or *alternando* $A+E \;\; B :: C+F \;\; D$: ce qu'il faloit prouver.

*Troisiéme Proposition.

74. *Si la premiere est autant multiple de la seconde que la troisiéme de la quatriéme, & qu'on prenne les équimultiples de la premiere & de la troisiéme: le multiple de la premiere sera autant multiple de la seconde, que le multiple de la troisiéme sera de la quatriéme.*

J'exprime ainsi cette proposition : *Si* $A \;\; B :: C \;\; D$, *& que* $A \;\; C :: E \;\; F$; *je dis que* $B \;\; D :: E \;\; F$.

Puisque $A \;\; B :: C \;\; D$; donc *alternando* $A \;\; C :: B \;\; D$. Or $A \;\; C :: E \;\; F$, ainsi la raison de B à D est la même que celle de E à F étant égale à une même raison. s̄. *n.* 51.

* Quatriéme Proposition. 75.

Si la premiere est à la seconde en même raison que la troisiéme à la quatriéme : aussi les équimultiples de la premiere & de la troisiéme auront même raison aux équimultiples de la seconde & de la quatriéme, en quelque multiplication que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles se répondent.

Cela veut dire que, *Si* $A \;\; B :: C \;\; D$, *il faut que* $Ax \;\; Cx :: Bz \;\; Dz$.

Car $Ax \;\; Cx :: A \;\; C$, & $Bz \;\; Dz :: B \;\; D$. s̄. *n.* 52. donc $Ax \;\; Cx :: Bz \;\; Dz$.

* Cinquiéme Proposition. 76.

Si une grandeur est autant multiple d'une grandeur que la retranchée de la retranchée; aussi elle sera autant multiple du reste, que la toute de la toute.

Si $A \;\; B :: A-E \;\; B-F$, *je dis que* $E \;\; F :: A \;\; B$.

Car alors on leur ôte des grandeurs qui sont en même raison; ainsi elles demeurent en même raison. s̄. *n.* 46.

* Sixiéme Proposition.

Si deux grandeurs sont équimultiples de deux 77.
autres grandeurs; & qu'on retranche d'elles des équimultiples, ou les restes seront égaux aux mêmes ou équimultiples d'elles.

J'exprime ainsi cette proposition : *Si* $Ax \;\; Bx :: Ax-C \;\; Bx-D$, *je dis que* $Ax-C \;\; Bx-D :: A \;\; B$.

Cela est évident, car $Ax \;\; Bx :: A \;\; B$. s̄. *n.* 52. Or deux raisons égales à une troisiéme, sont égales. s̄. *n.* 51. Ainsi si $Ax \;\; Bx :: Ax-C \;\; Bx-D$, il faut que $Ax-C \;\; Bx-D :: A \;\; B$.

* Setiéme Proposition.

Les grandeurs égales ont même raison à une mê- 78.

me grandeur : & celle-ci aura même raison aux grandeurs égales.

C'est à dire que A & B étant égaux, ils ont même raison avec C une troisiéme grandeur. Cela est clair, car elles sont contenuës également dans cette troisiéme grandeur ; & il est inutile, comme le fait Euclide, de recourir aux équimultiples de A & de B qui ont une même raison avec le multiple de D, car cela n'est pas plus évident.

* HUITIE'ME PROPOSITION.

79. *Des grandeurs étant inégales, la plus grande a une plus grande raison à une même grandeur que la plus petite ; & une même grandeur a une plus grande raison à la plus petite grandeur qu'à la plus grande.*

C'est à dire, en parlant naturellement, que quatre par exemple est plus grand au regard de six, que deux au regard de ce même nombre six. Cela n'a pas besoin de preuves.

La neuviéme Proposition d'Euclide est ci-dessus n. 50.

* DIXIE'ME PROPOSITION.

80. *De deux grandeurs A & B qui ont une certaine raison avec C, celle qui a une plus grande raison est plus grande.*

C'est à dire que si A est plus grand au regard de C que B au regard de C, il faut que A soit plus grand que B : Ou ce qui est la même chose, si C est plus petit au regard de A qu'au regard de B, il faut que A soit plus grand que B: ce qui est évident.

La onziéme Proposition est ci-dessus n. 51.
La douziéme Proposition est ci-dessus n. 48.

* TREIZIE'ME PROPOSITION.

81. *Si la premiere est à la seconde comme la troisiéme à la quatriéme ; & que la troisiéme ait plus grande raison à la quatriéme que la cinquiéme à la sixiéme : aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde, que la cinquiéme à la sixiéme.*

Ce que j'exprime ainsi : *A B :: C D, si C est plus grand au regard de D que E au regard de F, A sera aussi plus grand au regard de B que E au regard de F.*

C'est à dire que si la raison $\frac{C}{D}$ est plus grande que la raison $\frac{E}{F}$ la raison $\frac{A}{B}$ est plus grande que $\frac{E}{F}$ Ce qui est évident, puisque $\frac{A}{B}$ ∞ $\frac{C}{D}$. 82.

* QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Si la premiere est à la seconde comme la troisiéme à la quatriéme, & que la premiere soit plus grande que la troisiéme ; aussi la seconde sera plus grande que la quatriéme ; & si égale égale, si plus petite plus petite.

Soit A B :: C D, *si A est plus grand que C, il faut que B soit plus grand que D.*

Car puisque A B :: C D, donc *alternando* A C :: B D. Ainsi B est à D comme A est à C, & par conséquent plus grand que D si A l'est plus que C. 83.

* QUINZIE'ME PROPOSITION.

Les grandeurs sont entr'elles comme sont leurs équimultiples entr'elles, étant prises comme elles se répondent.

Bx Cx :: B C *ou* Bx B :: Cx C. C'est ce qui a été prouvé. s. n. 52.

La seizième Proposition d'Euclide est s̄ n. 44. La dix-sétiéme s̄ n. 49. La dix-huitiéme s̄ n. 47. & la dix-neuviéme s̄ n. 46.

84. *VINGTIE'ME PROPOSITION.

Si trois grandeurs d'un côté & trois d'un autre, étant prises de deux en deux, sont en même raison; & qu'en raison égale, la premiere soit plus grande que la troisiéme: aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme, & si égale égale, si plus petite plus petite.

Soient A,B,C & D,E,F, A B:: D E & B C:: E F; & que A soit plus grand que C, je dis que D l'est plus que F; si égal, égal; si plus petit, plus petit. Car 1° la raison de C à B est plus petite que celle de A à B s. n. 79. donc puisque B C:: E F & *permutando* C B:: F E la raison de F à E est plus petite que celle de A à B, ainsi que celle de D à E qui est la même; donc D est plus grand que F s. n. 80. le reste est facile.

*VINGT-UNIE'ME PROPOSITION.

85. *Si trois grandeurs d'un côté & trois d'un autre prises de deux en deux sont en même raison, leur proportion étant sans ordre; & qu'en raison égale, la premiere soit plus grande que la troisiéme: aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.*

Soient A,B,C & D,E,F; Si A B:: E F & B C:: D E, & que A soit plus grand que C, je dis que D le sera plus que F; si égal, égal; si plus petit, plus petit. Car la raison de C à B est plus petite que celle de A à B s. n. 79. donc puisque B C:: D E & *permutando* C B:: E D, la raison de E à D est plus petite que celle de A à B, ou que celle de E à F qui est la même, D est donc plus grand que F s. n. 80. le reste est aisé.

86. *VINGT-DEUXIE'ME PROPOSITION.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra & autant d'autres, qui étant prises de deux en deux, soient en même raison: en raison égale, elles sont proportionnelles.

C'est à dire que, *si* A B:: D E & B C:: E F, *je dis que* A C:: D F.

1° *Alternando* B E:: A D & B E:: C F; donc les deux raisons de A à D & de C à F étant égales à celle de B à E, elles sont égales. s. n. 51. par consequent A D:: C F. *Alternando* A C:: D F; ce qu'il faloit prouver.

*VINGT-TROISIE'ME PROPOSITION. 87.

Si trois grandeurs, & autant d'autres prises de deux en deux sont en même raison & en proportion troublée, prises en raison égale elles seront proportionelles.

Soit A B:: E F & B C:: D E, *je dis que* A C:: D F.

Je range ces grandeurs comme vous le voiez, A B C:: D E F, elles sont en proportion, car selon l'hipotése A B:: E F & B C:: D E. La raison de A à C est composée de celle de A à B & de B à C. s. n. 58. Or ces deux raisons sont égales à celles de D à E & de E à F; par conséquent la raison de A à C est égale à celle de D à F composée de raisons égales. Par conséquent A C:: D F, ce qu'il faloit prouver.

*VINGT-QUATRIE'ME PROPOSITION. 88.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, & la cinquiéme à la seconde comme la sixiéme à la quatriéme; la composée de la premiere & de la cinquiéme sera à la seconde, comme la composée de la troisiéme & de la sixiéme sera à la quatriéme.

Soit A B:: C D & E B:: F D, *je dis que* $A+E$ B:: $C+E$ D.

Aternando A C :: B D & E F :: B D, donc $\bar{s}$ *n.* 51. A C :: E F donc A+E C+F :: A C. $\bar{s}$. *n.* 45. & puisque A C :: B D. Ainsi A+E C+F :: B D : & *alternando* A+E B :: C+F D ; ce qu'il faloit prouver.

Nous avons démontré. $\bar{s}$. *n.* 67. *la vingt-cinquiéme proposition d'Euclide qui est la derniere de son cinquiéme Livre. Celles qu'on trouve ensuite ne sont pas de lui ; ainsi je n'ai pas crû en devoir grossir mon Ouvrage. On s'en peut passer encore plûtôt que de toutes ces dernieres Propositions qu'on vient de voir. Il est inutile de les proposer dans les Elemens, car si jamais on en a besoin, il sera aussi aisé de les démontrer dans le lieu même où elles pouront être necessaires, que d'aléguer Euclide ou quelqu'autre Auteur. La métode qu'on a enseignée a une fecondité & une facilité admirable. Je souhaiterois qu'on voulût bien comparer ce Livre avec le cinquiéme d'Euclide.*

ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE QUATRIE'ME.

Des raisons & proportions des lignes & des surfaces.

SECTION PREMIERE.

Des raisons & des proportions des lignes.

AVERTISSEMENT.

Selon ce qu'on vient de dire dans le Livre pre- 1.

cedent des raisons & des proportions, pour démontrer que quatre lignes sont proportionnelles, il faut prouver que la premiere contient ou est contenuë exactement autant de fois dans la seconde, que la troisiéme contient ou est contenuë dans la quatriéme : Pour le moins il faut montrer que si on divisoit ces quatre lignes en deux ou en trois ou en tant de parties qu'on voudra; si, dis-je, chaque partie de la premiere étoit égale à chaque partie de la seconde, chaque partie de la troisiéme seroit égale à chaque partie de la quatriéme. Si les parties de la premiere étoient plus grandes que celles de la seconde, celles de la troisiéme seroient plus grandes que celles de la quatriéme; si plus petites, plus petites; & que si chaque partie de la premiere ne se trouvoit pas tant de fois dans la seconde, chaque partie de la troisiéme ne se trouveroit pas exactement tant de fois dans la quatriéme. Enfin que s'il y avoit excez ou defaut en divisant la premiere & la seconde l'une par l'autre, qu'il y auroit excez ou defaut en divisant la troisiéme & la quatriéme l'une par l'autre. C'est la mtode la plus naturelle, puisque raison n'est que la maniere de contenir & d'être contenu; & l'on ne peut pas prouver plus sensiblement qu'une premiere ligne est contenuë dans une seconde, comme une troisiéme dans une quatriéme, qu'en prouvant de ces quatre lignes ce que nous venons de dire. C'est la métode qu'on va suivre.

Premiere Definition.

1. *Deux triangles sont dits semblables lorsque leurs côtez font des angles égaux.*

Seconde Definition.

2. *Les côtez de deux triangles qui font les mêmes*

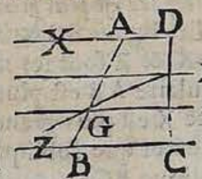
angles s'apellent Omologues.

Si le côté AB fait avec BC le même angle que DE fait avec EF les côtez AB & DE sont omologues, c'est à dire, proportionnels. On démontrera dans la suite que ce nom leur convient.

Lemme premier.

Si l'on coupe l'espace qui est entre les paralleles X & Z, ou la perpendiculaire CD qui mesure cét espace, par des paralleles à X & à Z, je dis que l'oblique AB entre X & Z sera partagée en autant de parties que la perpendiculaire CD. 3.

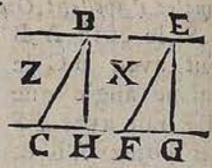
Que cela ne soit, & que E & F qui partagent CD en trois, ne divisent l'oblique AB qu'en deux; & par conséquent qu'ils ne la coupent qu'en un seul point. Ainsi si la ligne F coupe AB en G, il faut que E la rencontre en ce même point. Or cela est contre la nature des paralleles qui ne se rencontrent jamais. Donc on ne peut pas contester que AB ne soit coupée en autant de parties que CD.



Lemme second.

Les lignes obliques qui dans des espaces paralleles égaux (on apelle espace parallele celui qui est compris entre deux paralleles) font les mêmes angles, sont égales & également obliques. 4.

Soient Z & X deux espaces paralleles égaux, où les lignes obliques BC & EF font les angles BCH & EFG égaux. Les lignes BH & EG sont perpendiculaires & égales, puisque les espaces Z & X sont égaux. Les triangles BHC & EGF sont pareillement rectangles; aiant donc un côté & leurs angles égaux. l. 2. n. 96. ils sont égaux. Ainsi BC & EF sont des lignes égales: comme aussi CH & FG; par conséquent selon ce qu'on a enseigné des lignes obliques l. 1. n. 52. BC & EF sont également obliques, ce qu'il faloit prouver.

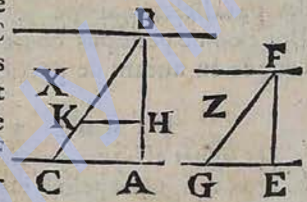


Lemme troisiéme.

5. *Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans des espaces paralleles inégaux, sont inégales; plus grandes si l'espace est plus grand; plus petites si l'espace est plus petit.*

Les lignes BC & FG obliques dans les espaces X & Z font les mêmes angles. La perpendiculaire AB est plus grande que EF, ainsi l'espace X est plus grand que l'espace Z: il faut démontrer que l'oblique FG est plus petite que l'oblique BC.

Soit pris sur BA la partie BH égale à FE, & par H soit menée une parallele à la base CA, les deux triangles ABC & EFG étant rectangles, & l'angle BCA étant égal à FGE, comme on le supose, ils sont équiangles l. 2. n. 82. L'angle BKH est égal à BCA, & BHK à BAC l. 2. n. 30. ainsi le triangle



BKH est équiangle avec BAC; & partant avec FGE: on supose FE égal à BH; donc FG ⟩ BK l. 2. n. 96. Or BK est partie de BC, donc FG égale à BK est aussi partie de BC, & par conséquent plus petite, ce qu'il faloit démontrer.

Teoreme premier.

Aiant partagé un espace parallele par deux ou plusieurs paralleles, la perpendiculaire de cét espace & la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement. 6.

1° La ligne oblique sera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme premier. Si par exemple, la perpendiculaire est coupée en cent parties, l'oblique sera aussi coupée en cent parties.

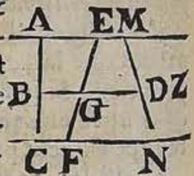
2° Si les parties de la perpendiculaire sont égales entr'elles, celles de l'oblique seront égales entr'elles, par le Lemme second; car ces obliques font les mêmes angles sur ces paralleles l. 2. n. 30. ainsi elles sont égales & également obliques selon ce Lemme. Si les cent parties dans lesquelles la perpendiculaire a été coupée sont toutes égales, les cent parties de l'oblique seront donc aussi toutes égales.

3° Si les parties de la perpendiculaire sont inégales, celles de l'oblique selon le troisiéme Lemme sont aussi inégales. D'où il suit que si on prend cent parties égales dans la perpendiculaire, & qu'il reste une partie qui soit ou plus petite ou plus grande, l'oblique se trouvera divisée de sorte, qu'aprés les cent parties égales, il y aura un reste plus petit, si le reste de la perpendiculaire est plus petit; plus grand si le reste de la perpendiculaire est plus grand, comme on l'a prouvé dans le Lemme troisiéme.

Partant comme la toute sera contenuë, ou contiendra la toute, les parties seront contenuës ou contiendront les parties. Ainsi selon la notion des proportions, les deux lignes dont il est question sont coupées proportionnellement.

TEOREME SECOND.

7. *Plusieurs lignes obliques étant dans un même espace parallele, si on coupe cét espace par une ligne parallele, ces lignes seront coupées proportionnellement.*



Les lignes obliques EF & MN sont entre deux paralleles, entre lesquelles AC est perpendiculaire. Cét espace est partagé par Z une parallele : donc par le Téorême précédent MN, AC :: MD, AB, & par le même Téorême EF, AC :: EG, AB. Et *alternando* MN. MD :: AC. AB :: EF. EG. Donc MN. MD :: EF. EG. l. 3. n. 51. Et *permutando* MN. EF :: MD. EG. ce qu'il faloit prouver.

TEOREME TROISIE'ME.

8. *Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans des espaces paralleles diferens, sont entr'elles comme ces espaces.*

Les lignes BC & FG obliques font les angles BCA & FGE égaux ; par conséquent si AB est égal à EF, par le Lemme second BC ∝ FG.

Si AB est plus grand que EF, par le Lemme troisiéme BC sera plus grand que FG.

Si AB est par exemple triple de EF, alors BC sera triple de FG : car supposant

posant que BA est partagé en trois parties égales : par le Lemme premier BC sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par le Lemme second, seront chacune égale à GF ; car ses parties l. 2. n. 30. font les mêmes angles ; ainsi elles sont également obliques : ainsi BC est triple de FG, comme nous venons de le démontrer.

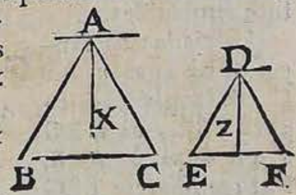
Par cette métode on démontrera que telle partie que EF est de AB, l'oblique FG est partie de l'oblique BC, ou que comme EF sera contenuë en AB aussi FG sera contenuë en BC.

Si AB est égal ou contient une ou plusieurs fois EF, plus quelque reste, par la même métode dis-je on démontrera que BC contient de la même maniere une ou plusieurs fois exactement, FG, plus quelque reste. Ainsi les lignes également obliques, &c. ce qu'il faloit démontrer.

TEOREME QUATRIE'ME.

Deux Triangles semblables ont leurs côtez proportionnels. Eucl. VI. Prop. 4. 9.

Je méne par le sommet des deux triangles ABC & DEF des lignes paralleles à leurs bases, & de leur sommet j'abaisse sur ces bases les perpendiculaires X & Z.



Les angles ABC & DEF. s. n. 1. sont égaux. Les obliques AC & DF font ainsi les mêmes angles. Donc par le Téorême precedent AB DE :: X. Z. :: AC. DF.

Ainsi AB, DE :: AC. DF. l. 3. n. 51. En menant par B & E des lignes paralleles aux côtez AC & DF, on démontrera de la même maniere que AB, DE :: BC, EF, & qu'ainsi deux triangles semblables ont tous leurs côtez proportionnels.

C'est pour cette raison qu'on apelle omologues les côtez qui se répondent dans les figures semblables, parce que ces côtez sont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raison, ce que signifie ce mot Omologue.

* Teoreme cinquiéme.

10. *Deux triangles semblables à un troisiéme, sont semblables entr'eux.* Eucl. VI. Prop. 21.

Soient A. B. C. trois triangles. Si A & C sont semblables à B, les angles de B sont égaux à ceux de A & de C. § *n.* 1. Donc les angles de A & de C sont aussi égaux les uns aux autres. Ainsi selon la premiere Définition. l. 3. n. 50. § *n.* 1. A & C sont semblables.

* Teoreme sixiéme.

11. *Si deux triangles ont leurs côtez proportionnels, ils seront semblables.* Eucl. VI. Prop. 5.

Les côtez des deux triangles ABC & DEF sont tels que AB. BC :: FE. ED. Et AC. AB :: DF FE. Je dis que ces deux triangles sont semblables.

Je fais sur EF l'angle GEF égal à ABC, & l'angle EFG égal à BAC; ainsi EG F est égal à ACB. Par conséquent EFG & ABC sont deux triangles semblables. § *n.* 1. Ainsi il ne s'agit plus que de montrer que les deux triangles EFG & DEF sont égaux; & qu'ainsi DEF le même que EFG est semblable à ABC.

Puisque EFG & ABC sont semblables, donc AB BC :: EF EG. Par la suposition AB BC :: EF ED. Donc EG & ED qui ont une même raison avec EF sont égaux l. 3. *n.* 50. On démontrera de la même maniere que tous les côtez de EFG sont égaux à ceux de DEF, ce qu'il faloit prouver.

Teoreme setiéme.

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal, & les côtez qui comprennent cét angle proportionnels. Eucl. VI. Prop. 6. (même figure.) 12.

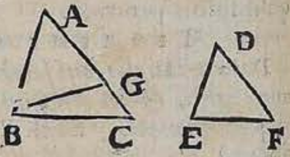
L'angle DEF est égal à ABC & AB. BC :: EF ED, je dis que ABC & DEF sont entierement semblables. Pour le prouver, je fais comme ci-dessus le triangle EFG semblable à ABC. Et je montre en la même maniere que les triangles EFG & DEF sont égaux. Car AB BC :: EF EG :: EF ED. Ainsi EG & ED ont une même raison avec EF, donc ils sont égaux l. 3. n. 50. Or puisque l'angle DEF est suposé égal à l'angle ABC, donc il l'est à FEG qu'on a fait égal à ABC. Ainsi ces deux triangles DEF & EFG aiant deux côtez égaux, EG à DE & EF à EF, & les angles FED & GEF que ces côtez comprennent égaux, ils sont égaux l. 2. n. 98. Donc puisque DEF & CBA sont semblables à EGF, ils sont semblables entr'eux. § *n.* 10.

* Teoreme Huitiéme.

Dans les deux triangles ABC & DEF si l'angle A égal à l'angle D & les côtez qui comprennent les angles B & E soient proportionnels, que AB BC :: DE EF, les troisiémes angles C & F étant de même espece (c'est à dire ou aigus ou droits ou obtus) *ces deux triangles sont équiangles, & les angles dont les côtez sont proportionnels sont égaux* Eucl. VI. Prop. 7. 13.

Que C & F soient 1° aigus, je dis que ces triangles sont équiangles ; savoir que les angles B & E sont égaux comme C & F.

Si B est égal à E ces triangles, selon la proposition précédente sont équiangles. Mais si B est plus grand que E soit fait ABG égal à DEF l. 2. n. 32. donc le troisiéme angle AGB sera égal au troisiéme angle F l. 2. n. 82 & partant aigu cõme lui ; & ABG & DEF seront équiangles & semblables : ainsi AB BG :: DE EF. Or on supose que DE EF :: AB BC. Ainsi AB BG :: DE EF :: AB BC, donc BC & BG aiant une même raison avec AB sont égaux l. 3. n. 50. ainsi le triangle GBC est isocele, & par conséquent les angles BCG & BGC seront aigus l. 2. n. 86. & par conséquent BGA sera plus grand qu'un droit l. 2. n. 18. Mais l'angle AGB a été fait égal à F, donc F seroit plus grand qu'un droit, & on a suposé qu'il étoit aigu.



Que C & F ne soient pas aigus, donc BGC égal à C ne sera pas aigu, ce qui ne peut pas être l. 2. n. 86. Par conséquent les angles ABC & E sont necessairement égaux, ainsi ABC & DEF sont entierement équiangles l. 2. n. 82. Donc si dans les deux triangles, &c.

*Teoreme neuviéme.

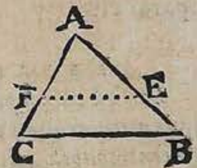
14. *Deux triangles ABC & DCE semblables ont un point commun, savoir C, & les côtez omologues AB & CD paralleles, comme aussi AC & DE : je dis que BC + CE est une ligne droite.* Eucl. VI. Prop. 32.

L'angle BAC est égal à ACD l. 2. n. 30. de même ABC est égal à DCE : donc les trois angles BCA. ACD. DCE égaux aux trois angles du triangle ABC qui valent deux droits l. 2. n. 75. valent aussi deux droits ; ainsi BE est une ligne droite l. 2. n. 19.

Teoreme dixiéme.

Lorsqu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne parallele à la base de l'angle qu'ils comprennent, ils sont coupez proportionnellement. 15.
Eucl. VI. Prop. 2.

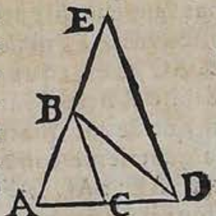
Soit le triangle ABC, je méne EF parallele à BC, je dis que AB, AE :: AC, AF. Le triangle AEF est semblable au triangle ABC, puisque l'angle AEF ⊃ ABC & l'angle AFE ⊃ ACB l. 2. n. 30. Donc AB, AE :: AC, AF. 3. *n.* 7.



Corolaire.

Si l'angle ABD est coupé par la moitié, je dis que AB AC :: BD CD. Eucl. VI. Prop. 3. 16.

Soit mené DE parallele à BC ; & prolongé le côté AB jusqu'à ce qu'il rencontre cette parallele. Les angles ABC & AED sont égaux l. 2. n. 30. & par la même raison CBD & BDE ; par conséquent comme on supose ABC & CBD égaux, CBD & BED seront aussi égaux, & par conséquent BDE & BED : ainsi le triangle DBE est isocele, & BD ⊃ BE. Or comme on vient de le voir AB AC :: BE CD,

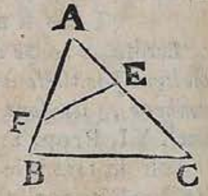


Donc AB AC :: BD CD; ce qu'il faloit prouver.

TROISIE'ME DEFINITION.

17. *Les lignes antiparalleles sont celles qui sur deux lignes qu'elles coupent font bien les mêmes angles, mais d'un autre côté.*

Les lignes paralleles font les mêmes angles d'un même côté avec les lignes qu'elles coupent l. 2. n. 30. Si AFE)o ABC, les lignes FE & BC seroient ainsi paralleles ; mais si AFE)o ACB, ces lignes sont antiparalleles.



18. TEOREME ONZIE'ME.

Lorsqu'on coupe les côtez d'un triangle par une ligne antiparallele à sa base, les côtez de ce triangle sont coupez en proportion réciproque (même figure.)

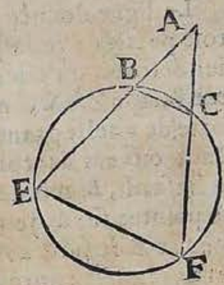
FE est antiparallele à BC : ainsi AFE)o ACB, & AEF)o ABC. Le triangle AEF, a donc les mêmes angles que ABC, & par conséquent ils sont semblables, & leurs côtez sont proportionnels ; mais leurs côtez omologues n'ont pas la même situation, car AB n'est pas omologue avec AF, mais avec AE : ainsi ces côtez AB & AC ne sont pas coupés dans une proportion droite. AB n'est pas à AF comme AC à AE; de sorte que de ces quatre grandeurs la premiere est à la quatriéme comme la troisiéme à la seconde. AB AE :: AC AF, ce qui s'apelle proportion réciproque.

Il n'est pas dificile de reconnoître si deux lignes

19. *sont antiparalleles ou non, si par les points E & D également eloignez de K, sommet du triangle FKG,*

on mene la ligne ED, cette ligne & FG seront antiparalleles : Car l'angle KBD a pour sa mesure la moitié de l'arc EF, plus celle K D ou de KE égal à KD l. 2. n. 59. Or la moitié de KF est aussi la mesure de KGF l. 2. n. 46. Donc KBC)o KGF; par le même raisonnement KCB)o KFG ; ainsi selon définition des antiparalleles FG & BC sont antiparalleles, & ED coupe réciproquement KF & KG, ainsi KF, KC :: KG, KB.

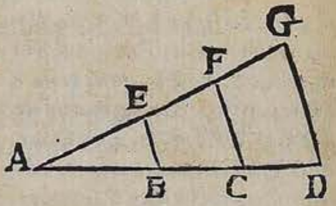
L'angle ABC a pour sa mesure la moitié de l'arc BC & de l'arc BE l. 2. n. 58. *donc il est égal CFE qui a même mesure* l. 2. n. 46. *Par le même raisonnement ACB)o AEF : donc BC & EF sont antiparalleles, ainsi BC coupe réciproquement AE & AF; & par conséquent AE, AC, :: AF, AB.*



PROBLEME PREMIER.

Couper une ligne droite semblablement à une ligne qui est déja coupée. Eucl. VI. Prop. 10. 20.

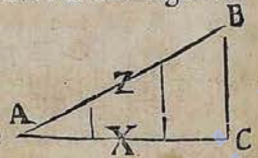
La ligne AD est coupée en trois parties AB, BC, CD : on propose de couper la ligne AG en trois parties proportionnelles à celles de AD. Je joins AG avec AD, desorte qu'elles fassent un angle, quel qu'il soit. Aprés je méne par les points G & D une ligne droite, & à celle-ci des paralleles par les points B & C de la coupée. Les paralleles coupent AG en trois parties, qui sont proportionnelles à celles de AD: car $\bar{s}$ *n.* 15. AD, AC :: AG, AF, & AF, AC :: AE, AB: ainsi on a fait ce qui étoit proposé.



Probleme second.

21. *Diviser une ligne en tant de parties qu'on voudra.*

La ligne donnée est X qu'il faut diviser en trois parties : je la joins avec Z une ligne infinie; desorte qu'elles fassent l'angle ZAX, n'importe de quelle grandeur. Aiant ouvert le compas au hasard, & mis une de ses pointes sur A, je marque sur Z de suite avec la même ouverture trois parties égales : aprés de B, extrémité de ces trois parties, je méne une ligne au point C, l'extrémité de X; & à celle-ci, des paralleles par les divisions de Z : selon ce qu'on vient de démontrer dans la Proposition precedente AC sera divisé semblablement à AB, c'est à dire en trois parties.



Probleme troisieme.

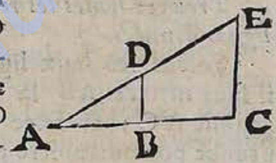
22. *Retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra.* Eucl. VI. Prop. 9.

Si de AC on veut retrancher la troisiéme partie, il n'est question que de diviser AC en trois parties.

Probleme quatrie'me.

Deux lignes étant données trouver une troisiéme qui soit à la seconde comme celle-là est à la premiere, ou à deux lignes données trouver une troisiéme proportionnelle. Eucl. VI. Prop. 11. 23.

La premiere ligne est AB, la seconde BC; je joins ces deux lignes desorte qu'elles ne fassent qu'une ligne droite : ensuite je prens AD égale à BC que je joins avec AB, desorte qu'elles fassent un angle quel qu'il soit. Je mene de D une ligne sur B, & à celle-ci une parallele par le point C : je prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre la parallele CE; ce qui étant fait, je dis que DE est la troisiéme proportionnelle cherchée.

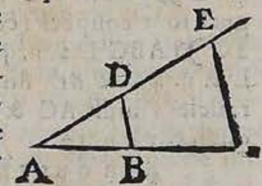


Car $\bar{s}$ *n.* 15. AB est à AD ou à son égale BC, comme AC est à AE, & partant l. 3. n. 46. comme AC–AB est à AE–AD, c'est à dire comme BC est à DE, ainsi ∴ AB, BC, DE, ce qui étoit proposé.

Probleme cinquie'me.

Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes qui sont en proportion. Eucl. VI. Prop. 12. 24.

La premiere est AB; la seconde AD, avec lesquelles je fais l'angle quel qu'il soit BAD; la troisiéme est BC que je joins avec AB, desorte que toutes deux fassent une ligne droite : aprés je méne par B & D une ligne droite, & à celle-ci par le poins C la parallele CE:



je prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre cette parallele CE ; ce qui étant fait, je dis que DE est la 4me proportionnelle : car s̃ 15. AB AC :: AD AE, ainsi AB AC−AB :: AD AE −AD ; c'est à dire que AB, BC :: AD, DE, & par conséquent *alternando* AB, AD :: BC, DE.

*PROBLEME SIXIE'ME.

25. *Trouver toutes les réciproques possibles à deux lignes données.*

Soient les deux lignes données AB & AC : il faut mettre AB la plus petite dans la plus grande AC ; & faire un cercle qui ait la plus grande pour diamétre ; ensuite du point B où la plus petite se termine, tirer sur ce diamétre une perpendiculaire indéfinie, comme Y.

Toute ligne qu'on ménera de A qui coupera l'indéfinie & se terminera au cercle cōme AD, ou qui coupera le cercle & se terminera à l'indéfinie, satisfera au Problême. AE & AD sont réciproques à AB AC, comme aussi AF & AG : car BE est antiparallele à DC, puisque AEB Ɔ ACD, & ABE Ɔ ADC l. 2. n. 59. & 46. ainsi ces lignes sont coupées réciproquement s̃ *n.* 17. AFC Ɔ ABG l. 2. n. 59. & 46. & ACF Ɔ AGB l. 2. n. 46. & 61. donc BG & FC sont antiparalleles ; ainsi AC & AG sont coupées réciproquement s̃ *n.* 17.

*PROBLEME SETTIE'ME.

26. *Sur une ligne donnée décrire une figure sem-*

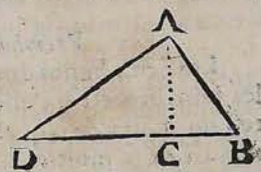
blable à une figure donnée. Eucl. VI. Prop. 18.

Il n'est question que de réduire cette figure donnée en triangles, & sur la ligne donnée mener des lignes l. 2. n. 32. qui fassent les mêmes angles.

LEMME QUATRIE'ME.

Dans le triangle rectangle ABD la ligne AC menée du sommet de l'angle droit perpendiculairement sur BC partage ce triangle en deux triangles semblables entr'eux & à ABC. Eucl. VI. Pr. 8. 27.

1° Ils sont tous rectangles. 2° les deux triangles ABD & ABC ont l'angle B commun : ainsi ils ont tous leurs angles égaux l. 3. n. 82. & par conséquent semblables. Les triangles ABD & ADC ont aussi l'angle D commun, ils sont donc aussi semblables ; puisque ABC & ADC sont semblables à un troisiéme, ils sont semblables entr'eux s̃ *n.* 10. Par conséquent les trois triangles rectangles ABD, BCA, CAD sont semblables.



TEOREME DOUZIE'ME.

Lorsque dans un triangle rectangle, comme est ABD, on méne une perpendiculaire de l'angle droit A sur l'hipotenuse BD. 28.

1° *La perpendiculaire AC est un moien proportionnel entre les deux parties BC & CD de l'hipotenuse BD, c'est à dire, que ∺ BC, AC, CD.*

2° *Le côté majeur AD est un moien proportionnel entre l'hipotenuse BD & la plus grande partie CD, c'est à dire que ∺ CD, AD, BD,*

3° *Le côté mineur AB est moien proportionnel entre l'hipotenuse BD & sa plus petite partie BC, c'est à dire, que ∺ BC, AB, BD.*

Par le Lemme précédent le triangle rectangle ABD eſt diviſé par la perpendiculaire AC en deux triangles rectangles qui lui ſont ſemblables & entr'eux ; deſorte que A B D , CBA, CAD ſont trois triangles ſemblables. Partant 5 *n. 9.* 1° BC , AC : : AC , CD , ou ∺ BC, A C, CD.

2° CD, AD : : AD, BD , ou ∺ CD , AD, BD.

3° BC , AB : : AB , BD , ou ∺ BC , AB, BD ; ce qu'il faloit démontrer.

* PROBLEM HUITIE'ME.

29. *Entre deux lignes données trouver une moienne proportionnelle.* Eucl. VI. Prop. 13.

Premiere maniere.

Les deux lignes données ſont AB & BC ; je les joins deſorte qu'elles faſſent une ligne droite , du milieu de laquelle , qui eſt G , & de l'intervale de ſa moitié , ſavoir de l'intervale AG je décris un demi cercle ; j'éleve enſuite ſur B une perpendiculaire que je prolonge juſques à ce qu'elle ſe termine dans la circonference du cercle , ſavoir au point D ; je dis que BD eſt moienne entre AB & BC.

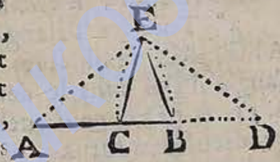
L'angle ADC dans le demi cercle eſt droit l. 2. n. 51. par la conſtruction BD eſt perpendiculaire. Donc par le Téoréme précédent BD eſt moienne proportionnelle entre AB & BC ∺ AB , BD , BC.

Seconde maniere.

AB & CB ſont deux lignes données ; je

prolonge AB deſorte que BD ∝ AC : & de D & de A , comme centres & d'intervales égaux AB & CD , je fais deux cercles qui ſe coupent en E : la ligne EB ou EC ſera la moienne entre AB & CB.

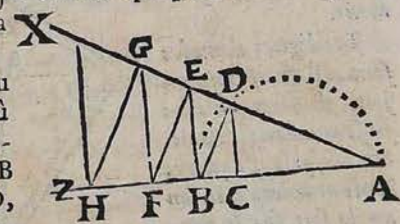
Par la conſtruction A B ∝ AE & CE ∝ BE , donc EAB & CEB ſont deux iſocelles , ils ont l'angle commun ABE, donc ces deux iſoceles ſont équiangles l. 2. n. 87. & partant ſemblables ; donc AB BE : : BE BC, ou ∺ AB , BE , BC.



PROBLEME NEUVIE'ME.

Aiant les trois premieres lignes d'une progreſſion geométrique de lignes , trouver les autres à l'infini. 30.

La troiſiéme ligne eſt AB que je partage par la moitié ; & de l'intervale de cette moitié, je décris un demi cercle : Je prens ſur cette ligne AB une partie AC égale à la premiere ligne ; & ſur C j'éleve une perpendiculaire qui ſe termine à la circonference du cercle au point D , d'où je méne une ligne au point B & de A par D, une ligne infinie X. Je prolonge auſſi à l'infini la ligne AB , que je nomme Z ; enſuite j'éleve au point B une perpendiculaire qui coupe X au point E , duquel je méne une perpendiculaire qui coupe Z au point F , où je dreſſe une perpendiculaire

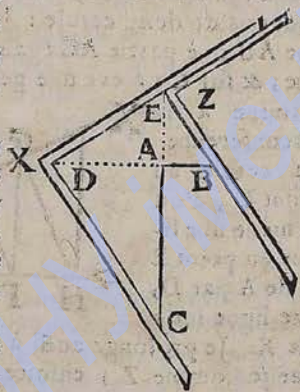


qui coupe X au point G, d'où j'abaiſſe une perpendiculaire GH, & ainſi de ſuite.

1° La ligne AD étant moienne proportionnelle entre AC & AB, comme on l'a prouvé § n. 28. eſt égale à la ſeconde ligne donnée, qui ſe trouve ainſi, ſi elle n'étoit pas donnée.

2° Tous les Triangles ADB, ABE, AEF, AFG, &c. ſemblables étant rectangles; car l'angle ADB dans le demi cercle eſt droit l. 2. n. 51. & par la conſtruction EF & *HG* ſont perpendiculaires ſur X, comme DC, BE; GF le ſont ſur Z: Tous ces triangles ont un angle commun, ſçavoir, XAZ; donc comme AD, AB :: AB, AE, & comme AB, AE :: AE, AF, & comme AF, AG :: AG, AH, &c. par conſéquent ∺ AC; AD, AB, AE, AF, AG, AH, &c.

Juſqu'à preſent on n'a point découvert le moien de trouver avec le compas & la ſeule régle deux
31. *moiennes proportionnelles entre deux lignes données: on les trouve mécaniquement.*

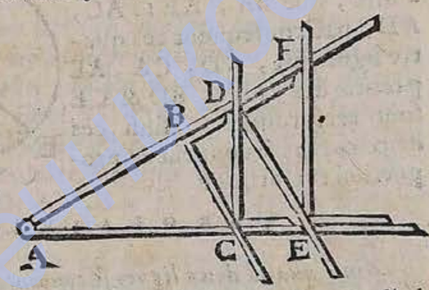


Les lignes données ſont AB & AC qu'on joint de ſorte qu'elles faſſent un angle droit. On diſpoſe l'équerre X de maniere que ſon angle ſoit ſur le prolongement de AB, & qu'une de ſes régles raſe C extrêmité de AC.

Z eſt une ſeconde équerre qu'on diſpoſe, enſorte qu'une de ſes régles raſe X, & l'autre le point B

extrêmité de AB, ainſi les triangles CDE & DEB, ſont rectangles, & DA & EA ſont des perpendiculaires; ainſi § n. 28. ∺ AC, AD, AE, & ∺ AD, AE, AB; donc ∺ AC, AD, AE, AB.

Cette invention eſt de Platon. Deſcartes en propoſe une autre, avec laquelle il trouve entre deux lignes données autant de proportionnelles qu'on en veut.



L'inſtrument dont il ſe ſert eſt composé de pluſieurs équerres, qui ſont tellement ajuſtées les unes avec les autres que lorſque l'angle FAE eſt fermé, ou que les deux régles FA & AE ſe touchent, toutes les autres régles BC, CD, DF, EF ſe touchent & viennent au point A: ſi cet angle EAF s'ouvre, ces mêmes régles ſe pouſſent & ſe chaſſent.

Deux lignes étant donc données, je pouſſe la régle BC deſorte que AB ſoit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle EAF deſorte que la régle DE ſoit éloignée de A de la grandeur de la ſeconde ligne.

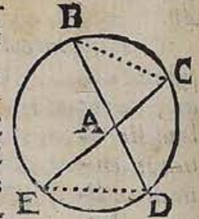
Il eſt évident que AC & AD ſeront deux moiennes proportionnelles entre AB & AE.

Pour trouver pluſieurs moiennes proportionnelles, il faut augmenter le nombre des équerres.

TEOREME TREIZIE'ME.

Deux cordes BD & CE qui ſe croiſent dans un 32.
cercle ſe coupent reciproquement.

Les triangles ABC & ADE sont semblables; car l'angle BAC ∝ EAD l. 2. n. 23. CBD, ∝ CED, l. 2. 47. puisqu'ils sont apuiez sur le même arc CD. Par la même raison BCE ∝ BDE : ainsi le côté BA est omologue à AE & CA à AD, c'est à dire, que BA, AE : : AC, AD, par conséquent ces quatre lignes BA, AD, CA, AE parties des cordes BD & CE sont réciproques ; ainsi ces deux cordes se coupent en proportion réciproque.



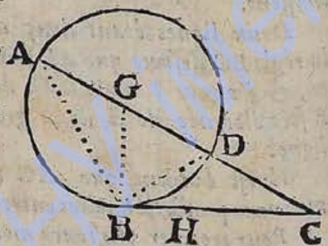
COROLAIRE.

33. *Ainsi quand deux lignes se coupent en proportion réciproque, on doit être assuré qu'on peut faire passer un cercle par leurs quatre extrémitez.*

LEMME CINQUIE'ME.

34. *BC est une tangente, AC est une secante qui passe par le centre du cercle, je dis que ÷ AC, BC, DC.*

Les deux triangles ACB & DCB ont l'angle C commun l'angle DBC a pour sa mesure la moitié de l'arc BD l. 2. n. 44. Cette moitié est aussi la mesure de l'angle BAC l. 2. n. 46. ainsi les deux triangles ACB & BCD aiant deux angles égaux, & par conséquent le troisiéme, ils sont semblables & proportionnels, le côté DC du triangle BCD est omologue avec le côté BC du triangle ACB, ainsi AC, BC : : BC, CD ou ÷ AC, BC, CD, ce qu'il faloit démontrer.



PROBLEME DIXIE'ME.

Diviser une ligne en telle sorte que la plus grande partie soit moienne proportionnelle entre la plus petite & la toute : ce qui s'apelle moienne & extrême raison. Eucl. VI. Prop. 30. (même figure.) 35.

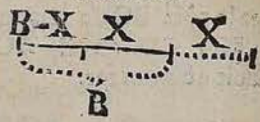
La ligne donnée est BC, au point B j'éléve la perpendiculaire BG qui soit moitié de BC. De l'intervale de GB je fais un cercle dont le diamétre sera par conséquent égal à BC, je tire la secante AC : aprés quoi aiant pris CH sur BC égale à CD je dis que la ligne BC sera divisée au point H, comme il est requis. Si HC ou DC est la plus grande partie, & BH ou BC −HC la plus petite, il faut démontrer que ÷ BC−CH, HC, BC ou ÷ BC−CD, CD, BC. Par le Lemme précédent DC, BC : : BC AC : or AC ∝ BC + DC, car on a fait BC ∝ AD ; ainsi comme AC ∝ AD + DC, donc DC, BC : : BC, DC + BC.

Permutando BC, DC : : DC + BC, BC. *Dividendo* BC − DC est à DC comme DC + BC − BC, c'est à dire, DC (car + BC − BC ∝ o) est à BC : or BC − DC ∝ BH & DC ∝ HC, donc ÷ BH, HC, BC ; ce qu'il faloit démontrer.

COROLAIRE PREMIER.

36. *La ligne B est divisée en moienne & extrême raison, X est la plus grande partie qu'on apelle la mediane, & B − X est la plus petite. Je dis que si on ajoûte X à B, cette grandeur X + B sera di-*

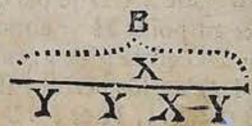
visée en moienne & extrême raison. & que B sera la médiane, c'est à dire que ∺ X + B. B, X. Eucl. XIII. Prop. 5.



Par l'hipotése ∺ B, X, B − X, ou B, X :: X, B − X, *permutando* X B :: B − X X, *componendo* X + B B :: B − X + X X, & puisque B − X + X ∝ o, il faut que B − X + X ∝ B, ainsi ∺ X + B, B, X, ce qu'il faloit prouver.

COROLAIRE SECOND.

La ligne B étant divisée en moienne & ex-
37. *trême raison, la petite partie est* Y, *la médiane* X *: ainsi* ∺ Y X, Y + X *: je dis que retranchant* Y *de* X, *on aura une ligne divisée en moienne & extrême raison ; c'est à dire que* X − Y. Y :: Y, X, *ou* ∺ X − Y, Y, X.



Par l'hipotése ∺ Y, X, Y + X, ou Y, X :: X, Y + X, donc *permutando* X. Y :: Y + X. X, & *dividendo* X − Y. Y :: Y + X − X. X, & puisque + X − X ∝ o, il faut que Y + X − X ∝ Y ; ainsi X − Y Y :: Y X, c'est à dire ∺ X − Y Y X ; ce qu'il faloit prouver.

COROLAIRE TROISIE'ME.

Du premier Corolaire il est aisé de conclure que lorsqu'on a une ligne divisée en moienne & extrê-
38. *me raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes divisées en moienne & extrême raison,*

si on ajoute à la toute la médiane : Et par le second Corolaire qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes divisées en moiennes & extrême raison, en retranchant la plus petite de la médiane.

SECTION II.

Des raisons & proportions que les circuits de deux ou plusieurs figures ont entr'eux ; & avec les raions des cercles où ces figures sont inscrites.

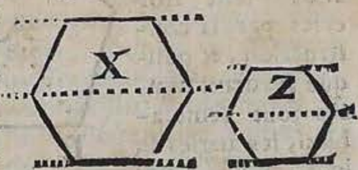
DEFINITION. 39.

Deux figures rectilignes sont dites semblables lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun, & que les côtez qui les comprennent ont même raison.

TEOREME PREMIER.

Les figures régulieres de même nom sont sembla- 40.
bles.

Les figures régulieres sont celles dont tous les côtez & tous les angles sont égaux l. 2. n. 106. soient donc X & Z deux figures régulieres de même nom, que je supose exagones ou de six côtez ; aiant mené



des lignesparalleles qui renferment les côtez de ces figures, puisque par l'hipotése ces deux figures ont mêmes angles, & que leurs côtez compris entre ces paralleles sont égaux, ils feront mêmes angles dans des espaces paralleles égaux, par conséquent ils ont même raison entr'eux s. n. 8. ainsi ces deux figures par la définition precedente sont semblables ; ce qu'il faloit prouver.

41. ### Teoreme second.

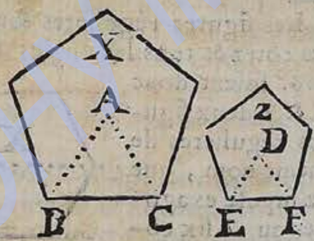
Les circuits de deux figures semblables sont entr'eux en même raison que leurs côtez chacun à chacun.

Soient X & Z deux exagones, chaque côté de X est a, ainsi tout son circuit est $6a$, chaque côté de Z est b & tout son circuit par conséquent $6b$. Or $6a.\ 6b :: a\ b$. l. 3. n. 52.

Teoreme troisiéme.

42. *Les circuits de deux figures régulieres & semblables, sont entr'eux comme les raions ou diamétres des cercles où elles sont inscrites, & comme leurs apotémes.*

X & Z sont deux poligones réguliers & semblables. Du centre du cercle où ils sont inscrits je méne les lignes AB & AC, DE & DF, qui sont leurs raions. Les deux triangles BAC & DEF sont isosceles par la construction, & puisque ces deux figures sont semblables, les angles de leurs centres BAC



& EDF sont les mêmes ; ainsi ces triangles sont semblables : donc AB ou le raion de X est à DE raion de Z comme BC à EF : or le circuit de X est à celui de Z par le Teoréme précédent, comme BC & EF ; donc le circuit de X est à celui de Z comme le raion de X à celui de Z, ou comme le diamétre de l'un est au diamétre de l'autre ; car les raions & les diamétres ont entr'eux une même raison, les raions étant la moitié des diamétres.

Concevez une perpendiculaire de A sur BC, qui sera l'apotéme de X l. n. 143. De même une perpendiculaire de D sur EF qui sera l'apotéme de Z, selon ce qu'on a prouvé s n. 9. BC sera à EF comme l'apotéme de X est à Z ; ainsi le circuit de X est à celui de Z, comme l'apotéme de X à l'apotéme de Z.

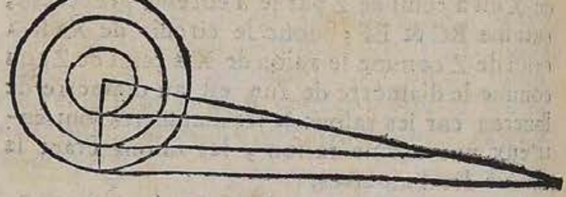
Corolaire.

Les circonferences de deux cercles sont entr'elles 43.
comme les diamétres ou raions de ces cercles.

Les cercles peuvent être considerez comme des poligones réguliers : or les circuits de deux poligones sont entr'eux comme leurs diamétres : donc les circuits ou circonferences des cercles sont entr'elles comme les diamétres des cercles ; & par conséquent puisque les raions sont la moitié des diamétres, comme les raions de ces cercles.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'au-
tres cercles concentriques, dont les circonferences 44.
soient déploiées & dressées comme des lignes droites, le raion du grand cercle & son circuit feront un triangle rectangle, dans l'hipotenuse duquel les extrémitez des cercles concentriques aussi déploiez

doivent se trouver, puisqu'ils sont entr'eux comme les parties du raion du cercle qu'ils coupent. C'est



pourquoi l'on a conclu delà que la surface du cercle étoit égale à un tel triangle. Ce que nous avons démontré par un autre voie l. 2. n. 152.

TEOREME QUATRIE'ME.

45\. *Les arcs d'égale quantité de degrez dans diferens cercles, sont entr'eux comme ces cercles dont ils sont les parties.*

Les degrez sont les parties proportionnelles d'un tout ; ils sont donc entr'eux comme les touts dont ils sont les parties, c'est à dire comme les cercles dont ils sont les degrez.

TEOREME CINQUIE'ME.

46\. *Les cordes d'arcs semblables dans diférens cercles sont entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.*

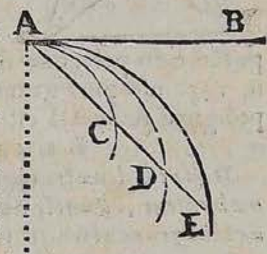
Concevant que du centre des cercles où sont ces cordes on ait mené des lignes à leurs extrêmitez, on aura des triangles semblables, puisque ces cordes d'arcs semblables ont les angles au centre égaux : ces cordes sont donc entr'eles comme les raions de ces cercles ; & partant

comme ces cercles, qui sont entr'eux comme leurs raions *n.* 43. Or les arcs d'égale quantité de degrez sont entr'eux comme les cercles dont ils sont parties, par le Téorême precedent ; ces cordes sont donc entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.

TEOREME SIXIE'ME.

Si du point A où plusieurs cercles se touchent, on méne une ligne comme AE *qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne seront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.* 47.

Par A je méne AB qui touche ces cercles ; ainsi l'angle BAE l. 2. n. 44. a pour mesure ou l'arc AC, ou AD, ou AE, ainsi ces trois arcs sont semblables. Les cordes AC, AD, AE, par le Théorême précédent d'arcs semblables, sont entr'elles comme les arcs AC, AD, AE, & par le Téorême quatriéme, puisque ces arcs sont entr'eux comme leurs cercles, les parties de ladite ligne seront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.



*TEOREME SE'TIE'ME.

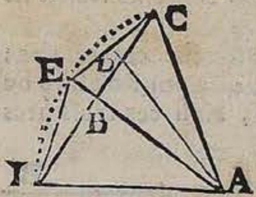
Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles qui ont leur sommet, soit dans la circonference, soit dans le centre, sont entr'eux comme les arcs sur lesquels il sont apuiez. Euclid. VI. Prop. 33. 48.

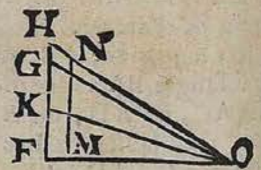
Cela est bien évident puisque ces arcs sont leurs mesures. l. 2. n. 12.

LEMME I.

49. *De deux poligones inscrits dans un même cercle ou cercles égaux, celui qui a plus de côtez à un plus grand apotême.*

E C est la corde d'une figure réguliere de dix côtez : CI celle d'une figure réguliere de cinq côtez. CE étant donc la corde d'un plus petit arc est plus petite, & par conséquent plus éloignée du centre A que CI l. 1. n. 93. Donc la perpendiculaire A D, qui est a-





potême du poligone dont CE est la corde l. 2. n. 143. est plus grande que AB apotême du poligone donc CI est la corde.

LEMME II.

50. *Dans ces deux triangles FOK & KOG de même hauteur, l'angle du sommet de celui qui a de de plus grans côtez est plus petit.*

C'est à dire que l'angle GOK est plus petit que l'angle KOF. Car ces deux triangles sont égaux l. 2. n. 133. si ces deux angles étoient donc égaux, apliquant FO sur OG, ils conviendroient, mais en partie, car FO est plus petit que OG : ainsi le triangle FOK seroit plus petit que KOG, ce qui ariveroit encore si l'angle FOK étoit plus petit que KOG. Or cela ne peut pas être, puisque ces deux triangles sont égaux : Par conséquent GOK ne pouvant être ni égal à KOF ni plus grand, il faut qu'il soit plus petit.

TEO-

TEOREME HUITIE'ME.

De deux poligones inscrits dans un même cercle, le circuit de celui qui a plusieurs côtez est plus petit au regard de son apotême qu'un poligone qui a moins de côtez. 51.

Soit CE côté d'un poligone & CI d'un autre poligone qui a deux fois moins de côtez. BC est la moitié de CI ; ainsi si l'un de ces poligones est décagone ou de 10 côtez, l'autre est de 5, c'est à dire que c'est un pentagone. EC est la dixiéme partie du circuit du décagone, comme BC la dixiéme partie du circuit du pentagone : il faut donc démontrer que CE & par conséquent tout le circuit dont CE est la 10^me. partie, est plus petit au regard de AD apotême du décagone que BC & par conséquent tout le circuit dont BC est la dixiéme partie au regard de AB apotême du pentagone.

Je fais à part le triangle OMN égal à ABC, ainsi BC ♋ MN, je prolonge OM jusqu'en F desorte que OF soit égal à AD qui est plus long que AB selon le premier Lemme, j'éléve sur F une perpendiculaire FG égale à EC. Le milieu de FG est K, ainsi KF ♋ DC. L'angle DAC est la moitié de BAC. Or DAC est égal à KOF, car par la construction FO ♋ AD & KF ♋ DC. donc l'angle KOF est moitié de l'angle MON. Par le Lemme second l'angle GOK est plus petit que l'angle KOF moitié de l'angle MON.

Soit prolongé ON & FG, & soit nommé H le point où ces deux lignes se rencontrent. FG sera plus petite que FH ; car autrement l'angle GOF seroit égal ou plus grand que l'angle NOK contre ce qu'on vient de prouver. OM est à MN comme OF à FH, ainsi GF plus petite que FH, est plus petite au regard de OF que MN au regard de OM. Or OM est égale à l'apotême AB & OF à l'apotême AD comme FG est égale à EC, & MN à BC, par consequent EC est plus petite au regard de AD que BC au regard de AB, ce qu'il faloit démontrer.

TEOREME NEUVIE'ME.

52. *Le circuit d'un poligone qui a plus de côtez est plus petit au regard de son apotême, que le circuit d'un poligone qui en a moins au regard de l'apotême de ce poligone.*

Cela vient d'être prouvé pour deux poligones inscrits dans un même cercle, comme seroient X un pentagone & Z un décagone. Soit Y un pentagone qui n'est pas inscrit dans le même cercle que X. Mais la raison de son circuit à son apotême est la même que celle du circuit de Z à l'apotême de Z s̄ n. 41. donc son circuit sera plus petit au regard de son apotême que le circuit de X au regard de son apotême.

COROLAIRE.

53. *De deux poligones de même circuit l'apotême de celui qui a plus de côtez est le plus grand.*

Le même circuit de deux poligones soit B, l'apotême du poligone qui a plus de côtez, soit X & Z celui du poligone qui a moins de côtez. B est plus petit au regard de X qu'au regard de Z par le Teorême précédent; X est donc plus grand que Z.

TEOREME DIXIE'ME

Le circuit du cercle est plus petit au regard de son raion, que le circuit d'aucun poligone au regard de son apotême. 54.

Car le cercle est un poligone dont le nombre des côtez est infini, desorte qu'il n'y a point de poligone qui ait plus de côtez. Le raion du cercle est consideré comme son apotême Par consequent le circuit du cercle est plus petit au regard de son raion que celui d'aucun poligone au regard de son apotême.

COROLAIRE.

Le raion d'un cercle de même circuit qu'un poligone est plus grand que l'apotême de ce poligone. 55.

Car le cercle est le plus grand de tous les poligones; par conséquent selon le Corolaire du Teorême neuviéme il a un plus grand apotême (qui est son raion) que tout autre poligone qui a même circuit que lui.

SECTION III.

Des raisons & des proportions des surfaces.

AVERTISSEMENT.

Les surfaces peuvent être considérées comme des grandeurs faites par la muliplication de leurs cotez.

TEOREME PREMIER.

56. SI *A, B, C, D quatre lignes, sont proportionnelles, AD le rectangle des extrêmes est égal à BC celui des moiens.* Eucl. VI. Prop. 16.

C'est ce qui a été prouvé l. 3. n. 63.

TEOREME SECOND.

57. *Si les extrêmes de quatre lignes font un rectangle égal à celui des moiens, ces lignes sont proportionnelles.* Eucl. VI. Prop. 16.

Cela a été prouvé l. 3. n. 65.

COROLAIRE PREMIER.

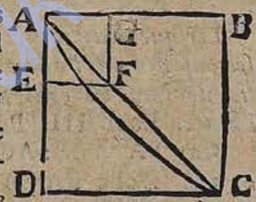
Les complémens d'un parallelogramme étant
58. *égaux* l.2. n.131. *les lignes qui les comprennent sont proportionnelles, & par conséquent ces complémens sont semblables.* Eucl. VI. Prop. 24.

Cela se peut encore démontrer parce que ces lignes font les mêmes angles entre les paralle-

les qui les comprennent, ainsi elles sont des figures semblables s̃ *n.* 39.

COROLAIRE II.

Si ABCD & AEFG sont semblables, & ont un 59.
angle commun, leurs diamétres sont dans la même ligne. Eucl. VI. Prop. 26.



Car étant semblables AE EF :: AD DC; il faut donc que la ligne droite qui passera par F aille à C, & qu'ainsi que AF & AC ne soient qu'une même ligne droite, puisqu'ils ont deuxpoints communs A & C.

TEOREME TROISIÉME. 60.

Si ∺ *A, B, C, le rectangle AC de la premiere & troisiéme est égal à BB quarré de la moienne.* Eucl. VI. Prop. 17.

Cela a été prouvé l. 3. n. 64.

COROLAIRE I.

Donc pour trouver un quarré égal à un rec- 61.
tangle donné, il faut trouver seulement une ligne moienne proportionnelle entre les deux côtez du rectangle. Eucl. II. Prop 14.

On a montré s̃ *n.* 29. comme on trouvoit une moienne proportionnelle entre deux lignes données.

COROLAIRE II.

Donc lorsqu'une ligne comme BC est coupée en 62.
moienne & extrême raison au point H, le rectangle de la toute BC & de la petite partie HC est égal au quarré de la médiane BH, puisque ∺ *BC, BH, HC.*

* COROLAIRE TROISIE'ME.

63. *Donc pour couper BC desorte que le rectangle de la toute & d'une partie soit égal au quarré de l'autre partie, il faut couper BC en moienne & extréme raison.* Eucl. II. Prop. 11.

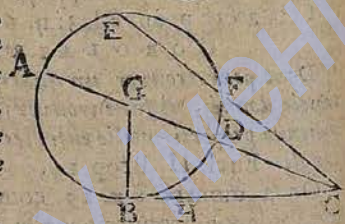
COROLAIRE QUATRIE'ME.

64. *Lorsque deux cordes BD & CE dans un cercle se coupent l'une l'autre, le rectangle des deux parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.* Eucl. III. Prop. 35.

Car BA AE :: AC AD, s̃ n. 32. Donc BA † AD Ɔ AE † AC; c'est à dire que le rectangle de BA & de AD est égal au rectangle de AE & de AC.

COROLAIRE CINQUIE'ME.

65. *Si du point C, hors d'un cercle on méne deux lignes droites CB & CA, dont l'une touche le cercle & l'autre le coupe, le rectangle de AC & de CD est égal au quarré de la tangente BC,* Eucl. III. Prop. 36.



Car s̃ n. 34. ∺ *AC*, *BC*, *DC* : donc *AC* † *DC* Ɔ *BC*†*BC* ou *BCq*.

* COROLAIRE SIXIE'ME.

66. *Si du point C on tire tant de lignes qu'on voudra jusqu'à la partie concave du cercle comme AC*

& EF, le rectangle de l'entiere CE & FC sera égal à celui fait de AC & de DC.

Car tous deux sont égaux au quarré de BC, Quand cela arive il est évident que les quatre points A, B, E, F sont dans la circonference d'un cercle.

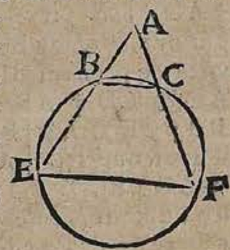
* COROLAIRE SETIE'ME. 67.

Et si le rectangle de AC & de DC, ou de CE & de CF est égal au quarré de BC, il faut que BC soit une tangente. Eucl. III. Prop. 37.

Car elle sera égale à une tangente menée de C à B dont le quarré est égal à ces rectangles, ainsi ce ne peut pas être une diférente ligne.

* COROLAIRE HUITIE'ME. 68.

Si du point A hors un cercle on méne deux lignes droites AE & AF qui le coupent, le rectangle de l'une AE & de la partie AB, est égal au rectangle de l'autre AF & de la partie AC.



Car s̃ *n.* 19. AE AF :: AC AB : donc AE † AB Ɔ AF † AC.

* COROLAIRE NEUVIE'ME. 69.

Si par les points D & E également éloignez de K l'on méne la ligne DE, le rectangle de KF & de KB est égal au rectangle de KF & de KG.

Car s̃ 19. KF, KG :: KC KB; ainsi KF † KB Ɔ KG†KC.

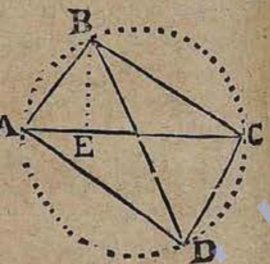
* COROLAIRE DIXIE'ME. 70

Le produit ou le rectangle fait des diagonales AC & BD, est égal à la somme des rectangles

BC par AD & de AB par DC côtez opofez du quadrilataire ABCD inscrit dans un cercle.

Je méne BE desorte que ABE ∝ DBC, & par conséquent CBE ∝ ABD : ainsi comme les angles ADB & ACB apuiez sur le même arc sont égaux l. 2. n. 46. les triangles BDA & BCE sont semblables. Donc BD AD :: BC CE; ainsi BD † CE ∝ AD † BC.

Les triangles BDC & BAE sont semblables; car ABE ∝ DBC par la construction; & BAC & BDC sont apuiez sur le même arc. Donc BD CD :: AB AE. Ainsi BD † AE ∝ CD † AB : or BD†AE + BD † CE ∝ BD † AC l. 3. n. 21. donc puisque, selon qu'on le vient de prouver BD† AE ∝ CD † AB & BD † CE ∝ AD†BC, il faut que CD † AB + AD † BC ∝ BD † AC. Deux choses égales à une troisiéme étant égales entr'elles. Or c'est ce qu'il faloit démontrer.



TEOREME QUATRIE'ME.

71. *Dans un triangle rectangle le quarré de l'hipotenuse est égal aux quarrez des deux autres côtez.* Eucl. 1. Prop. 47.

ABC est un triangle rectangle, sur les côtez duquel sont les trois quarrez Z, X, Y : de l'angle droit A je méne sur BC une perpendiculaire que je prolonge desorte qu'elle coupe BC en deux parties en D, & fait deux triangles rectangles semblables § *n.* 27. & AC est moien-

ne proportionnelle entre BC, ou CF son égale & DC § 8. Donc ÷ BC (ou CF) AC DC. Ainsi ACq ∝ CF†CD, c'est à dire que le quarré X est égal au rectangle CDGF. La ligne AB est aussi un moien proportionnel § 28 entre BC & BD. Donc ÷ BC (ou BE) AB BD; ainsi ABq ∝ BE†BD, c'est à dire que le quarré Z est égal au rectangle BDGE. Or ces deux rectangles sont les parties de Y; donc le quaré de Y est égal à ceux de Z & de X : ce que nous avons démontré d'une autre maniere, l. 2. n. 139.

COROLAIRE.

Donc pour trouver un quarré comme Y égal aux deux quarrez donnez Z & X, il faut joindre les 72.
côtez de Z & de X de sorte qu'ils fassent un angle droit, dont l'hipotenuse sera le côté du quarré que l'on cherche.

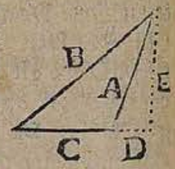
TEOREME CINQUIE'ME.

Le triangle ABC est ambligone : du sommet je 73.
méne la perpendiculaire E sur le côté C prolongé autant qu'il est necessaire. Je dis que le quarré de B qui soutient l'angle obtus est égal au quarré de C & de A, plus à deux fois le rectangle de C & de la partie D comprise entre C & la perpendiculaire E. Eucl. II. Prop. 12.

Il faut donc démontrer que BB ∝ CC + AA + 2CD.

Le quarré de C+D est CD+2CD+DD,

Par la propofition précédente BB $\propto$ CC+2CD +DD+EE, puifqu'il eft égal au quarré de E & de C+D: par la même propofition AA $\propto$ EE+DD; ainfi au lieu de EE +DD mettant AA une valeur égale, nous aurons BB $\propto$ CC +AA+2CD ce qu'il faloit démontrer.



TEOREME SIXIE'ME.

74. *Dans un triangle oxigone le quarré de A qui foûtient l'angle aigu, eft égal aux quatre des deux autres côtez A & C, moins deux fois le rectangle fait de C & de E partie de C que la perpendiculaire D coupe en deux, ainfi l'autre partie de toute la ligne C fe peut nommer* C–E. Eucl. II. Prop. 13.

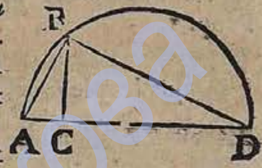
Il faut démontrer que AA $\propto$ BB+CC–2 CE.

1° Le quarré de A eft égal aux quarrez de D & de C–E, celui de C–E eft CC–2CE+EE: ainfi ʒ 71. AA $\propto$ DD +CC–2CE+EE; & BB $\propto$ DD +EE, plaçant donc BB au lieu de DD+EE, nous aurons AA $\propto$ BB+CC–2CE, ce qu'il faloit démontrer.

TEOREME SE'TIE'ME.

Le diamétre AD eft coupé en C, de forte que C
75. *D eft quadruple de AC & la ligne BC eft perpendiculaire fur AD. Je dis que le quarré de AB eft quintuple de AC, dont celui de BC eft quadruple.*

Soit AC apelé *a*, & AB, *b*, ainfi ÷ 5*a*, *b*, *a* ʒ *n.* 28. donc *bb* $\propto$ 5*aa*. De même puifque ÷ AC BC CD ʒ *n.* 28. Soit BC nommé *d*, donc ÷ *a*, *d*, 4*a*, & partant 4*aa* $\propto$ *dd*: ce qu'il faloit démontrer.



COROLAIRE I.

Aiant partagé le diamétre AD en tant de parties égales, le quarré de AB fera égal à autant de fois celui de chacune de ces parties qu'il y a de parties. 76.

Car fi AD eft divifé en fix parties, dont chacune eft *a*, puifque AD $\propto$ 6*a*, que ÷ 6*a* AB *a*, & que le produit des extrêmes eft égal à celui des moiens, le quarré de AB vaudra 6*aa*, c'eft à dire fix fois le quarré de la fixiéme partie de AD.

COROLAIRE II.

On peut auffi conclure en general que le quarré de BC fera égal à autant de fois le quarré de chacune de ces parties qu'il y a de parties, moins une; 77.
÷ 5*a* BC *a*, donc le quarré de BC fera égal à 5*aa*.

* TEOREME HUITIE'ME.

Z eft une ligne coupée en moienne & extrême raifon, je dis que le quarré de la plus grande partie a avec la moitié de z, lequel quarré eft aa $+\frac{1}{4}ZZ+Za$, *eft cinq fois plus grand que le* 78.

quarré de la moitié de Z qui est $\frac{1}{4}$ zz. Eucl. 13. Prop. 1.

Le quadruple de $\frac{1}{4}$ ZZ est ZZ ; ainsi le quintuple de $\frac{1}{4}$ ZZ est ZZ + $\frac{1}{4}$ ZZ : il faut donc démontrer que ZZ + $\frac{1}{4}$ ZZ ∝ *aa* + $\frac{1}{4}$ ZZ + Z*a* : ôtant de part & d'autre $\frac{1}{4}$ ZZ, reste à démontrer que ZZ ∝ *aa* + Z*a*.

Z*e* + Z*a* ∝ ZZ l. 3. n. 22. & puisque ∺ Z, *a*, *e*: donc Z*e* ∝ *aa* ; ainsi au lieu de Z*e* substituant *aa* une valeur égale, on a *aa* + Z*a* ∝ ZZ ; ce qui restoit à prouver.

*Corolaire.

79. *Deux lignes droites coupées en moienne & extréme raison sont semblablement coupées.* Eucl. XIV. Prop. 2.

Soient Z & X coupées de cette maniere, les parties de Z sont *a* & *e*, celles de X sont *m* & *n* ; ainsi ∺ Z, *a*, *e*, & ∺ *x*, *m*, *n*, il faut démontrer que *a* *e* :: *m* *n*. Par le Téorême present, comme le quarré de la moitié de Z avec *a* est égal à cinq fois le quarré de *e* ; de même celui de la moitié de *x* avec *m* est cinq fois plus grand que celui de *n* : Partant Z *e* :: *x*, *n*. *Dividendo* Z−*e* (ou *a*) *e* :: *x*−*n* (ou *m*) *n* ; ainsi *a* *e* :: *m* *n*.

*Teoreme IX.

Soit Z coupé (même figure ci-dessus) *en moienne & extrême raison en ses deux parties* a *&* e, *si* 80.
le quarré de la moitié de z + a *qui est* $\frac{1}{4}$ zz + z*a* + aa *est cinq fois plus grand que celui de la moitié de Z qui est* $\frac{1}{4}$ zz ; *divisant* z *en moienne & extrême raison, le plus grand segment sera* a, *& le plus petit* e. Eucl. XIII. Prop. 2.

Selon la suposition $\frac{1}{4}$ zz + Z*a* + *aa* est égal à cinq fois le quarré de $\frac{1}{2}$ Z qui est $\frac{1}{4}$ *zz* dont le quintuple est *zz* + $\frac{1}{4}$ *zz* ; ainsi $\frac{1}{4}$ *zz* + Z*a* + *aa* ∝ *zz* + $\frac{1}{4}$ *zz*. Otant de part & d'autre $\frac{1}{4}$ *zz*, reste *za* + *aa* ∝ *zz* : Or *ze* + *za* ∝ *zz* l. 3. n. 22. Donc *za* + *aa* ∝ *ze* + *za* ; ôtant encore de part & d'autre *za*, reste *aa* ∝ *ze* : par conséquent ∺ *z* *a* *e*, car *ze* ∝ *aa*. l. 3. n. 65.

*Teoreme X.

Z *est coupée en moienne & extrême raison en* 81.
ses deux parties a *&* e ; *ainsi* ∺ z, a, e, *le quarré de* e + $\frac{1}{2}$ a *est égal à cinq fois le quarré de* $\frac{1}{2}$ *a*. Eucl. XIII. Prop. 3.

Le quarré de $e + \frac{1}{2} a$ est $ee + \frac{1}{4} aa + ea$ & celui de $\frac{1}{2} a$ est $\frac{1}{4} aa$, dont le quintuple est $aa + \frac{1}{4} aa$: ainsi $ee + \frac{1}{4} aa + ea \propto a + \frac{1}{4} aa$: ôtât $\frac{1}{4} aa$ de part & d'autre, reste $ee + ea \propto aa$.

Or $ee + ea \propto ze$ l. 3. n. 21. dont $ze \propto aa$; ainsi $\div z \; a \; e$ l. 3. n. 65.

* Teoreme XI.

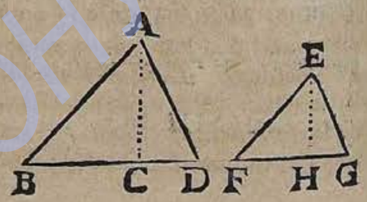
82. *Z est coupée en moienne & extrême raison en ses deux parties* a *&* e ; *desorte que* $\div$ z, a, e *le quarré de* z *plus celui de* e *sont triples de celui de* a. Eucl. XIII. Prop. 4.

Il faut démontrer que $zz + ee \propto 3\,aa$. 1° $zz \propto aa + 2\,ae + ee$; ainsi il faut prouver que $aa + 2\,ae + ee + ee \propto 3\,aa$. Or $ae + ee \propto ze$ l. 3. n. 21. & $ze \propto aa$ l. 3. n. 64. par conséquent $2\,ae + 2\,ee \propto 2\,aa$: donc $aa + 2\,ae + 2\,ee \propto 3\,aa$; ce qu'il faloit prouver,

Teoreme XII.

Deux triangles semblables sont en raison composée
83. *de celles de leurs côtez omologues, & cette raison est doublée*, Eucl. VI. Prop. 19.

Soient ABD & EFG deux triangles semblables. ABD est égal à un parallelogramme fait de AC & de la moitié de sa base BD ; & EFG a un parallelogramme fait de EH & de la moitié de FG l. 2. n. 132. donc on peut considerer ces deux triangles ABD comme faits par la multiplication de AC, par la moitié de BD, & EFG com-



me fait par la multiplication de EH par la moitié FG : donc la raison de ces deux triangles dépend de celle AC à EH, & de la moitié de BD à la moitié de FG : or AC, EH :: AB, EF :: BD, FG s. *n.* 8. donc la raison de ABD à EFG est composée des raisons de AB à EF, & de BD à FG qui étant égales, la raison qu'elles composent est doublée, l. 3. n. 61.

Teoreme XIII. 84.

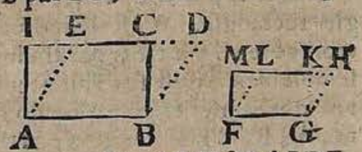
Deux triangles ou deux parallelogrammes qui ont leur base ou leur hauteur égale, sont entr'eux comme l'inégale. Eucl. VI. Prop. 1.

Cette proposition est la même que celle du 3. l. n. 56.

Teoreme XIV.

Les parallelogrammes semblables sont en raison 85.
composée de celle de leurs côtez, & cette raison est doublée.

Les parallelogrammes rectangles ABCI & FKGM sont faits par la multiplication de leurs côtez, l'un de AB par BC, & l'autre de FG par GK ; donc la raison de ABC à FGK est cõposée de celles de AB à FG, & de BC à GK l. 3. n 55. Or ABCI $\propto$ ABDE, & FGKM $\propto$ FGMI l. 2. n. 128. ainsi la raison de ABDE avec FGHL est composée de celle de AB avec FG, & de celle de BC avec GK. 2° La raison de BD à GH est la même que celle BC à GK ; donc puisque les raisons composées de raisons égales, sont égales, on peut dire que la raison de ABDE avec FGHL est compo-



ſée de celles de leurs côtez, ſavoir de AB avec FG, & de BD avec GH; & puiſque ces deux raiſons ſont égales, celle qu'elles compoſent eſt doublée par la définition des raiſons doublées. l. 3. n. 59.

86. TEOREME XV.

Si quatre lignes ſont proportionnelles, les figures ſemblables décrites ſur ces lignes ſont proportionnelles. Eucl. VI Prop. 22.

Car ces figures, ſoit triangles, ſoit parallelogrammes ſont en raiſon doublée de leurs côtez ſ̄ n. 83. & 85. & par conſéquent comme les quarrez de ces côtez. l. 3. n. 61. Or ces quarrez ſont en proportion l. 3. n. 69.

TEOREME XVI.

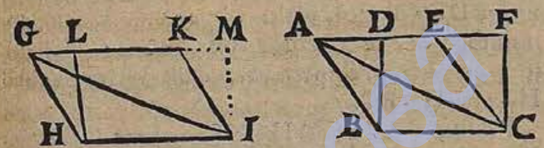
87. *Dans les triangles rectangles quelque figure que ce ſoit, faite ſur l'hipotenuſe, eſt égale aux figures ſemblables, & poſées de la même maniere, qui ſont ſur les deux autres côtez.* Eucl. VI. Prop. 31.

Soient A, B, C les trois côtez d'un triangle rectangle. A eſt l'hipotenuſe; & ſur ces trois côtez il y a trois parallelogrammes X, Z, Y ſemblables. X eſt ſur l'hipotenuſe A. Ces figures ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs côtez A, B, C ſ̄ n. 83. & 85. & par conſéquent comme AA, BB, CC quarrez de ces côtez A, B, C, l. 3. n. 59. Or $AA \propto BB + CC$ ſ̄ n. 71. donc $X \propto Z + Y$.

TEOREME XVII.

88. *Les parallelogrammes qui ont un angle commun ou égal ſont en raiſon compoſée des côtez qui les comprennent.* Eucl. VI. Prop. 23.

L'angle ABC eſt égal à l'angle GHI. Je dis



que ces deux parallelogrammes ſont en raiſon compoſée de AB à GH, & de BC à HI. Ces parallelogrammes ABCD & GHIK ſont égaux à BDFC & HFMI, qui ſont en raiſon compoſée de BD à HL, & de celle de BC à HI. Or la raiſon de DB à HL eſt la même que celle de AB à GH, les deux triangles ABD & GHL étant ſemblables. Car 1° ils ſont rectangles: 2° Les angles ABC & GHI étant égaux, ſi on ôte les angles droits DBC & LHI, les reſtes ABD & GHL ſont égaux.

TEOREME XVIII. 89.

Les triangles qui ont un angle commun ou égal ſont en raiſon compoſée des côtez qui les comprennent.

Soient les triangles ABC & GHI dont les angles ABC & GHI ſont égaux. Il faut démontrer que ces deux triangles ſont en raiſon compoſée de celles de AB à GH & de BC & HI.

Ces deux triangles ſont la moitié des parallelogrammes ABCD & GHIK qui ſont par le Teorême precedent en raiſon compoſée de ces mêmes raiſons de AB à GH & de BC à HI.

TEOREME XIX.

Lorſque deux parallelogrammes égaux ont un angle commun ou égal, les côtez qui le comprennent ſont en raiſon réciproque. 90. Eucl. VI. Prop. 14. (*même figure.*)

Les parallelogrammes ABCE & GHIK

sont égaux entr'eux ; ainsi les parallelogrammes BDFC & LHIM sont égaux. Il faut démontrer que leurs côtez AB, BC, GH, HI sont en raison réciproque ; c'est à dire que AB HI :: GH BC.

Puisque BD†BC∝HL†HI ; donc l. 3. n. 65. BD HI :: HL BC. Or puisque les angles ABC & GHI sont égaux, AB BD :: GH HL s̄. n. 8. ainsi AB HI :: GH BC ; ce qu'il faloit démontrer.

TEOREME XX.

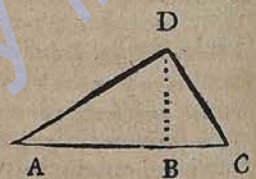
91. *Lorsque deux triangles ont une surface égale & un angle commun ou égal, les côtez qui comprennent cét angle sont en raison réciproque.* Eucl. VI. Prop. 15. (*même figure.*)

Soient ces deux triangles ABC & GHI, leurs surfaces sont égales ; & les angles ABC & GHI sont égaux, il faut démontrer que AB HI :: GH BC.

Ces triangles sont moitiés des parallelogrammes ABCD & GHIK, dont on vient de montrer que AB HI :: GH BC, qui est ce qu'il faloit prouver de ces triangles.

TEOREME XXI.

92. *Dans le triangle rectangle ADC, la ligne BD est perpendiculaire sur l'hipotenuse AC : je dis que les quarrez sur ses trois côtez sont entr'eux comme AC, AB, BG.*



∺ AC, AD, AB s̄ n. 27. donc le rectangle de AC par AB est égal au quarré sur AD, donc AC†AB∝ADq. s̄ 60. & par la même raison, puisque ∺ AC, DC, BC. AC†BC∝DCq. Mais le rectangle de AC

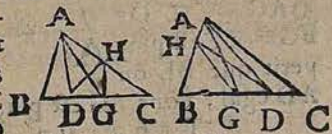
par AC est égal au quarré fait sur AC, ces trois quarrez seront donc entr'eux comme ces trois rectangles ausquels ils sont égaux. Or ces trois rectangles ont tous pour un de leurs côtez la ligne AC, ils seront donc entr'eux comme leurs autres côtez qui sont AC, AB, BC s̄ 84.

Ainsi les trois quarrez égaux à ces trois rectangles sont entr'eux comme AC, AB, BC.

* PROBLEME PREMIER.

Mener par D un point donné dans un des côtez de ABC un triangle, une ligne qui le divise selon la raison de BG à GC. 93.

Si les deux points D & G étoient un même point, la chose seroit faite en menant de D à A une ligne ; car BAD est à DAC comme BD est à DC. s̄ n. 84. La même chose se peut démontrer quand le point D se trouve entre G & C.



Le point G étant autre que D je méne GH parallele à AD, & je dis que DH est la ligne qui divise ABC comme on le proposoit ; car BAG est à GAC comme BG à GC s̄ n. 84. Or GAC∝DHC, car GAH∝GDH l. 2. n. 133. donc GHC+GDH, ou DHC∝GHC+GAH ou GAC.

PROBLEME SECOND.

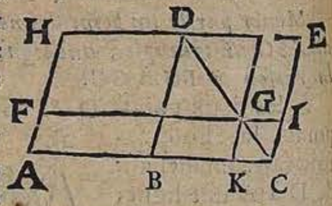
Un rectiligne étant donné, en faire un qui lui soit semblable & égal à un autre rectiligne donné. Eucl. VI. Prop. 25. 94.

Si l'un des rectilignes auquel on propose de faire un parallelogramme égal est un triangle, il faut le réduire dans un parallelogramme égal, & faisant en même tems que ce parallelogramme ait les mêmes angles qu'un parallelogramme donné, selon qu'il a été enseigné l. 2. n.136. on aura satisfait à ce Problême.

* TEOREME XXII.

AB∝BC, le parallelogramme ACDH sera
95. *plus grand que le rectangle AFGK, & que quelqu'autre dont le point G sera dans le diamétre BD.* Eucl. VI. Prop. 27.

BG∝GE l. 2. n.131. donc BG+GC∝GE+GC; c'est à dire que BI∝KE: or BF∝BI, puisque AB∝BC, donc BF+BG ou AG ∝AG+KC. Or BG+KE est plus petit que BE ou AD égal, donc AG est plus petit que AD.



* TEOREME XXIII.

Un quarré de même circuit qu'un parallelogramme, est plus grand que ce parallelogramme de la
96. *valeur du quarré de la moitié de la diference qui est entre les côtez de ce parallelogramme.*

X est un quarré & Z un parallelogramme

AB+BC∝DE+EF∝GH. Ainsi AB ou *b* est moitié de GH. Soit DE∝GK & EF∝KH. La diference de GK avec KH est KL, dont KI ou LI que je nomme *a* est la moitié. Ainsi GI -IK ou *b−a*∝DE & IH+KI, ou *b+a*∝EF. Ainsi le parallelogramme Z fait de DE & EF est égal à *bb−ab+ab−aa*, & comme *−ab+ab* ont des signes contraires Z est égal à *bb−aa*: par conséquent X étant égal à *bb*, X est plus grand que Z du quarré de la moitié de la diference de DE avec EF.

COROLAIRE.

Lorsque la diference des côtez du parallelogramme est plus grande, sa surface est plus petite. 97.

TEOREME XXIV.

De deux poligones de même circuit, celui qui a 98.
plus de côtez a une plus grande surface.

Il a un plus grand apotême § *n.* 53. Ainsi comme la surface d'un poligone est égale à celle d'un triangle dont la base est égale au circuit de ce poligone, & la hauteur à son apotême; donc de deux poligones qui ont un même circuit, celui qui a un plus grand apotême doit avoir une plus grande surface.

TEOREME XXV.

De toutes les figures isoperimétres ou de même 99.
circuit, le cercle est le plus capable.

Car 1° un quarré est plus grand qu'un parallelogramme § *n.*96. Le triangle équilateral, le quarré, & toute autre figure réguliere qui peut s'inscrire dans un cercle est du nombre des poligones ; par conséquent puisque l'on a prouvé s̄ *n.* 55. qu'un cercle de même circuit qu'un poligone avoit son raion plus grand que l'apotême de ce poligone : & que la surface du cercle est aussi égale à un triangle qui a pour base son circuit & pour hauteur son raion, il faut que cette surface soit plus grande.

TEOREME XXVI.

100 *Les poligones réguliers & semblables sont en raison doublée de celle de leurs côtez ou de leurs diamétres des cercles où ils sont inscrits.* Eucl. VI. Prop. 20.

Soient X & Z deux poligones semblables, A est le raion de X & B son circuit. X est égal à un triangle rectangle dont A est la hauteur & B la base, & Z à un rectangle dont C est la hauteur & D la base l. 2. n. 152. Or ces deux triangles sont semblables, car s̄ *n.* 42. les circonferences des poligones semblables sont comme les raions des cercles où ils sont inscrits, partant A, B : : C, D; donc ces deux triangles sont en raison doublée, savoir celle de A à C ou de B à D s̄ *n.* 83. par conséquent X & Z sont en raison doublée de celle de A à C, c'est à dire de la raison de leurs raions, qui étant la même que celle de leurs diamétres, X & Z sont en raison doublée de celle qu'ont leurs diamétres ; ce qu'il faloit démontrer.

COROLAIRE.

101. *Donc puisque les cercles peuvent être pris pour des poligones, ils sont aussi entr'eux en raison doublée de celle de leurs diamétres.*

TEOREME XXVII.

102. *Les poligones réguliers & semblables sont entr'eux comme les quarrez des diamétres des cercles où ils sont inscrits.* Eucl. XII. Prop. 1.

La raison de X à Z est doublée de celle des diamétres des cercles où ils sont inscrits par le Téorême precedent : or les quarrez dont ces diamétres sont les côtez ou les racines, sont aussi en raison doublée de la raison de ces diamétres l. 3. n. 59. donc X est à Z, comme les quarrez des diamétres, des cercles où ils sont inscrits ; ce qu'il faloit prouver.

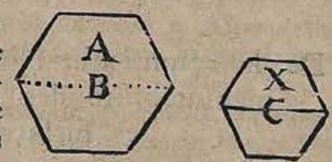
COROLAIRE.

Donc puisque les cercles peuvent être pris pour des poligones, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrez de leurs diamétres. Eucl. XII. Prop. 2. 103.

PROBLEME TROISIÉME.

A une figure donnée, en trouver une autre semblable en raison donnée. 104

Soit A une figure dont le diamétre est B, on cherche X une figure qui lui soit semblable, & dont la surface soit quintuple de A : ces figures sont par le Téorême precedent comme les quarrez de leurs diamétres ; il ne s'agit donc que de trouver un diamétre dont le quarré soit quintuple du quarré de B : Pour



cela il faut trouver par le Probl. 8. s̄ *n.* 29. une ligne moienne proportionnelle entre le diamétre B & une ligne cinq fois plus grande que je nomme D : suposant la chose faite, & que cette ligne moienne que l'on cherche soit C ; de sorte que ÷ B, C, D, le quarré de B est à celui de C comme B est à D l. 3. n. 70. Or D est quintuple de B ; donc le quarré de C est quintuple de celui de B, ainsi on a trouvé ce que l'on cherchoit.

Corolaire premier.

105. *Donc il est facile de trouver une figure semblable à une donnée, & moindre qu'une autre d'une certaine figure donnée.* Eucl. VI. Prop. 28.

Corolaire second.

106 *Donc il est facile de trouver une figure semblable à une donnée, & plus grande qu'une autre d'une certaine figure donnée,* Eucl. VI. Prop. 29.

Il faut 1° faire une figure qui ait une raison donnée. 2° Faire à celle-ci une figure égale & semblable à celle à qui on propose de la faire semblable, suivant ce qui vient d'être enseigné.

SECTION IV.

De la commensurabilité ou incommensurabilité des lignes & des surfaces.

Premiere Definition.

107 *Les grandeurs sont dites commensurables lorsqu'elles peuvent être mesurées par une troisiéme, qui est ainsi leur commune mesure.*

La commune mesure d'une toise & d'un pié, c'est le pouce qui se trouve exactement douze fois dans un pié, & soixante-douze fois dans une toise.

Deu-

Seconde Definition.

Les grandeurs incommensurables, sont celles qui ne peuvent être mesurées par une commune mesure. 108.

Il faut entendre par aucune mesure; car par exemple une hauteur de sept piés ne peut être mesurée exactement par une toise, mais elle le peut être par une mesure plus petite comme par un pié & par un pouce. Or lorsque l'on ne peut trouver de mesure, pour petite qu'on en cherche, qui puisse mesurer deux grandeurs, ces deux grandeurs sont incommensurables. L'experience fait voir qu'il y a ainsi des grandeurs incommensurables. On dira ici quand est-ce qu'on a des marques que cela arive; c'est-à-dire qu'on peut assurer de deux grandeurs qu'elles sont commensurables ou incommensurables.

Troisiéme Definition.

L'on apelle rationnelle une grandeur connuë 109
& déterminée, dont la valeur se peut exprimer par nombre.

Grandeur rationnelle est celle à laquelle on raporte toutes les autres, & sur laquelle on raisonne; ainsi on la supose connuë.

Quatriéme Definition.

Deux grandeurs qui ne sont pas commensurables en elles-mêmes, le sont en puissance si leurs quarrez ou leurs cubes sont commensurables. 110.

Si b & c sont incommensurables, mais que leurs quarrez soient commensurables, que par exemple bb soit à cc comme 3 à 5 : alors b & c incommensurables en eux-mêmes, sont commensurables en premiere puissance. Si x & z

K

n'étoient pas commensurables ni leurs quarrez xx & zz, mais que leurs cubes xxx & zzz ou x^3 z^3 le fussent: par exemple que x^3 fût à z^3 comme 10 à 13. Alors x & z incommensurables en eux-mêmes & en premiere puissance, seroient commensurables en seconde puissance.

CINQUIÉME DEFINITION.

Nombre quarré, c'est le produit d'un nombre
111. *multiplié par lui-même.*

Ainsi 9 est un nombre quarré, parce que c'est le produit de 3 multiplié par 3.

SIXIÉME DEFINITION.

112. *Nombre cube, c'est le produit d'un nombre quarré multiplié par la racine de ce quarré, c'est à dire par le nombre qui la produit.*

Ainsi 8 est un nombre cube fait de 4 nombre quarré multiplié par 2 racine de ce quarré, c'est à dire de 2 qui multiplié par lui-même fait ce quarré 4.

SETIÉME DEFINITION.

113. *Nombre non quarré, c'est celui dont la racine quarrée ne se peut exprimer par aucun nombre.*

HUITIÉME DEFINITION.

Nombre non cube, c'est celui dont la racine cu-
114. *be ne se peut exprimer par aucun nombre.*

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 sont des nombres qui n'ont point de racine quarrée qui se puisse exprimer par des nombres; car on ne peut point trouver aucun nombre, qui multiplié par lui-même, fasse ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 10, &c. Ces nombres, à la réserve de 8, ne sont point aussi des nombres cubes, car il n'y a aucun nombre, qui multiplié cubiquement, les puisse produire.

NEUVIÉME DEFINITION.

115. *Nombres exposans d'une raison, sont les plus*

petits nombres qui l'expriment.

Ainsi si x est à z comme 6 à 12, les exposans de la raison de x à z seront 1 & 2, les plus petits nombres qui puissent être entr'eux comme 6 & 12.

Lorsqu'on joint deux grandeurs qui ne sont pas commensurables, & à qui par conséquent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on est obligé d'exprimer par deux noms diferens, cela s'apelle un binome. *Lorsque d'une grandeur on en retranche une autre qui lui est incommensurable, & qu'ainsi on ne les peut exprimer avec un seul signe c'est bien un* binome; *mais pour distinguer cela de ce qui se fait quand on joint deux grandeurs incommensurables, on l'apelle* apotome, *ou résidu ou grandeur diminuée. Je ne me servirai point ici de ces termes, parce que je crois que ce que je pourois dire ici des binomes & des apotomes n'est d'aucune utilité. Je pourois neanmoins démontrer plus clairement qu'on ne le fait, ce qu'en dit Euclide dans son dixiéme livre. Mais encore une fois, cela n'est point utile.*

Propositions évidentes.

PREMIERE PROPOSITION. 116.

Deux nombres sont toûjours commensurables entr'eux, car ils ont au moins l'unité pour leur commune mesure.

Par exemple dans ces deux nombres 77 & 81 comme dans tous les autres, l'unité s'y trouve précisément tant de fois, ainsi elle en est la mesure commune.

SECONDE PROPOSITION.

Lorsque d'un nombre on en retranche un autre, 117.
le reste est un nombre.

Il y reste une ou plusieurs unités.

Troisie'me Proposition.

118. *Les lignes & les surfaces qui sont comme nombre à nombre, sont commensurables; & celles qui sont incommensurables ne sont pas comme nombre à nombre.*

C'est une suite des Définitions précédentes.

119. Quatrie'me Proposition.

Deux grandeurs commensurables à une troisiéme sont commensurables entr'elles.

Car si B & x sont commensurables, on peut exprimer avec des nombres leur raport. Si c & x sont pareillement commensuarbles, on exprimera leur raport avec des nombres; ainsi toutes ces trois grandeurs se marqueront avec des nombres: partant elles sont commensurables.

Cinquie'me Proposition.

Une ligne, racine ou côté d'un quarré qui n'est
120. *pas un nombre quarré, n'est pas rationnelle. Elle l'est si son quarré étoit égal à un nombre quarré.*

La racine d'un nombre qui n'est pas quarré ne se peut point exprimer par aucun nombre ainsi toute ligne qui est égale à cette racine ne se peut point marquer par aucun nombre.

Sixie'me Proposition.

Si les quarrez de deux lignes ne sont pas entre
121. *eux comme deux nombres quarrez, ces deux lignes ne sont pas commensurables.*

Ces lignes sont égales chacune à la racine d'un nombre qui n'est pas quarré, ainsi aucun nombre ne les peut exprimer, elles ne sont donc pas commensurables.

Se'tie'me Proposition.

Un quarré rationnel ne peut être égal à deux
122. *quarrez dont l'un est rationnel & l'autre ne l'est pas.*

C'est ce qu'on a dit Proposition seconde: Qu'ôtant d'un nombre un autre nombre, le reste est un nombre: Ainsi si d'un quarré rationnel, c'est à dire qui est un nombre, on ôte un quarré rationnel, c'est à dire un nombre, le reste doit être un quarré rationnel ou un nombre.

Huitie'me Proposition. 123.

Une ligne commensurable étant divisée en deux parties, si l'une est commensurable, l'autre le sera aussi.

Car cette ligne s'exprimera par un nombre, dont aiant ôté une partie commensurable, c'est à dire un nombre, le reste selon la seconde Proposition sera un nombre.

Neuvie'me Proposition. 124.

Si à une ligne commensurable on en ajoûte une commensurable, le tout sera commensurable.

Cela est évident, un nombre ajoûté à un nombre fait un nombre.

Dixie'me Proposition.

Si d'une ligne commensurable on retranche 125.
une incommensurable, le reste est incommensurable.

Car si l'une étoit commensurable, l'autre le seroit aussi selon la huitiéme Proposition.

Avertissement.

Je pourois faire plusieurs Propositions semblables qui sont évidentes quand on les propose de la maniere que je le fais; mais je ne propose que celles qui sont absolument necessaires.

Onzie'me Proposition. 126.

Quatre lignes étant en proportion, si la premiere est commensurable à la seconde, la troisiéme *le sera à la quatriéme. Si la premiere est incommensurable avec la seconde, la troisiéme le sera avec la quatriéme.*

Cela veut dire, que si la raison de la premiere à la seconde se peut exprimer par nombre; celle de la seconde à la troisiéme, qui est la même, se peut aussi exprimer par nombre. Si la premiere raison ne se peut pas exprimer, il en est de même de la seconde raison.

TEOREME PREMIER.

127. *Si les raisons simples sont de nombre à nombre les raisons doublées qui en sont composées auront pour exposans des nombres quarrez, & les raisons triplées auront des nombres cubes.*

Soit la raison de x à z de nombre à nombre dont les exposans soient 2 & 3. Cette raison se peut exprimer ainsi 2 3 :: 2 3. Or le produit 4 des antecedens 2 & 2 est à 9 produit des conséquens 3 & 3 en raison composée de la raison de 2 à 3 & de celle 2 à 3. l. 3. n. 55. & comme ces deux raisons sont égales, cette raison composée est doublée l. 3. n. 59. Par la définition 5. § n. 111. ces deux produits 4 & 9 doivent toûjours être des nombres quarrez. Les exposans de la raison doublée sont donc des nombres quarrez, dans le cas dont nous parlons.

Si on avoit repeté trois fois la même raison ainsi 2 3 :: 2 3 :: 2 3. Le produit des antecedens, 8 seroit à 27 celui des conséquens en raison triplée l. 3. n. 60. Et par la définition des nombres cubes, ces deux produits 8 & 27 exposans de la raison triplée seront toûjours des nombres cubes.

TEOREME SECOND.

128. *Une raison simple est sourde, si la raison qui*

en est doublée ou triplée est sourde.

Car par le Teorême precedent, si cette raison n'étoit pas sourde, la raison doublée auroit pour exposant un nombre quarré, & la raison triplée un nombre cube.

TEOREME TROISIE'ME.

Une raison simple n'est pas sourde si les nombres 129.
exposans de sa raison doublée sont quarrez, & les exposans de sa raison triplée sont des cubes; & si cela n'est pas elle est sourde.

Car les quarrez sont en raison doublée de leurs côtez ou racines, & les nombres cubes triplée de leur racine l. 3. n. 59. & 60. ainsi les racines des exposans d'une raison doublée ou triplée seront les exposans de la raison simple; qui parconséquent ne sera pas sourde. Par la même raison si ces nombres ne sont pas quarrez ou cubes; comme leurs racines sont les exposans des raisons simples: ces raisons simples ne se pouvant exprimer par nombre elles sont sourdes.

TEOREME QUATRIE'ME.

Quatre lignes commensurables etant propor- 130.
tionnelles le produit des antecedens est à celui des consequens comme deux nombres quarrez. S'il y avoit six lignes proportionnelles, les produits seroient comme des nombres cubes.

Soit cette proportion a b :: c d, & que a b :: 1 4, ainsi c d :: 1 4. On peut réduire cette proportion à celle-ci 1 4 :: 1 4. Les produits des antecedens qui est 1, doit être 1 nombre quarré par la définition 5. comme aussi 16 celui des conséquens. Ces deux produits sont donc entr'eux comme deux nombres quarrez. Si a b :: c d :: e f. aiant réduit cette proportion à celle-ci 1 4 :: 1 4 :: 1 4, le produit des antecedens seroit un cube,

comme aussi celui des consequens ; ainsi ces deux produits seroient entr'eux comme deux
131. nombres cubes.

TEOREME CINQUIE'ME.

Si quatre lignes proportionnelles sont commensurables, le rectangle fait des antecedens est commensurable à celui des conséquens.

Ce Téorême est le même que le précédent, il n'y a que la maniere de l'énoncer qui soit diferente ; car le rectangle des antecedens est la même chose que le produit des antecedens, & le rectangle des consequens même chose que le produit des conséquens.

132. ### TEOREME SIXIE'ME.

Si trois lignes sont en proportion continuë, & que la premiere soit à la troisiéme comme deux nombres quarrez, ces trois lignes seront commensurables.

Soit cette proportion continuë ∺ a b c. Si a c :: 1 4 je dis que la raison de a à b sera une raison de nombre à nombre : car la raison de a à c est doublée de celle de a à b, ou comme le quarré de a au quarré de b, l. 3. n. 70. & par conséquent par le Téorême troisiéme, cette raison doublée étant comme nombres quarrez, la raison simple dont elle est composée n'est pas sourde.

COROLAIRE.

133. *En ce cas le rectangle des extrêmes sera commensurable avec le quarré de la moienne.*

Car si ∺ a b c donc a b :: b c, ces quatre grandeurs étant donc commensurables, le rectangle des extrêmes a c selon le Téorême 5. sera commensurable avec bb rectangle des moiens qui est un quarré.

TEOREME SE'TIE'ME.

Si trois lignes sont en proportion, & que la premiere soit à la troisiéme, comme deux nombres dont le produit n'est pas un nombre quarré (ou qui ait pour exposans deux nombres qui ne sont pas quarrez) *la moienne sera incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec la premiere & la troisiéme.* 134.

Soit ∺ b c d : la premiere b de ces trois lignes est à d la troisiéme, comme ces nombres 2 & 9 dont le produit 18 n'est pas un nombre quarré. Je dis que la seconde ligne c sera incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec la premiere & la troisiéme. Son quarré cc est égal à bd ou à 18. l. 3. n. 64. or 18 n'étant pas un nombre quarré, sa racine c ne se peut point exprimer par nombre ; ainsi c est incommensurable en elle-même avec b & d, mais sa puissance cc qui vaut 18 l'est avec b & avec d, c'est à dire avec 2 & avec 9 puisque sa raison s'exprime par des nombres.

TEOREME HUITIE'ME.

Si de trois lignes en proportion continuë la premiere n'est pas à la troisiéme comme nombre à nombre, la moienne est incommensurable avec elles tant en elle-même qu'en puissance. 135.

Soit cette proportion ∺ b c d, dont la premiere b n'est pas à d comme nombre à nombre, je dis que c ni sa puissance cc ne sont pas commensurables avec b & d : car la raison de b à d est doublée de celle de b à c & de c à d l. 3. n. 58. 59. Cette raison doublée étant donc sourde, la raison simple de b à c ou de c à d est donc sourde par le Téorême second.

Le quarré de b est au quarré de c comme b est à d l. 3. n. 70. Donc puisque b n'est pas à d

comme nombre à nombre, *bb* & *cc* ne ſont pas comme nombre à nombre, ainſi ce ſont des incommenſurables.

TEOREME NEUVIE'ME.

136. *Si de quatre lignes en proportion continuë, la raiſon de la premiere à la quatriéme eſt une raiſon de nombre à nombre qui ait pour expoſans des nombres cubes, ces quatre grandeurs ſeront commenſurables.*

Soit ∺ *b c d f*, ſi *b f* : : 1 8, ces quatre lignes *b c d f* ſont commenſurables; car la raiſon de *b* à *f* eſt triplée l. 3. n. 62. Ces deux nombres 1 & 8 ſont cubes; cette raiſon les aiant dōc pour expoſans, la raiſon ſimple comme celle de cette progreſſion qui eſt entre chaque terme, ne peut être ſourde, s̃ 129. Téorême troiſiéme.

TEOREME DIXIE'ME.

137. *Si de quatre lignes en proportion continuë la raiſon de la premiere à la quatriéme a pour expoſans des nombres qui ne ſont pas cubes*, la premiere & la ſeconde *ſeront ſeulement commenſurables en puiſſance : ainſi de même de la ſeconde & de la troiſiéme.*

Soit ∺ *b c d f*, & que *b f* : : 1 5. La raiſon de *b* à *f* eſt triplée de celle de *b* à *c* l. 3. n. 62. Or 1 & 5, les expoſans de la raiſon de *b* à *f* ne ſont pas cubes; la raiſon ſimple de *b* à *c* eſt donc une raiſon ſourde par le Téorême troiſiéme : ainſi de même de la raiſon de *c* à *d* de celle de *d* à *f*. Mais puiſque b^3 c^3 : : *b f*; & par conſéquent b^3 c^3 : : 1 5 l. 3. n. 71. donc *b* & *c* ſont commenſurables en puiſſance.

138. TEOREME ONZIE'ME.

Si de quatre lignes en proportion continuë la premiere n'eſt pas à la quatriéme comme nombre à nombre, la raiſon de la premiere à la ſeconde n'eſt pas de nombre à nombre.

∺ *b c d f*, la raiſon de *b* à *f* eſt triplée; donc cette raiſon triplée étant ſourde, par le Teorême ſecond, la raiſon ſimple de *b* à *c* eſt ſourde; & puiſque b^3 c^3 : : *b f*, cette raiſon de *b* à *f* étant ſourde, celle de b^3 à c^3 eſt ſourde. Ainſi *c* n'eſt pas commenſurable en puiſſance avec *b*.

PROBLEME PREMIER.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec une ligne connuë. 139.

Soit *b* une ligne, on en cherche une qui lui ſoit incommenſurable. La ligne *b* étant 2, je prens *x* ou *c* ligne égale à 3 ou à 5, ou à tout autre nombre qui ne ſoit pas quarré. Entre ces deux lignes je cherche une ligne moienne proportionnelle que je nomme *c* : ainſi ∺ *b c x*. Or par le Téorême ſetiéme la ligne *c* ſera incommenſurable en elle-même avec ces deux premieres lignes, & commenſurable en puiſſance. s̃ *n.* 134.

PROBLEME SECOND.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable tant en elle-même qu'en puiſſance avec une ligne connuë & donnée. 140

Soit la ligne donnée & connuë B, je lui cherche par le Probléme precedent la ligne D qui lui ſoit incommenſurable en elle-même. Aprés entre B & D aiant trouvé la ligne C moienne proportionnelle, cette ligne par le Téorême huitiéme s̃ 135. ſera incommenſurable, tant en elle-même qu'en puiſſance avec B, ce qu'il faloit faire.

TEOREME DOUZIE'ME.

La diagonale d'un quarré eſt incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec chacun des côtez. (Faites la figure.) 141.

Les diagonales AE & BC dans le quarré AB CE se coupent par la moitié, ainsi BD est la moitié de BC, par conséquent BC BD :: 2 1. Or AB est moien proportionnel entre BC & BD donc par le Téor. 7. s̃ *n.* 134. puisque 2 & 1 ne sont pas deux nombres quarrez, AB côté du quarré ABCE sera incommensurable avec la diagonale BC en lui-même, & commensurable en puissance ce qui est évident, car suposant BC égal à *n* & AC égal à *m*, puisque *nn* ⊃ 2 *mm* l. 4. *n.* 77. ainsi *nn* *mm* :: 2 1, partant les quarrez de *n* & de *m* sont commensurables, ainsi ces grandeurs sont commensurables en puissance.

143. TEOREME XIII.

Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moienne & extrême raison, ne sont pas rationnelles. Eucl. XIII. Prop. 6.

Soit AB ligne rationnelle coupée en moienne & extréme raison au point C : je dis que les parties AC & CB ne sont pas lignes rationnelles, ou ce qui est la même chose, qu'elles ne peuvent être exprimées par des nombres.

J'ajoûte à AB la ligne BD moitié de AB, le quarré de la médiane CB jointe avec BD est cinq fois plus grand que le quarré de BD s̃ *n.* 81. ainsi ces deux quarrez sont comme 5 à 1 : or 5 n'est pas un nombre quarré; donc par le Téor. 2. s̃ 128. la ligne CB+BD n'est pas rationnelle, mais BD moitié de AB ligne rationnelle est rationnelle; il faut donc que ce soit la médiane CB qui ne soit pas rationnelle : & partant s̃ *n.* 125. la petite partie AC sera incommensurable, car si elle étoit commensurable, CB le seroit aussi s̃ *n.* 123.

COROLAIRE.

La médiane est incommensurable avec la toute, tant en elle-même qu'en puissance. 143.

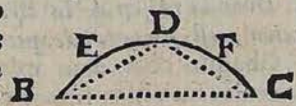
Soit *b* une ligne coupée en moienne & extrême raison, *x* est la médiane, & *b−x* la petite partie. ∺ b *x* *b−x*. Or puisque *b−x* est une ligne non rationnelle par le Teor. present : donc par le Teor. 8. s̃ 135. *x* moienne entre *b* & *b−x* est incommutable avec *b* tant en elle-même qu'en puissance.

SECTION V.

Des raisons des cordes avec les raïons du cercle.

AVERTISSEMENT.

Les cordes d'un même cercle ne sont pas entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes : ces 144.
deux arcs BED & CFD étant égaux, l'arc BDC est double de l'un & de l'autre. Si BC

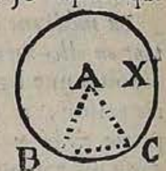


corde de cet arc étoit donc le double de la corde BD ou de la corde DC, comme l'arc BDC est le double de l'arc BED, alors BC seroit égal à BD+CD. ce qui ne peut être l. 1. n. 12. *On ne peut donc pas supposer que les cordes d'un même cercle soient entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.*

TEOREME I.

Le raion du cercle est égal à la corde de soixante degrez. 145.

Soit A le centre du cercle X, je supose que la ligne BC est égale au raion AB ou AC ; ainsi le triangle ABC est équilateral, donc les angles A, B, C sont égaux chacun le tiers de deux angles droits ou de cent quatre-vingt degrez, c'est à dire qu'ils sont de soixante. L'arc BC mesure de l'angle BAC est donc de soixante degrez. Or la ligne BC est égale au raion du cercle, par conséquent ce raion est égal à la corde de soixante degrez.



COROLAIRE I.

146. *Donc il est facile de faire un exagone.* Eucl. IV. Prop. 15.

Car l'ouverture du compas divise le cercle en six parties.

COROLAIRE II.

147 *Donc il est facile de faire un triangle équilateral dans un cercle.*

Car deux parties des six de l'exagone sont la troisiéme partie du cercle.

COROLAIRE III.

148. *Donc la raison de la circonference du cercle au raion, est plus grande que 3 à 1.*

Chaque côté d'un exagone étant égal au raion les six côtez seront égaux à trois fois le diamétre ; ainsi la circonference de ce poligone est au raion du cercle où il est inscrit comme 3 à 1. Or la circonference de ce cercle est plus grande au regard du même diamétre s̃ *n.* 54. ce qu'il faloit prouver.

TEOREME II.

149 *Dans le triangle équilateral ABC inscrit dans le cercle X, le quarré de AB est triple de celui du raion.* Eucl. XIII. Prop. 12.

Je coupe BC en deux parties égales par la perpendiculaire AD, qui sera ainsi le diamétre du cercle & passe par le centre : ainsi BD sera égal à DC, & comme BC est la corde du tiers du cercle, BD sera la corde de la sixiéme partie du cercle, & partant égale au raion.

Le quarré de AD diamétre qui est double du raion BD, est quadruple du quarré de BD, que je nomme *b*, ainsi le quarré de AD est $4bb$. J'apelle aa celui de AB : Or $aa+bb$ est égal au quarré AD, qui est $4bb$ s̃ *n.* 71. ainsi $aa+bb \propto 4bb$; ôtant bb de part & d'autre, il restera $aa \propto 3bb$, ce qu'il faloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

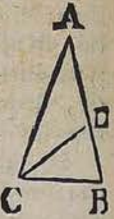
Je ne veux pas grossir ces Elemens de plusieurs Téorêmes semblables. Il est évident que la tangente d'un angle de quarante-cinq degrez est égale au raion : car elle fait avec ce raion un triangle rectangle dont la secante est la base, sur laquelle les angles sont égaux, savoir chacun de quarante-cinq degrez. Ainsi 1° il faut que la tangente & le raion soient égaux. 2° Le quarré de la secante s̃ n. 71. est égal au quarré du raion & de la tangente, ou ce qui est la même chose à deux fois le quarré du raion ; or la corde de nonante est égale à la secante de quarante-cinq degrez ; par conséquent la corde de nonante est égale à deux fois le quarré du raion, comme il est évident. 150.

LEMME I.

Dans le triangle isoscele ABC, si les angles de la base sont doubles de celui du sommet : je dis que 151.

la ligne CD, qui coupe par la moitié ACB, un des angles de la base, coupe AB en moienne & extrême raison.

1° Puisque l'angle BCA est double de BAC; donc la moitié DCA sera égale à l'angle CAD: partant le triangle ADC aiant les angles égaux sur la base AC, AD)o DC, ainsi il est isoscele l. 2. n. 85.



2° L'angle BDC est égal aux deux oposez DAC & ACD l. 2. n. 77. par conséquent il est égal à l'angle ACB qui vaut ces deux angles, & à DBC qui est égal par l'hipotese à ACB, ainsi le triangle DCB aiant les angles sur la base DB égaux, est encore isoscele, ainsi DC)oBC.

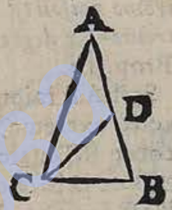
3° Les deux triangles isosceles BAC & BCD qui ont un angle commun au point B l. 2. n. 87. sont équiangles, & partant semblables: donc s̄ *n. 9.* AB est à BC, ou à AD égal à BC, comme DC, ou son égale AD, est à DB, c'est à dire ∺ AB, AD, DB, & par conséquent AB est coupé en moienne & extrême raison, puisque la partie AD est moienne entre la toute AB & l'autre partie DB.

Lemme II.

152. *Si on divise AB en moienne & extrême raison au point D: que de B & de D comme centres & de l'intervale de la médiane DA on fasse deux arcs qui se coupent en C, d'où l'on méne les lignes AC, DC, CB, le triangle ABC sera isoscele, & chaque angle de sa base double de l'angle du sommet.* Eucl. IV. Prop. 10.

Par la construction BC)oDC)oAD, ainsi A

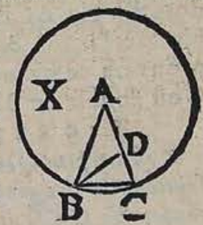
DC & DCB sont isosceles, & puisque ∺ AB, AD, DB, & que par la construction AD)o BC)oDC, il s'ensuit que AB, BC :: DC, DB, donc s̄ *n. 11.* BAC & DCB sont équiangles, & partant BAC est isoscele: or l'angle BDC est égal à DAC +ACD les oposez interieurs qui sont égaux, puisque ADC est isoscele: Donc DBC égal à BDC est le double de BAC.



Lemme III.

La ligne BC est un des côtez d'un décagone inscrit dans le cercle X, c'est à dire qu'elle est la corde de trente-six degrez, dixiéme partie du cercle. Les angles ABC & ACB de la base de l'isoscele BAC sont chacun double de celui du sommet BAC, ou de l'angle du centre du décagone. 153.

Les trois angles de ce triangle valent cent quatre-vingt degrez l. 2. n. 75. Dans le triangle ABC, l'angle du sommet BAC vaut trente-six degrez, puisque BC qui est sa mesure est la corde de trente-six degrez. Otant trente-six degrez de cent quatre-vingt, reste cent quarante-quatre, valeur des angles de la base de BAC qui est isoscele, puisque AB & AC sont les raions du cercle Z. La moitié de cent quarante-quatre est soixante-douze qui est le double de trente-six; ainsi chaque angle de la base étant de soixante-douze, il est le double de l'angle du sommet.



Teoreme III.

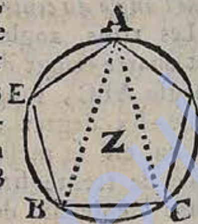
La médiane du raion coupé en moienne & ex- 154 *trême raison est le côté du décagone ou la corde de trente-six degrez.* (*Figure* s̃ *n.* 51.) Eucl. IV. Prop. 10.

Soit AB raion d'un cercle divisé en D en moiéne & extrême raison s̃ 35. & qu'on ait fait la corde BC égale à la médiane AD. Alors les angles de la base de BAC seront chacun double de BAC s̃ *n.* 152. Donc par le Lemme précédent BC est la corde de la dixiéme partie du cercle, & par conséquent le côté du décagone.

155. LEMME QUATRIE'ME.

BC est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle Z, les deux lignes AB & AC qui sont cordes des arcs égaux AEB & AFC, sont égales: ainsi ABC est un isoscele dont les angles de la base sont chacun double de celui du sommet.

Langle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC, & l'angle ACB la moitié de l'arc AEB l. 2. n. 46. Or Or AEB est double de BC; donc l'angle ACB est double de l'angle BAC. On prouvera de même que ABC est double de BAC.



TEOREME QUATRIE'ME.

156. *Z est un pentagone, BD & EF deux cordes qui soûtiennent les angles BED & EDF, & qui se coupent en C: Je dis 1° que BC est un des côtez du pentagone: 2° que BD est coupé au point C en moienne & extrême raison.* Eucl. XIII. Prop. 8.

1° L'angle BEF a pour mesure la moitié des deux arcs BG & GF, l. 2. n. 46. & l'angle BCE la moitié des deux arcs BE & FD l. 2. n 59. or ces deux mesures sont égales, donc ces deux angles sont égaux; ainsi l. 2. n. 85. EBC est

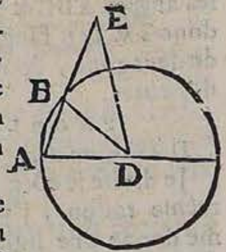
isoscele, & partant BE ∝ BC: ainsi BC est un des côtez du pentagone, ce qu'il faloit prouver.

2° Par la même raison CF ∝ FD, & puisque BD ∝ FE cordes des mêmes angles, il faut que CE ∝ CD: ainsi ECD est un isoscele. Le triangle BED est aussi isoscele, puisque BE ∝ ED, car on supose que Z est un pentagone régulier: ces deux isosceles ont un angle commun à D; donc ils sont équiangles l. 2. n. 87. partant comme BD est à BE, ou à son égale BC; ainsi ED ou son égale BC, sera à CD, c'est à dire ∺ BD, BC, CD, & par conséquent, selon la notion de la moienne & extrême raison BD est coupé comme il a été proposé.

TEOREME V. 157.

La ligne droite composée du côté de l'exagone & du décagone inscrits au même cercle est coupée en moienne & extrême raison. Eucl. XIII. Prop. 9.

Soit AB côté du décagone & BE côté de l'exagone, c'est à dire une ligne égale au raion BD s̃ *n.* 145. je dis que AE est coupé en moienne & extrême raison au point B.



EBD est isoscele, puisque BE est suposée égale au raion BD, le triangle ABD est aussi isoscele, & par le Lem. 3. s̃. 153. l'angle BAD ou ABD est double de BDA: or DBA est aussi double de BDE puisque l. 2. *n.* 77. il est égal aux deux angles égaux BED, & EDB: donc BED & BDA sont égaux entr'eux & pris ensemble ils sont égaux à EAD, ainsi le triangle AED est isoscele, partant puisque BD coupe en deux l'angle EDA, il faut que EA soit coupée en moienne & extrême raison, § *n.* 151. ce qu'il failoit démontrer.

COROLAIRE.

158. *Delà il s'ensuit que si AE est coupée en moienne & extrême raison, dont AB petit segment soit côté d'un décagone, BE sera le côté de l'exagone inscrit au méme cercle.*

Puisqu'entre AE & AB il n'y peut avoir qu'une moiénne proportionnelle; & qu'on vient de prouver que BE, côté de l'exagone, étoit cette médiane.

PROBLEME PREMIER.

159. *Vn cercle étant donné trouver la corde de trente-six degrez ou le côté du décagone.*

Le cercle est X dont AB est le raion, que je divise en moienne & extrême raison en D § *n.* 152. *même figure.* Je prens la corde BC égale à AD qui sera le côté du décagone: car § 152. les angles ABC & ACB sont doubles de BAC: donc § *n.* 153. l'angle BAC est l'angle du centre du décagone, donc par conséquent BC est un des côtes.

PROBLEME SECOND.

160 *Décrire un décagone sur BC un côté donné.*

Je divise le côté donné BC en moienne & extrême raison: j'y ajoute la médiane, ce qui me donne une ligne divisée en moienne & extrême raison § *n.* 36. dont BC sera la médiane; ainsi cette ligne § *n.* 158. sera égale à AB raion du cercle ou BC sera un des côtez du décagone inscrit § *n.* 157.

PROBLEME TROISIE'ME.

Vn cercle étant donné, trouver le côté du pentagone, ou inscrire un pentagone dans un cercle. 161.
Eucl. IV. Prop. 11.

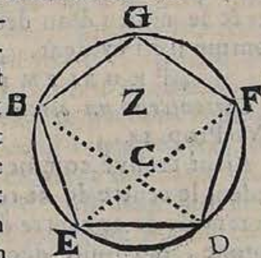
1° Par le Problême precedent aiant trouvé le côté du décagone, on a celui du pentagone, qui est la corde du double de l'arc qui soûtient un des côtez du décagone.

2° On peut trouver encore le côté du pentagone de cette maniere; il faut trouver § 152. un triangle isoscele, dont les angles de la base soient chacun double de celui du sommet, & l'inscrire, ou un qui lui soit semblable dans le cercle donné.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Décrire un pentagone sur ED un côté donné. 162.

Soit le côté donné ED. Je supose le pentagone fait. En donnant le moien de trouver les lignes BD & EF, on découvre ce qu'il faut faire. Or puisque BD est coupée en moienne & extrême raison au point C § 156. que BC égale à BE, & par conséquent à ED est la médiane, en coupant le côté ED en moienne & extrême raison, & lui ajoûtant la médiane on aura une ligne égale à BD § *n.* 36. coupée pareillement en moienne & extréme raison dont la médiane sera ED, par conséquent égale à BC.



Comme on connoîtra donc les trois côtez du triangle DEB, il sera facile de le faire & d'achever tout le pentagone, soit en inscrivant ce triangle dans un cercle, ou faisant de même le triangle EFD.

PROBLEME CINQUIE'ME.

163. *Circonſcrire un pentagone régulier à un cercle.* Eucl. IV. Prop. 12.

Il faut 1° inſcrire un pentagone dans le cercle donné : 2° mener du centre de ce cercle des lignes droites par les cinq angles du pentagone : 3° mener des tangentes par les points de la circonference ou ces lignes coupent le cercle. Ces tangentes comme il eſt évident, formeront le pentagone que l'on cherche.

*PROBLEME SIXIE'ME.

164. *Dans un pentagone régulier inſcrire un cercle.* Eucl. IV. Prop. 13.

Il faut ſur le milieu de deux côtez de ce pentagone, élever des perpendiculaires dont la ſection donnera le centre du cercle que l'on cherche, qu'il faut faire de l'intervale entre ce centre & le milieu d'un des côtez du pentagone, comme il eſt évident.

*PROBLEME SE'TIE'ME.

165. *Circonſcrire un cercle à un pentagone.* Eucl. IV. Prop. 14.

Aiant trouvé comme dans le Problême precedent le centre de ce cercle, il faut prendre l'intervale de ce centre d'un des angles du pentagone, & enſuite décrire un cercle qui ſera celui que l'on cherche.

*PROBLEME HUITIE'ME.

166. *Dans un cercle faire un poligone de quinze côtez.* Eucl. IV. Prop. 16.

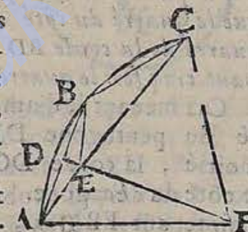
1° Faites un pentagone : 2° un triangle équilateral, cela fera la diviſion que l'on cherche.

J'ai paſſé legerement ſur ces Problêmes, parce que les démonſtrations en ſont faciles.

*TEOREME SIXIE'ME.

Le quarré d'un des côtez d'un pentagone eſt égal aux quarrez d'un des côtez du décagone & de l'exagone, inſcrits dans le même cercle. Eucl. XIII. Prop. 10. 167.

AC eſt le côté d'un pentagone, par conſequent AB & BC moitiés de l'arc ABC, ſont les côtez du décagone.



AF & CF ſont les raions du cercle, & par conſequent côtez de l'exagone : l'arc AB eſt coupé en D, par la moitié d'où DF a été menée au centre.

L'angle AFC qui eſt celui du centre du pentagone eſt de ſoixante-douze degrez, ainſi les angles ACF & FAC ſont chacun de ciquante-quatre, l'angle EFC aiant pour ſa meſure CB de trente-ſix, & DB de dix-huit, moitié de AB trente-ſix, eſt auſſi de cinquante-quatre degrez, & partant égal à FCA & CAF ; ainſi les deux triangles AFC & ECF, outre cét angle en aiant un autre qui leur eſt commun au point C, ils ſont équiangles : donc AC eſt à AF, comme FC ou ſon égale AF eſt à EC, ainſi ∺ AC, AF, EC : donc le rectangle de AC & de EC eſt égal au quarré fait de AF. AC†EC ∝ AF*q*.

Puiſque DF eſt perpendiculaire ſur AB, donc AE ∝ EB, donc le triangle AEB eſt iſoſcele. Il a un angle commun avec l'iſoſcele ABC : donc l. 2. n. 87. ces deux triangles ſont ſemblables : donc comme AE à AB, ainſi AB à AC, ainſi ∺ AE, AB, AC : donc le rectangle fait de AE & de AC eſt égal au quarré de AB.

$AC + AE \propto ABq$.

Or le quarré de AC est égal aux deux rectangles AC, CE & AC, AE l. 3. n. 22. donc le seul quarré AC, côté du pentagone est égal aux deux quarez de AB & de AF, côtez du décagone & exagone, ce qu'il faloit démontrer.

*Corolaire.

Un pentagone est inscrit dans le cercle X. Je dis
que le quarré du côté du pentagone BF, plus le
168. *quarré de la corde BD qui soûtient l'angle BFD*
vaut cinq fois le quarré du raion AC.

Car menant le diamétre BC qui coupe le côté du pentagone DE, & l'arc DCE par la moitié, la corde DC est le côté du décagone. Soit maintenant $FB \propto m$, $BD \propto z$. $DC \propto x$, $AC \propto a$, $BC \propto 2a$, & parce que BC est l'hipotenuse du triangle rectangle BDC, il s'ensuit que $zz + xx \propto 4aa$ § *n.* 71. & ajoûtant de part & d'autre le quarré de AC, qui est aa, vient $zz + xx + aa \propto 5aa$.

Or par le précédent Teorême le quarré du côté du décagone, plus le quarré du côté de l'exagone sont égaux au quarré du côté du pentagone, c'est à dire $xx + aa \propto mm$: donc au lieu de $xx + aa$ substituant la grandeur égale mm, on aura $zz + mm \propto 5aa$, c'est à dire que le quarré de BF, plus celui de BD est égal à cinq fois le quarré du raion de X ce qu'il faloit prouver.

Probleme IX.

169. *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone & du décagone d'une autre maniere que celle qui a été enseignée.*

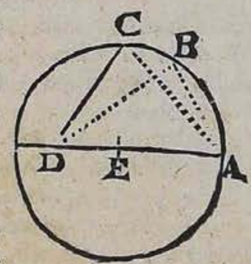
Je

Le cercle donné est X, le diamétre AB, le centre C, & CD une perpendiculaire. CE est la moitié de CB, il faut prendre $EF \propto ED$: ensuite menant de D à F la ligne DF, on aura le côté du pentagone que l'on cherche, ce qu'il faut prouver.

Le plan de BF par FC plus le quarré de EC est égal au quarré de EF, l. 3. n. 26. lequel par la construction est le même que ED : or le quarré de ED est égal à celui de EC & de DC : donc le plan de BF par FC est égal au quarré de DEC & de BC; donc le plan de BF par FC est égal au quarré de DC ou BC, partant § 57. BF BC :: BC FC; dont FB est coupée en moienne & extrême raison; & puisque BC ou CD est le côté de l'exagone, FC sera celui du décagone § *n.* 157. Or le quarré de FD est égal à celui de FC & de DC ou CB : donc par le Téorême précédent FD est le côté du pentagone : ainsi on a fait ce qui étoit proposé.

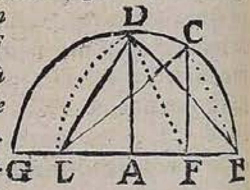
Avertissement.

Cette operation s'abrége 170
de cette maniere, on prend AB égale au raion du cercle, & AC égale à la corde de nonante ou au côté du quarré inscrit dans le cercle, & BD égale à AC : la ligne CD sera le côté du pentagone, & EA étant



le raion du cercle, DE sera le côté du décagone.

Pour le démontrer je fais la figure suivante, coupant AB par la moitié en F, & élevant au point F une perpendiculaire jusqu'à C, d'où je prens CE égale à BD la corde de nonante. On vient de voir que FD s̄ n. 169. étoit le côté du pentagone, si ED est donc égale à FD. L'operation est bien démontrée.



∺ BG BC BF : ainsi si AB ou BC est égal à 2a, il faut que tout le diamétre BG soit 4a, & ainsi ∺ 4a 2a BF ; par conséquent BF vaudra a. 2° BCq ∝ FCq + EFq. Or BCq ∝ 4aa, & BFq ∝ aa ; donc FCq ∝ 3aa. 3° FDq ∝ ADq (ou 4aa) + AFq (ou aa.) Donc FDq ∝ 5aa : Partant si le quarré de EF vaut aussi 5 aa, alors EF est égal à FD. Or DBq ∝ ADq (ou 4aa) + ABq (ou 4aa.) Ainsi DBq ∝ 8aa, & par conséquent puisqu'on supose EC & DB égaux, ECq ∝ 8aa. Mais ECq ∝ FCq (ou 3aa) + EFq, donc ECq − FC q (ou 8aa − 3aa) ∝ EFq. C'est à dire que EFq ∝ 5aa.

Teoreme septiéme.

Si dans un pentagone équilateral trois angles pris
171. *comme on voudra sont égaux, il sera équiangle.* Eucl. XIII. Prop. 7.

Cette proposition n'a rien de fort utile ni de dificile.

Teoreme huitiéme.

172. *Quand le raion d'un cercle est rationnel, le côté du décagone inscrit dans ce cercle est incommensurable, tant en lui-même qu'en puissance avec ce raion.*

Soit B ligne rationnelle raion d'un cercle, coupée en moienne & extrême raison : x que je supose être la médiane, sera s̄ n. 154. le côté du décagone. Or la médiane x est incommensurable tant en elle-méme qu'en puissance avec B. s̄ n. 143.

Teoreme IX. 173.

Lorsque le raion d'un cercle est rationnel, les côtez du pentagone inscrit dans ce cercle sont incommensurables tant en eux-mêmes qu'en puissance avec ce raion. Eucl. XIII. Prop. 11.

Soit b ligne rationnelle raion d'un cercle, z le côté d'un pentagone, & x le côté d'un décagone, inscrits dans le cercle dont b est le raion. Partant $bb + xx$ ∝ zz s̄ n. 167. Donc puisque le quarré xx n'est pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Teorême, le quarré zz ne peut être rationnel s̄ 125. & par conséquent sa racine z n'est pas rationnelle, puisque tout quarré qui n'est pas égal à un nombre quarré, ne peut avoir pour racine une grandeur précisément égale à un nombre, comme nous l'avons prouvé ci-dessus n. 120.

On ne peut pas trouver la raison exacte de chaque corde du cercle sans exception, avec le raion 174
du cercle, & par conséquent celle de la circonference entiere avec le raion. Le seul moien exact qu'on ait découvert, c'est comme le cercle peut être pris pour un poligone d'un nombre infini de côtez, de prendre le plus grand poligone qu'on poura, & de voir quelle est la raison de son circuit avec le diamétre du cercle où il est inscrit. Archimede a consideré un poligone de nonante-six côtez dont le circuit est au diamétre du cercle comme 223 à 71, laquelle raison est moindre que celle

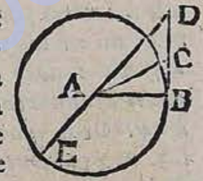
de la circonference du cercle au diamétre, puisque ce poligone inscrit est plus petit que le cercle l. 2. n. 146. *Comparant un même poligone, mais circonscrit, avec le diamétre, il a trouvé que la raison de l'un à l'autre étoit comme* 22 à 7, *laquelle est plus grande que celle de la circonference du cercle avec le diamétre, puisque ce poligone circonscrit est plus grand que le cercle. On a donc deux raisons, savoir celles de* 223 à 71, & *de* 22 à 7, *dont l'une est plus petite, & l'autre plus grande que la veritable qu'on cherche. Donnons un même conséquent à ces deux raisons, les réduisant à celle-ci, selon les régles que l'Arithmétique enseigne.*

1561
1562 497.

Aiant ainsi supose le diamétre de 497 *parties, la circonference du cercle sera plus grande que* 1561, & *plus petite que* 1562. *Divisons l'unité qui est la diference de ces deux nombres par* 497 *le quotient* $\frac{1}{497}$ *fera voir que la diference dont l'un & l'autre nombre difere de la veritable grandeur de la circonference, est moindre que la* $\frac{1}{497}$ *partie du diamétre ; ce qui est peu de chose.*

175. *Ceux qui ont pris des poligones plus grans que de nonante-six côtez ont trouvé une raison plus exacte. Jean Pell en considere un de* 256 *côtez, dont chacun est plus petit que* 24545, *posé que le raion du cercle soit de* 1000000 ; *ainsi la demie circonference de ce poligone est plus petite que* 3141760. *Si le diamétre du cercle étoit donc* 100000, *tout le circuit de ce poligone circonscrit au cercle seroit plus petit que* 314176. *Or ce calcul qu'il fait dans*

un ouvrage imprimé à Amsterdam l'an 1647. *ne supose aucune extraction de racine. Il est fondé sur un Téorême que plusieurs Géométres démontrerent alors chacun à sa maniere. Cet auteur raporte ces diferentes démonstrations : Voila ce Téorême & ma démonstration.*

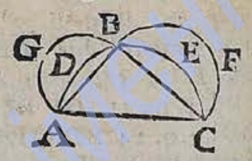


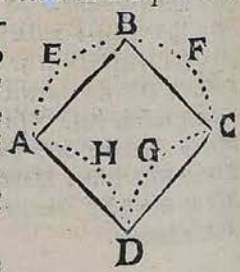
BC est la tangente d'un arc moindre qu'un arc de quarante-cinq degrez. BD est la tangente d'un arc double. Cela étant, BC est à BD comme le quarré du raion AB moins le quarré de BC est à deux fois le quaré du raion AB.

Il faut démontrer que BC BD :: *AB*q−BCq 2*AB*q. *Puisqu'on supose que l'angle* B*AD est double de* B*AC ; donc AB AD* :: BC CD, 6 *n.* 16. *Donc AB AB*+*AD* (*ou* DE) :: BC BD, l. 3. n. 47. *Ainsi AB*q DEq :: BCq BDq, l. 3. n. 68. Permutando *AB*q BCq :: DEq BDq. *Donc* dividendo & componendo *AB*q−BCq 2 *AB*q :: DEq−BDq 2DEq : *ainsi reste à démontrer que* DEq − BDq 2DEq :: BC BD ; *car alors AB*q−BCq 2*AB*q :: BC BD l. 3. n. 51. *Or* DEq)O *AE*q+*AD*q+2*AE*† *AD* l. 3. n. 24. *AD*q)O *AB*q (*ou AE*q) +BDq l. 4. n. 71. *Donc* DEq)O 2*AE*q+2*AE*†*AD*+BDq : *dont retranchant* BDq *de part & d'autre.* DEq−BDq)O 2*AE*q+2*AE*†*AD*. *Or* 2*AE*q+2*AE*† *AD*)O 2*AE*†ED l. 3. n. 23. *donc* DEq−BDq)O 2*AE*†ED. *Ces deux plans* 2*AE*†ED & 2EDq *ont la même base, savoir* ED ; *ils sont donc entr'eux comme AE ou AB est à* ED. *Or AB* ED :: BC BD : *Donc* DEq−BDq *égal à* 2*AE*† ED *est à* 2Eq, *comme* BC *à* BD ; *ce qui restoit à démontrer.*

Suivant cette raison qu'Archiméde établit de la circonference du cercle à son diamétre, savoir,
176. *celle de 22 à 7, ou de 44 à 14, ou de 66 à 21 qui est toûjours la même raison, la surface du cercle est au quaré de son diamétre comme 11 à 14. Car soit nommé* m *la circonference du cercle, &* n *le diamétre, multipliant* m *&* n *par* n, *alors* mn nn :: m n *l. 3. n. 52. & puisque* m n :: 44 14 : *donc* mn nn :: 44 14. *Donc le quart de* mn *sera à* nn *comme* 11 *le quart do 44 est à 14. Or le quart de* mn *est la surface du cercle l. 3. n. 152. donc cette surface est à* nn *quarré du diamétre, comme 11 est a 14.*

177 *Ainsi on auroit trouvé la quadrature du cercle si on étoit assuré que la vraie raison de la circonference du cercle à son diamétre est comme 22 à 7 mais c'est ce qu'on ne peut point savoir ; ainsi cette quadrature est inconnuë. On la connoit néanmoins en partie, c'est à dire qu'on peut assigner une portion de cercle égale à une figure rectiligne; car le triangle ABC étant rectangle, le demi cercle ADBE est égal aux deux demi cercles AGB & BFC, puisque les cercles sont comme les quarrez de leurs diamétres s̃ n. 163. & que le quarré de AC est égal à celui de AB plus celui de BC s̃ 71. Otant dõc les parties communes, savoir ABD & BEC, il restera AGBDA & CEBFC comme deux lunes ou croissans, qui seront égales au reste du demi cercle ADBEC, lequel reste est le triangle ABC.*

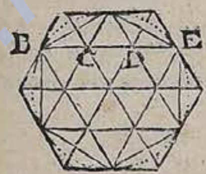


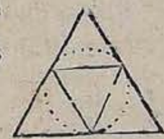


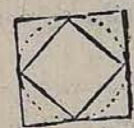
On voit aussi à l'œil que

la figure AEBFCGDH, semblable au coûteau à pié des Cordonniers, est égale au quarré BAC D: car par la construction les parties AHD ∝ AEB ∝ BFC ∝ CGD.

Les seules figures font voir qu'un triangle circonscrit à un cercle est triple de l'inscrit, que le quarré circonscrit est le double de l'inscrit, que l'exagone circonscrit est à l'inscrit comme 4 à 3. Remarquez ici en passant que pour couper geometriquement une ligne comme BE en trois parties égales, il faut faire qu'elle soit le côté d'un triangle équilateral inscrit dans un cercle, aprés aiant fait l'exagone & 178
coupé les côtez de l'exagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperont BE en trois parties égales BC, CD, DE.





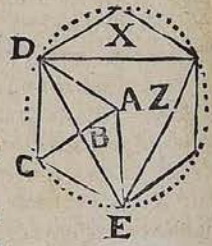


Voila un Teorême general qui donne une connoissance fort étenduë de ce qu'on peut savoir de cette matiere.

Quand de deux poligones inscrits l'un a deux 179.
fois plus de côtez que l'autre, le plus grand est au plus petit ; comme le raion du cercle est à l'apotême du plus petit.

Z est un poligone dont l'apotéme est AB, & X un poligone qui a deux fois plus de côtez. La surface de Z est égale à autant de fois le triangle DAE que Z a de côtez, & il est clair qu'ajoutant à chacun de ces triangles, le triangle DCE on au-

ra la surface de X *qui est à celle de* Z, *comme le romboïde* AECD *est au triangle* DAE : *or ces deux figures sont l'une à l'autre comme le raion* AC *est à* AB, *qui est l'apotéme de* Z ; *car les surfaces des deux triangles* DAE & DCE, *qui ont même base, sont comme leur hauteur* AB & BC, *ainsi de tous autres poligones, dont l'un aura deux fois plus de côtez que l'autre.*



Si on divise le poligone X *pour en faire un qui ait deux fois plus de côtez, que je nomme* Y ; *il en sera de même, & il est bon de remarquer que* Z *le premier poligone sera à ce troisiéme* Y *comme le plan de l'apotéme du premier & du second est au quarré du diamétre, ce que je démontre ainsi ; soit l'apotéme du premier nommé* m, *celui du second* n, *& le raion* k, *selon ce qui a été démontré.*

$$\left\{\begin{array}{l} Z,\ X :: m,\ k, \\ X,\ Y :: n,\ k. \end{array}\right.$$

En multipliant les antecedens par les antecedens, & les conséquens par les conséquens.

$$ZX,\ XY :: mn,\ kk.$$

Or ZX, XY :: Z Y, *donc* Z, Y :: mn kk. *Le premier poligone* Z *sera au troisiéme poligone* Y *comme* mn *plan de l'apotéme du premier & du second est à* kk *quarré du raion.*

Par cette métode on démontre que le premier poligone est au quatriéme, comme le solide fait de l'apotéme du premier, du second & du troisiéme est au cube du raion du cercle, ainsi de suite à l'infini.

180 *L'apotéme d'un quarré inscrit est la moitié*

d'un des côtez, ainsi un quarré est à un octogone comme la moitié d'un de ses côtez est au raion du cercle où il est inscrit ; ou ce qui est la même chose comme un de ses côtez est au diamétre du cercle. C'est pourquoi on a droit de conclure qu'un quarré dans un cercle est à un poligone qu'on a fait d'une infinité de côtez en doublant toûjours les côtez, c'est à dire d'un quarré faisant un octogone, d'un octogone un poligone de seize côtez, ainsi de suite, lequel poligone peut être consideré comme un cercle. On peut, dis-je, conclure que le quarré est au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apotémes de ces poligones, à la plus haute puissance du raion du cercle : mais ce n'est presque rien savoir ; car outre qu'on rencontre des raisons sourdes ; le raion & le diamétre sont divisibles à l'infini, ainsi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apotémes. Il est donc impossible d'arriver par cette voie enfin à un poligone égal à un cercle. Cette figure est ainsi incompréhensible, quoiqu'elle soit la plus simple de toutes les figures de Geométrie.

ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE CINQUIE'ME.

De la troisiéme dimension du corps ou des solides.

SECTION PREMIERE.

Des sections & rencontres des Plans.

AVERTISSEMENT.

Les plans en se coupant ou en se rencontrant, forment les solides, ce qui nous oblige de parler ici de

leurs sections & rencontres: Outre que les Teorêmes suivans servent à démontrer plusieurs propositions considerables dans les Mathématiques.

Définitions des Plans.

Plan ou surface droite, est celle qui est faite par 1.
le mouvement droit & uniforme d'une ligne droite le long d'une ligne droite.

C'est à dire, que l'espace que parcourt cette ligne droite qui est mûë le long d'une autre ligne droite qu'on conçoit immobile, & avec laquelle elle garde toûjours la même disposition, est un plan : ainsi il est évident qu'un plan est composé de lignes droites. Euclide définit le plan, *une surface qui est également comprise entre ses lignes*, ce qui n'est pas clair.

Propositions évidentes touchant les Plans.

PREMIERE PROPOSITION.

Une ligne droite peut être apliquée en tout sens 2.
à une surface plane, & convenir avec elle.

SECONDE PROPOSITION.

La surface d'un plan est la plus courte qu'on 3.
puisse concevoir entre les bornes de ce plan.

Car un plan est composé de lignes droites qui sont les plus courtes qu'on puisse concevoir entre leurs extrêmitez. Mais je ne dis pas que toute surface qui est la plus courte entre ses bornes est un plan ; car entre deux lignes qui sont à quelque distance l'une de l'autre, & qui ne sont pas posées de la même manière, ou qui ne sont pas dans un même plan : si on méne des lignes droites, on fera une surface la plus courte qui puisse être entre ces deux lignes, mais elle ne sera pas un plan, ainsi quoiqu'il soit vrai que tout plan est une surface la plus courte qu'on conçoive entre ses bornes ; néanmoins toute surface la plus courte entre ses bornes n'est pas un plan.

4. ### Troisie'me Proposition.

Vn plan est perpendiculaire sur un autre plan, lorsqu'il ne penche pas plus d'un côté que de l'autre.

Quatrie'me Proposition.

5. *Deux plans sont paralleles lorsque dans toutes leurs parties ils sont à une égale distance l'un de l'autre, & qu'étant prolongez ils ne se rencontrent point.*

Cinquie'me Proposition.

6. *On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtez, autant qu'il sera necessaire.*

Sixie'me Proposition.

7. *Vne ligne droite ne peut être en partie sur un plan & en partie en l'air.* Eucl. XI. Prop. 1.

Car pour lors cette ligne ne pouroit être appliquée à ce plan, & convenir avec lui ; ainsi selon la premiere proposition ce plan ne seroit pas plan. Outre cela on peut concevoir que la partie de cette ligne qui seroit dans le plan étant prolongée demeureroit toûjours dans le plan ; ce seroit donc une autre ligne que celle qui seroit en partie en l'air ; ces deux lignes néanmoins aiant deux points communs ne peuvent pas être diferentes l. 1. n. 16.

Se'tie'me Proposition.

Deux lignes droites qui se coupent peuvent être conçûës dans un même plan. Eucl. XI. Prop. 2. 8.

Les lignes DB & EC se coupent : aiant mené entre A B & AC des lignes droites, on aura une surface qui est un plan : car on y peut apliquer une ligne droite, c'est la surface la plus courte qu'on puisse concevoir entre les lignes AB & AC qui seront sur ce plan, lequel étant prolongé ; si AD & AE, qui sont parties des lignes BD & EC ne se trouvent pas dans ce même plan ; BD & CE seront en partie sur lui, & en partie en l'air : ce qu'on vient de voir être impossible.

Huitie'me Proposition. 9.

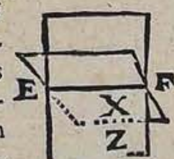
Tout triangle peut être conçû dans un plan.

C'est une suite de la proposition precedente.

Neuvie'me Proposition.

La commune section ou rencontre de deux plans, est une ligne droite. Eucl. XI. Prop. 3. 10.

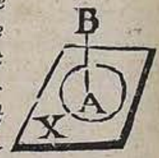
X & Z se coupent. Les extrêmitez de leur section sont les points E & F entre lesquels on a mené une ligne sur Z & une sur X. Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne ; on pouroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite ; ce qui est impossible l. 1. n. 15. La section de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.



Dixie'me Proposition.

Vne ligne droite telle que AB élevée sur le plan 11.

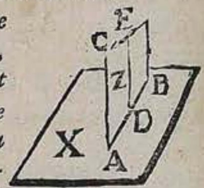
X doit être censée perpendiculaire lorsque de A son pié, comme centre aiant fait un cercle, B son sommet est également éloigné de la circonference de ce cercle; & si cela n'est pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.



Cela est conforme à la notion de la ligne perpendiculaire qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

12. ONZIE'ME PROPOSITION.

Concevant que AC une ligne perpendiculaire sur le plan X, est mûe d'un mouvement droit & uniforme selon une ligne droite, telle que AB, elle fera le plan Z, qui sera perpendiculaire en toutes ses parties sur le plan X.



13. DOUZIE'ME PROPOSITION.

Si la ligne ED perpendiculaire sur AB section de Z & de X est perpendiculaire sur X, tout le plan Z est perpendiculaire sur X.

Car on peut concevoir que le plan Z est fait par le mouvement droit & uniforme de DE sur AB; ainsi par la Proposition précédente, le plan Z est perpendiculaire sur le plan X.

14. TEOREME I.

Entre deux lignes paralleles ou non, qui sont dans un même plan ou entre une ligne & un point, on ne peut concevoir qu'un même plan, dans lequel est toute ligne droite menée entre ces deux lignes. Eucl. XI. Prop. 7.

Car si on veut concevoir deux plans, l'un sera plus grand ou plus petit, ce qui ne peut être, puisque § n. 3. toute surface qui n'est pas

la plus petite entre ses bornes n'est pas un plan. Ils seront donc égaux, ce qui étant, ils ne sont pas diferens; car si on veut dire qu'ils sont posez l'un sur l'autre, comme ils n'ont point d'épaisseur, ils ne peuvent faire qu'un seul plan.

TEOREME II. 15.

Deux plans qui conviennent en trois points qui ne sont pas sur la même ligne, conviennent entierement.

1° Entre deux des points donnez, on ne peut concevoir qu'une ligne droite. 2° Entre cette ligne droite & le troisiéme point donné, on ne peut concevoir deux diferens plans par la proposition précédente; ainsi la partie de ces deux plans entre ces trois points est une même chose; par conséquent si on prolonge cette partie ce ne sera qu'un même plan, ainsi ces deux plans ne seront pas diferens.

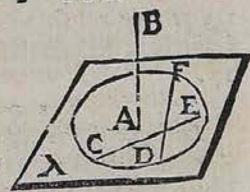
COROLAIRE. 16.

La position d'un plan ne dépend donc que de trois points, qui ne soient pas sur une même ligne.

Ou, ce qui est la même chose, *trois points qui ne sont pas sur une même ligne étant donnez, le plan est donné.*

TEOREME III. 17.

Si B sommet de la ligne AB élevée sur le plan X est également éloigné de C, D, E, trois points également distans de son pié A, cette ligne est perpendiculaire sur X.



1° Concevons dans le plan X un cercle également distant de B, qui passe par C, D, E, qu'on a supose en égale distance de B. 2° Concevons un second cercle dont A soit le centre, qui passe par les trois points C, D, E, aussi également éloignez de A par l'hipotése. Ces deux cercles l. 1. n. 84. ne sont qu'un même cercle. Donc AB est perpendiculaire sur X s̃ *n.* 11.

PROBLEME I.

18. *D'un point donné en l'air comme est B, abaisser une perpendiculaire sur le plan X.* Eucl. XI. Prop. 11. (*même figure.*)

Je tire à discretion deux lignes droites CE & DF, & apliquant une pointe du compas sur B, avec l'autre je prens les points C, D, E également distans, par lesquels je fais passer un cercle, au centre duquel je méne de B une ligne qui sera perpendiculaire par le Teorême precedent.

TEOREME IV.

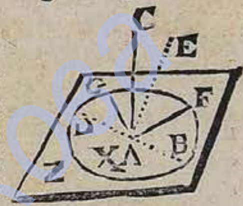
19. *Si une ligne est perpendiculaire sur le point de la section de deux lignes qui sont sur un plan, elle l'est sur tout ce plan.* Eucl. XI. Prop. 4.

Car aiant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de section des points également éloignez, le sommet de la perpendiculaire sur ces lignes sera également éloigné de quatre points qui sont sur ce plan, partant cette ligne sera perpendiculaire sur tout le plan s̃ *n.* 17.

TEOREME V.

20. *La ligne droite AB, & toute autre dans le plan Z menée par A pié de la perpendiculaire AC sur ce plan est perpendiculaire sur AC, ou AC est perpendiculaire sur toutes les lignes droites du plan Z qui passent par A.*

De A pié de la perpendiculaire AC, je decris X un cercle, & je prolonge la ligne BA de sorte qu'elle coupe X en D & B. Si C sommet de la perpendiculaire AC n'est pas également distant de D & de B, alors AC ne sera pas perpendiculaire sur AB, s̃ *n.* 11. mais aussi AC ne sera pas perpendiculaire sur le plan Z; ce qui est contre l'hipotése. AB rencontre donc perpendiculairement AC, ainsi de toute autre ligne du plan Z qui passe par A.



TEOREME VI. 21.

Si AC une ligne droite rencontre perpendiculairement dans un même point trois autres lignes droites AB, AF, AG, ces trois lignes seront en un même plan. Eucl. XI. Prop. 5. (*même figure.*)

Soit AB dans le plan Z, & que AG n'y soit pas, mais sur un autre plan. Concevant un troisiéme plan Y qui passe par AC & AG; & qui étant prolongé coupera Z, la ligne de la section de Y & de Z sera perpendiculaire sur AC: s̃ *n.* 20. aussi bien que AG. Donc sur AC il y aura deux perpendiculaires, ce qui ne peut pas être l. 1. n. 46. 22.

PROBLEME SECOND.

Sur le point A dans le plan Z élever une perpenune perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 12. (*même figure.*)

Il faut de A centre faire un cercle; toute ligne qui descendra d'un point également éloigné de ce cercle, sera la perpendiculaire qu'on demande: mais pour trouver ce point, il faut se servir d'une équerre, ou laisser tomber sur A un cordeau auquel pendeun plomb, Tout point dans ce cordeau sera celui qu'on cherche.

TEOREME VII.

23. *On ne peut d'un point sur un plan élever qu'une perpendiculaire.* Eucl. XI. Prop. 13. (*même figure.*)

Que cela ne soit, concevons que sur le même point A on éleve les deux lignes AE & AC qu'on supose perpendiculaires, & que de A comme centre on décrive X un cercle, les points E & C sommets des deux lignes égales AE & AC étans diferens ne peuvent être également éloignez de la circonference du cercle X; partant elles ne sont pas toutes deux perpendiculaires sur le plan Z s̃ *n.* 11.

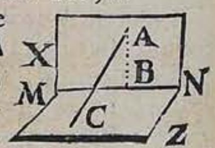
24. TEOREME VIII.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur ce plan. (figure suivante.)

Soit A le point donné au dessus d'un plan d'où on supose qu'on a mené deux perpendiculaires, savoir AB & AC : je joint leurs piés B & C par la ligne BC. Ces trois points A, B, C font le triangle ABC qui s̃ *9.* se peut concevoir dans un même plan. Les angles ABC & ACB que font les perpendiculaires AB & AC sont droits. Donc ABC auroit plus de deux angles droits, ce qui ne peut être. l. 2. n. 80.

25. COROLAIRE.

Si le plan X est perpendiculaire sur le plan Z, & que de A point dans le plan X on abaisse une perpendiculaire sur Z, cette ligne tombera sur MN section de X & de Z. Eucl. XI. Pr. 38.



Que cela ne soit : qu'une perpendiculaire tombe de A sur C hors de la ligne MN; j'abaisse AB perpendiculairement sur MN; ainsi comme B est dans la section de X & de Z, il y a

sur Z deux perpendiculaires AB & AC menées d'un même point A : ce qu'on vient de voir être impossible.

TEOREME IX. 26.

La ligne perpendiculaire est la plus courte qu'on puisse mener d'un point hors d'un plan sur ce plan. (même figure ci-dessus)

Le point donné est A, la ligne AB est perpendiculaire, AC ne l'est pas : je joins C & B par une ligne droite, le triangle ABC peut être conçû dans un plan s̃ *n. 9.* AB est la ligne la plus courte l. 1. n. 50.

COROLAIRE.

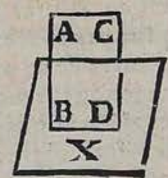
Donc la mesure de la distance d'un point hors d'un plan, à ce plan doit être une perpendiculaire. 27.

Puisque cette perpendiculaire est la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire.

TEOREME X. 28.

Deux lignes étant perpendiculaires sur un même plan, on les peut concevoir dans un même plan.

Concevons qu'on a mené par le pié des deux lignes AB & CD perpendiculaires sur X, une troisiéme ligne BD, sur laquelle concevons que AB ou CD se meuve uniformément & toûjours perpendiculairement, par la premiere définition elles feront un plan, ce qu'il faloit démontrer.



TEOREME XI. 29.

AB & CD (même figure) *perpendiculaires sur le plan X sont paralleles; & si de deux paralleles l'une est perpendiculaire sur le plan X, l'autre le sera.* Euclid. XI. Pr. 6. & 8.

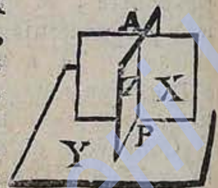
1° Soit mené la ligne BD par le pié de AB & de CD, lesquelles lignes s̄ *n.* 20. sont perpendiculaires sur BD ; donc ces trois lignes AB, CD, BD peuvent être dans un même plan s̄ *n.* 28. Ainsi AB & CD étant perpendiculaires sur BD, elles sont paralleles *l.* 1. n. 65.

2° Si AB & CD sont paralleles, & que AB soit perpendiculaire, je dis que CD le sera aussi; car aiant mené BD la ligne AB sera perpendiculaire sur BD s̄ *n.* 20. donc l. 1. n. 66. CD parallele à AB est aussi perpendiculaire sur BD, ce qu'il faloit prouver.

Teoreme XII.

30. *La section AB de deux plans Z & X, qui sont perpendiculaires sur Y, est une perpendiculaire sur le même plan Y.* Eucl. XI. Pr. 19.

1° Cette section est une ligne droite s̄ *n.* 10. 2° puisque les plans Z & X sont perpendiculaires sur Y, la ligne AB entant qu'elle est considérée en Z ne peut être conçûë penchante de part & d'autre de Z : Et par la même raison entant qu'elle est considérée en X, on ne peut pas concevoir qu'elle penche de côté ou d'autre de ce plan X ; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan Y également éloignez de B, qui seront aussi également éloignez de A ; ainsi AB est perpendiculaire sur le plan Y s̄ *n.* 17.



Teoreme XIII.

31. *La section de X & de Z étant perpendiculaire sur Y. ces deux plans & quelqu'autre que ce soit dont AB sera la section, seront perpendiculaires sur Y.* Eucl. XI. Pr. 18. (*même figure.*)

Car tous ces plans peuvent être conçûs faits par le mouvement de AB s̄ *n.* 28.

Teoreme XIV.

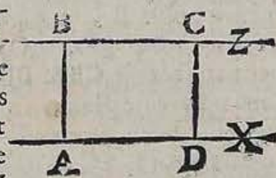
Si trois points dans un même plan, & non sur une même ligne ; sont également distans d'un second plan, ces deux plans sont paralleles. 32.

La position d'un plan ne dépend que de trois points s̄ *n.* 16. par conséquent si trois points d'un plan sont également distans d'un second plan, ces deux plans sont également distans dans tous leurs autres points ; ainsi ils sont paralleles.

Teoreme XV.

Les plans X & Z étant paralleles, si la ligne AB est perpendiculaire sur X, elle le sera aussi sur Z. Et si AB est perpendiculaire sur X & sur Z, ces deux plans sont paralleles Eucl. XI. Pr. 14. 33.

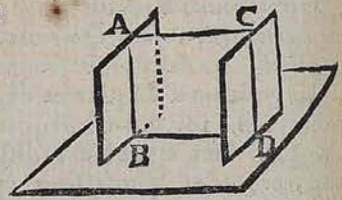
Si on prétend que AB perpendiculaire sur X ne l'est pas sur Z, concevons qu'on ait élevé sur A & sur Z une ligne AC perpendiculaire qui sera plus courte que AB l. 1. n. 50. De C je conçois une perpendiculaire sur X, qui sera encore plus courte que AC, partant plus que AB ; ainsi le point D s'aprochera plus de Z que A, ainsi X & Z n'étant pas en égale distance, ils ne sont pas paralleles, ce qui est contre l'hipotése. Une ligne donc qui est perpendiculaire sur l'un de ces plans, l'est aussi sur l'autre. Le reste est aisé.



Teoreme XVI.

Les sections AB & CD de deux plans paralleles coupez par un troisiéme plan, sont des lignes paralleles. Eucl. XI. Pr 16. 34.

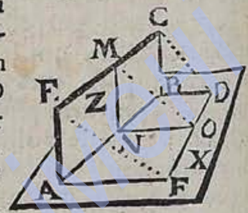
Ces ſections AB & CD ſont des lignes droites s̃ n. 10. leſquelles ſont dans le troiſiéme plan, où étant prolongées, elles ſe rencontreroient ſi elles ne ſont pas paralleles ; par conſéquent les deux autres plans où elles ſont étans prolongez, ſe rencontreroient auſſi, ainſi ils ne ſeroient pas paralleles, contre la ſupoſition. On ne peut pas donc dire que AB & CD ne ſont pas paralleles.



Teoreme XVII.

35. *La ligne CE dans le plan Z étant parallele avec AB ſection de Z & de X, eſt auſſi parallele avec toute autre ligne menée ſur le plan X parallelement à AB.* Eucl. XI. Pr. 9.

Dans Z je méne CB perpendiculairement ſur AB, & dans X au même point B, la perpendiculaire BD. On peut concevoir CB & BD dans un même plan, ſur lequel AB eſt perpendiculaire s̃ n. 19. EC & DF étant paralleles à AB, elles ſeront auſſi perpendiculaires ſur ce même plan s̃ n. 29. & conſequemment toutes paralleles, l. 1. n. 65. ce qu'il faloit démontrer.



Teoreme XVIII.

36. *Toutes lignes paralleles dans le plan X rencontrant d'autres lignes auſſi paralleles dans le plan Z font entr'elles les angles égaux.* Eucl. XI. Pr. 10. (*même figure.*)

BD & NO ſont paralleles entr'elles ſur le plan X & BC, & NM ſur le plan Z ; il faut prouver que l'angle CBD eſt égal à MNO. Pour cela je méne DF & CE paralleles à AB. Puiſque les paralleles entre paralleles ſont égales, car elles font les mêmes angles l. 2. n. 30. & par conſéquent égales l. 2. n. 109. puiſque, dis-je, CE eſt parallele à DF par le Teoréme precedent : partant BD)(NO & BC)(NM & CD)(MO ; donc les triangles CBD & MNO ſont égaux & ſemblables, ainſi l'angle CBD eſt égal à MNO ; ce qu'il faloit démontrer.

Teoreme XIX. 37.

Si dans un plan Z, la ligne BA eſt parallele à DE dans Y un ſecond plan, & que AC dans Z ſoit auſſi parallele à EF, ces deux plans Z & Y ſont paralleles. Eucl. XI. Pr. 15.

B & A dans le plan Z ſont également éloignez du plan Y, comme auſſi A & C, & par conſéquent C & B : ainſi trois points de Z, ſavoir A, B, C étant également éloignez de Y, il faut que Z & Y ſoient paralleles s̃ n. 32.

* Teoreme XX. 38.

Deux lignes coupées par des plans paralleles, ſont coupées proportionnellement. Eucl. XI. Pr. 17.

Les ſections de ces plans & de ces deux lignes ſont des lignes paralleles, ainſi ce Teoréme eſt le même que le Teoréme premier du l. 4. n. 6.

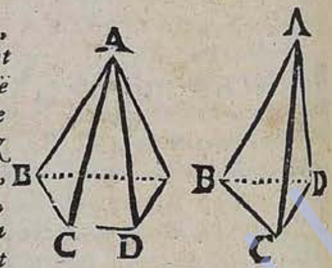
SECTION II.

De la composition des Solides.

Définitions.

PREMIERE DEFINITION.

39. *SI la ligne AB, dont le sommet A est fixe, est müe de sorte, qu'elle parcoure les côtez de quelque poligone, comme de BCD, cette ligne décrira par ce mouvement un solide qu'on nomme Piramide.*



SECONDE DEFINITION.

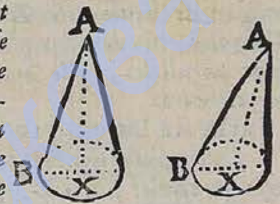
40. *Le poligone BCD s'apelle la base de la piramide, laquelle piramide a autant de faces que ce poligone a de côtez.* (même figure,)

Une piramide de trois faces s'apelle triangulaire, si elle en a plus de trois on l'apelle generalement piramide poligone. Euclide dit que la piramide est un solide compris de plusieurs plans qui se rencontrent en un même point, aiant un autre plan pour base.

TROI-

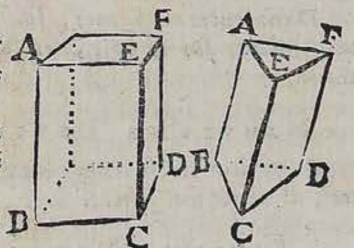
TROISIE'ME DEFINITION. 41.

Si la ligne AB, dont le sommet A est fixe, se meut en parcourant le cercle X, elle fait un cone dont le cercle X est la base, & la ligne tirée de la pointe A au centre du cercle est dite l'axe de ce Solide.



QUATRIE'ME DEFINITION. 42.

Si la ligne AB se meut uniformément au tour de deux poligones égaux & semblables, tels qu'AEF & BCD qui soient paralleles, & situez de sorte que les côtez égaux se répondent parallelement, le solide qui se fera est un prisme, qui a pour base ce poligone.



Euclide considére les prismes comme compris entre plusieurs plans, deux desquels qui sont oposez sont égaux, semblabes & paralleles.

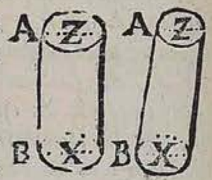
CINQUIE'ME DEFINITION. 43.

Vn prisme a autant de faces que le poligone qui est sa base a de côtez. Si la base du prisme est un parallelogramme, il s'apelle parallelipide, si c'est un triangle, prisme triangulaire, s'il a plus de trois faces, prisme poligone.

M

SIXIE'ME DEFINITION.

44. *Si la ligne AB se meut autour de deux cerles Z & X égaux, & dont les plans sont paralleles, elle décrit un cilindre.*



45. SETIE'ME DEFINITION.

La ligne qui joint les centres des cercles X & Z, qui sont les bases du cilindre, s'apelle l'axe du cilindre.

HUITIE'ME DEFINITION.

Dans toutes ces figures, lorsque l'axe est perpendiculaire sur la base, les solides sont apellez droits. 46.

NEUVIE'ME DEFINITION.

47. *Si un demi cercle tourne autour de son diamétre, il décrit une sphére.*

DIXIE'ME DEFINITION.

48. *Le diamétre du cercle dont la révolution a formé la sphére, est l'axe de cette sphére.*

ONZIE'ME DEFINITION.

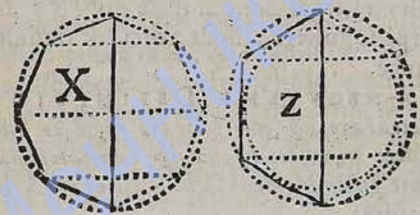
49. *Le centre du cercle qui a décrit la sphére, est le centre de la sphére.*

DOUZIEME DEFINITION.

50. *Les lignes tirées du centre de la sphére à la circonference, s'apellent raions de la sphére, & celles qui passent par le centre de la sphére & se terminent à la circonference, sont les diamétres de la sphére.*

TREIZIE'ME DEFINITION.

Si on conçoit qu'une figure rectiligne ou mixte, comme X ou Z tourne circulairement sur un de ses côtez, comme axe, elle décrira par sa révolution un solide nommé sphéroïde. 51.



Quoiqu'il puisse y avoir ainsi une infinité de sphéroïdes faits par la révolution d'une infinité de figures réctilignes ou mixtes, néanmoins l'on ne parle dans la suite que des seuls sphéroïdes formez par la révolution de la moitié d'un poligone régulier, inscrit ou circonscrit à un cercle, tournant circulairement sur le diamétre de ce cercle comme axe, tel qu'est X ou Z.

QUATORZIE'ME DEFINITION.

Solides semblales sont ceux qui sont bornez par des plans semblables & égaux en nombre. 52.

QUINZIE'ME DEFINITION.

Solides égaux & semblables, sont ceux qui sont bornez par de semblables plans égaux en nombre & en grandeur. 53.

SEIZIE'ME DEFINITION.

L'angle solide se fait quand trois ou plusieurs plans se coupent en aboutissant à un point, comme la pointe d'un diamant bien taillé. 54.

Ainsi deux seuls angles plans ne peuvent faire un angle solide.

M 2

Dix-setieme Definition.

55. *Vn solide de plusieurs angles & de plusieurs faces planes se nomme poliédre.*

Dix-huitie'me Definition.

Poliédre régulier ou corps régulier est celui qui
56. *est compris entre des figures régulieres & égales, duquel aussi tous les angles solides sont égaux.*

On démontrera dans la suite qu'il n'y a que cinq corps réguliers, dont voici les définitions par avance.

Dix-neuvie'me Definition.

57. *Le tétraédre est un poliédre régulier compris sous quatre triangles égaux & équilateraux; ce qui est une piramide dont la bâse est égale à chacune de ses faces.*

58. ### Vingtieme Definition.

L'exaédre ou cube est composé de six quarrez égaux, comme un dé à joüer.

Vingt-unie'me Definition.

59. *L'octaédre est de huit triangles égaux & équilateraux.*

Vingt-deuxie'me Definition.

60. *Le dodécaédre est compris sous douze pentagones égaux & équilateraux.*

Vingt-troisie'me Definition.

L'icosaédre est de vingt triangles égaux & équi-
61. *lateraux.*

Vingt-quatrie'me Definition.

Vn solide A *est dit circonscrit à un autre solide*
62. B *qu'il contient, s'il est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer* B, *ou*, ce qui est la même chose, *si* B *est le plus grand de tous les solides que* A *peut renfermer.*

Vingt-cinquie'me Definition.

63. *Vn solide* B *est dit inscrit dans un autre solide* A *où il est renfermé, s'il est le plus grand de*

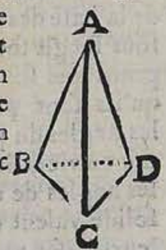
tous les solides semblables qui puissent être renfermez dans A, *ou*, ce qui est la même chose, *si* A *est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer* B.

Ces définitions donnent les idées les plus claires & les plus generales qu'on puisse avoir des circonscriptions ou inscriptions des solides. Un cilindre est dit circonscrit à une sphére, qui est la plus grande qu'il puisse renfermer, & par conséquent dont il touche la circonference. Si la sphére étoit plus petite, on ne pouroit pas dire proprement que le cilindre lui fut circonscrit, & un cilindre est conçû inscrit dans une sphére qui est la plus petite qu'on puisse concevoir renfermer ce cilindre, & par conséquent qui touche les deux cercles de ces deux bases.

Teoreme premier. 64.

Si un angle solide est compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris ensemble comme on voudra, sont plus grans que le troisiéme. Eucl. XI. Prop. 20.

Les angles BAD, BAC, CAD font un angle solide; on ne peut pas concevoir de plan plus petit entre AB & AD que BAD § *n.* 3. partant le plan droit BAD est plus petit que le plan creux ABCD : on démontrera de la même maniere que l'angle plan BAC est plus petit que BAD avec CAD.



Corolaire.

Les trois bases de trois triangles dont les côtez 65.

sont égaux, peuvent faire un triangle. Eucl. XI. Prop. 22. (*même figure.*)

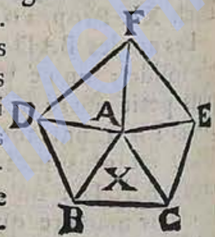
AB, AC, AD sont lignes égales, les bases BC, CD, DF peuvent faire un triangle. Pour cela il sufit que deux de ces lignes prises ensemble soient plus grandes que la troisiéme: Or cela est ainsi, car deux des angles dont ces lignes sont les bases, seront plus grans que l'angle qui est sur la troisiéme; & par conséquent cette troisiéme ligne est plus petite l. 1. n. 104.

TEOREME SECOND.

66. *Tous les angles des plans qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits.* Eucl. XI. Prop. 21.

1° Soit X un angle solide compris sous cinq triangles, dont le sommet A doit être conçu en l'air. L'angle DBC est plus petit que les deux angles DBA & CBA, par le Téoréme précédent; ainsi BCE est plus petit que les angles ACB & ACE pris ensemble, de même des autres.

2° Tous les angles du poligone BCEFD, base de l'angle solide, sont l. 2. n. 122. égaux à six angles droits; ainsi tous les angles de la base des 5 triangles qui font l'angle solide X sont plus grans que six droits, puisqu'ils sont plus grans que les angles du poligone comme on vient de voir.



Tous les angles de ces cinq triangles qui font l'angle solide valent dix droits; donc puisque ceux de leurs bases valent plus de six droits, ceux des sommets valent moins que quatre droits; ce qu'il faloit démontrer.

On peut démontrer ce Téoréme en cette maniere,

concevons 1° que A est un point dans un plan, & le sommet de plusieurs triangles dont les côtez de X sont les bases. Tous ces angles autour de A ne valent que quatre angles droits. 2° Si on léve le point A, alors les angles du sommet de ces triangles deviendront plus petits aians mêmes bases & les côtez plus grans; ce qui étant, tous ces angles vaudront moins que quatre angles droits.

PROBLEME PREMIER.

Aiant trois angles plans dont deux pris ensemble sont plus grans que le troisiéme, mais qui tous ensemble sont moindres que quatre angles droits, faire un angle solide. Eucl. XI. Prop. 23. 67.

Des trois bases de ces trois angles, il faut faire un triangle, & sur chacun des côtez de ce triangle élever l'angle plan dont il est la base; ensuite retranchant ce qui sera entre les trois angles, les joindre; ce qui fera l'angle solide qu'on cherche. Il sufit d'executer en cette maniere ce Problême.

PROBLEME SECOND.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en cette ligne, faire un angle solide égal à un angle solide donné. Eucl. XI. Prop. 26. 68.

Il faut faire la figure que font les côtez de la base de cét angle solide, & sur chaque côté faire les angles plans égaux à ceux qui composent l'angle solide donné, & puis les joindre comme dans le Problême précédent.

TEORÉME TROISIE'ME.

S'il y a deux plans égaux, aux sommets desquels on léve en l'air deux lignes droites, faisans angles égaux avec les lignes des angles premierement posez chacun au sien: & d'un point pris au haut de chacune de ces deux lignes élevées, sont menées des lignes perpendiculaires aux plans où 69 *sont les angles premierement posez, & des points où tombent ces perpendiculaires, sont tirées des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez : les angles que font ces lignes avec les levées en l'air, sont égaux entr'eux.* Eucl. XI. Prop. 35. Cette Proposition n'est qu'un Lemme dont je n'ai pas besoin, ainsi je la passe.

TEOREME QUATRIE'ME.

70. *On ne peut inscrire dans une sphére que les cinq corps réguliers poliédres.*

C'est à dire qu'on ne peut concevoir aucun autre solide compris sous des figures planes toutes égales & semblables, dont tous les angles touchent la sphére dans laquelle ce solide soit conçû inscrit.

La raison est qu'il n'y a que les angles plans dont ces cinq corps sont composez, qui puissent faire un angle solide, comme nous l'allons démontrer.

1° Trois triangles égaux & équilateraux peuvent faire un angle solide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle solide ne valent que trois fois soixante degrez, chacun des angles d'un équilateral étant de soixante. Trois de ces triangles joints ensemble font les angles solides du tétraédre.

2° Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle solide, tel que celui de l'octaédre ; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois soixante, ce qui est moins que quatre droits.

3° Cinq de ces triangles peuvent encore faire un angle solide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois soixante degrez, ce qui est moins que quatre angles droits. L'angle de l'icosaédre est fait par cinq de ces triangles.

Six triangles équilateraux ne peuvent faire un angle solide ; car les angles plans qui comprendroient l'angle solide vaudroient quatre angles droits : six fois soixante faisant trois cent soixante valeur de quatre angles droits ; ainsi ces six triangles feroient un angle plan & non un angle solide par le Téorême 2. s̄. *n.* 66.

4° Prenant des quarrez, si on en joint trois ensemble, on a l'angle du cube, mais quatre quarrez, dont les quatre angles sont droits joints ensemble font un plan.

5° Trois pentagones font encore un angle solide, qui est celui du dodécaédre, car ils ne font que trois fois cent huit, c'est à dire trois cent vingt-quatre ; mais quatre pentagones ne le peuvent pas, car leurs angles feroient quatre cent trente-deux, ainsi ils vaudroient plus de quatre droits.

6° Plus les figures ont de côtez, les angles que comprennent ces côtez sont plus grans ; ainsi si trois exagones ne peuvent faire un angle solide, à plus forte raison les eptagones ne le peuvent faire ; ainsi des autres figures qui suivent.

Propositions évidentes.

PREMIERE PROPOSITION.

Une figure est plus grande que celle autour de laquelle elle est circonscrite, & plus petite que celle dans laquelle elle est inscrite. 71.

SECONDE PROPOSITION.

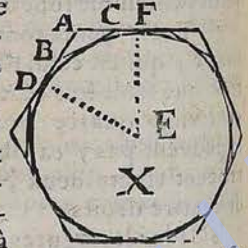
De deux prismes de même hauteur, celui dont la base est moindre, & qui par conséquent peut être comprise en celle de l'autre, est plus petit. 72.

Car il eſt évident qu'il y eſt contenu : or ce qui contient eſt plus grand que ce qui eſt contenu.

TROISIE'ME PROPOSITON.

73 *De deux priſmes circonſcrits à un cilindre, celui-là aproche plus du cilindre qui a plus de côtez.*

La baſe d'un cilindre propoſé eſt X, celle du priſme qui a moins de côtez, & qui eſt circonſcrit au cilindre ſoit nommé Y, & Z celle d'un autre priſme qui a plus de côtez, & qui eſt circonſcrit au même cilindre. Le poligone Z l. 2. n. 148. eſt plus petit que le poligone Y : les priſmes dont ces poligones ſont les baſes, ſont de même hauteur, étant circonſcrits à un même cilindre, donc § *n.* 72. celui qui ſera ſur Z, & qui a ainſi plus de côtez, eſt plus petit que celui qui en a moins, & dont Y eſt la baſe ; ainſi il aproche plus du cilindre ; ce qu'il faloit démontrer.



QUATRIE'ME PROPOSITION.

74. *Donc un priſme d'une infinité de côtez aproche ſi prés du cilindre qu'il n'y a point de diference; ainſi on peut ſupoſer que le cilindre eſt un priſme d'une infinité de côtez.*

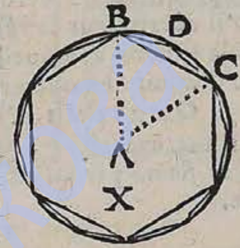
CINQUIE'ME PROPOSITION.

75 *De deux priſmes inſcrits dans un cilindre, celui-là aproche plus du cilindre qui a plus de côtez.*

La baſe du cilindre propoſé eſt X, les deux poligones Z & X inſcrits dans ce cercle ſoient les baſes de deux priſmes inſcrits dans ce cilin-

dre dont X eſt la baſe.

Le poligone Y qui a plus de côtez eſt plus grand, & aproche plus du cercle que le poligone Z l. 2. n. 150. ces deux priſmes, dont Z & Y ſont les baſes, ſont de même hauteur, étant inſcrits dans un même cilindre ; donc par la ſeconde Propoſition, le priſme qui eſt ſur Y eſt plus grand que celui qui eſt ſur Z, ainſi il aproche plus du cilindre ; ce qu'il faloit démontrer.



SIXIE'ME PROPOSITION. 76.

De deux piramides de même hauteur, celle qui a une plus grande baſe eſt la plus grande.

Car il eſt évident que ſi l'on conçoit que l'une ſoit miſe dans l'autre, celle qui a une plus grande baſe contiendra celle qui en a une plus petite.

SETIE'ME PROPOSITION. 77.

De deux piramides circonſcrites à un cone, celle qui a plus de côtez aproche plus du cone.

HUITIE'ME PROPOSITION.

De deux piramides inſcrites dans un cone, celle qui a plus de côtez aproche plus du cone. 78.

NEUVIE'ME. PROPOSITION.

Donc on peut ſupoſer qu'un cone eſt une piramide d'une infinité de côtez. 79.

DIXIE'ME POPOSITION.

Plus un poligone a de côtez, le ſphéroïde qu'il forme aproche plus de la ſphére autour de laquelle il eſt circonſcrit. 80.

Car plus le poligone, qu'on peut apeller le generateur du ſphéroïde, aura de côtez, plus il aprochera du cercle ; ainsi le sphéroïde qu'il décrira par sa révolution aprochera plus de la sphére à laquelle il est circonscrit : ce qu'il faloit démontrer.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Donc une sphére peut être prise pour un sphé-
81. *roïde formé par un poligone d'une infinité de cô-tez.*

SECTION III.

De la surface des Solides.

TEOREME PREMIER.

82. *LA surface d'un prisme droit est égale à un parallelogramme qui est de même hauteur que ce prisme & dont la base est égale au circuit de ce prisme.*

Les surfaces d'un prisme sont des parallelogrammes tous de même hauteur, dont les bases prises ensemble font le circuit de ce prisme : ils sont donc égaux à un parallelogramme de la hauteur du prisme, & dont la base est égale à son circuit, ce qui est évident.

On n'y comprend point les surfaces des bases.

COROLAIRE PREMIER.

83. *Donc puisqu'un cilindre droit peut être pris pour*

un prisme n. 74 *d'une infinité de côtez sa surface est égale à un parallelogramme de même hauteur, dont la base est égale à la circonference du cercle, qui est la base de ce cilindre.*

COROLAIRE SECOND. 84.

Donc tout ce qui a été démontré de la raison qu'ont les parallelogrammes entr'eux convient aux surfaces des cilindres.

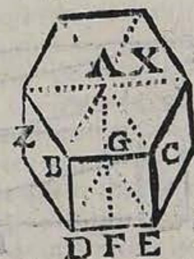
Les surfaces de deux cilindres sont l'une à l'autre en raison composée de leur hauteur & du circuit de leur base.

2° Dans deux cilindres, si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base ; c'est à dire si la raison de leurs surfaces est composée de deux raisons égales, cette raison est doublée, l. 4. n. 85

3° Si deux cilindres ont ou leurs hauteurs ou leurs bases égales, leurs surfaces sont entr'elles comme les inégales, l. 4. n. 84.

TEOREME II. 85.

Le poligone X est une des deux bases du prisme Z, la hauteur GF de ce prisme est égale à GA, qui est une ligne menée de A centre du poligone X perpendiculairement sur BC l'un des côtez : je dis que la surface du prisme Z est double de celle du poligone X.



Aiant mené de tous les angles du poligone X des lignes au centre A, on fait autant de triangles que Z a de faces, lesquelles faces ſont des parallelogrammes. Or ces parallelogrammes, comme eſt BCED, & ces triangles comme eſt ABC, ont même hauteur & même baſe : donc ces parallelogrammes ſont doubles de ces triangles, l. 2. n. 132. & par conſéquent la ſurface de Z composée de ces parallelogrammes eſt double de celle de X égale à tous ces triangles.

Corolaire. I.

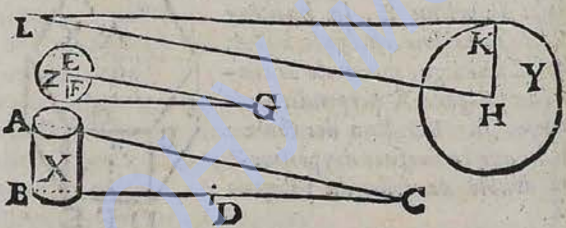
86. *Donc ſi la hauteur d'un cilindre qu'on peut regarder comme un priſme eſt égale au raion du cercle qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera double de celle du cercle.*

Corolaire II.

87. *Ainſi ſi un cilindre a pour ſa hauteur deux fois le raion, ou une fois le diamétre du cercle qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera quatre fois plus grande que celle de ce cercle.*

Teoreme troisie'me.

88. *La ſurface du contour d'un cilindre eſt égale à celle d'un cercle dont le raion eſt moien proportionnel entre la hauteur de ce cilindre & le diamétre du cercle qui eſt la baſe.* Archiméde l. 1. Prop. 16.



X eſt un cilindre dont AB eſt la hauteur, BD le circuit de ſa baſe qui eſt le cercle Z, dont le

circuit eſt FG ou BD, & BC le double de ce circuit. La ſurface de X eſt égale au parallelogramme ABD ou au triangle ABC, comme celle du cercle Z au triangle EFG l. 2. n. 144. Je ſupoſe que HK raion du cercle Y, eſt moien proportionnel entre AB hauteur de X, & 2EF diamétre de Z.

Soit KL le circuit de Y, ainſi ſa ſurface eſt égale au triangle HKL : il n'eſt donc queſtion que de prouver que le triangle HKL eſt égal au triangle ABC. car dans tous les cercles il y a une même raiſon entre le raion & la circonference.

Par l'hipotéſe $\div$ AB, HK, 2EF : or HK, KL : : 2EF, 2FG ou BC : donc HK, 2FE : : KL, BC : donc puiſque AB, HK : : HK, 2EF. Ainſi AB, HK : : KL, BC l. 3. n. 51. partant AB†BC)(HK†KL, l. 3. n 63. Or les triangles ABC & HKL ſont les moitiés de ces rectangles, ils ſont donc égaux, ce qu'il faloit prouver.

Teoreme quatrie'me.

89. *La ſurface d'une piramide eſt égale à un triangle, dont la hauteur eſt égale à la hauteur de chacune de ſes faces, & dont la baſe eſt égale au circuit de la baſe de cette piramide, ou à un parallelogramme de même hauteur, dont la baſe eſt la moitié plus petite.* Archiméde l. 1. Pr. 10. & 11.

Chacune des faces de la piramide eſt un triangle, ces faces étant égales, ces triangles ſont égaux entr'eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la baſe eſt égale à toutes les baſes priſes enſemble de ces triangles, l. 2. n. 142. Or ce triangle eſt égal à un parallelle de même hauteur dont la baſe eſt moitié plus petite l. 2. n. 132. qui eſt ce qu'il faloit prouver.

Corolaire premier.

90. *Donc puisque les cones peuvent être considerez comme des piramides, la surface d'un cone est égale à un triangle rectangle de même hauteur que la surface du cone & dont la base est égale au circuit de la base du cone, ou à un pararallelogramme rectangle de même hauteur, dont la base est égale à la moitié de sa base.*

La hauteur de la surface du cone & de la piramide est une ligne droite la plus courte qu'on puisse concevoir, menée sur la surface, du sommet à la base.

Corolaire second.

91. *Tout ce qui a donc été démontré des raisons & des proportions entre plusieurs rectangles semblables, convient aux surfaces des cones.*

1° Les surfaces des cones sont entr'elles en raison composée de leur hauteur & de leur base.

2° Si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, ces surfaces seront en raison doublée.

3° Si les deux cones ont leur hauteur ou leur base égale, leurs surfaces seront entr'elles comme les inégales.

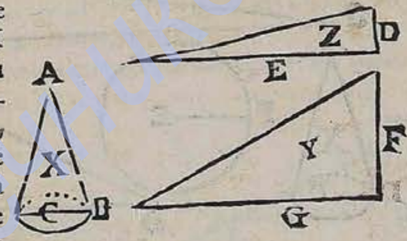
4° Donc puisque les circonferences des cercles sont entr'elles comme leurs diamétres, deux cones aiant même hauteur, leurs surfaces sont entr'elles comme les diamétres de leurs bases.

5° Un rectangle étant donné, on en peut trouver un ou plusieurs semblables qui aient une telle raison avec lui; aussi un cone étant donné, on peut trouver un ou plusieurs autres cones aussi semblables, qui soient avec le donné en raison requise.

Teoreme cinquiéme.

La surface du cone X est à celle du cercle BCB, qui est sa base comme AB hauteur de sa surface est au raion de ce cercle. Archiméde l. 1. Prop. 18. 92.

La surface de ce cercle est égale au triangle rectangle Z dont le côté D est égal au raion BC & le côté E au circuit du cercle l. 2. n. 52.



La surface du cone X est égale au triangle rectangle Y, dont le côté F est égal à AB, & le côté G au circuit de sa base, *s n. 90.*

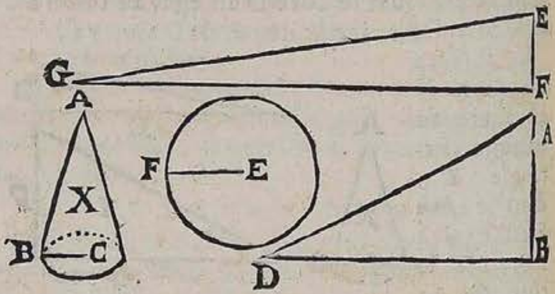
G & E étant égaux chacun au circuit du cercle, qui est la base du cône, ils sont égaux entr'eux, partant les surfaces de ces deux triangles rectangles Y & Z, qui ont des bases égales, savoir G & E, sont entr'elles comme F à D l. 4. n. 84. mais AB)(F, & BC)(D; donc X surface du cone est à celle du cercle sa base comme AB hauteur de sa surface est à BC raion du cercle de sa base, ce qu'il faloit prouver.

Teoreme sixiéme. 93.

La surface d'un cercle dont le raion est moien proportionnel entre la hauteur du cone, & le raion de la base de ce cone, est égale à la surface de ce cone. Archiméde l. 1. prop. 17.

Soit X un cone dont AB est la hauteur de sa surface & BD le circuit qui est sa base, ainsi sa surface est égale au rectangle ABD. La ligne BC est le raion de sa base. Je supose que EF est moien proportionnel entre AB & BC, & que

EF est le raion d'un cercle dont FG est le circuit, ainsi la surface de ce cercle est égale au triangle EFG, par conséquent il n'est question que de prouver que ABD⊃⊂EGF.



Par l'hipotése AB, EF :: EF, BC : & puisque les circonferences des cercles sont entr'elles comme leurs diamétres EF, BC :: FG, BD. Ainsi AB, EF :: EF, BC :: FG, BD. Donc AB, EF :: FG, BD; partant AB+BD⊃⊂EF+FG l. 3. n. 63. Or ABD est moitié de AB+BD l. 2. n. 132. comme aussi EFG est moitié de EF+FG. Ces triangles sont donc égaux, ce qu'il faloit prouver.

TEOREME SETIÉME.

94. *Si la hauteur & la base d'un prisme sont égales à la hauteur & à la base d'une piramide droite, la surface du prisme sera double de celle de la piramide.*

Chaque face du prisme est un parallelogramme, & chaque face de la piramide est un triangle. Dans le cas proposé ces parallelogrammes & ces triangles sont de même hauteur & sur même base : donc l. 2. n. 132. ces parallelogrammes sont doubles de ces triangles ; ainsi la surface du prisme est double de celle de la

piramide, ce qu'il faloit prouver.

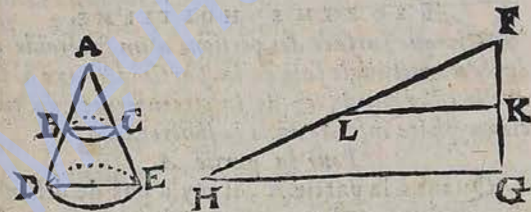
COROLAIRE.

Donc les cones pouvant être considerez comme des piramides, & les cilindres comme des prismes ; on peut dire que la surface du cilindre est double de celle du cone de même hauteur & sur même base. 95.

LEMME I.

La surface de BCDE fragment du cone ADE, est égale à celle du trapeze GHLK. 96.

La surface du cone AED est égale au trian-



gle rectangle FGH dont FG⊃⊂AD, & GH égales à la circonference du cercle DE s̃ n. 90. & celle du cone ABC au triangle rectangle FKL dont FK⊃⊂AB & KL à la circonference du cercle CB : ôtant donc FKL de FGH le reste GHLK sera égal an fragment BCDE, ce qui est évident.

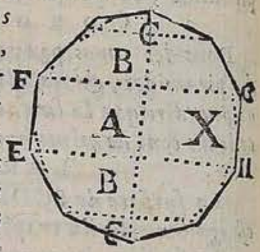
LEMME II.

HC & KL sont les raions des cercles des deux bases d'un fragment de cone. KC est coupé en M par la moitié, & MN est parallele à KL & HC : je dis que la surface de ce fragment, est égale au rectangle fait de KC hauteur de cette surface, & de la circonference d'un cercle dont MN est le raion. 97.

Car CHLK égal à cette surface s̃ n. 96. est égal à KCOP.

LEMME III.

98. *Si l'on joint les angles d'un ſphéroïde comme X, par des plans perpendiculaires à ſon axe qui le diviſent en pluſieurs parties, ces parties ſeront ou des cones comme C, ou des fragmens de cone comme B ou un cilindre comme A.*



Cela eſt évident.

99. TEOREME HUITIE'ME.

Chaque ſurface des portions d'un ſphéroïde eſt égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou ſphére inſcrite dans ce ſphéroïde.

Pour la partie A.

Quant à la partie A, il n'y a pas de dificulté, puiſque c'eſt un cilindre dont la ſurface ſ̄ *n.* 83. eſt égale au rectangle de EF par la circonference d'un cercle dont le diamétre eſt EH, lequel eſt égal au diamétre du cercle ou ſphére inſcrite dans le ſphéroïde X, ce qu'il faloit prouver.

Pour la partie B.

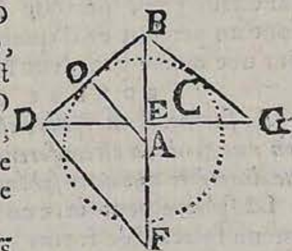
Il faut démontrer que la ſurface de la partie B, qui eſt un fragment de cone, eſt égale à un rectangle fait de KL partie de l'axe du ſphéroïde à laquelle elle répond, & de la circonférence d'un cercle inſcrit au dit ſphéroïde, dont CN eſt le diamétre. (*Figure ſuivante.*)

Je partage ce fragment de cone par la moitié menant CM parallele à FK & à EL : je méne auſſi GE parallele à KL à laquelle elle eſt égale. Le triangle EFG & ACD ſont rectangles ; ainſi GFE & GEF valent un droit, l'angle GFE étant

donc égal à l'angle FCD l. 2 n. 28. retranchant de l'angle droit FCA l'angle FCD, le reſte DCA ſera égal à GEF, ainſi les deux triangles ACD & EFG ſont équiangles, donc GE ou KL, EF :: CD, CA l. 4. n. 9. partant KL eſt à EF comme le double de CD qui eſt CM eſt au double de AC qui eſt CN. Soit CM diamétre d'un cercle dont Y eſt la circonference; & CN celui d'un cercle dont Z eſt la circonference. Donc CM, CN :: Y, Z. Donc KL, EF :: Y, Z. Donc KL †Z ⟩⟨ EF†Y l. 3. n. 63. Or la ſurface de B fragment de cone eſt égale à EF†Y ſ̄ *n.* 97. Donc cette ſurface égale à EF†Y eſt égale à un rectangle fait de KL par Z circonference d'un cercle, dont CN eſt le diametre ; ce qu'il faloit prouver.

Pour la partie C.

De O moitié de BD côté du cône C, je méne une ligne à A centre du cercle qui eſt inſcrit dans le ſphéroïde, la ligne AO, & par D une parallele à AO, ainſi comme BO eſt moitié de BD, AO ſera moitié de DF; partant DF ſera le diamétre du cercle dont AO eſt le raion.



La ſurface du cone C ſ̄ *n.* 90. eſt égale à un triangle rectangle dont BD eſt la hauteur, & la baſe eſt un cercle dont

DG est le diamétre, ou à un parallelogramme rectangle l. 3. n. 132. de même hauteur BD & dont la base est la moitié de celle d'un cercle dont DG est le diamétre, ou, ce qui est la même chose, dont la base est égale à un cercle dont DE moitié de DG est le diamétre. Soit nommé Y la circonference de ce cercle, & Z celle du cercle dont DF est le diamétre : il faut prouver que BD†Y)(BE†Z.

Les deux triangles DEF & DEB sont semblables l. 4. n. 27. Donc BD, BE :: DF, DE : or DF, DE :: Z, Y l. 4. n. 42. donc BD, BE :: Z, Y. l. 4. n. 51. donc BD†Y)(BE†Z l. 4. n. 63. ce qu'il faloit prouver.

Teoreme neuvie'me.

100 *La surface d'un sphéroïde est égale au rectangle fait de son axe par la circonference du cercle de la sphére qui lui est inscrite.*

Par le Teorême précédent, puisque la surface de chaque partie du sphéroïde est égale au rectangle, faite de chaque partie de son axe à laquelle elle répond ; & de la circonference du cercle de la sphére qui lui est inscrite, toute la surface entiere sera égale au rectangle de tout l'axe par la circonferéce du cercle de la sphére qui lui est inscrite, puisque le tout & ses parties font un produit égal quand ils sont multipliez par une même grandeur l. 3. n. 21.

Teoreme dixie'me.

101. *La surface d'une sphére est égale au rectangle de son axe & de la circonference d'un cercle qui a même diamétre que cette sphére.*

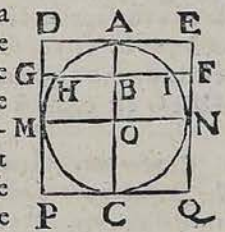
La sphére peut-être considerée s̃ n. 81. comme un sphéroïde formé par un poligone regulier d'une infinité de côtez, dont le diamétre par conséquent peut-être pris pour l'axe de la

sphére. Ainsi sa surface, par le Teorême précédent, est égale au rectangle fait de son axe par la circonference du cercle ou poligone par la révolution duquel elle a été formée, dont le diamétre par conséquent est le même que celui de cette sphére ; ce qu'il faloit démontrer.

Teoreme XI.

La surface d'une sphére est égale à celle du contour d'un cilindre où elle est inscrite, qui par conséquent a la même hauteur ou même axe. 102

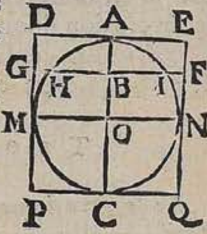
La surface de la sphére AMNC est égale à un rectangle fait de son axe & de la circonference du cercle qui a un même diamétre MN, or la surface du cilindre ou cette sphére est inscrite, dont les côtez DP & EQ sont égaux à AC l'axe de cette sphére, est égale à ce même rectangle ; car elle est égale au rectangle fait de PD par la circonference du cercle de sa base qui a pour diamétre PQ égal à MN ; puisque le diamétre d'une sphere inscrite dans un cilindre doit être égal à celui de la base du cilindre, selon l'idée que l'on a donnée des figures inscrites s̃ n. 63.



Teoreme XII.

Si on coupe une sphére inscrite dans un cilindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la sphére est égale à celle de la partie du cilindre qui lui répond. 103.

AC axe de la ſphere eſt la hauteur du cilindre où la ſphére eſt inſcrite, ainſi ce cilindre touche par ces deux baſes cette ſphére. Je coupe l'axe AC par des plans perpendiculaires ſur lui qui coupent auſſi le cilindre. Je dis que la ſurface de la partie MHIN eſt égale à celle de la partie MGFN du cilindre, comme auſſi la ſurface de HAI à celle de EFGD.



Car on peut prendre cette ſphére pour un ſphéroïde, ainſi la partie MHIN & HAI pour des portions de ſphéroïde. Ainſi ꝟ *n.* 109. la ſurface de MHIN eſt égale au rectangle BO par la circonférence d'un cercle dont MN eſt le diamétre, lequel rectangle eſt égal à la ſurface de FGMN ꝟ *n.* 83. de même la ſurface de HAI eſt égale au rectangle de AB par la circonference d'un cercle dont GF eſt le diamétre, auquel la ſurface de la partie DEFG eſt égale ꝟ *n.* 109.

Probleme I.

104 *Couper une ſphére par un plan, de ſorte que les ſurfaces des portions de cette ſection ſoient en raiſon donnée.* Archiméde l. 2. Prop. 4. & 5.

Il faut inſcrire la ſphére dans un cilindre, enſuite couper les côtez de ce cilindre ſelon la raiſon donnée, & mener par les points de cette ſection des lignes ou des plans paralleles qui couperont la ſphére ſelon la raiſon donnée; car les ſurfaces des portions de la ſphére compriſes entre ces paralleles, ſeront égales à celles des portions du cilindre auſquelles elles répondront, comme on vient de le prouver.

Teo-

Teoreme XIII.

La ſurface d'une ſphére eſt égale à quatre fois 105
celle de ſon plus grand cercle. Archiméde l. 1. prop. 37.

Concevons une ſphére dans un cilindre, dont la baſe par conſéquent ſera égale au plus grand cercle de la ſphére, & ſa hauteur ſera le diamétre de ce plus grand cercle; par conſéquent le contour de ce cilindre ſera égal à quatre fois la ſurface de ce cercle ꝟ *n.* 87. Or la ſurface de la ſphére eſt égale à ce contour ꝟ 102. donc elle eſt égale à quatre fois ſon plus grand cercle.

Teoreme XIV. 106

La ſurface d'une ſphére X eſt égale à celle d'un cercle que je nomme Z, dont le raion eſt égal au diamétre de ſon plus grand cercle, ou, ce qui eſt la même choſe, *ſi le diamétre du plus grand cercle de la ſphére X eſt 1, & celui du cercle Z eſt 2, la ſurface de X eſt égale à celle de Z.*

1° Les ſurfaces des cercles étant entr'elles l. 4. n. 103. comme les quarrez de leurs diamétres, puiſque le quarré de 1 eſt 1, & que celui de 2 eſt 4, ſelon l'hipotéſe, la ſurface de Z ſera quadruple de celle du cercle de la ſphére X: or la ſurface de cette ſphere eſt quadruple de celle de ſon plus grand cercle par le Teorême precedent, donc elle ſera égale à celle de Z, ce qu'il faloit prouver.

Teoreme XV.

La ſurface entiere d'un cilindre, c'eſt à dire, 107
tant de ſon contour que de ſes deux baſes, eſt égale à celle d'une ſphére à laquelle il eſt circonſcrit en raiſon ſeſquialtere. Archiméde, l. 1. Prop. 39.

1° Le ſeul contour du cilindre eſt égal à la ſurface de la ſphere ꝟ *n.* 102.

2° Chaque baſe de ce cilindre eſt le plus

N,

grand cercle de la sphére, qui est la quatriéme partie de sa surface s̄ *n.*105. ainsi les deux bases du cilindre sont la moitié de la surface de la sphére.

Partant toute la surface du cilindre est égale, 1° à une fois toute la surface de la sphére, 2° à la moitié de cette surface; ainsi cette raison est sesquialtére, c'est à dire comme 3 à 2.

TEOREME XVI.

108. *La surface de la portion DAB de la sphére X est égale à celle dont AB est le raion, comme celle de BCD à celle du cercle dont BC est le raion.*

Le quarré de AC est égal aux quarrez de AB & de BC l. 4. n. 71. donc la surface du cercle dont AC est le raion, est égale aux surfaces des deux cercles, dont AB & BC sont les raions, puisque les surfaces des cercles sont comme les quarrez de leurs raions ou de leurs diamétres l. 4. n. 103.

Or le cercle dont AC est le raion, a sa surface égale à celle de la sphére X s̄. 106. ainsi cette surface est égale à celle des deux cercles dont AB & BC sont les raions.

Reste à démontrer que la surface de la portion DAB est à celle de BCD, comme le quarré de AB à celui de BC.

Aiant inscrit la sphére X dans un cilindre de même hauteur que cette sphére, la surface de la portion DAB sera égale s̄ *n.*103. au contour de la partie du cilindre qui lui répond, comme celle de BCD à l'autre partie du cilindre. Les contours de ces deux parties sont entr'eux comme AE & EC : or les quarrez sur AB & BC sont aussi comme AE à EC l. 4. n. 92.

donc les surfaces des portions de cette sphére seront entr'elles comme ces deux quarrez.

TEOREME XVII.

La surface d'une sphére est double de celle du contour du cilindre qui lui est inscrit, & dont la hauteur est égale au diamétre de sa base. 109.

La surface de la sphére Z est quadruple de celle du cercle dont A est le diamétre s̄ *n.* 105.

La surface du cercle dont A est le diamétre, est égale à la surface des cercles dont C & B sont les diamétres, puisque ces surfaces sont comme les quarrez de leurs diamétres, & que AA $\propto$ CC+BB l. 4. n. 71. or C $\propto$ B; ainsi la surface du cercle dont A est le diamétre, est égale à deux fois celle du cercle dont C est le diamétre; & par conséquent puisque la surface de A est la quatriéme partie de la surface de la sphére Z, celle du cercle dont C est le diamétre est la huitiéme partie de celle de la sphére Z.

Or la surface de ce même cercle dont C est diamétre, est la quatriéme partie du contour de ce cilindre inscrit s̄ *n.* 87. donc ce contour est la moitié de la surface de la sphére Z.

SECTION IV.

De la solidité des Solides.

Propositions évidentes touchant cette solidité.

PREMIERE PROPOSITION.

110. *La solidité d'un parallelipipede rectangle est faite par la multiplication de ses trois dimensions; ou de sa hauteur multipliée par sa base.*

Le solide X est fait de surfaces planes, égales chacune à la surface de la base, & posées directement les unes sur les autres; ainsi il est vrai de dire que cette base est autant de fois dans le solide X, que sa hauteur AE contient de parties. En multipliant donc la base ABCD par la hauteur AE, on aura une grandeur égale au solide X; ainsi on peut dire que le solide X est fait par la multiplication de sa base par sa hauteur.

SECONDE PROPOSITION.

111. *Deux solides de même base, ou de bases semblables & égales, & de même hauteur, dont les côtez font les mêmes angles, sont égaux.*

Cela est clair, car si par la pensée on les met l'un dans l'autre, il faut qu'ils conviennent en tout.

TROISIE'ME PROPOSITION.

On peut concevoir un parallelipipede sur une ligne 112.
donnée qui soit semblable, & prise de la même maniere qu'un autre parallelipipede donné. Eucl. XI. Prop. 27.

Euclide propose de faire la chose, ce qui n'est pas dificile, mais il sufit qu'on la conçoive faite.

QUATRIE'ME PROPOSITION. 113.

On peut supposer que tout solide est fait d'un nombre tant grand qu'on voudra de plans qui n'aient aucune épaisseur sensible, & qui soient posez parallelement les uns sur les autres.

Si le nombre de ces plans est infini, c'est à dire fort grand, & que la hauteur du plan soit médiocre, il est évident que l'épaisseur de ces plans doit être insensible.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Si deux solides ont même hauteur, & que les 114
plans paralleles qui les composent soient également épais, l'un & l'autre auront un égal nombre de plans, ou *dans deux solides de même hauteur, on peut concevoir un égal nombre de plans d'égale épaisseur.*

SIXIE'ME PROPOSITION.

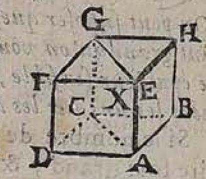
Deux solides sont égaux qui sont composez d'un 115.
égal nombre de plans également épais, semblables & égaux.

Si par exemple deux solides X & Z étoient composez chacun d'un milion de plans également épais & égaux, ils seroient évidemment égaux. J'ajoute *semblables* pour marquer qu'en cas que les plans dont X est composé alassent en diminuant, si ceux de Z aloient de même en diminuant chacun étant semblable à celui auquel il répond, c'est à dire le centiéme de X étant égal & semblable au centiéme de Z, il faut que X & Z soient necessairement égaux.

116. TEOREME PREMIER.

Si on coupe le parallelipipede X par un plan selon la diagonale AC ou EG, il sera coupé en deux prismes triangulaires égaux. Euclid. XI. Prop. 28.

Les deux parties de X ont leurs bases égales, elles ont même hauteur: donc par la Proposition précédente elles sont égales. Selon la définition des prismes s̃ n. 43. elles sont prismes triangulaires.



TEOREME SECOND.

117. *Si les côtez des plans oposez d'un parallelipipede sont coupez en deux également, & qu'on méne des plans par les sections; la ligne de commune section & de ces plans, & le diamétre du parallelipipede, se couperont en deux également.* Eucl. XI. Prop. 39.

Cela est évident.

TEOREME TROISIÉME.

118. *Si un solide est compris entre des plans paralleles, ceux de ces plans qui sont oposez, sont des parallelogrammes semblables & égaux.* Eucl. XI. Prop. 24. (*même figure*, s̃ n. 116.)

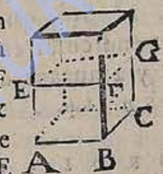
1° Les lignes AD & BC seront paralleles s̃ n. 34. Comme aussi AB & DC. Il en est de même des lignes EF & HG, & de FG & EH. Ainsi les plans ABCD & EFGH sont des parallelogrammes. 2° Ces parallelogrammes sont semblables; car l'angle EFG est égal à ADC s̃ n. 36. ainsi des autres angles. 3° ABD & HE

paralleles entre les paralleles AE & BH sont égales, obliques ou perpendiculaires qu'elles soient l. 2. n. 109. ainsi on peut démontrer que ces plans oposez sont égaux.

TEOREME IV.

Toutes les sections d'un prisme paralleles à la base, sont égales & semblables à la base. Eucl. XI. Prop. 25. 119.

Le plan ou la section EFG étant parallele à ABC, il faut que EF soit parallele à AB, & FG à BC s̃ n. 34. que AB & EF fassent sur AE mêmes l. 2. n 30. que EFG)(ABC. Or EF)(AB, & FG)(BC. l. 2. n. 109. Donc EFG & ABC aiant leurs angles & leurs côtez égaux, sont entierement semblables & égaux.



TEOREME V.

Les prismes de même hauteur sont entr'eux 120.
comme leurs bases: & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XI. Prop. 32.

Deux prismes comme Z & X qui ont même hauteur, ou qui sont entre deux plans paralleles s̃ n. 113. peuvent être considerez composez de plans paralleles, dont ils contiennent un égal nombre s̃ 114. Tous ces plans sont égaux chacun au plan de leur base s̃ n. 118. par conséquent si Z & X ont des bases égales ils ont un égal nombre de plans égaux, ainsi ils sont égaux. Si la base de Z est le tiers de celle de X, tous les plans de Z seront le tiers de ceux de X, ainsi Z sera le tiers de X. S'ils ont même base, on démontrera en la même maniere qu'ils sont comme leurs hauteurs.

Corolaire I.

121. *Les prismes ou parallelipipedes aiant même base ou bases égales de même hauteur sont égaux, quoiqu leurs angles soient diferens.* Eucl. XI. Prop. 29. 30 & 31.

Car 1° soit que leurs bases soient rectangles ou non, si elles sont entre lignes paralleles elles sont égales. 2° Soit que les côtez soient obliques ou perpendiculaires, s'ils sont de même hauteur, il y a autant de plans dans l'un que dans l'autre ꝰ n. 114.

Corolaire II.

122. *La solidité d'un prisme n'est pas plus grande lorsqu'il a une plus grande surface.*

Car deux prismes entre deux plans paralleles sont égaux s'ils ont leurs bases égales, quoique les côtez de l'un soient obliques & par conséquent plus grans, & qu'ainsi il ait une plus grande surface.

Corolaire III.

123. *En mesurant un prisme, s'il est oblique, il le faut raporter à un prisme droit de même hauteur, ou qui puisse être compris entre deux plans paralleles.*

Car celui qui est droit est égal à celui qui ne l'est pas, quoique la surface du droit soit plus petite.

Corolaire IV.

124. *Vn prisme parallelipipede est double d'un prisme triangulaire de même hauteur, si la base du parallelipipede est double du triangulaire.* Eucl. XI. Prop. 40.

Cela est évident puisque ces deux prismes sont comme leurs bases.

Corolaire V.

Deux cilindres qui ont même base, & qui peuvent être compris entre mêmes paralleles sont égaux, quoique l'un soit droit & l'autre oblique. 125.

Les cilindres sont des prismes, ainsi tout ce qu'on a dit des prismes leur convient.

Corolaire VI.

Deux cilindres de même hauteur sont comme leurs bases: ou s'ils ont une même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XII. Prop. 11. & 14. 126.

Cela a été démontré du prisme, & par conséquent du cilindre.

Corolaire VII.

Deux cilindres de même base & de même hauteur sont égaux puisqu'ils sont comme leurs bases. 127.

Corolaire VIII.

Si un cilindre est coupé par un plan parallele aux plans oposez, les segmens du cilindre seront l'un à l'autre comme les segmens de l'axe. Eucl. XII. Prop. 13. 128.

Les plans de ces sections seront égaux ꝰ n. 118. Tous les ssegmens seront donc comme autant de cilindres qui ont leurs bases égales, & partant ils sont entr'eux comme les segmens de l'axe qui sont leurs hauteurs.

Lemme I.

Toute section d'une piramide qui se fait parallelement à sa base, est semblable à sa base. 129.

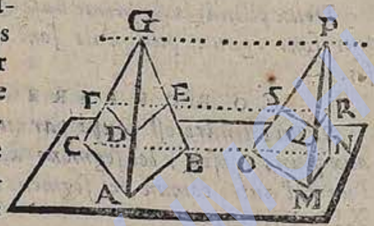
Le plan FDE est parallele à la base ABC, ainsi DE est parallele à AB, & DF à AC, & FE à BC s̄ *n.* 34. L'angle FDE est égal à CAB s̄ *n.* 36. ainsi des autres angles de ces deux triangles ABC & DEF qui par conséquent sont semblables. FD CA : : GD GA : : DE. DAB l. 4. n. 15.

130. THEOREME VI.

Les piramides qui ont pour base des triangles & qui sont de même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases. Il en est de même de celles qui ont des poligones pour bases. Eucl. XII. Prop. 5. & 6.

1° Deux piramides peuvent être considerées comme composées de plans pos.. parallelement les uns sur les autres s̄ *n.* 113. 2° Si elles ont une même hauteur, le nombre de ces plans est égal s̄ *n.* 114.

3° Si ces piramides ont des triangles pour base, chaque plan dans chaque piramide sera un triangle semblable à la base par le Lemme précédent. DEF sera semblable à ABC : il en est de même de QRS au regard de MNO. 4° suposant que les plans DEF & QRS sont à la même hauteur dans les piramiqu'ils coupent ils sont entr'eux comme les bases : car soit X la hauteur des deux piramides qui est la même, & Z celle des deux plans DEF & QRS. Donc AC DF : : X Z, & MO Q



S : : X Z, donc AC DF : : MO QS. l. 3. n. 51. ainsi des autres côtez des plans DEF & QRS. Ainsi les bases sont égales, ces deux piramides sont égales s̄ *n.* 114. puisque tous les plans pris à la même hauteur dans l'une & dans l'autre sont égaux : mais si la base de l'une est le tiers de la base de l'autre, comme chaque plan de l'un pris à la même hauteur sera le tiers de l'autre, l'une de ces piramides sera le tiers de l'autre. Cette démonstration s'aplique aisément aux piramides qui ont des poligones pour bases.

COROLAIRE I.

Deux piramides de même base, ou de bases égales & de même hauteur sont égales. 131.

Car étant comme leurs bases, & ces bases étant égales, il faut qu'elles soient égales.

COROLAIRE II.

La solidité d'une piramide ne dépend pas de la grandeur de ses côtez. 132.

Car une piramide qui n'est pas droite, a plus de surface qu'une de même hauteur qui est droite ; & cependant si leurs bases sont égales, elles sont égales.

COROLAIRE III.

En mesurant une piramide, si elle n'est pas droite, il la faut raporter à une qui le soit & qui ait la même hauteur. 133.

COROLAIRE IV.

Les cones qui sont de même hauteur, droits ou non droits, sont entr'eux comme leurs bases. 134.

Car ce sont des piramides d'une infinité de côtez s̄ *n.*

COROLAIRE. V.

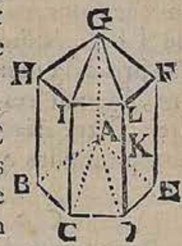
Deux cones qui ont même base sont comme leurs hauteurs, Eucl. XI. Prop. 14. 135.

Cela est évident.

TEOREME SETIE'ME.

136. *Tout prisme poligone peut être divisé en prismes triangulaires.*

Soit K un prisme poligone dont les bases sont ABCDE & GHILF : ces bases poligones se réduisent en triangles. Par la définition des prismes triangulaires, les solides ABCGHI, ACDGIL, ADEGLF sont des prismes triangulaires : donc le prisme K peut être divisé en prismes triangulaires.



137. TEOREME HUITIE'ME.

Un prisme est égal à plusieurs prismes de même hauteur, si sa base est égale à celles de tous ces prismes. Il en est de même des piramides.

Car concevant dans ces solides des plans paralleles à la base. 1° $\bar{s}$ *n*. 114. il y aura un égal nombre de plans dans chacun. 2° $\bar{s}$ *n*. 118. chaque plan dans le grand prisme sera égal à tous les plans qui seront dans les autres prismes ; car il leur sera comme sa base est à toutes les bases de ces prismes, or elle leur est égale, donc &c. Il en est de même des piramides.

138. COROLAIRE PREMIER.

Un cilindre est égal à un prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à la sienne.

Un cilindre est un prisme poligone. Tout prisme poligone peut être divisé en prismes triangulaires $\bar{s}$ *n*. 136. Ces prismes seront égaux à un seul prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à toutes celles de ces prismes $\bar{s}$ *n*. 137. Partant le cilindre

égal à ce prisme poligone, l'est à ce prisme triangulaire qui a même hauteur, & dont la base est égale à la sienne.

COROLAIRE SECOND.

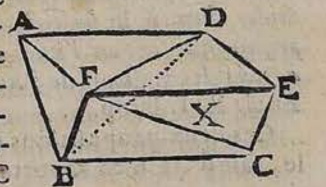
Donc un cilindre X est égal à plusieurs cilindres A, B, C, &c. de même hauteur, dont toutes les bases prises ensemble sont égales à la sienne. 139.

Car tous ces cilindres seront égaux à autant de prismes triangulaires ; qui ont même hauteur & bases égales. Celui auquel X est égal, & partant de même hauteur & sur base égale, est égal à tous ces autres prismes triangulaires, & partant aux cilindres A, B, C, &c. dont toutes les bases sont égales à celle de X, partant X est égal à A, B, C, &c.

TEOREME NEUVIE'ME.

Un prisme triangulaire se divise en trois piramides triangulaires egales Eucl. XII. Prop. 7. 140

Soit X, un prisme triangulaire, je méne sur chacune de ces trois faces des diagonales, qui feront six triangles. Les triangles BAD & BDC étant égaux, les piramides BADF & BDCF, qui ont même sommet, & partant même hauteur, sont égales $\bar{s}$ *n*. 131. Aiant ôté par la pensée de ce prisme X, ces deux piramides il en reste une troisiéme, savoir FCED, laquelle a premierement même sommet, D ; & partant même hauteur que la piramide FBCD, elles ont des bases égales ; savoir les triangles égaux FBC & FCE, donc elles sont



égales : or la piramide FBCD est la même que BDCF étant formée par les mêmes triangles.

Donc FCED, & BADF seront égales entr'elles, étant égales à une troisiéme, ainsi X sera divisé en trois piramides égales qui sont BADF, BDCF & FCED.

Lemme. II.

141. *Vne piramide poligone se peut diviser en piramides triangulaires.*

La base d'une piramide poligone est un poligone, qui par conséquent se réduit en triangles, sur lesquels concevant des plans élevez le long des côtez de cette piramide jusqu'à son sommet, on aura plusieurs piramides triangulaires, qui seront les parties de la piramide poligone.

Teoreme dixie'me.

142. *Toute piramide aiant base triangulaire peut être divisée en deux piramides égales, semblabes entr'elles, & à la totale, & en deux prismes égaux & plus grand que la piramide totale.* Eucl. XII. Prop. 3.

Teoreme onzie'me.

143. *Deux piramides de même hauteur aiant des bases triangulaires, soient divisées en deux autres piramides égales entr'elles & semblables à la toute & en deux prismes égaux; & que les piramides provenuës de cette division soient toûjours divisées de la même façon: comme la base de l'une des piramides sera à la base de l'autre; ainsi tous les prismes qui sont en l'une des piramides, seront à tous les prismes de l'autre égaux en nombre.* Eucl. XII. Prop. 4.

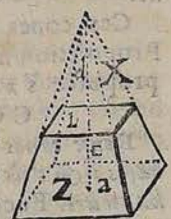
Ces deux propositions n'ont rien de fort utile, ainsi je n'en raporte point les démonstrations.

144 Teoreme douzie'me.

Toute piramide poligone est le tiers de tous prismes de même hauteur, & qui est sur même base ou sur base égale.

Car aiant réduit en triangles l'une & l'autre base de ces deux solides, la piramide poligone sera divisée en piramides triangulaires: or chacun de ces piramides triangulaires sera le tiers de chacun de ces prismes triangulaires, $\bar{s}$ *n.* 140. ainsi toute la piramide poligone sera le tiers de tout le prisme poligone.

On donne cette régle pour trouver la solidité de 145
Z un fragment de piramide dont les bases sont paralleles; soit par exemple l'inferieure 36, *la superieure* 9, *ce nombre* 18 *est moien entre ces deux nombres.* Il les faut ajoûter dans une somme; & multiplier cette somme par 2 que je supose le tiers de la hauteur du fragment. Le produit 126 sera la solicité de ce fragment: Examinons cette régle.



Soit a *la base inferieure,* b *la superieure,* c *la hauteur de* Z *fragment,* d *le reste de l'axe pour achever la piramide.* $aac+aad$ *est la solidité d'un prisme qui est le triple de toute la piramide, dont j'ôte* bbd *la solidité d'un prisme dont la piramide* X *est le tiers. Ainsi* $aac+aad-bbd \propto 3Z$. *Puisque* $\div$ aa ab bb; *Donc selon la régle en multipliant ces trois termes qui sont les mêmes que* 36, 18, 9 *par le tiers de* c, *j'aurai la solidité de* Z; *ainsi multipliant par tout* c, *j'aurai* $aac+abc+bbc \propto 3Z$, *reste à démontrer que* $aac+aad-bbd \propto aac+abc+bbc$: *j'ôte* aac *de part & d'autre, reste* $aad-bbd \propto abc+bdc$. *Il faut voir si cela est.*

$a-b \quad b :: c \quad d$, *multipliant* $a-b$ *&* b *par* a+b, *l. 3. n. 52.* aa−bb ab+bb : : a−b b. *Ainsi* aa−bb ab+bb : : c d, *l. 3. n. 51. Donc multipliant les extremes & les moiens on a* aad−bbd)(abc+bbc, *ce qui restoit à prouver. La régle est donc sûre.*

TEOREME XIII.

146 *Vn cone est le tiers d'un cilindre de même hauteur sur bases égales.* Eucl. XII. Prop. 10.

Un cone est une piramide d'une infinité de côtez : or une piramide est le tiers d'un prisme de même hauteur qui a une base égale § *n.* 142. donc le cone est aussi le tiers d'un cilindre de même hauteur, & sur même base ou base égale, puisqu'un cilindre est un prisme d'un nombre infini de côtez.

COROLAIRE I.

147 *Vn cone est égal à tous les cones de même hauteur dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne.*

Ces cones sont des piramides, ainsi cette Proposition n'est pas diferente de celle qu'on a proposée § *n.* 137.

COROLAIRE II.

148. *Deux cones de meme hauteur sont comme leurs bases ; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs.* Eucl. XII. Prop 11. & 14.

Cela est évident.

TEOREME XIV.

149 *Les parallelipipedes semblables sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée* Eucl. XI. Prop. 33.

1° Leur solidité dépend de la multiplication de leurs dimensions. § *n.* 110. la raison qu'ils ont entr'eux est composée de celle de leurs trois dimensions l. 3. n. 54. 2° étant semblables cette raison est triplée l. 3. n. 60.

COROLAIRE PREMIER.

Les cilindres semblables, sont entr'eux en raison 150.
composée de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl XII. Prop. 12.

COROLAIRE SECOND. 151.

Les piramides semblables sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 8.

Cela est évident, car elles sont le tiers des prismes qui sont sur leurs bases, & qui ont même hauteur.

COROLAIRE TROISIE'ME. 152.

Les cones semblables sont entr'eux en raison composée des raisons de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 12.

C'est une suite, car les cones sont des piramides.

TEOREME XV. 153.

Les cilindres semblables, sont entr'eux comme les cubes des diamétres de leurs bases.

Ils sont en raison triplée de chacune de celles de leurs trois dimensions, & par conséquent de la raison des diamétres de leurs bases : Or les cubes de leurs diamétres sont en raison triplée de celle de ces mêmes diamétres, selon la notion des raisons triplées l. 3. n. 60. Donc puisque les raisons composées d'égales raisons, sont égales, les cilindres semblables sont entr'eux comme les cubes des diamétres de leurs bases. Il en est de même des cones semblables, & cela se démontre de la même maniere.

TEOREME XVI.

Les parallelipipedes égaux ont leurs bases & 154.
leurs hauteurs réciproques, & si elles sont réciproques ces deux solides sont égaux. Eucl. XI. Prop. 34.

Soient X & Z deux parallelipipedes égaux, A la hauteur de X est égale à B hauteur de Z, & M la valeur de la base de X est égale à N la valeur de la base de Z. Selon qu'on le supose A†M)(B†N. Donc A B :: N M l. 3. n. 65. partant ces quatre grandeurs A M. B N sont réciproques l. 3. n. 41. Or si ces quatre grandeurs sont réciproques, c'est à dire si A, M, B, N peuvent être rangez desorte que A B :: N M, il faut que A†M)(B†N l. 3. n. 63.

TEOREME XVII.

155. *Deux cilindres étant égaux*, il en est de même des piramides & cones, *leurs hauteurs & leurs bases sont réciproques ; & si elles sont réciproques ces deux cilindres sont égaux.* Eucl XII. Prop. 9. & 15.

La démonstration du Teorême précédent sert à celui-ci : il n'y a qu'à entendre par X & par Z deux cilindres.

TEOREME XVIII.

156. *Si A, B, C trois lignes droites sont proportionnelles, le solide parallelipipede ABC fait de ces trois lignes est égal en parallelipipede BBB fait de la moienne B, pourvû que ces solides soient équiangles.* Eucl. XI. Prop. 36.

∺ A B C. Donc AC)(BB l. 3. n. 64. Donc multipliant AC & BB par B, le produit ACB sera encore égal au produit BBB l. 3. n. 52. Or ACB est le parallelipipede fait des trois lignes A, B, C, égal ainsi à BBB fait de la moienne B

TEOREME XIX.

157. *A, B, C, D sont quatre lignes proportionnelles. Les solides semblables faits sur ces lignes sont en proportion ; & s'ils sont en proportion, ces quatre*

lignes sont proportionnelles. Eucl. XI. Prop. 37.

Cela a été prouvé l. 3. n. 69.

TEOREME XX. 158.

Une sphére est égale à un cone, ou piramide poligone, qui a pour axe le raion de cette sphére, & pour base un cercle, dont le raion est le diamétre de cette même sphére.

1° En concevant une infinité de cones ou de piramides poligones, dont le sommet est dans le centre d'une sphere, & les bases dans la surface de la même sphére ; il est évident qu'on peut dire, que la solidité de cette sphére est égale à tous ces cones ou piramides poligones, puisque c'est dire que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Tous ces cones § *n.* 145. sont egaux à un cone qui a même hauteur, à savoir le raion de cette sphére, & pour base toute la surface de cette sphére qui est égale aux bases de ces cones.

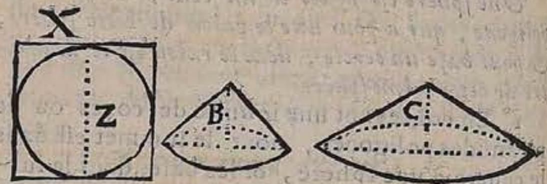
3° Or la surface de cette sphere est égale à celle d'un cercle qui a pour raion le diamétre de cette sphere § *n.* 106. donc la solidité est égale à celle d'un cone dont la base, &c.

Suposé la raison du diamétre à la circonference du cercle comme 7 à 22, on peut dire que la solidité de la sphere est au cube de son diamétre comme 11 à 21 : car soit m *la circonference du cercle, &* n *le diamétre.* 1° mnn nnn :: m n. *l. 3. n. 57.* Or m *est à* n. *comme 22 à 7 ou 66 à 21, Ainsi la sixiéme partie de* mnn *qui est la solidité de la sphére est à* nnn *cube de son diamétre, comme la sixiéme partie de 66, c'est à dire 11 est à 21 ce qu'il faloit prouver.* 159.

160 THEOREME XXI.

La raison de X cilindre à la sphere Z qui lui est inscrite, est sesquialtere.

Soient B & C deux cones qui aient pour axe le raion de la sphére Z, & que le raion de la



base de B soit celui de la sphére Z, & le raion de la base de C soit l'axe ou le diamétre de la même sphére X, alors ces deux cones B & C seront comme leurs bases, s̃ *n.* 148. Or celle de C est quadruple de celle de B : donc le cone C est quadruple du cone B ; ainsi B C :: 1 4 le plus petit cone B est la sixiéme partie du cilindre X, qui a pour base le grand cercle de la sphére Z, & pour axe le diamétre, car s̃ 146. ce cone B est le tiers d'un cilindre qui a même base que lui & même axe ; par conséquent il est la sixiéme partie d'un cilindre qui a même base, & un axe deux fois plus grand ; ainsi X B :: 6 1. Le cone C est égal à la sphere Z, s̃ *n.* 158. on a prouvé que B C :: 1 4 ; ainsi B Z :: 1 4, donc puisque le cilindre X vaut six parties telles que la sphére Z en vaut quatre X Z :: 6 4 ; ce qui est une raison sesquialtere.

161. THEOREME XXII.

Les sphéres sont entr'elles comme les cubes de leurs diamétres, ou en raison triplée de celle de leurs diamétres. Eucl. XII. Prop. 18.

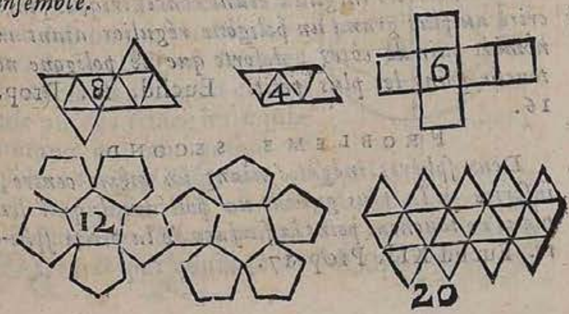
Les sphéres sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, toutes les sphéres sont semblables, ainsi leurs trois dimensions ont même raison : Donc la raison qu'elles composent est triplée de chacune des raisons de leurs dimensions, par exemple, de celle de leurs diamétres. Or les cubes de ces diamétres sont en raison triplée de celle de ces diamétres ; donc les sphéres sont entr'elles comme les cubes de leurs diamétres.

SECTION V.

De la maniere d'inscrire ou circonscrire à une sphére les cinq corps réguliers.

AVERTISSEMENT. 162

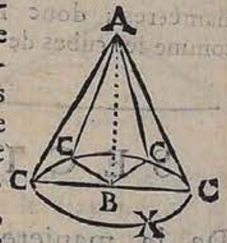
Il faut faire avec du carton les cinq corps réguliers, la seule vûe de la figure suivante en aprend le moien. Aprés avoir tracé ces figures & coupé le carton, on le plie de maniere que les plans qui composent ces corps réguliers se joignent ensemble.



TEOREME PREMIER.

163. *Toute section d'une sphére par un plan est un cercle.*

X est la section d'une sphére dont A est le centre ; il faut prouver que cette section est un cercle : pour cela, concevons 1° que du centre A de la sphére on fait tomber sur le plan de cette section, que je nomme X une perpendiculaire AB. 2° Que l'on tire du même centre A des lignes telles que AC, à tous les points des extrêmitez de X : toutes ces lignes qui sont raions de la sphére, sont égales. Elles sont obliques, puisqu'on ne peut mener de A plus d'une perpendiculaire sur X : or les obliques égales ont leur pié également éloigné de la perpendiculaire l 1. n. 54. donc toutes ces lignes menées des extrêmitez de X au point B sont égales, & par conséquent ces extrêmitez sont dans la circonference d'un cercle ; ainsi X est un cercle. l. 1. n. 102.



PROBLEME PREMIER.

164 *Deux cercles inégaux étant concentriques, inscrire au plus grand un poligone régulier aiant un nombre pair de côtez, desorte que ce poligone ne touche point le plus petit.* Euclid. 12. Prop. 16.

PROBLEME SECOND.

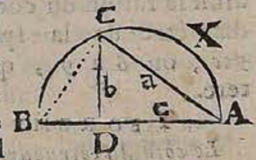
165. *Deux sphéres inégales aiant un même centre, inscrire en la plus grande un poliédre duquel les plans ne touchent point la surface de la petite sphére.* Euclid XII. Prop. 17.

Ces deux Problêmes ne me paroissent point necessaires, ainsi je les passe.

LEMME I. 166.

Si aa *quarré de AC est triple de* bb *quarré de CD moien proportionnel entre AD & BD, je dis que DB est la troisiéme partie du diamétre AB.*

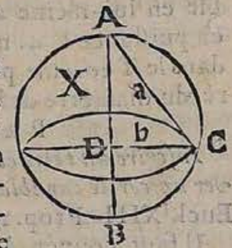
Soit AD nommé c. 1° l. 4. n. 71. $aa \propto bb + cc$. & puisque par la suposition $3bb \propto aa$, donc $3bb \propto bb + cc$: ôtant de part & d'autre bb, on aura $2bb \propto cc$. 2° ÷ AD CD BD ou ÷ c b BD. par l'hipotése ; donc cc ou $2bb$ bb :: AD DB. l. 3. n. 70. donc AD sera double de BD, & conséquemment DB est un tiers de AB, ce qu'il faloit prouver.



TEOREME II. 167.

Le quarré d'un des côtez du tetraédre ou piramide équilaterale, est égal à six fois le quarré de la troisiéme partie du diamétre de la sphére où il est inscrit.

Le tetraédre ou piramide équilaterale, est fait de quatre triangles égaux & équilateraux. Concevons que dans la sphére X il y a un tetraédre inscrit, dont AC ou a est un des côtez, & que CD est le raion du cercle dans lequel est inscrit un des triangles équilateraux qui composent ce solide : $ACq \propto 3CDq$, ou $aa \propto 3bb$ l. 4. n. 149. par conséquent DB est la troisiéme partie de AB diamétre de la sphere X § n. 166. Soit donc $BD \propto c$, & par conséquent $AB \propto 3c$. puisque ÷



3*c* *a* 2*c* l. 4. n 28. donc 6*cc*)(*aa* l. 4. n. 60. ce qu'il faloit démontrer.

COROLAIRE.

168. *Le quarré du diamétre de la sphére est en raison sesquialtere avec un des côtez du tétraédre qui lui est inscrit.* Eucl. XIII. Prop. 13.

On vient de prouver que *aa* quarré du côté du tétraédre est égal à six fois le quarré de *c* troisiéme partie du diamétre de la sphére. Or le quarré de 3*c* diamétre de la sphére est 9*cc*; ainsi la raison du côté du tétraédre à celui du diamétre de la sphére sera comme 6*cc*, 9*cc*, ou 6 à 9, qui est une raison sesquialtere.

TEOREME TROISIE'ME.

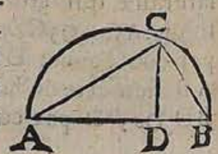
169. *Le côté du tétraédre est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diamétre de la sphére où il est inscrit.*

Soit comme ci-dessus AC, ou *a* côté du tétraédre, & AB ou 3*c* diamétre de la sphére, ∺ 3*c*, *a*, 2*c* l. 4. n. 28. donc 9*cc*, *aa* :: 3*c*, 2*c* l. 3. n. 70. Or ces nombres 3 & 2 ne sont pas nombres quarrez; donc *a* sera incommensurable en lui-même avec 3*c*, & commensurable en puissance l. 4. n. 134. Nous venons de voir dans le Téorême précédent que *aa* est au quarré du diamétre de la sphére comme 6 à 9.

PROBLEME I.

170 *Inscrire un tétraédre dans une sphére, ou trouver un cercle capable d'une des faces du tétraédre.* Eucl. XIII. Prop. 13.

Il faut couper AB diamétre de la sphére en trois parties égales, desorte que AD soit double de BD, & sur D élever la perpendiculaire DC

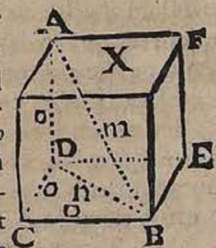


C, laquelle sera le raion d'un cercle, dans lequel aiant fait un triangle équilateral dont AC est le côté, vous aurez une des faces du tétraédre, comme il est évident s̄ *n.* 167.

TEOREME QUATRIE'ME.

Le quarré du diamétre, de la sphére est triple du quarré de chaque côté du cube, ou de l'exaédre qui lui est inscrit. Eucl. III. Prop. 15. 171.

Le cube ou l'exaédre X est inscrit dans une sphére; soit la diagonale AB)(*m* qui est le diamétre de la sphére, la diagonale d'une des faces du cube soit BD)(*n*. Je nomme *o* tous les côtez de ce cube qui sont tous égaux. ABq)(BDq+ADq, ou *mm*)(*nn*+*oo* l. 4. n. 71. De même BDq)(BCq+CDq, ou *nn*)(*oo*+*oo*. Donc en substituant *oo*+*oo* en la place de *nn*, on aura *mm*)(*oo*+*oo*+*oo*, ou *mm*+3*oo*, qui est ce qu'il faloit démontrer; savoir, que le quarré de *m* ou de AB diamétre de la sphére, valoit trois fois le quarré de chaque côté du cube.



PROBLEME SECOND.

172. *Le diamétre de la sphére étant donné, trouver le côté du cube ou de l'exaédre qui peut y être inscrit, ou trouver un cercle capable d'une des faces du cube.* Eucl. XIII. Prop. 15. (*Figure* s̄ 170.)

Soit AB le diametre de la sphére où il faut inscrire un cube, je le divise en trois parties, desorte que AD est double de DB: sur D j'éleve la perpendiculaire CD, & de C je méne une ligne à B qui sera le côté du cube que je

O

cherche. Car soit BA)(3*c* & CB)(*d* : Donc ÷ 3*c*, *d*, *c*, l. 4. n. 28. Donc 3*cc*)(*dd*. l. 4. n. 60. Le quarré de AB ou de 3*c* est 9*cc* ; donc le quarré de AB est triple de celui de *d*, qui ne vaut que 3*cc*. Partant BC est le côté du cube qu'on cherchoit s̃ n. 171.

172. Ensuite si on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont CB soit un des côtez, & lui circonscrire un cercle qui sera celui qu'on demande.

TEOREME CINQUIE'ME.

173. *Le côté du cube est incommensurable en lui même, & commensurable en puissance avec le diamétre de la sphere.* (même figure.)

BC ou *d* côté du cube est moien proportionnel entre tout le diamétre AB ou 3*c*, & sa troisiéme partie *c* ; ainsi puisque ÷ 3*c* *d* *c* donc 3*c* *c* : : 3 1. Ces deux nombres 3 & 1 ne sont pas deux nombres quarrez, partant BC est incommensurable avec AB en lui-même, mais commensurable en puissance, puisque son quaré est le tiers de AB l. 4. n. 134.

TEOREME SIXIE'ME.

174. *Le quarré de chaque côté d'un octaédre est la moitié de celui du diamétre de la sphére où il est inscrit.* Eucl. XIII. Prop. 14.

Un octaédre est composé de huit triangles équilateraux tous égaux ; dont les côtez sont cordes du quart du cercle ou de nonante degrez. Or il est évident que le quarré de la corde de nonante degrez est la moitié de celui du diametre : car deux cordes de nonante degrez font un angle droit, dont la base est le diamétre du cercle ; ainsi le quarré de ces deux cordes est égal à celui du diamétre, qui est par conséquent le double de celui de chacune de ces

deux cordes.

TEOREME SETIE'ME.

Le même cercle comprend le quarré qui est une des faces du cube, & le triangle qui est une des faces de l'octaédre. Euclid. XIV. Prop. 8. 175.

Soit *a* le diamétre de la sphére, *b* le côté du quarré qui est une des faces du cube, & *c* le côté du triangle qui est une des faces de l'octaédre. Soit nommé *y* le raion du cercle capable du quarré du cube, & *x* celui du cercle qui est capable du triangle de l'octaédre. Il faut prouver que *y*)(*x*.

1° Si on conçoit *bb* le quarré face du cube inscrit dans un cercle dont *y* est le raion, il est évident que 2*yy*)(*bb*. l. 4. n. 71. Et puisque 3*bb*)(*aa* s̃ *n*. 171. donc *aa*)(6*yy*. 2° 3*xx*)(*cc* l. 4. n. 149. Or 2*cc*)(*aa* s̃ *n*. 174. donc 6*xx*)(*aa*. Ainsi puisque 6*yy*)(*aa*)(6*xx*, donc 6*yy*)(6*xx* ; donc *y*)(*x* : ce qu'il faloit prouver.

TEOREME HUITIE'ME.

Le côté d'un octaédre est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diamétre de la sphére où il est inscrit. 176.

Le quaré de chaque côté de l'octaédre est à celui du diamétre de la sphére, comme 1 à 2 s̃ *n*. 174. Or 1 & 2 ne sont pas des nombres quarrez ; donc ce côté est incommensurable en lui-même, avec le diamétre de la sphére, & commensurable en puissance. l. 4. n. 134.

PROBLEME TROISIE'ME.

Trouver le côté d'un octaédre, & un cercle capable d'une des faces de ce solide. 177.

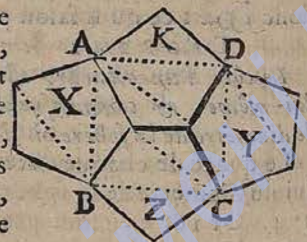
Trouvez par le Probléme second un cercle capable d'un des côtez du cube. Par le Teorême sétiéme ce cercle est capable des faces de l'octaédre. Il ne s'agit donc que de faire un triangle équilateral dans ce cercle. Le côté de ce triangle sera celui qu'on cherche.

178. TEOREME IX.

KXZY sont des pentagones égaux, qui sont les faces d'un dodécaédre inscrit dans une sphére, aiez à la main en lisant ceci un dodécaédre. *Concevez sur chacune de ces faces une diagonale de A à B, de B à C, de C à D & de D à A, ainsi sur toutes les autres faces. Je dis* 1°. *que ces quatre diagonales font un quarré ABCD.* 2°. *Que les diagonales des douze pentagones menées desorte qu'elles se joignent, forment six quarrez égaux à ABCD, lesquels font un cube inscrit dans la même sphére que le dodécaédre, dont chaque côté par consequent est égal à la diagonale de chaque pentagone.*

1°. Toutes ces diagonales sont égales soûtenant des angles égaux.

2° Concevons que des quatre points A, B, C, D qui sont sur la sphére où le dodécaédre est inscrit, on ait mené des lignes au cêtre de la sphére, cela fera une piramide quadrilaterale ; dont



le plan qui couperoit la sphére & passeroit par ces quatre points seroit la base. 3° Cette section de la sphére par le plan ABCD sera un cercle § n. 163. Or on ne peut inscrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le seul quarré, car ces quatre angles valent quatre droits l. 2. n. 114. & puisqu'ils sont apuiez sur des arcs égaux, ils sont égaux : Donc la figure ABCD, qui a ses côtez égaux, & qui est

inscrite dans un cercle est un quarré.

4° Tout pentagone se peut réduire en trois triangles ; partant la surface d'un dodécaédre, composée de douze pentagones, se réduit en trente-six triangles. Or chaque quaré égal à ABCD en soûtient six, comme il se voit dans la figure ; donc ces trente-six triangles ne peuvent être soûtenus que par six quarez égaux, qui forment un cube inscrit dans la même sphére ; & partant il est vrai de dire que la diagonale d'un pentagone, qui est une des faces du dodécaédre inscrit dans une sphére, est égale au côté du cube inscrit dans la même sphére.

PROBLEME IV. 179.

Trouver le côté d'un dodécaédre & un cercle capable d'une des faces de ce solide. Euclid. XIII. Prop. 17.

Il faut premierement trouver le côté d'un cube inscrit dans la sphere proposée § n. 172. 2° Couper ce côté du cube qui est la diagonale de chaque pentagone face du dodécaédre § 178, il faut dis-je couper ce côté du cube en moienne & extréme raison : la plus grande partie sera le côté du dodécaédre proposé, l. 4. n. 156.

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du dodécaédre, il faut faire le pentagone dont on vient de connoître un des côtez l. 4. n. 162. ensuite lui circonscrire un cercle qui sera ce qu'on cherche.

TEOREME X. 180.

Le côté du dodécaédre est incommensurable avec le diamétre de la sphére, tant en lui-même qu'en premiere puissance. Eucl. XIII. Prop. 17.

Soit le diamétre de la sphere *b*, celui du côté du cube inscrit dans la sphere $c+d$ coupé en moienne & extrême raison, dont c la plus grande partie est le côté du dodécaédre s̃ 178. 1° c est incommensurable tant en elle-même qu'en puissance avec $c+d$ l. 4. n. 143.

2° $c+d$ est commensurable en premiere puissance avec b s̃ *n.* 173. c'est à dire, que $cc+2cd+dd$ est commensurable avec bb. Il faut donc que cc soit incommensurable avec bb; car s'il étoit commensurable avec bb, il le seroit avec le quaré de $c+d$ l. 4. n. 119 avec lequel bb est commensurable, puisque bb est le triple de ce quarré s̃ *n.* 171. par conséquent cc incommensurable en puissance avec bb, est aussi incommensurable en lui même avec b l. 4. n. 121.

Lemme II.

181. *MN est le diamétre d'un cercle, dans lequel les deux cordes AB & CE qui coupent MN à angles droits, sont paralleles entr'elles, & la distance de FG égale à la moitié de chacune; je dis que MF sera le côté d'un décagone inscrit dans un cercle dont FA sera le raion.*

Suposant MF ou GN $\propto x$ & AF $\propto z+x$: si MF ou x est le côté d'un décagone dont AF ou $z+x$ est le raion; il faut qu'aiant coupé AF en moienne & extrême raison, x en soit la médiane l. 4. n. 154. & que par conséquent $\div\ z+x \quad x \quad z$, ainsi si nous démontrons cela, savoir que $\div\ z+x \quad x \quad z$, nous avons fait ce qui est proposé.

Puisque AF $\propto z+x$; donc AB $\propto 2z+2x$, & BC $\propto z+x$. Le quarré de AB, qui est $4zz+8zx+4xx$, avec celui

de BC qui est $zz+2zx+xx$ sont égaux à celui de AC ou de MN: or par l'hipotése MN $\propto 3x+z$; car MF & GN sont chacun égaux à x, & FG $\propto z+x$: le quarré dis-je de $3x+z$ est $9xx+6xz+zz$: mettant donc les deux quarrez de AB & de BC en une somme $9xx+6xz+zz \propto 5zz+10zx+5xx$, ôtant de part & d'autre $5xx+6xz+zz$, il restera $4xx \propto 4zz+4zx$; divisant l'un & l'autre par 4, il viendra $xx \propto zz+zx$; donc $\div\ z+x \quad x \quad z$, puisque le produit des extrêmes $z+x$ & z qui est $zz+zx$ est égal à xx, quarré de la grandeur moienne x: c'est ce qu'il faloit démontrer,

Lemme III. 182.

La ligne AM est le côté d'un pentagone inscrit dans un cercle dont AF est le raion. (même figure)

MF est le côté du décagone dans un cercle dont AF est le raion s̃ *n.* 181. le quarré de AF avec celui de MF sont égaux à celui de AM; donc AM est le côté du pentagone l. 4. n. 167.

Lemme IV. 183.

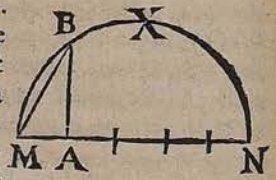
Le quarré de AF, ou de FB, ou de GE, ou de GC lignes égales, est la cinquiéme partie de celui du diamétre AC ou MN. (même figure.)

Soit AF $\propto b$; donc AB $\propto 2b$, & BC $\propto b$, le quarré de AB est $4bb$, & celui de BC est bb: or ces deux quarrez qui font $5bb$ sont égaux à celui de AC ou de MN; qui vaut ainsi cinq fois celui de AF.

Lemme V.

Trouver une ligne dont le quarré soit la cinquiéme partie de celui de MN diamétre de X cercle donné. 184

AM est la cinquiéme partie de MN, le quarré de MN peut cinq fois celui de MB, l. 4. n. 75. ainsi MB sera la ligne que l'on cherchoit, c'est à dire égale à AF de la figure précédente, puisque le quarré de AF est la cinquiéme partie de MN s̃ *n.* 183.



Probleme V.

MN diamétre d'une sphére étant donné faire
185. *un icosaédre.* Eucl. XIII. Prop. 16.

Aiant trouvé la valeur de AF. *Voiez la figure du Lemme second*, & l'aiant coupé par la moitié: du centre D je fais DF & DG égales à cette moitié, desorte que FG)(AF, aprés je méne AB & CE, qui coupent MN en angles droits.

2° Prenant AB & CE pour diamétres, je fais deux cercles que je nomme Z & X qui sont paralleles. *Voyez la figure suivante*, étant sur des plans qu'on supose paralleles.

3° J'inscris dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je méne des lignes droites à M & à N extrémité du diamétre de la sphére, ce qui fait cinq triangles dont les côtez sont égaux chacun au côté

du pẽtagone inscrit dans ces deux cercles, par le Lemme troisiéme; ainsi tous les côtez de ces triangles étant tous égaux aux côtez des pentagones forment deux angles solides sur les cercles Z & X chacun de cinq triangles équilateraux, dont le sommet est aux extrémitez M & N du diamétre de la sphére; & voila déja dix faces trouvées de l'icosaédre. *On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle solide ni ses côtez dont le sommet est en N, de peur de rendre la figure confuse, il y faut supléer par la pensée.*

4° J'inscris encore dans ces mêmes cercles Z & X un décagone, dont je joins les angles qui se répondent dans X & Z par les lignes BE, PK, IH, DG, FI, &c. qui par l'hipotése seront toutes égales aux raions de Z & de X.

5° Je méne les diagonales BK, KI, IG, GF, &c. Les quarrez BP coté du décagone, avec celui de PK, qui est égal au raion de Z & de X sont égaux à celui de BK; donc, BK est le côté du pentagone inscrit dans Z & dans X, l. 4 n. 167. La meme chose se démontre de KI, de IG, de GF, &c. les triangles BKI, KIG, IGF, &c. ont pour base les côtez dudit pentagone, ils sont donc équilateraux entr'eux & aux dix qui composent les deux angles solides dont nous avons parlé ci-dessus: par conséquent il y a entre Z & X dix de ces triangles, dont cinq ont leurs bases sur Z, & les cinq autres sur X, lesquels avec les dix déja trouvez font les vingt triangles égaux & équilateraux qui doivent composer l'icosaédre, ce qu'il faloit faire.

Corolaire premier.

Le quarré du diamétre de la sphére est quintu- 186.
ple du quarré du raion du cercle, X ou Z qui est la

base d'un angle solide fait de cinq équilatéraux.

Cela a été démontré dans ce Teor. & s̄ 183.

187. COROLAIRE SECOND.

Le diamétre MN est composé du côté de l'exagone, ou du raion des cercles Z & X, & de deux côtez du décagone inscrit dans ces cercles.

Cela a été démontré dans ce Teor. & s̄ *n* 181.

188. COROLAIRE TROISIÉME.

Les côtez des triangles de l'icosaédre sont égaux aux côtez des pentagones inscrits dans Z ou X.

C'est ce qu'on a prouvé dans ce Teoréme.

199. TEOREME XI.

Les côtez de l'icosaédre sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance avec le diamétre de la sphére où l'icosaédre est inscrit. Euclid. XIII. Prop. 16.

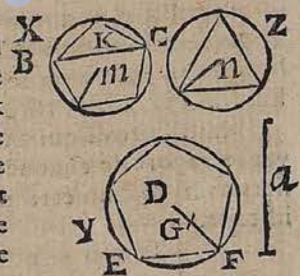
Le quarré du raion des cercles qu'on décrit pour faire l'icosaédre est la cinquiéme partie de celui du diamétre de la sphére, s̄ *n.* 184. Soit ce quarré *bb*, partant celui du diamétre de la sphére est *5bb.* Ces deux quarrez sont donc commensurables étant comme 1 à 5. Soit *x* côté des triangles qui font l'icosaédre, lequel *x* est un des côtez d'un pentagone inscrit dans un cercle dont *b* est le raion, s̄ *n.* 188. partant *bb* & *xx* quarrez du côté du pentagone dont *b* est le raion, sont incommensurables, aussi-bien que leurs racines *x* & *b* l. 4. n. 173. & puisque le quarré *bb* du raion est commensurable avec le quarré du diamétre de la sphére, il faut que *xx* soit incommensurable avec le quarré de ce diamétre; car s'il étoit commensurable avec lui, il le seroit l. 4. n. 119. avec celui de *b*; & si *xx* & le quarré du diamétre sont incommensurables *x* & le diamétre le sont aussi, puisque les raisons

des quarrez sont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainsi si les doublées sont sourdes, il faut que les composantes le soient aussi : car le produit de deux nombres est un nombre.

TEOREME XII.

Le même cercle comprend le pentagone qui est 190
une des faces du dodécaédre & le triangle équilateral qui est une des faces de l'icosaédre. Eucl. XIV. Prop. 3.

X & Z soient deux cercles égaux, il faut prouver que le pentagone de X est une des faces d'un dodécaédre, & le triangle équilateral de Z une des faces de l'icosaédre, ces deux corps inscrits dans une même sphére dont le diamétre est *a*. Il faut prouver que *m* raion de X est égal à *n* raion de Z.



Je fais le pentagone Y dont chaque côté est égal au côté de l'équilateral, face de l'icosaédre. Ce pentagone est ainsi la base de cinq des triangles de l'icosaédre s̄ *n.* 185. Je coupe DF raion de Y au point G en moienne & extréme raison. DG la plus grande partie est le côté du décagone, l. 4. n. 154. Soit pareillement coupé BC en moienne & extréme raison au point K. la plus grande partie BK sera égale au côté de ce pentagone, l. 4. n. 156. Donc BC DF :: BK DG, l. 4. n. 79. Ainsi BC*q* DF*q* :: BK*q* DG*q*, l. 3. n. 68. 3BC*q* 5DF*q* :: 3BK*q* 5DG*q*, l. 3. n. 52. Or 3BC*q* $\propto$ *aa* s̄ *n.* 171. & 5DF*q* $\propto$ *aa* s̄ *n.* 186. Par conséquent 3BC*q* $\propto$ 5DF*q*, ainsi 3BK*q* $\propto$ 5DG*q*. Donc puisque FE*q*

$\propto DGq+DFq$, l. 4. n. 167. Donc $5FEq \propto 5DGq+5DFq$. Donc $5FEq \propto 3BCq+3BKq$. Car on vient de voir que $3BCq \propto 5DFq$, & $3BKq \propto 5DGq$.

Mais $3BCq+3BKq \propto 15mm$, l. 4 n. 168. & $5FEq \propto 15nn$, l. 4. n. 149. Car FE eſt ſupoſé égal au côté du triangle équilateral dont n eſt le raion ; parconſéquent puiſque $15mm \propto 3BCq+3BKq \propto 5FEq \propto 15nn$; donc $15mm \propto 15nn$. Donc $mm \propto nn$; donc $m \propto n$; ce qu'il faloit prouver.

PROBLEME SIXIE'ME.

191. *Le diamétre d'une ſphére étant donné, trouver les côtés des cinq corps réguliers qui y ſont inſcrits.* Eucl. XIII. Prop. 18.

Il faut faire ce qui a été enſeigné pour trouver le raport de chaque côté des corps réguliers avec le diamétre de la ſphére où ils ſont inſcrits.

TEOREME XIII.

192. *La ſurface du dodécaédre eſt égale à trente fois le rectangle fait d'un des côtez du pentagone une de ces faces & de l'apotême de ce pentagone, & celle de l'icoſaédre à trente fois le rectangle fait d'un des côtez de l'équilateral une de ſes faces, & de l'apotême de ce triangle.* Eucl. XIV. Prop. 4.

Aiant mené des lignes du centre du pentagone & de l'équilateral à leurs angles, X ſera partagé en cinq triangles, & Z en trois ; ainſi les douze faces du dodécaédre en ſoi-

xante triangles, comme les vingt faces de l'icoſaédre en ſoixante. Or chacun de ces triangles, comme ABC, eſt égal au rectangle de AD apotême, & de BD moitié de BC, comme auſſi GEH au rectangle de EF par GF moitié de GH, l. 2. n. 132. Donc, &c.

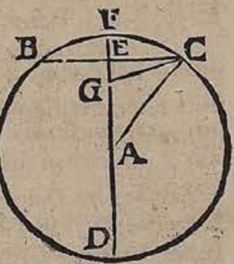
COROLAIRE. 193.

La ſurface du dodécaédre eſt donc à celle de l'icoſaédre, comme $AD+BD$ *eſt à* $EF+GF$.

LEMME SIXIE'ME.

L'apotême du pentagone eſt égal à la moitié d'une ligne égale au côté l'exagone & du décagone inſcrit dans le même cercle. Eucl. XIV. Prop. 1. 194.

BC eſt le côté d'un pentagone, par conſéquent FC côté de la moitié de l'arc BFC eſt le côté du décagone, & AC raion du cercle côté de l'exagone. AE eſt l'apotême du pentagone. Il faut prouver que AE eſt égal à la moitié de AC+CF. Je fais GE égale à EF ; & partant $GC \propto FC$, l. 1. n. 53.



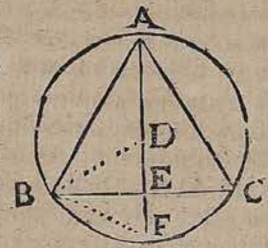
1° FC étant la dixiéme partie du cercle l'angle FAC eſt de trente-ſix ; & puiſque l'arc CD vaut quatre fois ces trente-ſix degrez, donc l'angle CFD eſt de ſoixante-douze double de trente-ſix, l. 2. n. 46. puiſque $GC \propto CF$, donc FCG eſt iſocelle, donc l'angle FGC ſera auſſi de ſoixante douze degrez. Donc CGA eſt de cent huit, l. 2. n. 18. ajoûtez GAC de trente-ſix, cela fera cent quarante-quatre que j'ôte de cent quatre-vingt, reſte trente-ſix valeur de ACG, qui eſt ainſi égal à GAC ;

par conséquent AG)(GC)(FC, donc AG)(FC. Ainsi AG+GE)(FC+FE, ou AE)(FC +FE. Donc AE+EF+FC est le double de AE : donc AE est la moitié de AE+EF ou AF raion, & par conséquent côté de l'exagone, & de la moitié de FC côté du décagone.

195. LEMME VII.

ABC est un équilateral, AE une perpendiculaire qui coupe BC : je dis que DE)(EF.

BF est côté de l'exagone, ainsi égal au raion BD ; donc DE)(EF l. 1. n. 54.



TEOREME XIV.

196. *La surface du dodécaèdre est à celle de l'icosaèdre, comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, inscrits en une même sphere.* Eucl. XIV. Prop. 5.

AD est le côté du triangle face de l'icosaèdre, & BD côté du pentagone face du dodécaèdre qu'un même cercle peut comprendre s̃ *n.* 190. EF coupe par la moitié AD, comme EC coupe par la moitié BD ; & par conséquent l'arc BCD, l. 1. n. 80. donc CD est la corde du décagone. H est le côté d'un cube inscriptible en la même sphére.

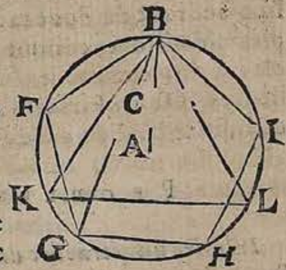
1° ∹ EC+CD EC CD, l. 4. n. 157. Or EG est la moitié de EC+CD s̃ *n.* 194. & EF la

moitié de EC s̃ *n.* 195. comme aussi EG−EF moitié de CD : car 2EG)(EC+CD s̃ *n.* 194. & 2EF)(EC s̃ *n.* 195. donc 2EG)(2EF+CD: ôtant de part & d'autre 2EF, vient 2EG−2EF)(CD ; donc EG−EF est moitié de CD. On a vû que ∹ EC+CD EC CD : donc leurs moitiés sont en même raison; ainsi ∹ EG EF EG−EF. Mais la ligne H étant le côté du cube, si on la coupe en moienne & extrême raison, BD sera son plus grand segment s̃ *n.* 178. Ainsi ∹ H BD H−BD. Donc H BD :: EG EF l. 4. n. 79. Donc H†EF)(BD†EG. Or H AD :: H†EF AD†EF l. 4. n. 84. Donc H AD :: BD †EG AD†EF; c'est à dire comme H côté du cube est à AD côté de l'icosaèdre, de même BD†EG surface du dodécaèdre s̃ *n.* 193. est à AD†EF surface de l'icosaèdre; ce qu'il faloit prouver.

TEOREME XV.

AB raion étant coupé en C en moienne & extrême raison, & AC le plus grand segment, le quarré de BG côté du cube, sera à celui de BK côté de l'icosaèdre, comme ABq+ACq est à ABq+BCq. 197.
Eucl. XIV. Prop. 6.

Soit BFGI un pentagone une des faces du dodécaèdre, & BKL un triangle face de l'icosaèdre ; ce qui est possible s̃ 190. BG est le côté du cube inscrit dans une même sphére s̃ *n.* 178. donc BKq)(3ABq l. 4. n. 149. Or ABq+CBq)(3ACq, l. 4. n. 82.



Donc BK*q* est triple de AB*q*, comme AB*q*+CB*q* est triple de AC*q*. Ainsi BK*q* AB*q*:: AB*q*+CB*q* AC*q*. *Permutando* BK*q* AB*q*+CB*q*:: AB*q* AC*q*. Or BF est le plus grand segment de BG côté du cube coupé en moienne & extrême raison s̃ *n.* 178. Donc AB*q* AC*q*:: BG*q* BF*q* l. 4. n. 79. BG*q* BF*q*::BK*q* AB*q*+CB*q* l. 3. n. 51. *Permutando* BG*q* BK*q*:: BF*q* AB*q*+CB*q*. Or BF*q*)(AB*q*+AC*q*, l. 4. n. 167. AB & AC étant côtez de l'exagone & du décagone, l. 4. n. 54. Metant AB*q*+AC*q* en la place de BF*q*, nous aurons BG*q* BK*q*:: AB*q*+AC*q* AB*q*+CB*q*; ce qu'il faloit prouver.

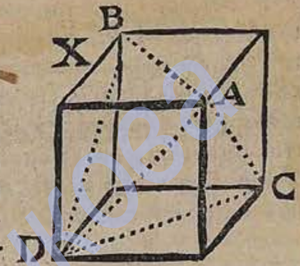
TEOREME XVI.

198. *Comme le côté du cube est au côté de l'icosaédre, ainsi le dodécaédre est à l'icosaédre inscrit dans un même cercle.* Eucl. XIV. Prop. 7.

Concevez que de tous les angles d'un dodécaédre, & de même de l'icosaédre, on ait mené des lignes au centre de la sphére. Cela fera dans l'un douze piramides, & dans l'autre vingt qui seront de même hauteur, puisque le même cercle dans la sphére comprend une des faces de l'icosaédre & du dodécaédre s̃ *n.* 190. ainsi ces piramides sont comme leurs bases s̃ *n.* 130. c'est à dire comme les surfaces de ces deux poliédres. Or ces surfaces sont entr'elles s̃ *n.* 196. comme le côté du cube au côté de l'icosaédre.

PROBLEME VII.

199. *Inscrire un tétraédre dans un cube.* Eucl. XV. Prop. I.



De A un des angles du cube X, concevant qu'on ait mené les diagonales AB, AC, AD, BC, CD, DB, vous apercevrez ABCD un tétraédre ou piramide de quatre triangles équilateraux, car les diagonales sont égales. ainsi le triangle ABC)(BAD, &c.

Il faut avoir à la main les corps réguliers dont on parle. Il est facile de les faire selon qu'on l'a enseigné s̃ *n.* 162. *Tout ce qu'on va lire sera aisé faisant sur chaque corps ce qu'on dit ici qu'il y faut faire. Autrement les démonstrations suivantes seront obscures.*

PROBLEME VIII.

Inscrire un octaédre dans une piramide ou tétraédre Eucl. XV. Prop. 2. 200.

Coupez par la moitié tous les six côtez de la piramide ou tétraédre, joignez les points de section par douze lignes qui seront toutes égales & feront huit triangles équilateraux.

PROBLEME IX.

Dans un cube faire un octaédre. Eucl. XV. 201
Prop. 3.

Aiant pris le centre de chaque face du cube, il faut joindre ces centres en tirant des lignes autant qu'il en faut; savoir douze qui étant toutes égales feront huit triangles égaux, & par conséquent un octaédre.

PROBLEME X.

Dans un octaédre faire un cube. Eucl. XV. 202
Prop. 4.

1° coupez par la moitié tous les côtez de l'octaédre. 2° Menez des lignes par toutes ces sections sur les faces de ce corps, ces lignes seront toutes égales, & feront deux quarez oposez, lesquels joignant par quatre autres lignes qui seront égales aux premieres, & les oposées étant paralleles elles feront un cube; ce qui est évident.

203. PROBLEME XI.

Faire un dodécaédre dans un icosaédre. Eucl. XV. Prop. 5.

Cinq triangles de l'icosaédre qui font un angle solide ou une piramide, ont pour base un pentagone $\bar{s}$ *n.* 185. Il faut couper tous les côtez de cette piramide par la moitié le plan de cette section, sera un pentagone & une des faces du dodécaédre: car en faisant la même chose à tous les angles solides ou piramides de l'icosaédre qui sont au nombre de douze, on aura douze pentagones égaux qui feront les douze faces du dodécaédre.

ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE SIXIE'ME.

De la Métode.

AVERTISSEMENT.

La métode que nous avons suivie jusqu'à present, c'a été de considerer l'idée des choses dont nous parlions, & de tirer de leur idée leurs proprietez. Par exemple quand il s'est agi de démontrer les proprietez du cercle, nous avons consideré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom, comment elle se faisoit, ce qu'elle étoit; & c'est de l'idée de cette figure que nous avons déduit ces proprietez. Cette métode supose la chose connuë, *Ces Elemens m'étoient connus avant que de les écrire ; & ce que j'ai fait, c'a été de faire apercevoir dans l'idée des choses que j'ai proposées, ce qui y est & ce que j'y avois vû. Il y a une autre metode avec laquelle on trouve ce qu'on ne connoissoit point, & que j'ai emploiée moi même dans ces Elemens en beaucoup d'ocasions pour trouver ce que je ne savois point ; c'est pourquoi on l'apelle Métode d'invention, au lieu que la premiere se peut nommer Métode de doctrine. Cette seconde est tres-generale, & proprement elle ne supose aucune connoissance, au moins ne dépend-elle point de la Geométrie ; c'est pourquoi nous l'avons pû traiter dans les Elémens des Matématiques ; où nous n'avons supossé aucune connoissance de la Geométrie. Comme cette métode sert à perfectionner la Geométrie ; & que c'est même par son moien qu'on a découvert un tres-grand nombre de veritez qu'on a proposées, il est à propos avant que de finir ces Elemens de donner une idée de cette métode ; apliquant à la Geométrie telle que nous l'avons enseignée, ce que nous avons dit de cette métode dans les Elemens des Matématiques. J'ai dit qu'elle perfectionne la Geométrie ; car par son moien on découvre les proprietez les plus cachées des lignes courbes : C'est à quoi elle sert particulierement ; c'est pour cela que n'aiant point parlé de ces lignes, ce que nous avons à dire de cette métode sera court.*

CHAPITRE I.

De la métode qu'il faut suivre dans l'examen d'une question. Il faut en premier lieu bien concevoir ce qui est en question, & trouver le moien de l'exprimer nétement.

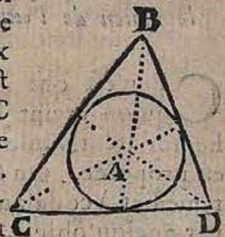
CE n'est que par l'aplication de l'esprit qu'on ateint la verité. Il faut donc considerer atentivement le sujet de la question qui est proposée. On se distrait facilement. Pour remédier à ce défaut, il faut arêter son esprit par quelqu'objet, exprimant par une figure ce qu'il doit considerer. Cela n'est pas impossible, quoiqu'on ne connoisse pas entierement les choses qui sont en question, car si on les ignoroit entierement, on ne pouroit pas absolument les connoître. Or de ce qu'on connoît on peut suposer que la chose qui est proposée est telle ou telle, & l'exprimer ainsi. L'importance c'est que cette expression soit néte, qu'on y voie ce qu'il faut chercher pour résoudre la question proposée, qu'elle soit débarassée de ce qui ne serviroit qu'à la rendre obscure. Cela se comprendra mieux dans les exemples suivans, où l'on va voir que la seule expression résout souvent des questions dificiles. J'entens ici les expressions qui se font par des figures aussi-bien que par le discours. 1.

QUESTION.

Démontrer que la surface d'un triangle est 2.

égale à la moitié de la ſomme de ſes trois côtez multipliez par le raion d'un cercle qui lui eſt inſcrit.

La ſeule vûë de cette figure démontre que cela eſt véritable. Des angles du triangle BCD aiant mené des lignes au centre A du cercle qui
2. lui eſt inſcrit, on fait trois triangles égaux enſemble au triangle BCD, qui ont pour hauteur le raion de ce cercle. Ils ſont donc égaux à un triangle dont la baſe eſt égale aux trois côtez de BCD, & qui a pour hauteur le raion du cercle inſcrit l. 2. n. 142. La ſurface de ce triangle eſt donc égale au produit de la moitié de ſa baſe par ſa hauteur : ce qu'il faloit prouver.

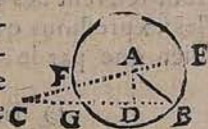


Voions encore par un autre exemple combien la maniere d'exprimer une queſtion par une figure convenable en facilite la réſolution.

QUESTION.

Démontrer que dans le triangle ABC, ſi de
3. *l'angle CAB on mene une perpendiculaire ſur BC, la ſomme des deux côtez AB & AC eſt à BC baſe de l'angle que ces deux côtez comprennent comme la diference de CD & DB eſt à celle de AC & AB.*

Pour trouver la démonſtration de ce Teorême & l'exprimer d'une maniere qui en facilite l'invention, de A comme centre, & de l'intervale AB le plus petit côté, je fais un cercle; & puiſque AB eſt égal à AE, la ligne CE

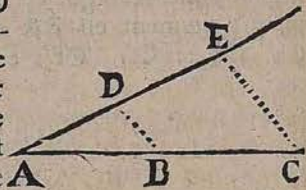


eſt la ſomme des côtez AC & AB. Les lignes AF & AB ſont égales; donc CF eſt leur diference. Puiſqu'auſſi DB)(DG la ligne GC ſera la diference entre CD & DB : ainſi voila une expreſſion ou une figure qui marque ce que l'on cherche. Aprés quoi la queſtion ſe réſoud facilement, car les lignes CE & CB ſont coupées réciproquement en F & en G l. 4. n. 18. Ainſi CE CB :: CG CF ; ce qu'il faloit démontrer.

Nous avons vû en pluſieurs ocaſions. *Voiez l. 4. n. 75.* que ce qui nous a facilité des démonſtrations fort dificiles, ce n'a été que l'ex- 4
preſſion dont nous nous ſommes ſervis. Mais comme nous traitons à preſent une métode beaucoup plus generale que celle dont nous nous ſommes ſervis, il ne faut pas s'atacher à des exemples tirez de la Geométrie. On ne ſupoſe dans cette métode aucune autre proprieté des grandeurs qu'on examine, ſinon qu'on les peut ajoûter à d'autres grandeurs, ou les retrancher ſi elles ſont plus petites, qu'on les peut multiplier ou diviſer. Cela eſt fort general ; & c'eſt ce que nous entreprenons d'expliquer ici ; & de montrer comment cette métode ſe peut pratiquer en Geométrie.

Pour cela je remarquerai qu'on peut faire
toutes les operations de l'Arithmétique avec le 5.
compas & la régle. Il eſt évident qu'on peut ajoûter une ligne à une autre ligne, & retrancher une plus petite d'une plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'eſt à dire pour trouver une ligne qui ſoit égale au produit de deux lignes : Voila ce qu'il faut faire. Soient ces deux lignes AD & AC qu'on veut multiplier l'une par l'autre. Il faut

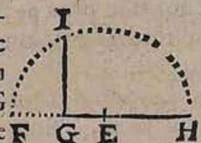
prendre sur AC la ligne AB égale à l'unité, & mener une ligne AD qui fasse un angle à discrétion avec AB : je tire une ligne par D & B, & une autre par C qui lui soit parallele ; ce qui étant fait, AE sera la ligne que l'on cherche : car AB AD :: AC AE, donc AB†AE ∝ AD†AC. La multiplication n'augmente point une grandeur qui n'est multipliée que par l'unité, c'est à dire qui n'est prise qu'une fois. Ainsi



comme AB est l'unité, en multipliant AE elle ne l'augmente point. Donc AE, qui est une quatriéme proportionnelle, sera égale au produit de AD par AC ce que l'on cherchoit.

Si l'on veut diviser AE par AC aiant pris AB égale à l'unité, & mené par B une parallele à CE, on aura AD qui sera la valeur de AE divisée par AC, car AB AD :: AC AE, & l'unité est au quotient d'une division, comme le diviseur est à la grandeur divisée.

S'il faut tirer la racine quarrée de GH, je lui ajoûte en ligne droite FG qui est l'unité, &
6. divisant FH en deux parties égales au point E: du centre E je fais le cercle FIH, élevant ensuite du point G une ligne droite jusqu'à I à angles droits sur FH, la ligne GI est la racine que l'on cherche: car ÷ FG GI GH, donc le quarré de GI est égal au produit de FG & GH : or FG étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de GH en la



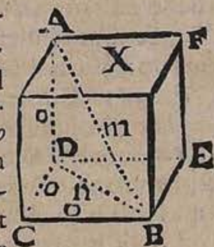
multipliant,

C, laquelle sera le raion d'un cercle, dans lequel aiant fait un triangle équilateral dont AC est le côté, vous aurez une des faces du tétraédre, comme il est évident š *n.* 167.

Teoreme quatriéme.

Le quarré du diamétre, de la sphére est triple 171.
du quarré de chaque côté du cube, ou de l'exaédre qui lui est inscrit. Eucl. III. Prop. 15.

Le cube ou l'exaédre X est inscrit dans une sphére ; soit la diagonale AB ∝ *m* qui est le diamétre de la sphére, la diagonale d'une des faces du cube soit BD ∝ *n*. Je nomme *o* tous les côtez de ce cube qui sont tous égaux. ABq ∝ BDq + ADq, ou *mm* ∝ *nn* + *oo* l. 4. n. 71. De même BDq ∝ BCq + CDq, ou *nn* ∝ *oo* + *oo*. Donc en substituant *oo* + *oo* en la place de *nn*, on aura *mm* ∝ *oo* + *oo* + *oo*, ou *mm* + 3*oo*, qui est ce qu'il faloit démontrer ; savoir, que le



quarré de *m* ou de AB diamétre de la sphére, valoit trois fois le quarré de chaque côté du cube.

Probleme second.

172.

Le diamétre de la sphére étant donné, trouver le côté du cube ou de l'exaédre qui peut y être inscrit, ou trouver un cercle capable d'une des faces du cube. Eucl. XIII. Prop. 15. (*Figure* š 170.)

Soit AB le diametre de la sphére où il faut inscrire un cube, je le divise en trois parties, desorte que AD est double de DB : sur D j'éleve la perpendiculaire CD, & de C je méne une ligne à B qui sera le côté du cube que je cherche. Car ſoit $BA \propto 3c$ & $CB \propto d$: Donc ∺ $3c$, d, c, l. 4. n. 28. Donc $3cc \propto dd$. l. 4. n. 69. Le quarré de A B ou de $3c$ eſt $9cc$; donc le quarré de AB eſt triple de celui de d, qui ne vaut que $3cc$. Partant BC eſt le côté du cube qu'on cherchoit s̃ n. 171.

Enſuite ſi on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont CB ſoit un des côtez, & lui circonſcrire un cercle qui ſera celui qu on demande.

TEOREME CINQUIE'ME.

173 *Le côté du cube eſt incommenſurable en lui même, & commenſurable en puiſſance avec le diamétre de la ſphere.* (même figure.)

BC ou d côté du cube eſt moien proportionnel entre tout le diamétre AB ou $3c$, & ſa troiſiéme partie c; ainſi puiſque ∺ $3c$ d c donc $3c$ c :: 3 1. Ces deux nombres 3 & 1 ne ſont pas deux nombres quarrez, partant BC eſt incommenſurable avec AB en lui-même, mais commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quaré eſt le tiers de AB l. 4. n. 134.

TEOREME SIXIE'ME.

174 *Le quarré de chaque côté d'un octaédre eſt la moitié de celui du diamétre de la ſphere où il eſt inſcrit.* Eucl. XIII. Prop. 14.

Un octaédre eſt composé de huit triangles équilateraux tous égaux; dont les côtez ſont cordes du quart du cercle ou de nonante degrez. Or il eſt évident que le quarré de la corde de nonante degrez eſt la moitié de celui du diametre: car deux cordes de nonante degrez font un angle droit, dont la baſe eſt le diamétre du cercle; ainſi le quarré de ces deux cordes eſt égal à celui du diamétre, qui eſt par conſéquent le double de celui de chacune de ces

deux cordes.

TEOREME SE'TIE'ME.

Le même cercle comprend le quarré qui eſt une des faces du cube, & le triangle qui eſt une des faces de l'octaédre. Euclid. XIV. Prop. 8. 175

Soit a le diamétre de la ſphére, b le côté du quarré qui eſt une des faces du cube, & c le côté du triangle qui eſt une des faces de l'octaédre. Soit nommé y le raion du cercle capable du quarré du cube, & x celui du cercle qui eſt capable du triangle de l'octaédre. Il faut prouver que $y \propto x$.

1° Si on conçoit bb le quarré face du cube inſcrit dans un cercle dont y eſt le raion, il eſt évident que $2yy \propto bb$. l. 4. n. 71. Et puiſque $3bb \propto aa$ s̃ n. 171. donc $aa \propto 6yy$. 2° $3xx \propto cc$ l. 4. n. 149. Or $2cc \propto aa$ s̃ n. 174. donc $6xx \propto aa$. Ainſi puiſque $6yy \propto aa \propto 6xx$, donc $6yy \propto 6xx$; donc $y \propto x$: ce qu'il faloit prouver.

TEOREME HUITIE'ME.

Le côté d'un octaédre eſt incommenſurable en lui-même, & commenſurable en puiſſance avec le diamétre de la ſphére où il eſt inſcrit. 176

Le quaré de chaque côté de l'octaédre eſt à celui du diamétre de la ſphére, comme 1 à 2 s̃ n. 174. Or 1 & 2 ne ſont pas des nombres quarrez; donc ce côté eſt incommenſurable en lui-même, avec le diamétre de la ſphére, & commenſurable en puiſſance. l. 4. n. 134.

PROBLEME TROISIE'ME.

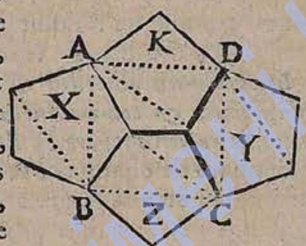
Trouver le côté d'un octaédre, & un cercle capable d'une des faces de ce ſolide. 177

Trouvez par le Problême ſecond un cercle capable d'un des côtez du cube. Par le Teorême ſétiéme ce cercle eſt capable des faces de l'octaédre. Il ne s'agit donc que de faire un triangle équilateral dans ce cercle. Le côté de ce triangle ſera celui qu'on cherche.

TEOREME IX.

178. *KXZY ſont des pentagones égaux, qui ſont les faces d'un dodécaédre inſcrit dans une ſphére,* aiez à la main en liſant ceci un dodécaédre. *Concevez ſur chacune de ces faces une diagonale de A à B, de B à C, de C à D & de D à A, ainſi ſur toutes les autres faces. Je dis 1° que ces quatre diagonales font un quarré ABCD. 2° Que les diagonales des douze pentagones menées deſorte qu'elles ſe joignent, forment ſix quarrez égaux à ABCD, leſquels font un cube inſcrit dans la même ſphére que le dodécaédre, dont chaque côté par conſequent eſt égal à la diagonale de chaque pentagone.*

1° Toutes ces diagonales ſont égales ſoûtenant des angles égaux.



2° Concevons que des quatre points A, B, C, D qui ſont ſur la ſphére où le dodécaédre eſt inſcrit, on ait mené des lignes au cẽtre de la ſphére, cela fera une piramide quadrilaterale; dont le plan qui couperoit la ſphére & paſſeroit par ces quatre points ſeroit la baſe. 3° Cette ſection de la ſphére par le plan ABCD ſera un cercle s̃ *n.* 163. Or on ne peut inſcrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le ſeul quarré, car ces quatre angles valent quatre droits l. 2. n. 114. & puiſqu'ils ſont apuiez ſur des arcs égaux, ils ſont égaux: Donc la figure ABCD, qui a ſes côtez égaux, & qui eſt

inſcrite dans un cercle eſt un quarré.

4° Tout pentagone ſe peut réduire en trois triangles; partant la ſurface d'un dodécaédre, compoſée de douze pentagones, ſe réduit en trente-ſix triangles. Or chaque quarré égal à ABCD en ſoûtient ſix, comme il ſe voit dans la figure; donc ces trente-ſix triangles ne peuvent être ſoûtenus que par ſix quarrez égaux, qui forment un cube inſcrit dans la même ſphére; & partant il eſt vrai de dire que la diagonale d'un pentagone, qui eſt une des faces du dodécaédre inſcrit dans une ſphére, eſt égale au côté du cube inſcrit dans la même ſphére.

PROBLEME IV. 179.

Trouver le côté d'un dodécaédre & un cercle capable d'une des faces de ce ſolide. Euclid. XIII. Prop. 17.

Il faut premierement trouver le côté d'un cube inſcrit dans la ſphere propoſée s̃ *n.* 172.

2° Couper ce côté du cube qui eſt la diagonale de chaque pentagone face du dodécaédre s̃ 178, il faut dis-je couper ce côté du cube en moienne & extréme raiſon: la plus grande partie ſera le côté du dodécaédre propoſé, l. 4. n. 156.

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du dodécaédre, il faut faire le pentagone dont on vient de connoître un des côtez l. 4. n. 162. enſuite lui circonſcrire un cercle qui ſera ce qu'on cherche.

TEOREME X. 180.

Le côté du dodécaédre eſt incommenſurable avec le diamétre de la ſphére, tant en lui-même qu'en premiere puiſſance. Eucl. XIII. Prop. 17.

Soit le diamétre de la ſphere b, celui du côté du cube inſcrit dans la ſphere $c+d$ coupé en moienne & extrême raison, dont c la plus grande partie est le côté du dodécaédre s̃ 178. 1° c est incommensurable tant en elle-même qu'en puissance avec $c+d$ l. 4. n. 143.

2° $c+d$ est commensurable en premiere puissance avec b s̃ n. 173. c'est à dire, que $cc+2cd+dd$ est commensurable avec bb. Il faut donc que cc soit incommensurable avec bb; car s'il étoit commensurable avec bb, il le seroit avec le quaré de $c+d$ l. 4. n. 119. avec lequel bb est commensurable, puisque bb est le triple de ce quarré s̃ n. 171. par conséquent cc incommensurable en puissance avec bb, est aussi incommensurable en lui même avec b l. 4. n. 121.

LEMME II.

181. *MN est le diamétre d'un cercle, dans lequel les deux cordes AB & CE qui coupent MN à angles droits, sont paralleles entr'elles, & la distance de FG égale à la moitié de chacune; je dis que MF sera le côté d'un décagone inscrit dans un cercle dont FA sera le raion.*

Suposant MF ou GN $\propto x$ & AF $\propto z+x$: si MF ou x est le côté d'un décagone dont AF ou $z+x$ est le raion; il faut qu'aiant coupé AF en moienne & extrême raison, x en soit la médiane l. 4. n. 154. & que par conséquent ÷ $z+x$ x z, ainsi si nous démontrons cela, savoir que ÷ $z+x$ x z, nous avons fait ce qui est proposé.

Puisque AF $\propto z+x$; donc AB $\propto 2z+2x$, & BC $\propto z+x$. Le quarré de AB, qui est $4zz+8zx+4xx$, avec celui

de BC qui est $zz+2zx+xx$ sont égaux à celui de AC ou de MN: or par l'hipotése MN $\propto 3x+z$; car MF & GN sont chacun égaux à x, & FG $\propto z+x$: le quarré dis-je de $3x+z$ est $9xx+6xz+zz$: mettant donc les deux quarrez de AB & de BC en une somme $9xx+6xz+zz \propto 5zz+10zx+5xx$, ôtant de part & d'autre $5xx+6xz+zz$, il restera $4xx \propto 4zz+4zx$; divisant l'un & l'autre par 4, il viendra $xx \propto zz+zx$; donc ÷ $z+x$ x z, puisque le produit des extrêmes $z+x$ & z qui est $zz+zx$ est égal à xx, quarré de la grandeur moienne x: c'est ce qu'il faloit démontrer.

LEMME III. 182.

La ligne AM est le côté d'un pentagone inscrit dans un cercle dont AF est le raion. (même figure)

MF est le côté du décagone dans un cercle dont AF est le raion s̃ n. 181. le quarré de AF avec celui de MF sont égaux à celui de AM; donc AM est le côté du pentagone l. 4. n. 167.

LEMME IV. 183.

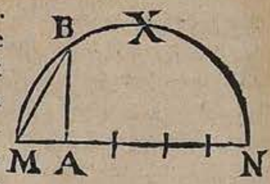
Le quarré de AF, ou de FB, ou de GE, ou de GC lignes égales, est la cinquiéme partie de celui du diamétre AC ou MN. (même figure.)

Soit AF $\propto b$; donc AB $\propto 2b$, & BC $\propto b$, le quarré de AB est $4bb$, & celui de BC est bb: or ces deux quarrez qui font $5bb$ sont égaux à celui de AC ou de MN; qui vaut ainsi cinq fois celui de AF.

LEMME V.

Trouver une ligne dont le quarré soit la cinquiéme partie de celui de MN diamétre de X cercle donné. 184

AM est la cinquiéme partie de MN, le quarré de MN peut cinq fois celui de MB, l. 4. n. 75. ainsi MB sera la ligne que l'on cherchoit, c'est à dire égale à AF de la figure précédente, puisque le quarré de AF est la cinquiéme partie de MN, n. 183.



PROBLEME V.

MN diamétre d'une sphére étant donné faire
185 *un icosaédre.* Eucl. XIII. Prop. 16.

Aiant trouvé la valeur de AF. *Voiez la figure du Lemme second*, & l'aiant coupé par la moitié: du centre D je fais DF & DG égales à cette moitié, desorte que FG ∞ AF, aprés je méne AB & CE, qui coupent MN en angles droits.

2° Prenant AB & CE pour diamétres, je fais deux cercles que je nomme Z & X qui sont paralleles. *Voyez la figure suivante*, étant sur des plans qu'on supose paralleles.

3° J'inseris dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je méne des lignes droites à M & à N extrémité du diamétre de la sphére, ce qui fait cinq triangles dont les côtez sont égaux chacun au côté

du pẽtagone inserit dans ces deux cercles, par le Lemme troisiéme; ainsi tous les côtez de ces triangles étant tous égaux aux côtez des pentagones forment deux angles solides sur les cercles Z & X chacun de cinq triangles équilateraux, dont le sommet est aux extrémitez M & N du diamétre de la sphére; & voila déja dix faces trouvées de l'icosaédre. *On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle solide ni ses côtez dont le sommet est en N, de peur de rendre la figure confuse, il y faut supléer par la pensée.*

4° J'inseris encore dans ces mêmes cercles Z & X un décagone, dont je joins les angles qui se répondent dans X & Z par les lignes BE, PK, IH, DG, FI, &c. qui par l'hipotése seront toutes égales aux raions de Z & de X.

5° Je méne les diagonales BK, KI, IG, GF, &c. Les quarrez BP coté du décagone, avec celui de PK, qui est égal au raion de Z & de X sont égaux à celui de BK; donc, BK est le côté du pentagone inserit dans Z & dans X, l. 4 n. 167. La meme chose se démontre de KI, de IG, de CF, &c. les triangles BKI, KIG, IGF, &c. ont pour base les côtez dudit pentagone, ils sont donc équilateraux entr'eux & aux dix qui composent les deux angles solides dont nous avons parlé ci-dessus: par conséquent il y a entre Z & X dix de ces triangles, dont cinq ont leurs bases sur Z, & les cinq autres sur X, lesquels avec les dix déja trouvez font les vingt triangles égaux & équilateraux qui doivent composer l'icosaédre, ce qu'il faloit faire.

COROLAIRE PREMIER.

Le quarré du diamétre de la sphére est quintu- 186
ple du quarré du raion du cercle, X ou Z qui est la

base d'un angle solide fait de cinq équilateraux.

Cela a été démontré dans ce Teor. & s̃ 183.

187. COROLAIRE SECOND.

Le diamétre MN est composé du côté de l'exagone, ou du raion des cercles Z & X, & de deux côtez du décagone inscrit dans ces cercles.

Cela a été démontré dans ce Teor. & s̃ *n* 181.

188. COROLAIRE TROISIE'ME.

Les côtez des triangles de l'icosaédre sont égaux aux côtez des pentagones inscrits dans Z ou X.

C'est ce qu'on a prouvé dans ce Teoréme.

199. TEOREME XI.

Les côtez de l'icosaédre sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance avec le diamétre de la sphére où l'icosaédre est inscrit. Euclid. XIII. Prop. 16.

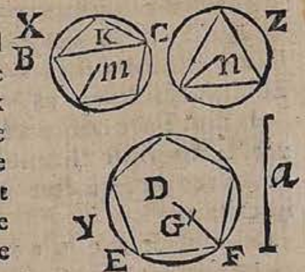
Le quarré du raion des cercles qu'on décrit pour faire l'icosaédre est la cinquiéme partie de celui du diamétre de la sphére, s̃ *n.* 184. Soit ce quarré *bb*, partant celui du diamétre de la sphére est 5*bb*. Ces deux quarrez sont donc commensurables étant comme 1 à 5. Soit *x* côté des triangles qui font l'icosaédre, lequel *x* est un des côtez d'un pentagone inscrit dans un cercle dont *b* est le raion, s̃ *n.* 188. partant *bb* & *xx* quarrez du côté du pentagone dont *b* est le raion, sont incommensurables, aussi-bien que leurs racines *x* & *b* l. 4. n. 173. & puisque le quarré *bb* du raion est commensurable avec le quarré du diamétre de la sphére, il faut que *xx* soit incommensurable avec le quarré de ce diamétre; car s'il étoit commensurable avec lui, il le seroit l. 4. n. 119. avec celui de *b*; & si *xx* & le quarré du diamétre sont incommensurables *x* & le diamétre le sont aussi, puisque les raisons

des quarrez sont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainsi si les doublées sont sourdes, il faut que les composantes le soient aussi: car le produit de deux nombres est un nombre.

TEOREME XII.

Le même cercle comprend le pentagone qui est une des faces du dodécaédre & le triangle équilateral qui est une des faces de l'icosaédre. Eucl. XIV. Prop. 3. 190

X & Z soient deux cercles égaux, il faut prouver que le pentagone de X est une des faces d'un dodécaédre, & le triangle équilateral de Z une des faces de l'icosaédre, ces deux corps inscrits dans une même sphére dont le diamétre est *a*. Il faut prouver que *m* raion de X est égal à *n* raion de Z.



Je fais le pentagone Y dont chaque côté est égal au côté de l'équilateral, face de l'icosaédre. Ce pentagone est ainsi la base de cinq des triangles de l'icosaédre s̃ *n.* 185. Je coupe DF raion de Y au point G en moienne & extrême raison. DG la plus grande partie est le côté du décagone, l. 4. n. 154. Soit pareillement coupé BC en moienne & extrême raison au point K. la plus grande partie BK sera égale au côté de ce pentagone, l. 4. n. 156. Donc BC DF :: BK DG, l. 4. n. 79. Ainsi BC*q* DF*q* :: BK*q* DG*q*, l. 3. n. 68. 3BC*q* 5DF*q* :: 3BK*q* 5DG*q*, l. 3. n. 52. Or 3BC*q*)(*aa* s̃ *n.* 171. & 5DF*q*)(*aa* s̃ *n.* 186. Par conséquent 3BC*q*)(5DF*q*, ainsi 3BK*q*)(5DG*q*. Donc puisque FE*q*

$\propto DGq+DFq$, l. 4. n. 167. Donc $5FEq\propto 5DGq+5DFq$. Donc $5FEq\propto 3BCq+3BKq$. Car on vient de voir que $3BCq\propto 5DFq$, & $3BKq\propto 5DGq$.

Mais $3BCq+3BKq\propto 15mm$, l. 4 n. 168. & $5FEq\propto 15nn$, l. 4. n. 149. Car FE est suposé égal au côté du triangle équilateral dont n est le raion ; parconséquent puisque $15mm\propto 3BCq+3BKq\propto 5FEq\propto 15nn$; donc $15mm\propto 15nn$. Donc $mm\propto nn$; donc $m\propto n$; ce qu'il faloit prouver.

PROBLEME SIXIE'ME.

Le diamétre d'une sphére étant donné, trouver
191. *les côtés des cinq corps réguliers qui y sont inscrits.*
Eucl. XIII. Prop. 18.

Il faut faire ce qui a été enseigné pour trouver le raport de chaque côté des corps réguliers avec le diamétre de la sphére où ils sont inscrits.

TEOREME XIII.

La surface du dodécaédre est égale à trente fois
192. *le rectangle fait d'un des côtez du pentagone une de ces faces & de l'apotême de ce pentagone, & celle de l'icosaédre à trente fois le rectangle fait d'un des côtez de l'équilateral une de ses faces, & de l'apotême de ce triangle.* Eucl. XIV. Prop. 4.

Aiant mené des lignes du centre du pentagone & de l'équilateral à leurs angles, X sera partagé en cinq triangles, & Z en trois ; ainsi les douze faces du dodécaédre en soixante triangles, comme les vingt faces de l'icosaédre en soixante.

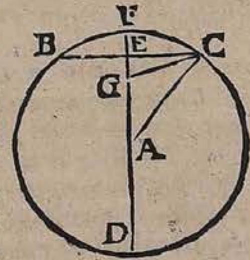
Or chacun de ces triangles, comme ABC, est égal au rectangle de AD apotême, & de BD moitié de BC, comme aussi GEH au rectangle de EF par GF moitié de GH, l. 2. n. 132. Donc, &c.

COROLAIRE. 193.

La surface du dodécaédre est donc à celle de l'icosaédre, comme AD+BD est à EF+GF.

LEMME SIXIE'ME.

L'apotême du pentagone est égal à la moitié d'u- 194.
ne ligne égale au côté l'exagone & du décagone inscrit dans le même cercle. Eucl. XIV. Prop. 1.



BC est le côté d'un pentagone, par conséquent FC côté de la moitié de l'arc BFC est le côté du décagone, & AC raion du cercle côté de l'exagone. AE est l'apotême du pentagone. Il faut prouver que AE est égal à la moitié de AC+CF. Je fais GE égale à EF ; & partant $GC\propto FC$, l. 1. n. 53.

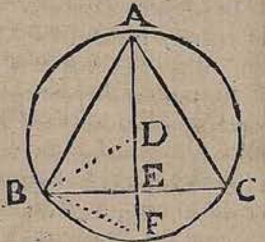
1° FC étant la dixiéme partie du cercle l'angle FAC est de trente-six; & puisque l'arc CD vaut quatre fois ces trente-six degrez, donc l'angle CFD est de soixante-douze double de trente-six, l. 2. n. 46. puisque $GC\propto CF$, donc FCG est isocelle, donc l'angle FGC sera aussi de soixante douze degrez. Donc CGA est de cent huit, l. 2. n. 18. ajoûtez GAC de trente-six, cela fera cent quarante-quatre que j'ôte de cent quatre-vingt, reste trente-six valeur de ACG, qui est ainsi égal à GAC ;

par conséquent AG∝GC∝FC, donc AG∝FC. Ainsi AG+GE∝FC+FE, ou AE∝FC+FE. Donc AE+EF+FC est le double de AE : donc AE est la moitié de AE+EF ou AF raion, & par conséquent côté de l'exagone, & de la moitié de FC côté du décagone.

195. LEMME VII.

ABC est un équilateral, AE une perpendiculaire qui coupe BC : je dis que DE∝EF.

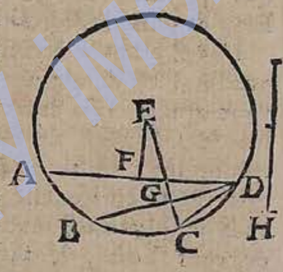
BF est côté de l'exagone, ainsi égal au raion BD ; donc DE∝EF l. 1. n. 54.



TEOREME XIV.

196. *La surface du dodécaédre est à celle de l'icosaédre, comme le côté du cube est au côté de l'icosaédre, inscrits en une même sphere.* Eucl. XIV. Prop. 5.

AD est le côté du triangle face de l'icosaédre, & BD côté du pentagone face du dodécaédre qu'un même cercle peut comprendre s̃ n. 190. EF coupe par la moitié AD, comme EC coupe par la moitié BD ; & par conséquent l'arc BCD, l. 1. n. 80. donc CD est la corde du décagone. H est le côté d'un cube inscriptible en la même sphére.



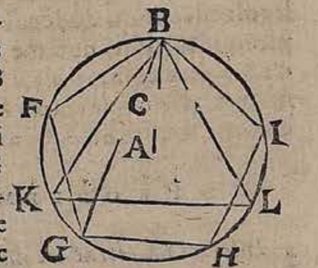
1° ∺ EC+CD EC CD, l. 4. n. 157. Or EG est la moitié de EC+CD s̃ n. 194. & EF la

moitié de EC s̃ n. 195. comme aussi EG−EF moitié de CD : car 2EG∝EC+CD s̃ n. 194. & 2EF∝EC s̃ n. 195. donc 2EG∝2EF+CD : ôtant de part & d'autre 2EF, vient 2EG−2EF∝CD ; donc EG−EF est moitié de CD. On a vû que ∺ EC+CD EC CD : donc leurs moitiés sont en même raison ; ainsi ∺ EG EF EG−EF. Mais la ligne H étant le côté du cube, si on la coupe en moienne & extrême raison, BD sera son plus grand segment s̃ n. 178. Ainsi ∺ H BD H−BD. Donc H BD :: EG EF l. 4. n. 79. Donc H+EF∝BD+EG. Or H AD :: H+EF AD+EF l. 4. n. 84. Donc H AD :: BD+EG AD+EF ; c'est à dire comme H côté du cube est à AD côté de l'icosaédre, de même BD+EG surface du dodécaédre s̃ n. 193. est à AD+EF surface de l'icosaédre ; ce qu'il faloit prouver.

TEOREME XV.

AB raion étant coupé en C en moienne & extrême raison, & AC le plus grand segment, le quarré de BG côté du cube, sera à celui de BK côté de l'icosaédre, comme ABq+ACq est à ABq+BCq. 197.
Eucl. XIV. Prop. 6.

Soit BFGI un pentagone une des faces du dodécaédre, & BKL un triangle face de l'icosaédre ; ce qui est possible s̃ 190. BG est le côté du cube inscrit dans une même sphére s̃ n. 178. donc BKq∝3ABq l. 4. n. 149. Or ABq+CBq∝3ACq, l. 4. n. 82.



Donc BKq est triple de ABq, comme ABq+CBq est triple de ACq. Ainsi BKq ABq :: ABq+CBq ACq. *Permutando* BKq ABq+CBq :: ABq ACq. Or BF est le plus grand segment de BG côté du cube coupé en moienne & extrême raison s̃ *n.* 178. Donc ABq ACq :: BGq BFq l. 4. n. 79. BGq BFq :: BKq ABq+CBq l. 3. n. 51. *Permutando* BGq BKq :: BFq ABq+CBq. Or BFq $\propto$ ABq+ACq, l. 4. n. 167. AB & AC étant côtez de l'exagone & du décagone, l. 4. n. 54. Metant ABq+ACq en la place de BFq, nous aurons BGq BKq :: ABq+ACq ABq+CBq; ce qu'il faloit prouver.

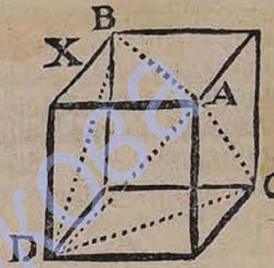
TEOREME XVI.

198. *Comme le côté du cube est au côté de l'icosaédre, ainsi le dodécaédre est à l'icosaédre inscrit dans un même cercle.* Eucl. XIV. Prop. 7.

Concevez que de tous les angles d'un dodécaédre, & de même de l'icosaédre, on ait mené des lignes au centre de la sphére. Cela fera dans l'un douze piramides, & dans l'autre vingt qui seront de même hauteur, puisque le même cercle dans la sphére comprend une des faces de l'icosaédre & du dodécaédre s̃ *n.* 190. ainsi ces piramides sont comme leurs bases s̃ *n.* 130. c'est à dire comme les surfaces de ces deux poliédres. Or ces surfaces sont entr'elles s̃ *n.* 196. comme le côté du cube au côté de l'icosaédre.

PROBLEME VII.

199. *Inscrire un tétraédre dans un cube.* Eucl. XV. Prop. I.



De A un des angles du cube X, concevant qu'on ait mené les diagonales AB, AC, AD, BC, CD, DB, vous apercevrez ABCD un tétraédre ou piramide de quatre triangles équilateraux, car les diagonales sont égales. ainsi le triangle ABC $\propto$ BAD, &c.

Il faut avoir à la main les corps réguliers dont on parle. Il est facile de les faire selon qu'on l'a enseigné s̃ n. 162. Tout ce qu'on va lire sera aisé faisant sur chaque corps ce qu'on dit ici qu'il y faut faire. Autrement les démonstrations suivantes seront obscures.

PROBLEME VIII.

Inscrire un octaédre dans une piramide ou tétraédre Eucl. XV. Prop. 2. 200.

Coupez par la moitié tous les six côtez de la piramide ou tétraédre, joignez les points de section par douze lignes qui seront toutes égales & feront huit triangles équilateraux.

PROBLEME IX.

Dans un cube faire un octaédre. Eucl. XV. Prop. 3. 201

Aiant pris le centre de chaque face du cube, il faut joindre ces centres en tirant des lignes autant qu'il en faut; savoir douze qui étant toutes égales feront huit triangles égaux, & par conséquent un octaédre.

PROBLEME X.

Dans un octaédre faire un cube. Eucl. XV. Prop. 4. 202

1° coupez par la moitié tous les côtez de l'octaédre. 2° Menez des lignes par toutes ces sections sur les faces de ce corps, ces lignes seront toutes égales, & feront deux quarez oposez, lesquels joignant par quatre autres lignes qui seront égales aux premieres, & les oposées étant paralleles elles feront un cube; ce qui est évident.

203. PROBLEME XI.

Faire un dodécaédre dans un icosaédre. Eucl. XV. Prop. 5.

Cinq triangles de l'icosaédre qui font un angle solide ou une piramide, ont pour base un pentagone *n.* 185. Il faut couper tous les côtez de cette piramide par la moitié le plan de cette section, sera un pentagone & une des faces du dodécaédre: car en faisant la même chose à tous les angles solides ou piramides de l'icosaédre qui sont au nombre de douze, on aura douze pentagones égaux qui feront les douze faces du dodécaédre.

ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE SIXIE'ME.

De la Métode.

AVERTISSEMENT.

La métode que nous avons suivie jusqu'à present, c'a été de considerer l'idée des choses dont nous parlions, & de tirer de leur idée leurs proprietez. Par exemple quand il s'est agi de démontrer les proprietez du cercle, nous avons consideré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom, comment elle se faisoit, ce qu'elle étoit; & c'est de l'idée de cette figure que nous avons déduit ces proprietez. Cette métode supose la chose connuë.

Ces Elemens m'étoient connus avant que de les écrire ; & ce que j'ai fait, c'a été de faire apercevoir dans l'idée des choſes que j'ai propoſées, ce qui y eſt & ce que j'y avois vû. Il y a une autre metode avec laquelle on trouve ce qu'on ne connoiſſoit point, & que j'ai emploiée moi même dans ces Elemens en beaucoup d'ocaſions pour trouver ce que je ne ſavois point ; c'eſt pourquoi on l'apelle Métode d'invention, au lieu que la premiere ſe peut nommer Métode de doctrine. Cette ſeconde eſt tres-generale, & proprement elle ne ſupoſe aucune connoiſſance, au moins ne dépend-elle point de la Geométrie ; c'eſt pourquoi nous l'avons pû traiter dans les Elémens des Matématiques ; où nous n'avons ſupoſé aucune connoiſſance de la Geometrie. Comme cette métode ſert à perfectionner la Geométrie ; & que c'eſt même par ſon moien qu'on a découvert un tres-grand nombre de veritez qu'on a propoſées, il eſt à propos avant que de finir ces Elemens de donner une idée de cette métode ; apliquant à la Geométrie telle que nous l'avons enſeignée, ce que nous avons dit de cette métode dans les Elemens des Matématiques. J'ai dit qu'elle perfectionne la Geométrie ; car par ſon moien on découvre les proprietez les plus cachées des lignes courbes : C'eſt à quoi elle ſert particulierement ; c'eſt pour cela que n'aiant point parlé de ces lignes, ce que nous avons à dire de cette métode ſera court.

CHAPITRE I.

De la métode qu'il faut ſuivre dans l'examen d'une queſtion. Il faut en premier lieu bien concevoir ce qui eſt en queſtion, & trouver le moien de l'exprimer nétement.

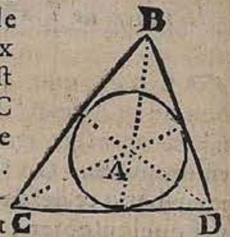
CE n'eſt que par l'aplication de l'eſprit qu'on ateint la verité. Il faut donc conſiderer atentivement le ſujet de la queſtion qui eſt propoſée. On ſe diſtrait facilement. Pour remédier à ce défaut, il faut arêter ſon eſprit par quelqu'objet, exprimant par une figure ce qu'il doit conſiderer. Cela n'eſt pas impoſſible, quoiqu'on ne connoiſſe pas entierement les choſes qui ſont en queſtion, car ſi on les ignoroit entierement, on ne pouroit pas abſolument les connoître. Or de ce qu'on connoît on peut ſupoſer que la choſe qui eſt propoſée eſt telle ou telle, & l'exprimer ainſi. L'importance c'eſt que cette expreſſion ſoit néte, qu'on y voie ce qu'il faut chercher pour réſoudre la queſtion propoſée, qu'elle ſoit débaraſſée de ce qui ne ſerviroit qu'à la rendre obſcure. Cela ſe comprendra mieux dans les exemples ſuivans, où l'on va voir que la ſeule expreſſion réſout ſouvent des queſtions dificiles. J'entens ici les expreſſions qui ſe font par des figures auſſibien que par le diſcours. 1.

QUESTION.

Démontrer que la ſurface d'un triangle eſt 2.

égale à la moitié de la ſomme de ſes trois côtez multipliez par le raion d'un cercle qui lui eſt inſcrit.

La ſeule vûë de cette figure démontre que cela eſt véritable. Des angles du triangle BCD aiant mené des lignes au centre A du cercle qui
2. lui eſt inſcrit, on fait trois triangles égaux enſemble au triangle BCD, qui ont pour hauteur le raion de ce cercle. Ils ſont donc égaux à un triangle dont la baſe eſt égale aux trois côtez de BCD, & qui a pour hauteur le raion du cercle inſcrit l. 2. n. 142. La ſurface de ce triangle eſt donc égale au produit de la moitié de ſa baſe par ſa hauteur : ce qu'il faloit prouver.

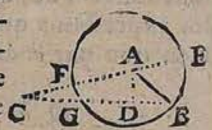


Voions encore par un autre exemple combien la maniere d'exprimer une queſtion par une figure convenable en facilite la réſolution.

QUESTION.

Démontrer que dans le triangle ABC, ſi de
3. *l'angle CAB on mene une perpendiculaire ſur BC, la ſomme des deux côtez AB & AC eſt à BC baſe de l'angle que ces deux côtez comprennent comme la diference de CD & DB eſt à celle de AC & AB.*

Pour trouver la démonſtration de ce Teorême & l'exprimer d'une maniere qui en facilite l'invention, de A comme centre, & de l'intervale AB le plus petit côté, je fais un cercle; & puiſque AB eſt égal à AE, la ligne CE

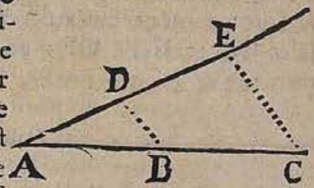


eſt la ſomme des côtez AC & AB. Les lignes AF & AB ſont égales; donc CF eſt leur diference. Puiſqu'auſſi DB ∝ DG la ligne GC ſera la diference entre CD & DB : ainſi voila une expreſſion ou une figure qui marque ce que l'on cherche. Aprés quoi la queſtion ſe réſoud facilement, car les lignes CE & CB ſont coupées réciproquement en F & en G l. 4. n. 18. Ainſi CE CB :: CG CF; ce qu'il faloit démontrer.

Nous avons vû en pluſieurs ocaſions. *Voiez l. 4. n. 75.* que ce qui nous a facilité des dé-
monſtrations fort dificiles, ce n'a été que l'ex- 4
preſſion dont nous nous ſommes ſervis. Mais comme nous traitons à preſent une métode beaucoup plus generale que celle dont nous nous ſommes ſervis, il ne faut pas s'atacher à des exemples tirez de la Geométrie. On ne ſupoſe dans cette métode aucune autre proprieté des grandeurs qu'on examine, ſinon qu'on les peut ajoûter à d'autres grandeurs, ou les retrancher ſi elles ſont plus petites, qu'on les peut multiplier ou diviſer. Cela eſt fort general; & c'eſt ce que nous entreprenons d'expliquer ici; & de montrer comment cette métode ſe peut pratiquer en Geométrie.

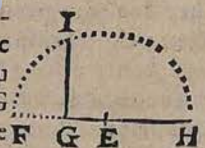
Pour cela je remarquerai qu'on peut faire
toutes les operations de l'Arithmétique avec le 5.
compas & la régle. Il eſt évident qu'on peut ajoûter une ligne à une autre ligne, & retrancher une plus petite d'une plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'eſt à dire pour trouver une ligne qui ſoit égale au produit de deux lignes : Voila ce qu'il faut faire. Soient ces deux lignes AD & AC qu'on veut multiplier l'une par l'autre. Il faut

prendre sur AC la ligne AB égale à l'unité, & mener une ligne AD qui fasse un angle à discrétion avec AB : je tire une ligne par D & B, & une autre par C qui lui soit parallele ; ce qui étant fait, AE sera la ligne que l'on cherche : car AB . AD :: AC . AE, donc AB+AE $\propto$ AD+AC. La multiplication n'augmente point une grandeur qui n'est multipliée que par l'unité, c'est à dire qui n'est prise qu'une fois. Ainsi comme AB est l'unité, en multipliant AE elle ne l'augmente point. Donc AE, qui est une quatriéme proportionnelle, sera égale au produit de AD par AC ce que l'on cherchoit.



Si l'on veut diviser AE par AC aiant pris AB égale à l'unité, & mené par B une parallele à CE, on aura AD qui sera la valeur de AE divisée par AC, car AB . AD :: AC . AE, & l'unité est au quotient d'une division, comme le diviseur est à la grandeur divisée.

S'il faut tirer la racine quarrée de GH, je
6. lui ajoûte en ligne droite FG qui est l'unité, & divisant FH en deux parties égales au point E: du centre E je fais le cercle FIH, élevant ensuite du point G une ligne droite jusqu'à I à angles droits sur FH, la ligne GI est la racine que l'on cherche : car ÷ FG . GI . GH, donc le quarré de GI est égal au produit de FG & GH : or FG étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de GH en la multipliant,



multipliant, ainsi GH est égale au quarré de GI, qui par conséquent est la racine de GH. Par ce même moien on peut trouver une ligne qui soit égale à la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré ; par exemple de dix-huit, car prenant GH égale à 18 ; & lui ajoûtant FG égale à l'unité, & du milieu de cette ligne faisant un cercle, &c. la ligne GI sera égale à la racine quarrée de 18, qui ne peut être exprimée par aucun nombre.

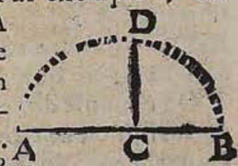
CHAPITRE II.

Il faut trouver une double expression de la grandeur que l'on cherche, ce qui s'apelle Equation.

EN donnant des noms aux termes d'une question, c'est à dire à toutes les grandeurs dont il est parlé dans la question, il faut distinguer par des caractéres particuliers, les grandeurs connuës d'avec celles qui sont inconnuës. On se sert des premieres lettres de l'Aphabet, pour marquer les grandeurs connuës ; ainsi x, y, z sont toujours des grandeurs inconnûës. Tout n'est jamais inconnû dans une question ; & c'est par le raport qu'on fait que des grandeurs connûës ont avec les inconnûës, qu'on decouvre enfin cellesci. C'est aussi par la connoissance de ces raports qu'on trouve le moien d'exprimer en diferentes manieres la même grandeur, ou, ce qui est la même chose, de l'égaler avec une autre, lui ajoûtant ou lui ôtant, la multipliant ou la divisant selon que son raport connû montre qu'il le faut faire pour l'égaler. Alors on en a une double expression, qui s'apelle ainsi une égalité ou *équation*. Car si par exemple on sait que a une grandeur connuë plus ou moins d une autre grandeur connuë est égale à x une inconnuë ; par exemple que $a+d \propto x$, ou $a-d \propto x$, on a une double expression de la même grandeur ou de la même valeur. Car si $a+d \propto x$, je puis apeller la même grandeur qu'on propose de découvrir & $a+d$ & x. C'est en cette double expression ou équation que consiste principalement tout l'art de cette métode que nous enseignons ici, & qui se nomme analyse ; c'est à dire, métode de *résolution*, parce qu'aprés qu'on a trouvé une équation, on taille ou coupe pour ainsi dire la grandeur qu'on cherche, on lui ajoûte, on lui retranche. On multiplie, on divise les membres d'une équation, on en extrait les racines, on la résout, ou on la décompose, si je puis parler ainsi, jusqu'à ce que la grandeur connuë se trouve précisément égale à une grandeur inconnuë, laquelle par consequent ne soit plus inconnuë : ce qui arive lorsque dans un des membres de l'équation elle se trouve seule, & que l'autre membre est tout connu. Par exemple si on avoit réduit une équation à ces termes $x \propto a$, alors x ne seroit plus une grandeur inconnuë. Avant que de parler des réductions, par le moien desquelles on peut faire que la grandeur inconnuë se trouve seule d'un côté du signe de l'égalité, & de l'autre côté ce qui est connu dégagé de toute grandeur inconnuë, il faut voir comment on peut trouver des équations ou des doubles expressions de la même grandeur.

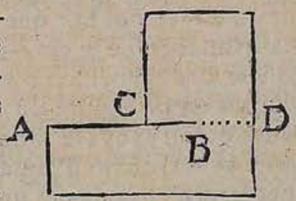
8. Premierement il faut considerer si de la ma-

niere que la question est proposée on peut choisir comme on veut certaines grandeurs, ou si toutes celles que la question renferme sont déterminées, desorte que tout ce que l'on peut faire soit de leur donner des noms convenables. C'est à dire qu'il faut d'abord examiner si la question est déterminée ou indéterminée. On connoît si une question est indéterminée lorsqu'il n'y a point de raport qui lui soit propre, & qui par conséquent donne le moien de l'exprimer en deux manieres, ou de trouver une équation; car qu'est-ce qui fait que je puis apeller la même grandeur ou x ou $a+d$, c'est que je sai qu'elle a ce raport avec a, qu'elle lui est égale pourvû qu'on ajoûte d à a. Quand des grandeurs qu'on propose n'ont donc aucun raport, on ne peut trouver d'équation ; & alors on peut suposer qu'elles en ont un qui n'est point contraire à ce qu'on propose. Par exemple, on 9.
propose de couper la ligne AB desorte que le rectangle de ses deux parties soit égal à un quarré d'une ses parties. Cette question est indéterminée. Et ces deux parties de AB



que l'on cherche n'ont aucun raport qui leur soit propre. Je ne puis donc pas trouver aucune équation ; ainsi il dépend de moi de leur suposer un tel raport que je voudrai, savoir que ces deux parties sont AC & BC. Je puis, dis-je, comme il me plaira couper AB. Je le coupe donc au hasard en C, je fais le demi cercle ADB, & sur C j'éléve CD une moienne proportionnelle entre AC & BC dont le quarré est égal au rectangle de AC & de BC l. 4. n. 60. Cette ligne CD qui est plus petite que le diamétre AB sera une de ses parties. Ainsi AB est coupée comme on avoit proposé de le faire. Je pouvois couper AB ailleurs qu'en C ; ce Problême est donc indéterminé.

10, Un Problême est dit determiné lorsqu'on n'y peut satisfaire qu'en observant une certaine chose qui le détermine, & qui ne dépend point du choix de celui à qui il est proposé, c'est à dire, que les grandeurs qu'il renferme ont un certain raport qui leur est particulier. Par exemple AB étant divisé en C, on propose de prolonger AB jusqu'en D point inconnu ; desorte que le quaré de CD soit égal au rectangle de AD & de BD : alors comme ce prolongement BD est déterminé, c'est à dire qu'il a une certaine longueur précise ; ce Problême est déterminé : & suposé que AC $\propto a$, & CB $\propto b$, & BD $\propto x$; on aura cette équation $ax+bx+xx \propto bb+2xb+xx$ qu'on résoudra ci aprés.



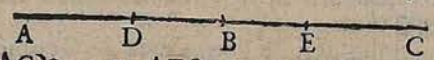
On connoît donc si un Problême est déterminé lorsqu'on ne trouve point d'équations entre les grandeurs dont il est parlé dans la question, les grandeurs déterminées aiant toûjours quelque raport qui donne le moien de les exprimer en deux manieres ; ce qui s'apelle équation. On aperçoit ou que la grandeur inconnuë est égale à celles qui sont inconnuës plus ou moins certaines grandeurs : que par exemple x grandeur inconnuë est égale à b dont on a ôté c, & qu'ainsi $x \propto b-c$; ou que si on ajoûte a à d, alors $x \propto a+d$. Ou que la puissance de l'inconnuë, c'est à dire ou son quarré ou son cube est égal au produit de quelques grandeurs connuës : par exemple que xx quarré de x est égal

au quarré de $b+d$; qu'ainsi $xx \propto bb+2bd+dd$. On aperçoit, dis-je, que la puissance de l'inconnuë multipliée ou divisée par tel diviseur, est égale à telles grandeurs connuës, que par exemple xx divisé par d est égal à b ; qu'ainsi $\frac{xx}{d} \propto b$, par cósequent que si on multiplie ces deux grandeurs $\frac{xx}{d}$ & b qui sont égales par d, elles demeureront égales. Pour multiplier $\frac{xx}{d}$ par d, il faut éfacer d ; aprés quoi on a cette équation $xx \propto bd$. Le raport de sa grandeur inconnuë à celles qui sont connuës, est quelquefois marqué si clairement dans la question, que l'équation se presente d'elle-même. Car si je sçai que x est le tiers de b, donc $x \propto \frac{1}{3}b$. Si au contraire b est le tiers de x,
donc $x \propto 3b$. 11.

Quand il s'agit de Problêmes de Géométrie, les seules Figures font apercevoir le raport des lignes dont il est parlé dans le Problême : Car si par exemple je sçai que l'inconnuë x est l'hipotenuse d'un rectangle, dont les deux autres côtez sont d & b, je sçai que $xx \propto bb+dd$ l. 4. n. 71. Ainsi voila une double expression de x.

Un plan est fait de la multiplication de ses deux racines ; si on le divise par l'une, le 12.
quotient de la division sera l'autre. Ainsi si $b, c :: d, x$, puisque $bx \propto cd$ divisant cd par b, le quotient $\frac{cd}{b} \propto x$. Si x étoit moienne proportionnelle entre c & d, alors $xx \propto cd$. Les figures ont leurs proprietez qu'on découvre aisément quand on sçait les Elemens ; & ces proprietez,

comme il est évident, donnent des moiens de trouver des équations. Ce qu'on a vû dans le troisiéme Livre touchant les Puissances, est aussi une source de diferentes équations : Car si je sçai que $a+b \propto x$, donc $aa+2ab+bb \propto xx$, l. 3. n. 24. Lorsqu'on connoît la diference de deux grandeurs, même inconnuës, il y a un moien bien simple, mais bien éficace de les exprimer. La diference de x & de z soit $2a$. C'est z qui est la plus grande, alors j'ai ces équations $x+2a \propto z$, & $z-2a \propto x$, & suposant que y est la moitié de $x+z$, il faut que $2y \propto x+z$. Il est évident que $y-a \propto x$, & que $y+a \propto z$. Car $y-a+y+a \propto 2y$. Voila donc un principe ; *La moitié de deux lignes inégales, moins la moitié de leur diference est égale à la plus peti-*
13. *te ligne ; & cette même moitié, plus la moi-*
tié de leur diference, est égale à la plus grande ligne. Cela se voit à l'œil. Soit, la li-



gne AC $\propto x+z$. AD $\propto x$, & DC $\propto z$. Soit DE leur diference dont B est la moitié. Soit AB $\propto y$ & DE $\propto 2a$, ainsi DB ou BE $\propto a$: il est clair que AB–DB, ou $y-a \propto$ AD ou x, & que BC +BD ou $y+a \propto$ CD ou z.

14. Il faut trouver autant d'équations qu'il y a de grandeurs inconnuës, afin de les réduire toutes à un même nom, c'est à dire afin que dans la question il n'y ait qu'une lettre inconnuë ; ce qui est facile, car on connoît le raport qu'ont les grandeurs inconnuës les unes avec les autres, à moins que le Problême ne soit indéterminé, & alors il est libre de prendre des grandeurs telles qu'on les veut. Si je sçai donc de ces deux grandeurs inconnuës z &

x, que $x+b \propto z$, ou que $z-b \propto x$; par tout où seront ces deux inconnuës, je pourai toûjours substituer $x+b$ en la place de z ou $z-b$ en la place de x ; & par conséquent réduire la question à des termes où il n'y ait qu'une seule inconnuë.

Lorsqu'on connoît qu'une grandeur incon- 15.
nuë est un tel terme d'une progression dont on a quelques termes, il est facile de l'exprimer par les signes des premiers termes. Car si par exemple ∺ a, b, y, puisque $ay \propto bb$ l. 3. n. 64. donc en divisant bb par a, le quotient $\frac{bb}{a}$ de cette division sera la valeur de y, ainsi $\frac{bb}{a} \propto y$; de même si ∺ a, b, x, puisque $ax \propto bb$; donc $\frac{bb}{a} \propto x$.

Si j'avois cette progression de quatre termes 16.
exprimée par quatre diferentes lettres ∺ b, z, x, y, je les pourois réduire d'une maniere qu'il n'y eût qu'une lettre inconnuë ; car suposant que b est égal à 1, je pourois dire que ∺ 1 z zz zzz ; 1° l. 3. n. 70. b ou 1 est à x, comme le quarré de b ou 1 est à celui de z ; c'est à dire b, x :: bb, zz ou 1 x :: 1 zz ; ainsi puisque $zz \propto x$, je puis substituer zz à la place de x. De même b ou 1 est à y comme bbb ou 1 est à zzz l. 3. 71. donc puisque $zzz \propto y$, au lieu de y je place zzz ; ainsi je réduis ces quatre grandeurs b, z, x, y à celles ci 1, x, xx, xxx. Il y a une infinité de manieres semblables. Ce sont des métodes ; chacun en peut trouver de plus hûreuses, ce qui lui donne lieu de résoudre facilement des Problêmes qui sont tres-dificiles à ceux qui ne

connoissent pas sa métode ; car tout le secret consiste à rendre les équations nettes & simples.

CHAPITRE III.

Il faut réduire les termes d'une équation à l'expression la plus simple, & faire ensorte que la grandeur inconnuë se trouve seule dans l'un des membres de l'équation.

Lorsqu'on a fait ensorte que la grandeur inconnuë se trouve seule d'un des côtez du
17. signe de l'égalité, & que de l'autre côté il n'y a que des grandeurs connuës ; c'est à dire que la grandeur connuë se trouve précisément égale à des grandeurs connuës, la question est entierement résoluë ; car si $x \propto a+b$, l'on ne peut plus ignorer sa valeur. Or pour arriver là, il faut faire passer d'un côté ce qui est connu, & le délivrer de ce qui est inconnu ; desorte que comme l'on a dit la grandeur inconnuë se trouve égale à des grandeurs connuës. Avant toutes choses on doit réduire les équations à des expressions simples. Ces réductions se font par l'adition ou par la soustraction, par la multiplication ou par la division, ou enfin par l'extraction des racines. Le principe de tout cela, c'est qu'ajoûtant aux deux membres d'une équation, ou retranchant également l'équation ou l'égalité demeure ; comme aussi multipliant ou divisant ces deux mêbres par une même grandeur, ils demeurent égaux, comme on l'a prouvé l. 3. n. 52. & 53. Puisque deux puissances égales, ont des racines égales, il est clair qu'en prenant les racines

de deux membres, leur égalité doit subsister.

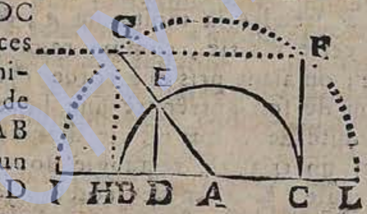
On a fait voir l'utilité des réductions dans les 18.
Elemens des Mathématiques. Voions-en ici quelques exemples. Si $x-5 \propto 15$, ajoûtant 5 de part & d'autre, viendra cette équation plus simple $x \propto 20$ Si au contraire $x+5 \propto 20$, en retranchant 5 de part & d'autre, on aura $x \propto 15$. Si $z-a \propto b-a$, ajoûtant a de part & d'autre, vient $z \propto b$. De même, si $z+a \propto b+a$, retranchant a de part & d'autre, vient $z \propto b$. Si on a cette équation $\frac{x}{3} \propto b$, multipliant l'un & l'autre membre par 3 vient $x \propto 3b$. Comme au contraire, si on avoit $bx \propto 3b$, divisant l'un & l'autre membre par b, on auroit $x \propto 3$. Si $xx \propto 25$, en prenant la racine quarrée, viendra $x \propto 5$. Au contraire si on avoit $Rz \propto 5$; c'est à dire, si la racine quarrée de z est égale à 5 en élevant ces deux membres à une même puissance, ou en prenant leur quarré, on a cette équation $z \propto 25$.

Ce Teorême, que le quarré de l'hipothe- nuse est égal aux quarrés des deux autres cô- 19.
tez, donne le moien de réduire une équation à une expression plus simple : Car par exemple aiant cette expression $aa-bb$, & voulant trouver un quarré égal à $aa-bb$, je n'ai qu'à prendre la moitié de a, & du milieu ou de cette moitié, comme raion, faire un cercle ; ou aiant pris une corde égale à b, menant de son extrêmité une ligne à l'autre extrêmité de a qui est le diamétre du cercle, j'ai un triangle rectangle dont a est l'hipothenuse, & b un des côtez : je nomme c le troisiéme qui est connu ; donc $aa \propto cc+bb$;

ôtant bb de part & d'autre, vient $aa-bb \propto cc$; ainsi je puis mettre cc en la place de $aa-bb$, & par conséquent avoir une expression plus simple. Ainsi si j'avois $cc+bb$, joignant ensemble c & b de maniere que ces deux lignes fissent un angle droit, & achevant le triangle, le troisiéme côté seroit l'hipothenuse connuë. Cette hipothenuse aiant donc été nommée a, il est évident que $aa \propto cc+bb$. Au lieu de $cc+bb$, je puis donc substituer aa expression plus simple.

20. On peut trouver un quarré égal à un plan donné ; pour cela les deux côtez ou racines de ce plan étant b & d, il faut trouver un moien proportionnel entre b & d l. 4. n. 29. Soit c ce moïen proportionnel ; alors $bd \propto cc$ l. 4. n. 60. ainsi je puis transformer le plan bd dans le quarré cc, c'est à dire mettre l'un pour l'autre.

21. Un quarré étant donné, on peut trouver un autre quarré qui en soit telle partie qu'on souhaitera, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou le cinquiéme, &c. Soit le quarré aa, il en faut trouver un autre qui soit le quart de aa. Je prens une ligne au hasard, sur laquelle je marque cinq parties égales avec la même ouverture du compas. Soit cette ligne BC, dont BD est une de ces cinq parties ; ainsi DC vaut quatre de ces parties. De A milieu de BC, & de l'intervale de AB ou AC je fais un cercle ; & sur D j'éléve la perpen-



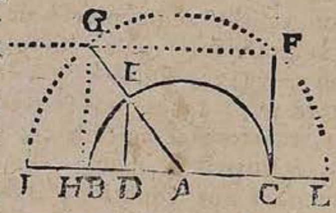
diculaire DE qui se termine à la circonference de ce cercle. Alors $\div$ BD, DE, DC. Si BD se nomme b, donc DC $\propto 4b$. Soit DE $\propto x$. Donc $\div\ b\ x\ 4b$; donc $xx \propto 4bb$.

Sur C j'éleve CF une perpendiculaire égale à a racine ou côté du quarré aa dont on cherche la quatriéme partie qui soit un quarré. Je méne FG une parallele à BC ; & par le point G, où elle coupe le raion AE prolongé à l'infini, j'abaisse une perpendiculaire sur BC prolongé de part & d'autre à l'infini. Cette perpendiculaire GH est égale à CF, & par conséquent à a, l. 1. n. 64. Je fais un cercle de l'intervale de AG, dont le diamétre est IL ; il est évident que IH est telle partie de IL que BD est de BC ; par conséquent une cinquiéme partie : ainsi si IH se nomme m, le reste du diametre HL sera $4m$. Or $\div$ IH, HG, HL ou $\div\ m,\ a,\ 4m$ l. 4. n. 29. donc $aa \propto 4mm$ l. 4. n. 60. La ligne IH sera par conséquent le côté ou racine d'un quarré, quatriéme partie du quarré a.

Ce seul exemple fait comprendre comme on peut trouver un quarré qui soit telle partie qu'il sera requis d'un quarré donné ; ce qui est tres utile pour réduire une équation à une expression plus simple ; car dans celle-ci $5bx+nn \propto 5xx$, en divisant ces deux membres par 5 ; & pour cela trouvant le quarré oo cinquiéme partie de nn, je la réduirai à cette expression beaucoup plus simple $bx+oo \propto xx$.

Pour trouver un quarré ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq fois plus grand qu'un quarré donné : Si BD est le côté du quarré 22.

donné qu'on propose d'en trouver un quatre fois plus grand, je prolonge BD jusqu'en C, desorte que DC contienne quatre fois BD. Ensuite de A milieu de BC & de l'intervale de AB je fais un cercle, & j'éléve sur D la perpendiculaire DE qui sera le côté d'un quaré, dont le quaré fait sur BD est la quatriéme partie, comme il est évident.



Il y a une infinité d'autres moiens de réduire les expressions composées à de plus simples
23. & plus nétes : Aprés quoi on aperçoit clairement le raport de la grandeur qu'on veut connoître avec celles qu'on connoît déja.

On peut faire évanoüir d'une équation des grandeurs embarassantes, ajoûtant cette équation avec une autre, dans laquelle se trouve cette même grandeur avec un signe contraire, selon ce principe : que plus & moins une grandeur ce n'est rien. Ainsi, si $x \propto d-b$ & $z \propto d+b$; pour faire évanoüir b j'ajoûte ces deux équations dans une équation $x+z \propto 2d$, où b ne paroît plus. Il est facile de faire passer une grandeur d'un des membres d'une équation dans l'autre membre ; car dans celle-ci $x-b \propto d$; ajoûtant b de part & d'autre ; on aura $x \propto d+b$, où b se trouve dans le second membre.

24. Quoiqu'on ne connoisse point les racines d'une équation, c'est à dire les grandeurs de la multiplication desquelles une équation est

faite, on peut les augmenter ou les diminuer selon qu'on le juge à propos, pour réduire l'équation à une expression qui soit délivrée de quelque grandeur incommode. Comme si $xx \propto xd+bb$ dont les racines sont $x+d.b$, x, & qu'on veüille augmenter x de 3, il faut prendre la grandeur y qu'on supose égale à $x+3$. Ainsi $y-3 \propto x$. Ensuite par tout où sera x mettre $y-3$; aprés quoi l'équation $xx \propto xd+bb$ sera transformée en celle-ci, $yy+6y+9 \propto yd-3d+bb$ qui est la même. En augmentant ou diminuant une équation, il faut faire ensorte qu'il y ait des signes contraires ; & qu'ainsi on puisse faire évanoüir les grandeurs dont on veut délivrer une équation : Mais tout cela se concevra mieux dans la pratique.

CHAPITRE IV.

Les Equations sont d'une ou de plusieurs Dimensions.

Selon que la question est proposée on fait 25.
monter les grandeurs inconnuës à un degré plus élevé. Lorsque la grandeur inconnuë à laquelle on a réduit les autres n'est point multipliée ; comme en cette équation $x \propto d+c$, on dit que cette équation est simple ou d'une dimension. Nous avons vû que lorsqu'il y a plusieurs grandeurs inconnuës, on les réduit toutes à une seule. Si par exemple on avoit x & z, & qu'on sçût que leur diference fût b; si x étoit la plus petite, alors $z-b \propto x$, ainsi au lieu de z on peut mettre $x+b$. Par conséquent si selon que la question est

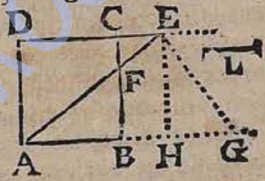
proposée, on ſçavoit que le rectangle de x & de z, ou de x & de $x+b$ eſt égal au quarré de c, on auroit cette équation $xx+xb \propto cc$, qu'on réduit en ôtant xb de part & d'autre à celle-ci $xx \propto cc-xb$, où x eſt élévé au ſecond degré. S'il y avoit eu trois grandeurs inconnuës dans la queſtion, & qu'elles euſſent dû être multipliées les unes par les autres; x à laquelle on auroit réduit toutes les autres, ſeroit montée au troiſiéme degré. Ainſi on voit que les équations ſont d'une ou de pluſieurs dimenſions, ou de pluſieurs degrez. Je ne parlerai pas davantage ici des équations qui ont plus de deux degrez, parce qu'on ne les peut pas réſoudre avec le compas & la régle, c'eſt à dire en n'emploiant que le cercle & la ligne droite.

26. On réduit les équations de deux dimenſions à ces formules $xx \propto aa-xd$, ou $xx \propto aa+xd$. Car ſi $xx \propto ab-xd$, comme ab eſt une grandeur connuë en prenant $ab \propto cc$ s̃n. 20. $xx \propto cc+xd$. Si $xx \propto xd+c$, puiſque c eſt une grandeur connuë, je puis ſupoſer que ſa valeur eſt égale à la grandeur bb, ainſi que on a $xx \propto bb+xd$. Or pour trouver le quarré bb qui égale c, je cherche une moienne proportionnelle entre l'unité & c, laquelle étant nommée b, il faut que $bb \propto 1c$, ou $bb \propto c$, puiſqu'une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande aprés cette multiplication, comme on l'a déja dit.

27. C'eſt une faute conſiderable en cette matiere de ne pas réduire à un degré inferieur, ce qui y peut être réduit. On fait cette faute, lorſqu'entre les gran deurs inconnuës d'une queſtion, on ne cherche pas des équations

leſquelles conduiſent à un degré plus ſimple; ce que je ferai mieux concevoir dans un exemple.

Le quarré ABCD eſt donné. On propoſe de mener de A une ligne droite à E, un point dans le prolongement de DC, deſorte que EF compriſe entre BC & E ſoit égale à L.



Je nomme a chaque côté du quarré ABCD & j'apelle b la ligne L qui eſt donnée: C'eſt tout ce que je connois. Si entre les autres lignes inconnuës je choiſis CF que je nomme z, & AF que je nomme x, puiſque les triangles ABF, ECF, EDA, ſont rectangles & ſemblables, partant $x\ a :: b$, CE; donc CE $\propto \frac{ab}{x}$ & par la même raiſon b, $z :: b+x$, a, ou AD, donc $ba \propto zb+zx$.

Je cherche une ſeconde équation par une autre voie: je ſçai que le quarré de EF ou b eſt égal aux deux quarrez, de CF, qui eſt zz, & de CE qui eſt $\frac{aabb}{xx}$ puiſque CE $\propto \frac{ab}{x}$ donc $bb \propto zz+\frac{aabb}{xx}$

Il faut faire enſorte qu'il n'y ait qu'une grandeur inconnüe: pour cela je diviſe la premiere équation $ba \propto zb+zx$ par $b+x$, il vient $z \propto \frac{ba}{b+x}$ dont le quarré ſera $\frac{1baa}{bb+2bx+xx} \propto zz$. Mettant donc dans la ſeconde équation à la place de zz ſa valeur que nous avons trouvée; ſçavoir $bb \propto zz+\frac{aabb}{xx}$ il viendra bb

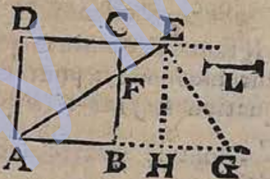
$\propto \frac{aabb}{bb+2bx+xx} + \frac{aabb}{xx}$ laquelle équation se réduit à une des quatre dimensions. Car 1° en multipliant les deux termes de cette raison $\frac{aabb}{bb+2bx+xx}$ par xx, on aura la même raison l. 3. n. 52. ainsi exprimée $\frac{aabbxx}{bbxx+2bx^3+x^4}$ & multipliant de même $\frac{aabb}{xx}$ par $bb+2bx+xx$, on aura $\frac{aabbbb+2bxaabb+xxaab}{bbxx+2bx^3+x^4}$ par conséquent mettant ces deux raisons ainsi réduites dans l'équation precedente, on aura

$$bb \propto \frac{aabbxx+2abbbb+2bxaabb+xxaabb}{bbxx+2bx^3+x^4}$$

2° Je multiplie les deux membres de cette équation par $bbxx+2bx^3+x^4$, & j'ai $bbxxbb+2bx+x^3bb+x^4bb \propto aabbxx+2abbbb+2bxaabb+xxaabb$.

3° Je divise cette équation par bb, & j'ai $xxbb+2bx^3+x^4 \propto aaxx+aabb+2bxaa+xxaa$ ou $x^4+2bx^3+xxbb \propto 2aaxx+2bxaa+aabb$.

Ainsi vous voiez qu'on est arrivé à une équation de quatre degrez ou de quatre dimensions : Or en tirant quelques autres lignes dont il n'est point parlé dans la question, on peut trouver une autre équation plus simple. Soit mené sur AE. la perpendiculaire EG & de E sur AG, la perpendiculaire EH. Les triangles ABF, AEG, EHG sont rectangles,



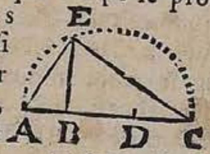
ils ont un angle commun, ils sont donc semblables. Or EH $\propto$ AB, donc FAB & HEG sont égaux; ainsi EG $\propto$ AF, & partant EG $\propto x$. Je supose BG $\propto y$, ainsi AG $\propto a+y$. Le quaré de $a+y$ qui $aa+2ay+yy$ est égal à celui de EG ou de x qui est xx, & à celui de AE ou $x+b$ qui est $xx+2xb+bb$; ainsi on a cette équation $aa+2ay+yy \propto xx+xx+2xb+bb$. Et parce que AB, AF :: AE, AG, ou a, x :: $x+b$, $a+y$, par conséquent $aa+ay \propto xx+bx$; ainsi en la place de $2xx+2xb$, mettant sa valeur $2aa+2ay$ dans l'équation précédente, il n'y aura plus qu'une lettre inconnuë, $aa+2ay+yy \propto 2aa+2ay+bb$; ôtant de part & d'autre $aa+2ay$, il reste $yy \propto aa+bb$, qui est une équation tres-simple; car je puis trouver un quarré égal aux deux quarrez aa & bb 5 n. 19. dont le côté sera égal à y.

CHAPITRE V.

De la construction & éfection géométrique des Equations de deux Dimensions.

ON apelle construction ou éfection géométrique d'une équation, les expressions qu'on fait en lignes, des grandeurs connuës & inconnuës d'une équation. La construction des équations d'un degré est facile, puisqu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à une grandeur connuë. Comme en cette équation $x \propto \frac{bb}{a-b}$ aiant trouvé le quotient ou valeur de la division de bb divisé par $a-b$, il ne s'a- 28.

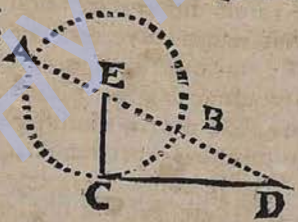
git que de prendre une ligne égale à ce quotient, & par conséquent à x. On peut aussi faire la construction de cette equation $x \propto \frac{bb}{a-b}$ & l'exprimer en cette maniere. AD étant pris égal à a, & AB à $a-b$; ainsi BD étant égal à b, j'éléve sur B une perpendiculaire égale à BD ou b, je méne de A à E une ligne droite; & sur AE au point E une perpendiculaire, sçavoir EC qui coupe le prolongement de AD : Alors l'angle CEA est droit; ainsi aiant décrit un cercle par les trois points A, E, C,



il est évident que ÷ AB, ou $a-b$. EB ou b. BC. Or $a-b \dagger BC \propto bb$. l. 4. n. 60. Donc $\frac{bb}{a-b} \propto BC$, ainsi $BC \propto x$, puisque $x \propto \frac{bb}{a-b}$ Voila donc une construction ou expression en lignes de cette équation.

La construction des équations de deux degrez est pareillement facile. Les équations de
29. deux degrez ou de deux dimensions se réduisent comme nous l'avons vû à ces formules, $xx \propto ax+bb$, ou $xx \propto ax-bb$, ou $xx \propto bb-ax$.

1° Pour faire la construction de $xx \propto ax+bb$, ou $xx \propto bb+ax$.

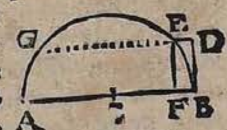


Sur CD une ligne droite que je supose égale à b, j'éléve CE une perpendiculaire que je supose égale à la moitié de a, & de l'intervale de cette moitié, comme raion, je fais un cercle; & je méne par E

son centre la ligne BE. Puisque CE est la moitié de a, donc $AB \propto a$. Soit $BD \propto y$, & $AD \propto x$, donc $a+y \propto x$; donc l. 3. n. 52. $ax+xy \propto xx$. Or puisqu' CD ou b est une tangente, donc l. 4 n. 54. ÷ x, b, y; donc l. 3. n. 64. $xy \propto bb$. Ainsi dans cette equation $xx \propto ax+xy$, substituant bb en la place de xy, qui est la même chose, on aura cette équation $xx \propto ax+bb$ dont on a fait ainsi la construction.

2° Pour faire la construction de cette équa- 30.
tion $xx \propto bb-xa$, on fait la même chose. On supose CD, *même figure*, égale à b, & CE égale à la moitié de a; mais on supose que BD est égale à x. Alors ÷ AD ou $a+x$, CD ou b, BD ou x. Donc $ax+xx \propto bb$. En ôtant de part & d'autre ax, viendra $xx \propto bb-ax$, qui est l'équation dont il faloit former la construction.

3° La construction de cette équation $xx \propto$ 31.
$ax-bb$ se fait ainsi. Soit AB égale à a, de l'intervale BC moitié de AB je fais un cercle; j'éléve sur B la perpendiculaire BD égale à b; je méne par D la ligne DG parallele à AB.



Si cette parallele ne coupe pas le cercle, parce que b est égale ou plus grande que le raion du cercle égal à la moitié de a, c'est une preuve que xx n'est pas égal à $ax-bb$, puisque b est trop grand au regard de x. Soit donc b plus petit que BC, ainsi DG coupe le cercle en E, par conséquent EF que je supose perpendiculaire, est égale à BD l. 1. n. 64. Je nomme x la ligne AF, & y la ligne FB. Il est évident l. 4. n. 29. que ÷ AF ou x. FD ou b. FB ou y. Ainsi ÷ x, b, y, donc

l. 4. n. 60. $xy \propto bb$. Or on a ſupoſé AF ou x plus FB ou y égal à a ; donc $x+y \propto a$. En multipliant cette équation par x on a cette équation $xx+xy \propto ax$, plaçant bb en la place de xy qui eſt la même choſe, comme on vient de voir on a $xx+bb \propto ax$; & retranchant bb de part & d'autre, on aura $xx \propto ax-bb$. Ainſi on a fait la conſtruction de cette équation.

Par le moien de cette conſtruction on trou-
32. ve en ligne la valeur de la grandeur inconnuë ; ce qui ſe trouve encore plus facilement en réduiſant dans une progreſſion de trois termes, les trois formules précédentes. 1° Cette équation $xx \propto ax+bb$ ſe réduit en cette progreſſion $\div\, x-a\ b,\ x$. Car $xx-ax \propto bb$ l. 3. n. 64. ajoûtant ax de part & d'autre, on a l'équation dont il s'agit, $xx \propto ax+bb$.

33. 2° Cette équation $xx \propto ax-bb$ ſe reduit à cette progreſſion $\div\, x,\ b,\ a-x$. Car $ax-xx \propto bb$ l. 3. n. 64. ajoûtant xx de part & d'autre, on a $ax \propto bb+xx$; ôtant bb de part & d'autre, on a $ax-bb \propto xx$, qui eſt l'équation dont il eſt queſtion.

3° Cette équation $xx \propto bb-ax$ ſe réduit à
34. cette progreſſion $\div\, x+a,\ b,\ x$; car $xx+ax \propto bb$ l. 3. n. 64. ôtant de part & d'autre ax, on a cette équation $xx \propto bb-ax$ dont il s'agiſſoit.

Dans ces trois progreſſions, b le terme moien eſt connû ; & dans la premiere & dans la troiſiéme, on connoît la diference des extrêmes qui eſt dans la premiere $-a$, & dans la troiſiéme $+a$. Dans la ſeconde, on connoît a ſomme des deux extrêmes. Les trois Problêmes ſuivans montrent, qu'on peut connoître tous les termes de ces progreſſions.

PROBLEME PREMIER.

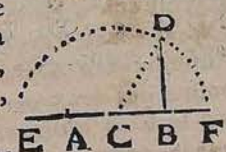
Soit cette progreſſion de trois lignes $\div$ z, b, 35.
x, *&* $z+x \propto a$ *connoiſſant la moienne* b, *&* a *ſomme de* x *&* *de* z *les extrêmes, connoître les extrêmes.*

Je prends, AB égal à a ſomme des extrêmes. De C milieu de AB comme centre & de l'intervale AC ou CB je fais un cercle. Sur B j'éléve perpendiculairement BD égale à la moienne b ; & par le ſommet D, je méne DG (*même figure que ci-deſſus*) parallele à AB, & de E où DG coupe le cercle, j'abaiſſe FE une perpendiculaire ſur AB, qui eſt égale à BD, ainſi $EF \propto b$; donc puiſque $\div$ AF, EF, FB : les extrêmes ſeront AF & FB ; ainſi ſi z eſt le grand extrême, il ſera égal à AF & FB qui eſt le petit extrême, ſera egal à y partant z & y ſeront connûs.

PROBLEME SECOND.

Soit cette progreſſon de trois lignes $\div$ x+d, 36.
b, x, *ou* $\div$ x−d, b, x, *la moienne* b *eſt connuë, & la diference des extrêmes* x+d *&* x, *connoitre la valeur de* x.

Je fais AB égale à d ; & ſur B j'éléve perpendiculairement BD égale à b, enſuite de C moitié de AB, & de l'intervale CD je fais un cercle. Je prolonge AB de part & d'autre juſqu'à la circonference du cercle, aprés quoi AE ou $BF \propto x$, car $\div\, x+d.\ b,\ x$.



Si la progreſſion eſt $\div\, x-$

d, *b*, *x*, il faut faire la même chose, mais en ce cas où *x*)(EB, le plus petit terme est BF égal à EB−AB ou à *x*−*d*. Il est évident que la diference de *x*−*d*, & de *x* est *d*. Quand le signe est + la grandeur, *x* est EA. à laquelle on ajoûte la diference *d* pour avoir le plus grand extrême. Quand le signe est −, on retranche *d* de EB ou FA qui est la valeur de *x*. Il est évident que ÷ EB, BD, AF−AB, ou ÷ *x*, *d*, *x*−*d*.

PROBLEME TROISIEME.

37. *Soit cette progression de trois lignes* ÷ d+*x*, b, d, *la moyenne* b *étant connuë, connoître la diférence des extrêmes* d+x *&* d *laquelle est* x.

Sur B extrémité de AB égale égale à *d* j'éléve perpendiculairement BC égale à *b*, par A & C je méne une ligne droite sur laquelle au point C je fais une perpendiculaire qui est CD, ainsi l'angle ACD est droit. Je prolonge AB jusqu'à ce qu'elle coupe CD, la ligne BD aprés en avoir ôté AB sera égale à *x*; car aiant coupé AD par la moitié au point K, & de l'intervale AK ou KD fait un cercle, ce cercle passera par C. ainsi ÷ AB ou *d*, BC ou *b*, BD, partant BD)(*d*+*x* qui est le troisiéme terme; aiant donc retranché de BD la ligne DE égale à AB, le reste sera égal à *x* dont on cherchoit la valeur.

CHAPITRE VI.

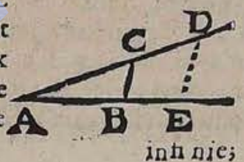
De l'utilité des Equations. Elles servent à résoudre tous les Problêmes de Géométrie; & à connoître la nature ou les proprietez des lignes Géométriques. Les Problêmes se distinguent en certaines classes.

38. Puisque l'on ne connoît une grandeur inconnuë qu'en trouvant le moien de l'égaler à des grandeurs connuës; & qu'en tout Problême il s'agit de trouver une ou plusieurs grandeurs inconnuës: il est évident que les équations sont utiles pour résoudre les Problêmes; car ce ne sont que des doubles expressions des mêmes grandeurs, dans lesquelles on voit ce qu'il faut faire pour égaler les grandeurs inconnuës, à celles qui sont connuës. On vient à ces doubles expressions ou équations en suivant un ordre naturel; ce qui se concevra plus sensiblement dans les exemples que nous donnerons dans la suite.

Lorsqu'on a réduit une équation à ses expressions les plus simples, on voit qu'elles sont d'une ou de plusieurs degrez. On a montré dans le Chapitre précédent comment on peut résoudre les équations de deux degrez avec le compas & la régle, c'est à dire en tirant des lignes droites & faisant des cercles. Les équations de trois, de quatre & les autres de suite, ne se peuvent résoudre que par le moien de certaines lignes courbes dont nous n'avons point parlé; ainsi nous ne pouvons pas toucher aux équations de plusieurs degrez.

Mais nous ne devons pas oublier que les équations servent à connoître la nature & les proprietez de quelque courbe que ce soit quand elle est géométrique ; c'est à dire qu'elle se décrit d'une maniere réglée & uniforme, desorte qu'elle conserve en toutes ses parties un même raport au regard d'un certain point & d'une certaine ligne droite. Ce qu'il est bon de remarquer ici afin d'avoir une entrée dans les Elemens des lignes courbes.

Pour cela il faut concevoir ce que l'on apel-
39. le *Lieu Géométrique*, On donne ce nom à toute ligne droite ou courbe ou surface, dont tous les points ont un même raport aux points d'une même ligne droite, à l'égard de l'un de ses points. Et cela est fort bien apelé *Lieu*, car par exemple le lieu d'une ligne sont tous les points qui ont un certain raport aux point d'une même ligne droite à l'égard de l'un de ses points. Toute ligne qui passera par ces points ne peut être une autre ligne. Ces raports qui sont les mêmes, se peuvent marquer par une seule équation qui en fait connoître la nature. Car par exemple cette équation $y \,\infty\, \frac{bx}{a}$ fait connoître que c'est le lieu d'une ligne droite. Soit A le commencement d'une ligne infinie AB que je nomme x, où je prens un point tel que B, & j'éléve dessus une ligne BC qui fasse un angle égal à celui qui est proposé, si on en propose un. Je donne aussi à ces deux lignes AB & BC telle grandeur que AB soit à BC, comme a à b deux grandeurs connuës. Ensuite je méne de A à C une ligne infinie;



infinie; aprés quoi il est évident que de quelque point de cette infinie, par exemple de D, que j'abaisse une parallele à BC telle que DE; si je la nomme y, & x la ligne AE, il est, dis-je, évident que $a, b :: x, y$. Par x & y, j'entens des lignes indéterminées, qui toutes auront entr'elles le même raport, sçavoir celui qui est entre a & b ; ce qui se peut exprimer ainsi $y \,\infty\, \frac{bx}{a}$. Car puisque a b :: , x, y ; donc §. n. 15. $y \,\infty\, \frac{bx}{a}$ C'est cette équation qui fait concevoir la nature d'une ligne. La maniere dont on supose qu'elle se décrit, & les raports qu'on supose que les lignes qui la décrivent ont entr'elles conduisent à cette équation lorsqu'on suit un ordre naturel, selon lequel les grandeurs dont il s'agit dépendent les unes des autres.

Les équations où l'on arive en examinant 40.
un Problême de Géometrie, font qu'on distingue les Problêmes en Problêmes ou Lineaires, ou plans, ou solides, selon que l'équation est d'une ou de plusieurs degrez, qu'elle est ou une ligne, ou un plan, ou un solide. Les Problêmes linéaires & les Problêmes plans se résolvent avec la régle & le compas, c'est à dire qu'on les peut construire en ne traçant que des lignes droites & des cercles, comme nous avons vû dans le Chapitre précédent, qu'on peut résoudre les équations d'un & de deux degrez.

Un Problême est un lieu lorsqu'il s'agit de trouver une ligne droite ou courbe, ou une surface, qui aient dans tous leurs points comme nous avons dit, un même raport aux points d'une même ligne droite à l'egard de l'un de ses points. Les Problêmes qui sont des lieux, & les lieux qui sont une ligne droite n'ont rien de dificile. La dificulté & l'utilité de toute cette doctrine des lieux, regardent les seules lignes courbes. Ainsi ce que nous en avons dit sufit pour à present.

41. Remarquons ici que quoique dans un Problême il ne s'agisse que de tirer une ligne droite pour couper par exemple un angle en trois parties; cependant ce Problême peut être solide, c'est à dire que l'equation où l'on arive est de trois degrez sans qu'on la puisse abaisser, & la réduire à une de deux degrez. Alors on ne peut faire la construction de cette équation ou construire ce Problême en traçant seulement des lignes droites & des cercles. Cela ne se peut faire qu'en y emploiant de certaines lignes courbes, comme on le verra en étudiant les Elemens de ces lignes. Voions dans un exemple comme on arrive à une équation de plusieurs degrez, & ainsi ce que c'est qu'un Problême solide.

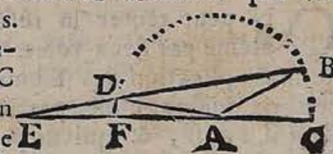
La corde BE de l'arc BCDE est connuë. On propose de couper cet arc en trois parties égales. Selon les premieres régles de la Métode, je supose la chose faite, c'est à dire que BC∝CD∝DE. Je méne CF parallele à DH; ainsi CF∝DH; & partant puisque CG∝DH, CF∝CG, ainsi FCG est un isoscelle. Les angles BCG & BGC sont égaux; car

la mesure de BCG est la moitié de l'arc BK, & celle de BGC est la moitié de KE, plus la moitié de BC ou de DE égal à BC: or BK est égal à KD; donc ces deux angles qui ont même mesure sont égaux; partant le triangle CBG est isoscele. Il a un angle commun avec FCG; ces deux isosceles sont donc semblables. BAC est aussi isoscele, & il a un angle commun avec CBG, sçavoir BCG; ces trois triangles sont donc semblables.

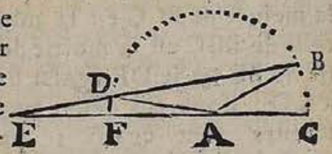
Ces trois triangles BAC, CBG, FCG étant semblables, il faut que ∺ AB, BC, CG, GF, donc si, AB∝1 & BC∝z, selon ce qui a été dit ci-dessus n. 16. ∺ 1, z, zz, zzz, donc FG ∝zzz. Je nomme *b* la ligne connuë BE; or CD∝FH∝BC∝BG∝HE, donc BG+FG+GH+HE est le triple de BC, ainsi il ne s'en faut que la valeur de FG que BE, ou *b* ne soit triple de BC. Or FG∝zzz, donc $b+zzz$∝$3z$, ou zzz∝$3z-b$.

Voila jusqu'où nous pouvons pousser ici ce Problême; mais vous voiez que nous n'avons rien dans les Elemens précedens dont on puisse tirer un moien pour connoître la grandeur inconnuë z, sçachant seulement que son cube zzz est égal à trois fois elle-même, c'est à dire, à $3z$, aprés en avoir retranché la grandeur connuë b. Or cela se peut par le moien d'une certaine ligne courbe.

Ce Problême se résoud aisément par des voies mécaniques. 42.
Soit l'arc BC, mesure de l'angle BAC qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers E le diamétre



CF, & aplicant une régle ſur B, & ſur le prolongement de CF je cherche le point D dans le cercle tel que AD ſoit égal à DE, ce que je trouve en tâtonnant, comme on dit. L'arc DF ſera le tiers de BC, & ainſi DAF le tiers de BAC, ce que je démontre.



ADE & DAB ſont iſoſceles ; donc DBA ꝏ BDA, & DAE ꝏ DEA : l'angle BDA exterieur, eſt égal aux deux interieurs DEA & DAE ; donc DBA eſt égal à ces deux mêmes angles, & par conſequent il eſt double de l'un & de l'autre. L'angle BAC exterieur eſt auſſi égal aux deux interieurs DEA (ou ſon égal DAF) & à DBA, partant il eſt triple de DAE moitié de DBA.

J'aurois pû ajoûter pluſieurs choſes touchant les équations ; mais ce que j'ay dit ſufit, car pour faire uſage de ce qu'on en peut dire de plus, il faut avoir étudié les Elemens des lignes courbes.

CHAPITRE VII.

Eſſais de la métode ſur quelques Problêmes.

43. ON peut tenter la réſolution d'un Problême par deux voies. La premiere n'eſt qu'une aplication des Elemens, qui font découvrir quelque moien particulier au Problême dont il s'agit, & qui ne peut pas ſervir dans un autre. La ſeconde voie eſt l'ordre que preſ-

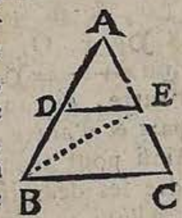
crit la métode que nous enſeignons ici, ſelon laquelle on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend generalement à tout Problême. Donnons un exemple de ces deux voies.

PROBLEME I. 44.

BAC eſt un iſoſcele, on propoſe de couper ſes côtez AB, AC par une parallele à la baſe BC ; deſorte que cette parallele ſoit égale à ce qui reſte des côtez, c'eſt à dire (je ſupoſe la choſe faite) que DB ꝏ DE.

Premiere maniere.

Je ſupoſe la choſe faite, ſavoir que BD ꝏ DE, donc le triangle BDE eſt iſoſcele, ainſi les angles DBE, & DEB ſont égaux : Or les angles CBE & EBD ſont auſſi égaux l. 2. n. 28. partant EBC & EBD ſont égaux ; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DBC. D'où je connois que dans un triangle iſoſcele, tel que BAC, en diviſan en deux l'angle ABC par une ligne droite BE, & menant par E une parallele à BC, elle ſera égale à DB ; ainſi par cette proprieté du triangle iſoſcele, je trouve le moien de réſoudre le Problême propoſé ; mais comme vous voiez, ce moien eſt particulier & propre à ce ſeul Problême.



Seconde maniere.

Supoſant la choſe faite, je nomme AB qui eſt connû, *a* & *d*, la baſe BC, auſſi connuë, & *x*, la grandeur inconnuë AE que l'on cherche ; ainſi comme EC ꝏ $a-x$, auſſi DE ꝏ $a-x$, il eſt évident que a, d :: x, $a-x$, donc $aa-ax$ ꝏ 45.

dx. J'ajoûte de part & d'autre ax, & il vient $aa \propto dx+ax$; je supose $c \propto d+a$, ainsi $cx \propto dx+ax$; & par conséquent au lieu de $dx+ax$, mettant cx j'ai $aa \propto cx$; donc $\div\, c,\ a,\ x$; ainsi il ne s'agit que de trouver une troisiéme proportionnelle aux deux lignes connuës c & a ; ce qu'on a enseigné l. 4. n. 23. Cette séconde maniere analitique est generale, & n'est point particuliere à ce Probléme.

46. PROBLEME II.

Connoître chaque côté du Triangle ABC connoissant la somme de chacun de deux de ses côtez.

Soit $AB \propto x$, & $AB+BC \propto a$, & $AB+AC \propto b$, & $BC+AC \propto c$; alors $BC \propto a-x$, & $AC \propto b-x$. Or $AC+BC \propto c$, donc $a-x+b-x$, ou $a+b-2x \propto c$. Donc ajoûtant $2x$ de part & d'autre, on aura $a+b \propto c+2x$. Otant c de part & d'autre, on aura $a+b-c \propto 2x$.

Ainsi pour trouver la valeur de x, il faut joindre les deux lignes a & b, retrancher du tout la ligne c ; la moitié de ce qui reste sera la valeur de x.

PROBLEME III.

47. a *est un des côtez d'un triangle rectangle,* x *est l'autre côté, dont la diference avec l'hipotenuse est* b, *trouver la valeur de* x.

L'hipotenuse est $x+b$; Donc $aa+xx \propto xx+2bx+bb$, l. 4. n. 71. Otant xx de part & d'autre $aa \propto 2bx+bb$; retranchant encore bb, on aura $aa-bb \propto 2bx$; prenant $cc \propto aa-bb$, s̃. n. 19. on aura $cc \propto 2bx$. Donc $\div\, 2b,\ c,\ x$; il ne s'agit donc que de trouver une troisiéme proportionnelle aux deux grandeurs connuës $2b$ & c.

PROBLEME IV.

a *est l'hipothenuse d'un triangle rectangle,* & b *la diference des deux côtez, trouver ces côtez.* 48.

Soit nommé x le plus petit côté ; donc le plus grand est $x+b$: ainsi $aa \propto 2xx+2xb+bb$. Je retranche bb de part & d'autre, & j'ai $aa-bb \propto 2xx+2xb$, ou $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb \propto xx+xb$. Je mets en la place de $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$, le quarré cc que je lui trouve égal s̃ n. 19. J'ai donc $cc \propto xx+bx$, ou $cc-bx \propto xx$: ainsi $\div\, x+b,\ c,\ x$ On trouvera donc la valeur de x s̃. n. 36.

PROBLEME V.

a *est l'hipothenuse d'un triangle rectangle,* & b *la somme des deux côtez, trouver ces côtez.* 49.

Soit nommé x un de ces côtez ; donc l'autre sera $b-x$: ainsi $aa \propto bb-2bx+2xx$. J'ajoûte $2bx$, ainsi $2bx+aa \propto bb+2xx$. Je retranche encore bb. & j'ai $2bx+aa-bb \propto 2xx$. Je mets dd en la place de $aa-bb$, que j'ai trouvé égal. s̃. n. 19. donc $2bx+dd \propto 2xx$. Je divise le tout par 2, pour cela je cherche cc égal à la moitié de dd, s̃ n. 21. ainsi $bx+cc \propto xx$; donc $\div\, x,c,x-b$. Je puis donc trouver la valeur de x, s̃. n. 36.

PROBLEME VI.

aa *est l'aire ou superficie d'un parallelogramme rectangle,* x *son petit côté,* & x+b *le plus grand ; on cherche ces deux côtez.* 50.

Le produit de x par $x+b$ est l'aire de ce parallelogramme ; donc $xx+xb \propto aa$: ainsi $\div\, x,\ a,\ x+b$. Ce Probléme se résout par conséquent comme le précédent.

PROBLEME VII.

x *est le plus grand côté d'un triangle rectangle : sa diference avec l'hipothenuse est* a, *qui est ainsi* x+a. *La diference de cette hipothenuse avec l'autre côté qui est plus petit qu'elle, est* b ; 51.

ainsi ce côté est $x+a-b$. *On cherche ces trois côtés.*

Les quarrez des deux côtés x & $x+a-b$ sont égaux à celui de l'hipotenuse, laquelle est $x+a$. ainsi $2xx+2ax-2bx-2ba+aa+bb \propto xx+2ax+aa$. J'ajoûte de part & d'autre $2ba$, & j'ai $2xx+2ax-2bx+aa+bb \propto xx+2ax+aa+2ba$ Je retranche de part & d'autre $xx+2ax+aa$;& j'ai $xx-2bx+bb \propto 2ba$. Je retranche $+bb$, & j'ai $xx-2bx \propto 2ba-bb$, prenant d égal à $2b$ & cc égal à $2ba-bb$, j'ai $xx-dx \propto cc$; ainsi $\div\, x\,.\, c\,.\, x-d$. Ce qui se résout aisément, s. n. 36.

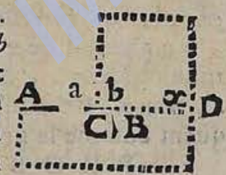
PROBLEME VIII.

52. *b est la perpendiculaire tirée de l'angle droit sur l'hipotenuse d'un triangle rectangle: a est la diference des deux parties ou segmens de l'hipotenuse; trouver ces segmens.*

Soit x le plus petit segment; donc le plus grand sera $x+a$. Or $\div\, x+a,\ b,\ x$, l. 4. n. 28. Donc ce Problême se resout comme on l'a enseigné s. n. 36.

PROBLEME IX.

La ligne AB est coupée dans un de ses points, comme C, on propose de la prolonger jusqu'à D; de sorte que le rectangle fait de AD & de BD
53. *soit égal au quarré de CD.*



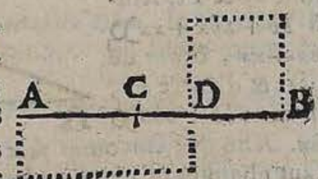
Je supose la chose faite. Soit AC $\propto a$ & CB $\propto b$ & BD $\propto x$. Il est évident que la question se termine à trouver la valeur de BD ou de x; je multiplie AD ou $a+b+x$ par DB, c'est à dire par x, ce qui fait $ax+bx+xx$, lequel produit selon la question est égal au produit de CD ou de $b+x$ multiplié par lui-même;

c'est à dire, que $ax+bx+xx \propto bb+2bx+xx$ j'ôte des deux membres de cette équation $bx+xx$ & il reste $ax \propto bb+bx$, je fais passer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connuë bb reste toute seule & j'ai $ax-bx \propto bb$; pour réduire cette équation aux plus simples termes, je la divise par $a-b$, & alors $x \propto \frac{bb}{a-b}$ laquelle équation se résout dans cette progression $\div\, a-b,\ b,\ x$, dont les deux premiers termes étans connus, le troisiéme que je cherchois, qui est x, me sera aussi connu; ainsi pour faire le Problême il faut prolonger la ligne AB de la grandeur de x qu'on vient de connoître.

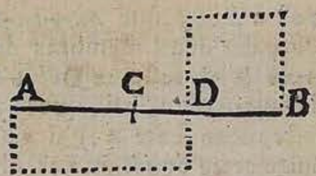
La résolution de chaque Problême, donne la connoissance d'un nouveau Teorême: Car selon ce qui vient d'être prouvé, le quarré de BD, prolongement d'une ligne, plus CB partie de cette ligne, est égal au rectangle fait de AD & de BD, & ce prolongement est le troisiéme terme d'une progression, dont AC−BC est le premier terme, & BC le second. La plus grande partie des Teorêmes sont les fruits de l'Analyse, qui comme vous voiez, est une source féconde de veritez.

PROBLEME X.

La ligne AB est coupée en C: On propose de la couper derechef en D; desorte que le rec- 54.
tangle de AC+CD par CD soit égal au quarré de DB.



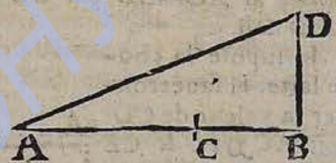
Je supose la chose faite. Il faut trouver la valeur de CD: soit AC $\propto a$, & CB $\propto b$, & CD $\propto x$; ainsi DB $\propto b-x$. Le rectangle de AD par CD est $ax+xx$ & le quarré de DB est $bb-2bx+xx$; donc selon la question $ax+xx \propto bb-2bx+xx$. Je retranche xx de part & d'autre; & $ax \propto bb-2bx$. Je fais passer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu soit seul, $ax+2bx \propto bb$, je divise cette équation par $a+2b$ il vient $x \propto \frac{bb}{a+2b}$ je réduis cette égalité en proportion ∺ $a+2b$, b, x, les deux premiers termes sont connus; donc x le sera aussi, ainsi en prenant sur CB la ligne CD égale à x, on aura fait ce qui étoit requis.



PROBLEME XI.

55. *La ligne droite AB est coupée en C, la ligne BD infinie est perpendiculaire sur AB : il faut de A mener AD une ligne sur BD, de sorte que $AD \propto BC+BD$.*

Je supose la chose faite, & que $AB \propto a$, & $BC \propto b$, & $BD \propto x$, valeur de BD que l'on cherche. Selon la question $AD \propto BC+BD$, partant $AD \propto b+x$. Or puisque l'angle ABD est droit, le quarré de AD ou de $b+x$, lequel quarré est $bb+2bx+xx$ est égal à ceux de AB, & de DB qui sont aa & xx. Ainsi $bb+2bx+xx \propto aa+xx$, ôtant de part & d'autre xx, il vient $bb+2bx \propto aa$. Afin que l'inconnu soit tout d'un côté, faisant changer de place à bb, nous aurons $2bx \propto$

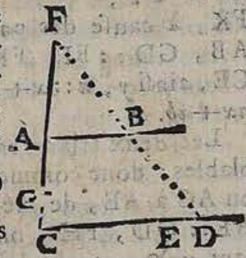


$aa-bb$, que je divise par $2b$, & j'ai $x \propto \frac{aa-bb}{2b}$ laquelle équation se reduit ainsi dans cette proportion $2b$, $a+b$ ∷ $a-b$, x dont les trois premiers termes étans connus, le quatriéme x sera connu : ce que l'on cherchoit.

PROBLEME XII.

Deux lignes paralleles AB & CD, sont données par position avec CF, comme aussi les 56.
points F & E. On propose de mener FD coupant AB & CD prolongées au besoin; de sorte que AB soit à ED comme AF est à AG.

Soit $AF \propto a$, $CF \propto b$, $CE \propto c$, $AG \propto d$, & $AB \propto x$.

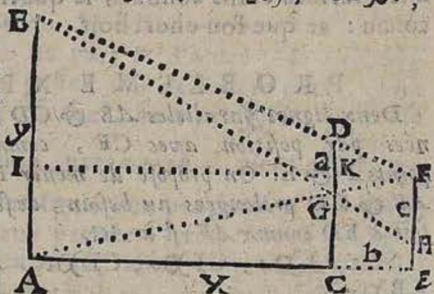


Nous suposons la chose faite : partant selon l'hipotése $a, d : : x$, ED. Multipliant donc x par d, & divisant le produit qui est dx par a, le quotient $\frac{dx}{a} \propto$ ED. Les deux triangles AFB & FCD sont semblables; $a, x :: b$, CD. Or $CD \propto CE+ED$, & partant $CD \propto c+\frac{dx}{a}$ Le produit des extrêmes a & $c+\frac{dx}{a}$ qui est $ac+dx$ est égal à celui des moiens. Donc $ac+dx \propto bx$. Je transporte $+dx$, & vient $ac \propto bx-dx$. Je divise cette équation par $b-d$, & j'ai $x \propto \frac{ac}{b-d}$ laquelle équation se réduit en cette proportion $b-d, c :: a, x$ dont les trois premiers termes sont connus.

PROBLEME XIII.

57. *Meſurer une hauteur inacceſſible AB & ſa diſtance AC par par le moien de deux bâtons CD & EF.*

Je ſupoſe que AC $\propto x$, AB $\propto y$, CE $\propto b$, GD $\propto a$, & FH $\propto c$; alors puiſque les triangles BAF & GDF ſont ſemblables, AB, GD :: FA, FG; mais FA, FG :: FI, FK, à cauſe des paralleles GD, BA, donc AB, GD :: FI, FK, ou leurs égales AE & CE, ainſi $y, a :: x+b, b$, par conſéquent $by \propto ax+ab$.



Les deux triangles BHF & BGD ſont ſemblables; donc comme BD à BF, ou IK à IF, ou AC à AE, de même GD à HF, ainſi AC, AE :: GD, FH, ou $x, x+b :: a, c$, partant $xc \propto ax+ab$; ôtant ax de part & d'autre, il reſte $xc-ax \propto ab$. diviſant l'un & l'autre membre par $c-a$, on a $x \propto \frac{ab}{c-a}$ ainſi $c-a, a :: b, x$. On connoît les trois premiers termes de cette proportion; donc x le quatriéme que l'on cherche ſera auſſi connu.

Puiſque l'on a trouvé ci-deſſus que $by \propto ax+ab$ & $xc \propto ax+ab$; il s'enſuit que $by \propto cx$, étans égaux à la même grandeur $ax+ab$, partant $b, c :: x, y$. Or x eſt déja connu, donc les trois premiers termes étans connus, on con-

noîtra le quatriéme terme y que l'on cherchoit.

PROBLEME XIV.

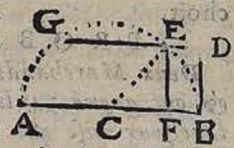
Deux Marchands ont mis en Societé 12 liv. & ont gagné 34 liv. le premier a pris 7 liv. tant pour miſe que pour gain pour deux mois, le ſecond a pris 39 liv. tant pour ſa miſe que pour ſon gain pour cinq mois. On demande la miſe & le gain d'un chacun en pariculier. 58.

La miſe des deux $12 \propto a$. La miſe du premier ſoit x; ainſi celle du ſecond eſt $a-x$.

La miſe & gain du premier eſt $7 \propto b$, donc $b-x$ ſera le gain du premier.

La miſe & gain du ſecond eſt $39 \propto c$, donc $c-a+x$ ſera le gain du ſecond.

Or comme la miſe du premier multipliée par ſon tems eſt à ſon gain; ainſi la miſe du ſecond multipliée par ſon tems eſt à ſon gain; c'eſt à dire, $2x, b-x :: 5a-5x, c-a+x$. Le produit des extrêmes eſt égal à celui de ceux du milieu; donc $2xc-2ax+2xx \propto 5ab-5ax-5bx+5xx$; & ajoûtant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même tems $2xx$, on aura $2xc \propto 5ab-3ax-5bx+3xx$; j'ajoûte de part & d'autre $3ax+5bx$, ce qui me donne $2cx+3ax+5bx \propto 5ab+3xx$. Je ſupoſe que $d \propto 2c+3a+5b$; ainſi $dx \propto 5ab+3xx$; je prens auſſi $f \propto 5ab$, que je retranche de part & d'autre, & j'ay $dx-f \propto 3xx$. Enſuite pour réduire cette équation dans une formule qui me donne la réſolution de la queſtion, je ſupoſe $d \propto 3g$ & $f \propto 3h$; $gx-h \propto xx$, je trouve un quarré égal à h, que je nomme ll, partant $gx-ll \propto xx$; laquelle équation ſe réduit à cette progreſſion $\div g-x, l, x$, car $gx-xx \propto ll$, & par conſéquent $gx \propto ll+xx$, & $gx-ll \propto xx$. Les extrêmes de cette progreſsion sont $g-x$ & x, dont g est la somme. On trouvera leur diference si sur AB ꝏ g ayant décrit le cercle AGB, on éléve perpendiculairement BD ꝏ l, & l'on tire de DG parallele à AB, & du point E la perpendiculaire EF qui coupera AB aux points cherchez. La grandeur inconnuë que l'on cherchoit est x. Or comme dans ce Problême on cherche la valeur de x en nombre, il faut du quarré de CE ou CB, moitié de AB, somme des extrêmes connus, ôter le quarré de FE ꝏ ll aussi connuë, il restera le quarré de CF, moitié de la diference des extrêmes, dont la racine ajoûtée à CB donnera le plus grand; & en étant ôtée, le plus petit x ꝏ ʒ mise du premier; aprés quoy tout le reste est facile.



ECLAIRCISSEMENS.

AVIS.

IL n'y a rien plus capable de rendre une verité sensible que de faire connoître l'erreur qui lui est oposée. C'est pourquoi quand un Auteur, qui s'est trompé l'avouë lui-même, ou qu'on l'en convainc, on peut dire que ses fautes sont avantageuses. On espere que cela se trouvera ici. Les reflexions que mes amis m'ont fait faire sur mon Ouvrage m'ont donné lieu de le critiquer. Je l'ai fait avec la même severité qu'un Adversaire l'auroit fait. Ce sont les critiques que j'ai faites que j'ajoûte ici en forme d'éclaircissemens. Outre les fautes des Imprimeurs, je corrige les miennes. Je me défens en quelques endroits; c'est à dire que je propose les raisons que j'ai euës d'avancer des choses que mes amis ont censurées. Je change l'énoncé de quelques Propositions qui n'étoit pas net. Je substituë en quelques endroits des démonstrations plus exactes ou plus courtes. Comme je me suis fort étendu dans le commencement de ces Elemens pour me rendre plus intelligible, aussi-tôt que mes amis en virent les premieres feüilles, ils me firent aprehender que l'Ouvrage ne devint trop gros: C'est ce qui a fait que j'ai passé trop legerement sur quelques propositions d'Euclide qui me paroissoient moins importantes. J'y remédie ici. Ainsi les fautes que j'ai faites n'empêcheront point qu'on ne puisse retirer *la même utilité de mon Ouvrage que ſi je n'en avoit fait aucune, ce qui n'eſt gueres poſſible. J'ai oublié beaucoup de citations que je croiois qu'on pouvoit ſupléer : C'eſt une faute dans des Elemens ; mais chacun y peut remédier. Comme auſſi, lorſque les conſéquences de la ſupoſition que l'on a faite, ou de la conſtruction de la figure ſont évidentes, il n'étoit pas neceſſaire d'en avertir, & de dire que la choſe eſt vraie par la* ſupoſition *ou par la* conſtruction. *Tout Lecteur attentif s'en aperçoit aiſément : ſi cet oubli eſt une faute, il n'y a plus de remede, cela iroit trop loin. Je vais réparer les autres fautes.*

ECLAIRCISSEMENS *ſur le premier Livre.*

1. PAge 6. *ligne antepenultiéme, liſez :* qu'il faut. *Pag.* 9. *lig.* 11. *liſez :* qui n'eſt pas la plus courte. *Pag.* 10. *lig.* 12. *liſez :* n'étoit pas vrai.

2. *Pag* 14. *n.* 20. *Cette définition du cercle ne convient qu'à la circonference : On le définit ordinairement :* une figure plane terminée par une ſeule ligne ou circonference, au dedans de laquelle il y a un point, d'où toutes les lignes droites menées à la circonference ſont égales. *Je n'ai pas voulu donner ici cette définition, parce que je ne conſidere encore le cercle que comme une ligne, ne devant parler des figures que dans le Livre ſuivant.*

3. *Pag.* 25. *lig.* 6. *liſez :* moitié de BD+DC. *Pag.* 28. *lig.* 29. *liſez :* dont le perpendicule & l'éloignement du perpendicule ſont plus grans. *Pag.* 29. *lig.* 5. *liſez :* BA eſt plus grand que AE celui de DA.

Aprés avoir marqué deux lignes par des lettres, nommant par exemple la premiere AB, & la ſeconde CD, je dis que AB eſt plus grande que CD ; parce que j'entens que la ligne AB eſt plus grande que la ligne CD : quelquefois je dis que AB eſt plus grand que CD, oubliant le nom de lignes qui eſt feminin. Comme auſſi lorſque je joins deux lignes AB & CD en cette maniere AB+CD, ne les conſiderant que comme une ſeule ligne, je dis que AB+CD vaut *au lieu de dire* valent. 4.

Pag. 39. *lig.* 23. *liſez :* arcs. *Pag.* 43. *lig. penultiéme, liſez :* par l'hipotéſe l'oblique. *Pag.* 44. *lig.* 24. *liſez :* ou ſon égale HC. *Pag.* 45. *lig.* 4. *dans la citation il y a* 69. *pour* 60. *lig.* 15. *liſez :* moindre que HC. *Pag.* 46. *lig. ajoûtez :* Euclide liv. III. Prop. 23. *Pag.* 47. *n.* 99. *liſez ainſi l'énoncé de ce Lemme :* deux lignes AB & AK aiant un point commun, ſavoir A : ſi elles s'ouvrent, l'une tournant ſur le point A, la ligne qui joint leurs extrêmitez devient plus grande. *Cela ſe démontre aiſément, aprés que l'on a prouvé que les plus grans angles ont de plus grandes baſes ; mais on n'a point encore parlé d'angles, ainſi il faloit prouver la choſe ſans parler d'angles.* 5.

Pag. 48. *lig.* 3. *liſez :* l'arc GD. *Pag.* 49. *ajoûtez un* C *à l'extrêmité du diamétre GI, qui doit ſe marquer ainſi :* CIABAG. *Lig.* 29. *liſez :* qui eſt entre. *Pag.* 59. *lig.* 17. *liſez :* ſommet de cet angle. 6.

ECLAIRCISSEMENS *ſur le ſecond Livre.*

PAge 62. *marquez un* A *là où la perpendiculaire* E *coupe* BC. *Pag.* 6[illegible]. *lig.* 2. *liſez :* 7.

mais dans la ſuite. *Lig.* 27. *liſez:* definition du Sinus, s̄ n. 25. *Pag.* 67. *lig.* 2. *liſez* : ABC & XBA. *Et lig.* 6. *liſez* : XBA)(BAF. *Pag.* 71. *lig.* 10. *liſez* : des angles DAC & DBC. *Pag.* 77. *lig.* 30. *liſez* : à l'angle FBD. *Pag.* 78. *lig.* 2. *liſez* : le moien. *Pag.* 80. *lig.* 18. *liſez* : Liv. 1. n. 82. *Pag.* 81. *lig.* 11. *liſez* : l'angle DCA. *Lig.* 24. *liſez* : arcs. *Pag.* 82. *lig.* 15. *liſez* : concave BEC. *Lig.* 16. *liſez* convexe BFC. *Ligne* 20. *liſez* : coupe CE *Lig.* 24. *liſez* : +EB−BFC)(O. *Pag.* 85. *lig.* 4. *éfacez* B *qui eſt aprés ce mot* donné. *Pag.* 86. *n.* 77. *j'apelle ici* angles interieurs, *ce que d'autres apellent* internes, *& je nomme auſſi* exterieurs *ce que d'autres apellent* externes. *Pag.* 89. *lig.* 29. *liſez* : ACD étant iſocelle. *Pag.* 93. *lig.* 19. *liſez* : BAC)(EDF. *Pag.* 96. *lig.* 19. *liſez* : BD, CD, BC. *Ligne derniere liſez* : la baſe AC.

7. *Pag.* 97. *il y a pluſieurs fautes d'impreſſion dans cette démonſtration ; au lieu des ſept premieres lignes mettez ceci.* Soient inſcrits ces deux triangles dans les cercles Z & X. Si l'angle ABC eſt plus grand que l'angle DEF, alors l'arc AGC eſt de plus de degrez que l'arc DEF s̄ *n.* 12. Cela étant ainſi 1° ſi le cercle Z étoit égal au cercle X, la corde AC ſeroit plus grande que DF, les plus grans arcs dans les cercles égaux aiant de plus grandes cordes : Or ſi AC eſt plus grande que DF, l'angle ABC doit être plus grand que DEF étant ſoûtenu par un plus grand arc.

2° Si Z eſt plus grand que X, tout cela eſt
8. encore plus évident, puiſque les cordes, &c. *Voyez la ſuite ; mais ligne* 15. *liſez* : +EF. *Les trois dernieres lignes de cette page* 97. *ſont inu-*

tiles ; mettez en leur place : il faut donc que X ſoit plus petit, & par conſéquent que l'arc DHF étant de moins de degrez que AGF, la corde DF ſoit plus petite que AC.

Page 99. *n* 109. *changez ainſi le titre de ce* 8.
Lemme : Les lignes AB & DE paralleles entre les paralleles Z & X ſont égales. *Dans la démonſtration, au lieu que je dis que les angles ABC & DEF ſont égaux par l'hipotéſe. il n'y a qu'à dire qu'ils le ſont*, s̄ *n.* 30. *AB & DE étant paralleles. Il y a une lettre qui manque dans la figure, ſavoir* Z *à l'extrêmité de AD.*

Page 101. *lig.* 7. *au lieu de* s̄ *n.* 14. *liſez* 9.
s̄ *n.* 54. *On a oublié ſous le Teorême quatriéme de mettre* Eucl. I. Prop. 33. *Pag.* 103. *n.* 120. *je ne dis pas tout ce qu'il faut pour achever le quarré ; mais on voit aſſés ce qu'il faut faire. Pag.* 104. *lig.* 3. *liſez* : moins quatre. *Et lig.* 10. *liſez* : ſont égaux à douze angles droits moins quatre. *Pag.* 91. *n.* 93. *j'aurois dû ajoûter dans l'énoncé de ce Teorême :* & ſont entierement égaux, *ſelon qu'on a défini les triangles égaux,* s̄ *n.* 68.

Pag. 117. *n.* 127. *pour preuve que AD)(BC &* 10.
AC)(BD, il n'y a qu'à citer s̄ *n.* 109. *comme cet endroit vient d'être corrigé* s̄ *n.* 8. *car AD & BC, lignes paralleles par l'hipotéſe ſont égales étant entre AC & BD auſſi paralleles par l'hipotéſe, qui par le même raiſonnement ſont auſſi égales.*

Même page, ligne 18. *on dit que* FB)(CE *par l'hipotéſe: ce qui eſt vrai ſelon qu'on a démontré* s̄ *n.* 109. *que les lignes paralleles entre paralleles étoient égales.*

Pag. 109. *n.* 131. *j'aurois dû mettre cet aver-* 11.
tiſſement avant ce Teorême troiſiéme. Lorſque

dans un parallelogramme, on méne un diamétre ou diagonale d'un de ses angles à l'autre angle oposé, & deux autres lignes paralleles aux côtez, qui coupent le diamétre dans un même point, alors ce parallelogramme étant divisé en quatre autres parallelogrammes, les deux par lesquels le diamétre ne passe point, qui sont ici BEFG & DKFH, sont apellez *complémens* ou *suplémens*; & les deux autres par lesquels le diamétre passe, ou qui sont à l'entour dudit diamétre, comme AGFK & CEFH, sont nommez *adjacens.* On apelle *gnomon* l'un des parallelogrames décrits à l'entour du diamétre avec les deux suplémens: Ainsi AGFK+BEFG+FKDH se nomment *gnomon.* C'est un terme dont je ne me sers point.

Pag. 111. *lig.* 27. *lisez* : de Z à X. *Pag.* 112. *lig.* 15. *lisez* : EFGH.

12. *Pag.* 113. *lig. j'ai dit que* BE∝BD+DA, *je n'en ai pas mis la preuve qui saute aux yeux.* Dans BAE, l'angle BAE valant 90. & EBA valant 60. il faut que BEA vale 30. Or DAB vaut 60. ainsi DAC vaut 30. donc EAD ∝AED : ainsi le triangle EDA est isoscelle; par consequent DE∝AD : *je n'ai pas crû devoir être si exact dans ces sortes d'endroits qui sont en lettres italiques : ce sont des choses comme hors d'œuvre. Pag.* 115 *dans la figure lisez* ABFG. *Pag.* 117. *lig.* 11. *lisez* : entre le côté d'un poligone, *au lieu de* entre le cercle d'un poligone.

ECLAIRCISSEMENS. *sur le troisiéme Livre.*

P*Age* 129. *lig.* 31. *lisez* ∝AH. *Pag.* 132.
n. 16. *selon le langage que j'ai tenu dans* 13.
les Elemens des Mathematiques le quarré seroit la
seconde puissance; mais je me corrige, parce que
Mr Arnaud parle autrement avec raison ; car la
puissance d'une ligne est ce qu'elle peut faire étant
multipliée par elle même : ainsi on ne doit pas di-
re avant qu'elle soit multipliée qu'elle soit une
puissance. Neanmoins si l'usage present veut qu'on
parle autrement, j'avoüe que j'ai fait une faute. 14.
Pag. 134. *premiere Proposition, lisez* : Si *b* &
c sont parties de *x*, & Z une autre ligne, les, &c.
Ces dix Propositions d'Euclide seroient sans dou-
te plus évidentes si je les avois acompagnées de
figures; mais outre qu'il est facile de les faire,
comme on le void dans celles qui sont à la page 129.
& 130. *j'ai crû qu'il étoit bon de s'acoûtumer*
à concevoir ces sortes de veritez sans se represen-
ter des figures. Elles ne sont point necessaires ;
car pour comprendre que le quarré de b+d *est égal*
aux quarrez de ses parties, savoir à bb *&* à dd,
plus deux fois le plan de ses parties, c'est à dire
à 2bd; *il sufit que je conçoive que* b+d *multi-*
plié par b+d *produit* bb+2bd+dd, *où je vois*
aussi évidemment & aussi sensiblement que dans
une figure ce qu'il faloit prouver. Je prie qu'on y
fasse reflexion, on verra dans la suite qu'il est
important de s'acoûtumer à se passer de figures,
qui en plusieurs ocasions ne peuvent être que confu-
Pag. 141. *lig.* 26. *lisez* : continuë. *Pag.* 142. 15.
n. 41. *C'est là l'idée que j'ai pû donner ici des*
reciproques ; mais cela ne se peut guéres entendre

que dans les lignes, lorſque deux ſe coupent, par exemple, la premiere Z en ces deux parties A & D, & X la ſeconde en B & C; de ſorte que comme A premiere partie de Z eſt à B premiere partie de X, de même réciproquement ou mutuellement, C ſeconde partie du même X eſt à D ſeconde partie de Z; de ſorte que A, B;:C, D. Ce mot reciproque, *marque ce qui ſe fait mutuellement de part & d'autre.*

Pag. 143. *lig.* 43. *ce que j'apelle ici* permutan-
16. do, *c'eſt ce que d'autres nomment* invertendo, *ou* raiſon inverſe. *lig.* 32. *au lieu de dire :* ces deux grandeurs A & B, *peut-être qu'il faudra dire :* ces mêmes grandeurs ainſi augmentées auront même raiſon entr'elles. *Pag.* 144. *n.* 46. *de même il faudroit dire :* ces deux grandeurs ainſi diminuées auront toûjours la même raiſon. *n.* 47. *liſez :* Eucl. V. Prop. 18. *Pag.* 150. *lig.* 24 *liſez :* donc B†C, B†D : : A, B. *Pag.* 152. *lig.* 7. *il y a un Z Romain pour un z Italique. Pag.* 153. *ligne* 16. *liſez :* eſt doublée, s̃ *n.* 59. *Pag.* 155. *lig.* 25. *liſez :* ſes interprétes. *Pag.* 157. *n.* 75. *ajoûtez à la fin de la démonſtration :* s̃ *n.* 51 car on ſupoſe que la raiſon de A à B eſt la même que celle de C à D. *Pag.* 161. *lig.* 2. *liſez :* ou en raiſon. *Lig. derniere, liſez* C+F.

ECLAIRCISSEMENS *ſur le quatriéme Livre.*

17. P*Age* 173 *n.* 15. *ajoûtez à la fin de cette démonſtration :* donc l. 3. n. 46. AB–AE, AE : : AC–AF, AF. Or AB–AE∝EB; & AC–AF∝FC, donc EB, AE : : FC, AF, permutando AE, EB : : AF, FC. *même page, n.* 16. *énoncez ce Corolaire de cette maniere.* Si l'angle ABD eſt coupé par la moitié par la ligne BC, les ſegmens de la baſe AC & CD, ſeront l'un à l'autre comme les deux autres côtez AB & DB : & ſi cela eſt l'angle ABD eſt coupé par la moitié.

Il faut prouver 1° que AB, BD : : AC, CD. *Le reſte de la démonſtration eſt bien : ajoûtez ſeulement à la fin :* & alternando AB, BD : : AC, CD; ce qu'il faloit prouver en premier lieu.

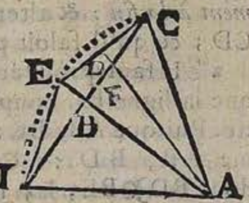
2° Il faut prouver ſi AB, BD : : AC, CD, que la ligne BC coupe l'angle BAD par la moitié. Puiſque AB, BE : : AC, CD, s̃ n. 15. comme AB, BD : : AC, CD, par l'hipotéſe; donc BD∝BE; l. 3. n. 50. donc BDE∝BED, l. 2. n. 85. ABC∝AED, l. 2. n. 30. donc ABC ∝BDE or BDE∝CBD, l. 2. n. 28. donc
ABC∝CBD; ce qu'il faloit prouver. 17.

Page 177. *il manque un* C *à l'extrêmité de la lig. AB de la figure qui eſt à la fin de la page. Pag.* 179. *lig.* 10. *liſez :* & à ABD. *Lig.* 13. *liſés :* l. 2. n. 82. *Pag.* 184. *n.* 34. *dans l'enoncé de ce Lemme, au lieu de* AC eſt une ſécante qui paſſe par le centre; *écrivés,* AC eſt une ligne tirée de C extrêmité de BC, qui coupe le cercle & ſe termine au dedans du cercle, &c. *Car la même choſe arrive, quoique A C ne paſſe pas par le centre du cercle; les deux triangles ACB & BCD ſeront toûjours ſemblables; ainſi* ∺ *A C, BC, DC.*

Pag. 185. *lig.* 18. *on peut faire cette démonſtra-* 19.
tion de cette maniere moins embroüillée : puiſque ∺ AC, BC, CD, s̃ *n.* 34. & que par la conſtruction CH∝CD, ainſi ∺ AC, BC, CH; donc AC–BC, BC : : BC–CH, CH l. 3. n. 46. Or AC–BC∝CH, BC–CH∝BC; donc CH, BC : : BH, CH, permutando BC, CH : :

CH, BH, ou ∸ BC, CH, BH ; ce qu'il faloit démontrer. *Pag.* 189. *lig.* 12. *liſés* : l. 2. n. 143.

20. *Pag.* 193, *n.* 51. *je démontre ce Teorême de cette maniere avec laquelle le Lemme précédent & ſa figure ſont inutiles.*



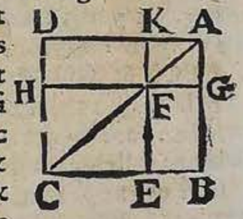
Soit IC la corde de *y* quelque poligone que ce ſoit, EC ou IE eſt la corde d'un autre poligone *z* qui a deux fois plus de côtez. E partage en deux l'arc CEI ; ainſi AE eſt perpendiculaire ſur IC, l. 1. n. 88. je ſupoſe que D eſt la moitié de EC ; ainſi AD eſt encore perpendiculaire ſur EC, l. 1. n. 88. Donc l'angle DAC eſt égal à DAE : or les angles ABF & ADC ſont droits l. 2. n. 17. donc les deux triangles rectangles ABF & ADC ſont ſemblables l. 2. n. 82. ainſi AD, DC :: AB, BF, donc AD, AB :: DC, BF. Soit *x* qui marque combien de fois DC eſt dans le circuit du poligone *z* : je multiplie DC & BF par *x* ; aprés quoi AD, AB :: *x*DC, *x*BF l. 3. n. 52. Or *x*DC eſt le circuit du poligone *z*, dont EC eſt la corde. Il eſt pareillement évident que ſi BF eſt juſtement la moitié de BC, il faut que *x*BF ſoit le circuit du poligone *y* dont IC eſt la corde : mais BF eſt plus petit que la moitié de BC, car BF, FC :: AB, AC, l. 4. n. 16. Donc comme AC raïon eſt plus grand que l'apotéme AB, il faut que BF ſoit plus petit que FC. dont *x*BF eſt moindre que le circuit du poligone *y* dont IC eſt la corde ; ainſi puiſque *x*DC, AD :: *x*BF AB, le circuit du poligone *z* eſt plus petit au régard de ſon apoteme AD que le

le circuit de *y* au regard de ſon apotême AB, ce qu'il faloit prouver.

Je ne démontre ce Teorême que pour les poligones dont l'un a le double des cotez de l'autre : mais cela ſufit ; car en comparant un cercle avec un poligone, ſi le nombre des côtez de ce poligone n'eſt pas pair : comme on ſupoſe que ce nombre eſt indéfini, en concevant qu'on l'augmente ou qu'on le diminuë d'un côté, cela ne fera pas une diference conſiderable. Or on peut toûjours concevoir le cercle comme un poligone qui a deux fois plus de côté que le poligone avec lequel on le compare.

Page 196. *n.* 58. *éfacez* : Et par conſéquent ces complémens ſont ſemblables. *Cette propoſition n'eſt point la vingt-quatriéme du ſixiéme livre d'Euclide, la voici.*

En tout parallelogramme, les parallelogrammes adjacens ou qui ſont au tour du diamétre ſont ſemblables entr'eux, & au parallelogramme entier. 21.



1° AGFK & CEFH ont un angle commun avec ABCD, ainſi ils ſont équiangles. 2° les triangles ABC, AGF, FEC ſont équiangles, comme auſſi ADC, AKF, FHC : donc AG, GF :: AB, BC ; & AG, AF :: AB, AC ; & AF, AK :: AC, AD. De même AK, AG :: AD, AB ; donc AKFG & ABCD ſont ſemblables : De même CEFH & ABCD ſont ſemblables.

Pag. 197. *n.* 59. Si EF ne ſe terminoit pas dans la ligne AC elle ſeroit plus grande ou plus petite ; & alors elle ne ſeroit pas à DC comme AE eſt à AD. 22.

Pag. 199. *lig.* 3. *aprés ces mots* : au quarré de 23.

BC, *ajoûtez* : c'eſt ce qu'on a prouvé s̃ n. 34. *Voiez la correction qu'on a faite en cét endroit. lig.* 29. *liſez* : au rectangle de KG & de KC. *Pag.* 201. *lig.* 2. *liſez* : s̃ *n.* 18. *lig. derniere*: *liſez* eſt CC+2CD+DD. *Pag.* 202. *lig.* 12. *liſez* : aux quarrez des deux autres côtez B & C. *Pag.* 202. *éfacez de l'énoncé du Teoréme ſixiéme ces mots* : ainſi l'autre partie de toute la ligne C ſe peut nommer C−E.

Pag. 203. *lig.* 8. *aprés* 4aa∝dd, *ajoûtez* :
24. Or bb∝dd (ou 4aa) +aa s̃ n. 71. donc bb∝5aa. *Ligne derniere*, *liſez* : eſt égal à cinq fois celui. *Page* 204. *lig.* 23. *liſez* : le quarré de la moitié de Z, de même celui de la moitié de X avec m eſt égal à cinq fois celui de la moitié de X : partant Z, e :: X, n ; dividendo Z−e (ou *a*) *e* :: X−*n* (ou *m*) *n*. Ainſi *a e* :: *m n*, & alternando *a m* :: *e n*.

25. *Pag.* 206. *lig.* 29. *liſez* : ſavoir 1° ABD comme fait. *Pag.* 207. *lig.* 9. *liſez* : s̃ n. 59. *Pag.* 207. *lig.* 28. *liſez* : FGHL. *Pag.* 208 *lig.* 14. *liſez* : s̃. n. 68. *Pag.* 209. *lig.* 3. *liſez* : ABCE & GHIK ſont égaux à BCFD & HIML. *Lig.* 21. *liſez* : ABCE. *Pag.* 210. *lig.* 1. *liſez* : ſont égaux entr'eux par l'hipotéſe ; ainſi les parallelogrammes BDFC, LHIM qui leur ſont égaux l. 2. n. 128. ſeront égaux entr'eux. *Lig.* 21. *liſez* : ABCE, *lig.* 28. *liſez* : AC, AB, BC. *Lig.* 30. *liſez* : n. 30. *Pag.* 211. n. 93. *liſez ainſi l'énoncé de ce Problême.* Problême premier. *Mener par D un point donné dans un des côtes du triangle ABC une ligne*, &c. *Lig.* 20. *éfacez ces deux lignes* ; la même choſe ſe peut démontrer quand le point D ſe trouve
26. entre G & C. *Même page n.* 94. *au lieu de ce Problême qui n'eſt pas dans ſa place, mettez celui-ci.*

Sur une ligne droite donnée AB, décrire une figure rectiligne ABHG ſemblable, & ſemblablement poſée à CEFD une figure rectiligne donnée. Euclid. VI. Prop. 18.

Je réſous en triangles le rectiligne CDFE : Je fais BAH∝D & ABH∝DCF aprés quoi AHB∝CFD : ſur AH je fais le triangle AGH qui a les mêmes angles que CEF ; ainſi tous les angles de ABHG ſont les mêmes que ceux de CDFE ; & comme ces triangles ſont ſemblables, leurs côtez ſont proportionnaux AB, AG :: CD, CE, &c.

Pag. 212. *lig.* 7. *liſez* : diamétre DC, *ou* diagonale DC. *Lig.* 15. *liſez* : ∝BG+KE. *Pag.* 214. *lig.* 10. *liſez* : les poligones réguliers & toutes les figures ſemblables. *Lig.* 11. *liſez* : ou des diamétres. *Lig.* 18. *liſez* : la baſe l. 2. 144. *Lig.* 24. ſavoir de celle.

Ajoûtés à l'énonce du Teorême 27. *n.* 102, que 27.
generalement toutes les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrez de leurs côtez omologues, dont voila la demonſtration.

Soient *x* & *z* deux figures ſemblables : *a* eſt un des côtez de *x*, omologue à *b* côté de *z* ; donc *x* eſt à *z* en raiſon doublée de celle de *a* à *b*. Or les quarrez *aa* & *bb* ſont auſſi en raiſon doublée de celle de *a* à *b* ; donc *x* eſt à *z* comme les quarrez de *a* & de *b*.

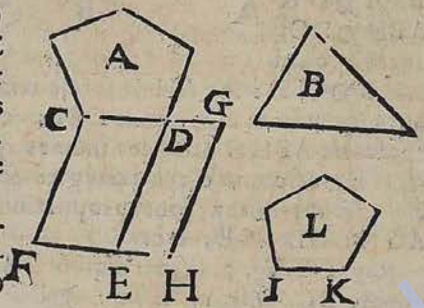
Pag. 215. *n.* 104. *on a changé les figures, car A eſt dit plus petit que X, ou comme* 1 *à* 5. 28.
A la fin de cette page il faut inſerer le Problême

ſuivant qui avoit été mal placé s̃ n. 94. pag. 211. & qui n'avoit pas été réſolu.

PROBLEME IV.

Un rectiligne A étant donné, en faire un qui lui ſoit ſemblable, & qui ſoit égal à B un autre rectiligne donné. Eucl. l. IV. Prop. 25.

Sur CD je fais CE ∝ A, & ſur DG je fais DH ∝ B l. 2. n. 136. & je trouve IK moiēne proportionnelle entre CD & DG s̃. n.



29. ſur IK je fais L ſemblable à A s̃. n. 104. (*comme cet endroit eſt corrigé*) Il faut prouver que L eſt égal à B, & par conſéquent la figure qu'on cherche.

1° A eſt à L en raiſon doublée de CD à IK s̃ n. 100. par conſéquent comme CD à DG, car par l'hipotéſe ∺ CD, IK, DG; ainſi une figure ſur CD eſt à celle ſur IK, comme CD eſt à DG s̃ n. 102. *ſelon la correction précédente*; ainſi A ou CE, L :: CD, DG; mais CD, DG :: CE, DH, & par la conſtruction CE ∝ A & DH ∝ B; dont CD, DG :: A, B; ainſi A, L :: CD, DG :: A, B; par conſéquent L ∝ B, ce qu'il faloit démontrer.

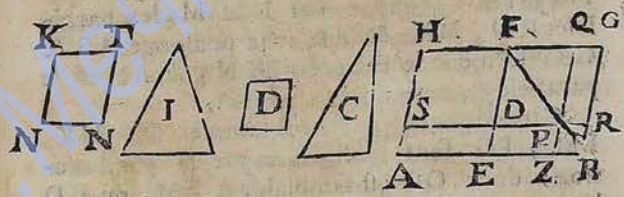
Pag. 216. n. 105. & 106. *on cite deux propoſitions d'Euclide, qui ne ſont point entierement*

les mêmes : voici comme elles ſont dans Euclide avec leurs démonſtrations. Eucl. l. VI. Propoſition 28.

Apliquer à AB une ligne donnée, un parallelogramme égal à C défaillans d'un parallelogramme ſemblable à D. 29.

C ne doit pas être plus grand qu'un parallelogramme fait ſemblable à D & apliqué à la moitié de AB, c'eſt à dire que AF, autrement la choſe ſeroit impoſſible l. 4. n. 95.

1° Coupez AB au point E : ſur EB faites le



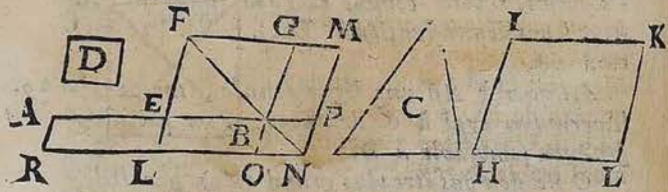
parallelogramme EG ſemblable à D, & égal à C+I.

2° faites NT égal à I, & ſemblable à D ou à EG; ſoit mené le diamétre FB; ſoit pris FO égal à KN, & FQ ∝ à KT; par O & Q ſoient menées les paralleles SR & QZ. le parallelogramme AP eſt ce qu'on cherche.

Car ces parallelogrammes D, EG, OQ, NT, ZR ſont ſemblables entr'eux, & EG ∝ NT+C ∝ OQ+C; par conſéquent C eſt égal au gnomon OPQ ∝ AO+PG ∝ AO+EP ∝ AP, ce qu'il faloit démontrer.

Euclid. l. VI. Propoſition 29.

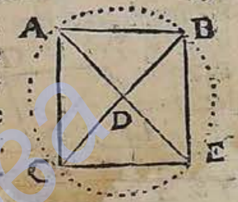
à AB une ligne droite donnée apliquer un parallelogramme égal à C qui excede d'un parallelogramme ſemblable à D. 30.



Soit coupé AB en E, ſur EB ſoit fait EG ſemblable à D; ſoit trouvé HK égal à EG+C l. 4. n. 72. & ſemblable à D ou à EG. Je prolonge FE & FG, deſorte que FLↄIH & FMↄIK. Je méne par L & M les paralleles RN, MN & AR; je prolonge AB & GB; je méne le diamétre FBN, & AN eſt le parallelogramme qu'on cherche.

Car ces quatre parallelogrammes D, HK, LM, EG ſont ſemblables par la conſtruction; donc OP eſt ſemblable à LM, ou à D l. 4. n. 58. De méme LMↄHK par la conſtruction; ainſi LMↄHKↄEG+C, donc LMↄEG+C, donc LM−EGↄC. Or LM −EG eſt égal à BM plus LB+BN ou égal à BL plus AL+BN; Car AEↄEB par l'hipotéſe; donc CↄBL+AL, +BN ou CↄAN, ce qu'il faloit démontrer.

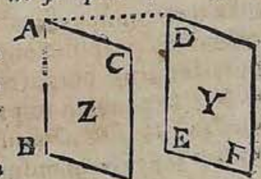
Pag. 224. *n.* 133. Ce Corolaire eſt inutile &
32. ſe doit retrancher; car ſi *a b c* ſont trois lignes commenſurables, leurs produits ne peuvent étre que commenſurables, & je devois avoir mis parmi les propoſitions évidentes que le produit des deux nombres eſt un nombre; ainſi ſi *a b c* ſe peuvent exprimer par nombres; *ac* & *bb*, ou *ab*, *bc* ſe pouvant exprimer par nombres, ſont commenſurables. *Pag.* 225. *lig.* 4. *liſez*: ou qui aient.



Pag. 227 *lig.* 23. *éfacez*: ou e *Même page placez cette figure au n.* 141. *Pag.* 228. *lig.* 26 *liſez*: eſt égal à cinq fois le quarré de BD s̃ *n.* 78. *Pag.* 229. *lig.* 10 *liſez*: incommenſurable avec *b*.

Pag. 231. *lig.* 32. *liſez*: par conſequent le quarré de la corde. *Pag.* 233. *lig.* 5. *liſez*: BC :: BC, DB, donc s̃ n. 12. *Pag.* 234. *lig.* 2. *liſez*: Figure s̃ n. 151. *Pag.* 236. *lig.* 8. *liſez*: faloit; *lig.* 13. *liſez*: 153. même Figure. *Pag.* 241. *lig* 15. *éfacez*: donc le plan de BF par FC eſt égal au quarré de DEC & de BC.

Pag. 242. *lig.* 8. *liſez*: de voir que ED étoit le côté du pentagone, ſi EF eſt. *Pag.* 245. *lig.* 20. *liſez*: alternando. *Lig. penultiéme*, *liſez*: à 2DEq. *Pag.* 246. *lig.* 12. *liſez*: l. 2. n. 52. *Lig.* 27. *liſez*: s̃ n. 103. *Pag.* 247. *lig* 19. *liſez*: une fois plus. *Lig.* 24. *liſez*: une fois. *Pag.* 248. *lig.* 14. *liſez*: une fois. *Pag.* 258. *l.* 1. *aprés ces paroles*, ſera celui qu'on cherche; *ajoûtez*: on ſupoſe que ce plan eſt de niveau; *autrement on ne peut trouver ce point qu'avec une équerre. Les Commentateurs d'Euclide diſent, que de quelque point que ce ſoit hors du plan il faut abaiſſer une perpendiculaire, & enſuite mener par A une ligne qui ſoit parallele à cette perpendiculaire; mais il eſt évident que tout cela ne ſe peut faire ſans équerre:*



Pag. 261. *lig.* 2. *liſez* s̃ n. 12. *Pag.* 263. *n.* 37. *cette Figure a été oubliée.* 34.

Pag. 265. *n.* 42. *on peut auſſi concevoir la for-*

mation de ces prismes par le seul mouvement de la ligne AB toûjours parallele à elle-même, sans qu'il soit besoin d'imaginer les deux plans des bases égaux semblables, & semblablement posez Avant la fin, lisez : Parallelepipede.

Pag. 274. *lig. penultiéme, lisez :* Poligones Y & Z. *Pag.* 279. *lig.* 4. *lisez :* l. 2. 152. *Lig. antepenultiéme, lisez :* Parallelogramme. *Pag.* 281. *lig.* 7. *lisez :* n. 152. *Ligne antepenultiéme,*
37. *lisez :* Au triangle rectangle ABD. *Pag.* 282. *n.* 94. *Prenez garde que par la hauteur de la piramide, j'entens ici le côté de la piramide ou la*
38. *hauteur de sa surface.*

Pag. 283. *n.* 96. *Ce Lemme est mal énoncé ; il faudroit avoir exprimé dans l'énoncé ce que j'ajoûte ensuite que* FG ∝ *AD*, FK ∝ *AC, &c.*

39. *n.* 97. *Je dis que* KL, *MN, HC sont des raïons : il faut plûtôt dire que ce sont des circonferences déploiées, mais cela ne fait point d'erreur; car les raions sont entr'eux comme les circonferences des cercles dont ils sont raions.*

Pag. 285. *ligne derniere, lisez :* & la base est la circonference d'un cercle. *Pag.* 286. *lig.* 2. *lisez :* l. 2. n. 132. *Lig.* 12. *lisez:* n. 43. *Lig.* 13. *lisez :* l. 3. *Lig.* 14. *lisez :* l. 3. *Lig.* 21. *lisez :* fait. *Pag.* 288. *lig.* 2. *lisez : 99. Et lig.* 23. *lisez : 99. Pag.* 289. *lig.* 6. *avant la fin éfacez :* égale. *Pag.* 294. *ligne* 20. *dans ces paroles :* de commune Section, & de ces plans *éfacez* &. *Ligne derniere, lisez :* 3° AB & HE. *Pag.* 295. *lig.* 2. *lisez :* soit qu'elles soient obliques, soit qu'elles soient perpendiculaires. *Lig.* 15. *lisez:* mêmes angles, s̃ n. 36. ainsi. *Pag.* 298. *lig.* 8. *lisez*, :: DE, AB. *Pag.* 299. *lig.* 29. *lisez :* Ainsi si les ; *& lig.* 4. *lisez :* n. 115. *& lig.* 4. *avant la fin*, s̃ n. 79. *& derniere lig. lisez :* Eucl. XII.

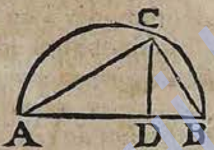
Pag. 302. *lig.* 19. *lisez :* est plus grand que la 40.
moitié de la piramide. *Pag.* 303. *lig.* 6. *lisez :* chacune. *& lig.* 17. *lisez :* la solidité. *& lig.* 28, *au lieu de puisque, &c. lisez :* selon qu'on le supose *aa* ∝ 9 & *bb* ∝ 36. or 18. moien proportionnel entre 9 & 36 est égal à *ab* ; car *ab* est aussi moien proportionnel entre *aa* & *bb*, puisque *aa*, *ab* :: *a*, *b*; & *ab*, *bb* :: *a*, *b* ; ainsi *aa*, *ab* :: *ab*, *bb*, ou ∺ *aa*, *ab*, *bb*, donc selon la régle en multipliant par le tiers de *c*, ces trois termes *aa*, *ab*, *bb* qui sont les mêmes que les trois nombres 9, 18, 36. j'aurai, &c. *Ligne penultiéme, lisez :* *abc*+*bbc*. *Pag.* 304. *lig* 11. *lisez :* n. 144. *Pag.* 306. *lig.* 24. *lisez :* égal à un, *Pag.* 307. *lig.* 16.
lisez : n. 147. 41.

Pag. 307. *n.* 159. *Voila la démonstration de ce qu'on supose ici que* mnn *est la sixiéme partie de la solidité de la sphére.*

1° *mn* est la surface de la sphére s̃ *n.* 101. qui est égale à celle d'un cercle dont *n* est le raion ; ainsi dont la circonference est 2*m*. Or ce cercle est égal à un triangle dont *n* est la hauteur & 2*m* la base l. 2. n. 152. ou, ce qui est la même chose à un rectangle dont *n* est la hauteur, & *m* moitié de 2*m* est la base ; ainsi la surface de ce cercle égal à celle de la sphére dont *n* est le diamétre, est *mn*. 2° *mnn* est la solidité d'un cilindre dont *mn* est la base, & *n* la hauteur. 3° Ce cilindre est le triple d'un cone qui a pour base *mn* & *n* pour hauteur s̃ 146. donc il est six fois plus grand qu'un cone dont *mn* est la base & qui a pour hauteur la moitié de *n*. Or un tel cone est égal à la sphére dont *n* est le diamétre s̃ 158. dont *mnn* est six fois plus grand que la sphére dont *n* est le diamétre, où la ſixiéme partie de *mnn* eſt la ſolidité de la ſphére; ce qu'il faloit démontrer.

Pag. 311. *lig.* 7. *liſez* : bb+cc *Pag.* 313. *lig.*
42. *premiere*, *éfacez* : ce C. *lig.* 8 Euclide XIII.
Prop. 15. *Pag.* 315. *lig.* 13. le quarré de la face. *Pag.* 320. *lig.* 2. *liſez* : eſt égal à cinq fois. *lig.* 18. *liſez* : à angles. *Pag.* 321. *lig.* 15. *liſez* : DG, FL. *Pag.* 322. *lig.* 1. *liſez* : de cinq triangles équilateraux. *Pag.* 324. *lig.* 22. *liſez* : de ſes faces. *Pag.* 324 *lig.* *aprés ces paroles* : qui coupe BC, *ajoûtez* : ſi du centre D on tire DB, je. *Pag.* 328. *où il y a* permutando, *mettez*, alternando. *Lig.* 11. *liſez* : l. 4. n. 154.

Pag. 346. *n.* 21. *Ce que je dis dans cet endroit*
43. *touchant la maniere de trouver un quarré qui ſoit telle partie qu'on voudra d'un quarré donné ſe peut faire plus ſimplement.*



Soit *aa* un quarré donné, il faut trouver un quarré qui en ſoit la cinquiéme partie. Soit AB égal à *a*. Je fais un cercle qui a pour raion la moitié de AB. Je prens BD cinquiéme partie de AB ; & ſur D j'éleve perpendiculairement DC ; & je méne la ligne BC qui ſera le côté ou racine d'un quarré cinquiéme partie de *aa* ; car $\div$ 5BD ou AB, BC, BD l. 4. n. 27. or AB*q* ou *aa*, BC*q* : : 5BD, BD l. 3. n. 70. donc le quarré de BC eſt la cinquiéme partie du quarré *aa*, comme BD eſt une cinquiéme de 5BD.

44. *Pag* 349. *lig.* 5. *liſez* : x−d. *Pag.* 350. *lig.* 22. *liſez* : xx $\propto$ cc−xd. *Pag.* 352. *lig.* 7. *liſez* : +xxaabb. *Lig.* 13. *au lieu de* $2bx+x^3bb+x^4bb \propto$, *liſez* : $+2b^3x^3+x^4bb \propto$.
45.

Pag. 355. *lig.* 3. *liſez* : l. 3. n. 22. & *lig.* 5. *li-*

ſez : Donc l. 4. n. 34. $\div$ *x*, *b*, *y*. *Lig. derniere*, *liſez* FE ou *b*.

Dans les corrections qu'on a faites ci-deſſus, il 48.
s'y eſt même gliſſé des fautes. *Pag.* 377. *lig.* 15. *éfacez ces paroles* : Eucl. l. III. Prop. 23. *ligne derniere au lieu de* Pag. 62 lig. 2. *liſez* : Pag. 65. *Pag.* 378. *lig.* 2. *au lieu de* § n. 25. *liſez* : n. 24. *Pag.* 379. *n.* 10. *au lieu de* Pag. 117. *liſez* : Pag. 108. *Pag.* 382. *n.* 16. *au lieu de* Pag. 143. lig. 43. *liſez* : Page 143. n. 43. *La correction qui eſt à la* 26 *ligne de cette même page* 382. *pour la* 161. *lig.* 2. *n'eſt pas bonne*, *n'ajoûtez point cet* ou. *Pag.* 383 *lig. pénultiéme*, *liſez*, BC−CH $\propto$ BH. *Pag.* 355. *lig.* 3. *liſez* : l. 3. n. 22. *lig.* 5. *liſez* : donc l. 4. n. 34. $\div$ *Derniere lig.* FE ou *b*.

J'avois négligé la premiere Propoſition du quatriéme Livre d'Euclide comme inutile. La voilà.
Acommoder à un cercle une ligne donnée qui 49.
eſt moindre que le diamétre de ce cercle. *Il ſufit d'ouvrir le compas de la grandeur de cette ligne ; & en ayant pointé une jambe dans la circonference du cercle, l'autre jambe marquera un ſecond point dans la même circonference, entre leſquels ayant mené une ligne droite ce ſera une corde égale à la ligne donnée. On a vû que le diamétre du cercle eſt la plus grande ligne qu'on puiſſe concevoir dans le cercle.*

Afin qu'il ne reſte aucunes pages blanches, je mettrai ici au long le Teorême douziéme, de la Section III. du Livre II. j'en ai corrigé § n. 7. les fautes qui étoient ſurvenuës dans l'impreſſion en grand nombre; mais il ſera plus facile de la voir ici en toute ſon étenduë. Euclide démontre cette Propoſition par une voie aſſez longue & peu agreable qui eſt la ſuperpoſition; *c'eſt à dire que pour démontrer ce Teo-*

rême, il veut qu'on conçoive que les deux triangles qu'on compare ſoient poſez l'un ſur l'autre. C'eſt une voie qu'il ne faut prendre que quand il ne s'en preſente point d'autre, celle dont je me ſers eſt fort aiſée.

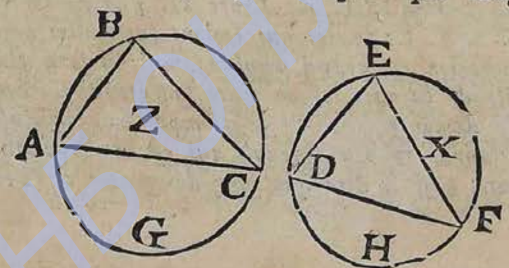
TEOREME XII.

50. *AB)(DE & BC)(EF. Si l'angle ABC eſt plus grand que DEF, la baſe AC ſera plus grande que DF, & ſi la baſe AC eſt plus grande que la baſe DF, l'angle ABC eſt plus grand que DEF.* Eucl. I. Prop. 24. & 25.

Soient circonſcrits deux cercles Z & X à ces deux triangles ABC & DEF. Si l'angle ABC eſt plus grand que l'angle DEF, alors l'arc AGC eſt de plus de degrez que l'arc DEF 3 *n.* 12. Cela étant ainſi, 1° ſi le cercle Z étoit égal au cercle X, la corde AC ſeroit plus grande que DF, les plus grands arcs dans les cercles égaux aiant de plus grandes cordes : Or ſi la corde AC eſt plus grande que la corde DF, l'angle ABC doit être plus grand que DEF étant ſoûtenu par un plus grand arc.

2° Si Z eſt plus grand que X, tout cela eſt encore plus évident, puiſque les cordes de mêmes degrez ſont plus grandes dans les plus grands cercles l. 1. n. 30.

3° Or le cercle Z eſt neceſſairement plus grand que X, puiſqu'on ſupoſe que l'angle



ABC eſt plus grand que DEF, & que AB)(DE & BC)(EF : Car ainſi AB+BC)(DE+EF ; par conſequent ſi X étoit plus grand que Z, les arcs DE & EF ſeroient de moins de dégrés que les arcs AB & BC l. 1. n. 95. ainſi l'arc DHF ſeroit de plus de dégrés que l'arc AGC, ce qui ne peut pas être, puiſqu'on ſupoſe l'angle ABC plus grand que l'angle DEF, il faut donc que X ſoit plus petit, & par conſequent que l'arc DHF étant de moins de dégrés que AGF, la corde DF ſoit plus petite que AC.

Je me ſuis aperçû que j'ai oublié la XXII. 51.
Propoſition du XI. Livre d'Euclide, la voici : S'il y a trois angles plans, deux deſquels pris comme on voudra ſoient plus grans que l'autre ; & ſi les lignes qui comprennent ces angles ſont égales, les lignes droites qui joignent ces lignes égales, peuvent faire un triangle. *Cela eſt évident ; car deux de ces trois lignes priſes enſemble ſeront neceſſairement plus grandes que la troiſiéme quelle qu'elle ſoit. Or de trois lignes, dont deux enſemble ſont plus grandes que la troiſiéme, on peut faire un triangle.* l. 2. n. 70.

FIN.

TABLE

DES PROPOSITIONS DES ELEMENS d'Euclide, avec les lieux où elles se trouvent dans cet Ouvrage. Le premier chifre marque les Propositions d'Euclide. Le second, qui est un chifre Romain, indique le Livre de cét Ouvrage où elles se trouvent : Et le troisiéme, dans quel nombre de ce Livre. Si au lieu d'un chifre Romain il y a une étoile comme celle-ci * la Proposition est dans les éclaircissemens. Les VII. VIII. & IX. Livres d'Euclide ne regardent que les nombres dont il ne s'agit pas dans la Geométrie. On ne les cite presque jamais, non plus que le X. Livre; Ainsi on n'a pas crû qu'il fût utile de raporter les Propositions de ces Livres, comme on l'a dit ailleurs.

EVCLIDE LIVRE PREMIER.

EVCLIDE LIVRE SECOND.

EVCLIDE LIVRE TROISIEME.

1.	I.	87.	18.	I.	104.
2.	I.	78.	19.	I.	106.
3.	I.	88.	20.	II.	48.
		89.	21.	II.	47.
4.	I.	90.	22.	II.	113.
5.	I.	73.	23.	I.	96.
6.	I.	74.	24.	I.	29.
7.	I.	98.	25.	I.	86.
8.	I.	97.	26.	II.	49.
9.	I.	100.	27.	II.	50.
	I.	102.	28.	I.	94.
10.	I.	85.	29.	I.	
11.	I.	75.	30.	I.	81.
12.	I.	76.	31.	II.	51.
13.	I.	77.			52.
14.	I.	91.			53.
15.	I.	92.	32.	II.	44.
		93.	33.	II.	56.
16.	I.	104.	34.	II.	55.
		107.	35.	IV.	64.
	II.	36.	36.	IV.	65.
17.	I.	100.	37.	IV.	67.

EVCLIDE LIVRE QVATRIEME.

1.	*	49.	7.	II.	125.
2.	II.	99.	8.	II.	124.
3.	II.	100.	9.	II.	126.
4.	II.	101.	10.	IV.	152.
5.	II.	74.			154.
6.	II.	123.	11.	IV.	161.

12.

12.	IV.	163.	15.	IV.	146.
13.	IV.	164.	16.	IV.	166.
14.	IV.	165.			

EVCLIDE LIVRE CINQVIEME.

1.	III.	72.	14.	III.	82.
2.	III.	73.	15.	III.	83.
3.	III.	74.	16.	III.	44.
4.	III.	75.	17.	III.	49.
5.	III.	76.	18.	III.	47.
6.	III.	77.	19.	III.	46.
7.	III.	78.	20.	III.	84.
8.	III.	79.	21.	III.	85.
9.	III.	50.	22.	III.	86.
10.	III.	80.	23.	III.	87.
11.	III.	51.	24.	III.	88.
12.	III.	48.	25.	III.	67.
13.	III.	81.			

EVCLIDE LIVRE SIXIEME.

1.	IV.	84.	13.	IV.	29.
2.	IV.	15.	14.	IV.	90.
3.	IV.	16.	15.	IV.	91.
4.	IV.	9.	16.	IV.	56.
5.	IV.	11.		IV.	57.
6.	IV.	12.	17.	IV.	60.
7.	IV.	13.	18.	*	26.
8.	IV.	27.	19.	IV.	83.
9.	IV.	22.	20.	IV.	100.
10.	IV.	20.	21.	IV.	10.
11.	IV.	23.	22.	IV.	86.
12.	IV.	24.	23.	IV.	88.

S

24.	*	21.	29.	*	31.
25.	*	28.	30.	IV.	35.
26.	IV.	59.	31.	IV.	87.
27.	IV.	95.	32.	IV.	14.
28.	*	29.	33.	IV.	48.

EVCLIDE LIVRE ONZIEME.

1.	V.	7.	21.	V.	66.
2.	V.	8.	22.	*	51.
3.	V.	10.	23.	V.	67.
4.	V.	19.	24.	V.	118.
5.	V.	21.	25.	V.	119.
6.	V.	29.	26.	V.	68.
7.	V.	14.	27.	V.	112.
8.	V.	29.	28.	V.	116.
9.	V.	35.	29.	V.	121.
10.	V.	36.	30.	V.	121.
11.	V.	18.	31.	V.	121.
12.	V.	22.	32.	V.	120.
13.	V.	23.	33.	V.	149.
14.	V.	33.	34.	V.	154.
15.	V.	37.	35.	V.	69.
16.	V.	34.	36.	V.	156.
17.	V.	38.	37.	V.	157.
18.	V.	31.	38.	V.	25.
19.	V.	30.	39.	V.	117.
20.	V.	64.	40.	V.	124.

EVCLIDE LIVRE DOVZIEME.

1.	IV.	102.	4.	V.	143.
2.	IV.	103.	5.	V.	130.
3.	V.	142.	6.	V.	130.

7.	V.	140.	13.	V.	128.
8.	V.	151.	14.	V.	126.
9.	V.	155.			135.
10.	V.	146.			148.
11.	V.	126.	15.	V.	155.
		148.	16.	V.	164.
12.	V.	150.	17.	V.	165.
		152.	18.	V.	168.

EVCLIDE LIVRE TREIZIEME.

1.	IV.	78.	12.	IV.	149.
2.	IV.	80.			168.
3.	IV.	81.	13.	V.	170.
4.	IV.	82.	14.	V.	174.
5.	IV,	36.	15.	V.	171.
6.	IV.	143.			172.
7.	IV.	171.	16.	V.	185.
8.	IV.	156.			189.
9.	IV.	157.	17.	V.	179.
10.	IV.	167.			180.
11.	IV.	173.	18.	V.	191.

EVCLIDE LIVRE QVATORZIEME.

1.	V.	194.	5.	V.	196.
2.	IV.	79.	6.	V.	197.
3.	V.	190.	7.	V.	198.
4.	V.	192.	8.	V.	175.

EVCLIDE LIVRE QVINZIEME.

FIN DE LA TABLE.